UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN E INNOVACION

PROGRAMA: MATEMÁTICA
AREA: MATEMÁTICA PURA

# INFORME FINAL

# EXISTENCIA DE INTEGRALES PRIMERAS HOLOMORFAS PARA FOLIACIONES DE CODIMENSIÓN MAYOR A DOS

RESPONSABLE: Mg. José Luis Condori Condori

AYACUCHO - PERÚ

2015

# AGRADECIMIENTO

*Agradezco al Instituto de Investigación de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga por el apoyo financiero a la presente investigación*

# Índice general

# RESUMEN

En esta investigación estudiamos la existencia de integrales primeras convergentes para foliaciones de codimensión mayor a dos, extendiendo el resultado formal del Teorema de Frobenius singular formal con la construcción del algoritmo de Godbillon-Vey. Realizamos un estudio teórico de las foliaciones, explosiones y teoremas de integrabilidad de Frobenius. La existencia de integrales primeras permite entender la topología de las hojas de la foliación

# Abstract

In this research we study the existence of convergence first integrate for foliations with codimension bigger than two, we extended the formal research of singularities of Frobenius theorem with the construction of Godbillon-Vey algorithm. We do the theoric study of foliations, blowup and theorems of Frobenius´integrable. The existence of firts integrate allows us to understand the topology of leaves foliations.
Keywords: foliations, first integrate convergence

# INTRODUCCIÓN

El Informe Final de la investigación 2015 "Existencia de integrales primeras holomorfas para foliaciones de codimensión mayor a dos" tiene el propósito de presentar de manera completa el llamado Teorema de Frobenius, pero extendiendo los resultados a las integrales primeras holomorfas para foliaciones de codimensión mayor a dos.

En la parte de la revisión literaria presentamos el contexto de las foliaciones, explosiones, los campos vectoriales y el dual de las 1-formas diferenciales y el importante teorema de Briot-Bouquet.

En la parte de los resultados nos centramos en lograr demostrar la existencia de las integrales primeras para foliaciones de codimensión mayor a dos, bajo las siguientes inferencias: por el algoritmo de Godbillon-Vey construimos formalmente la existencia de una integral primera formal, la hipótesis de la codimensión mayor a dos proviene de los teoremas del álgebra conmutativa de Rham-Saito; presentamos la conversión de una integral primera formal e holomorfa para puntos simples y foliaciones de dimensión dos; aplicando resultados de explosiones se logra el resultado que deseamos.

José Luis Condori C.

# Capítulo 1

# REVISION DE LITERATURA

En la presente revisión de literatura comenzamos por presentar las foliaciones complejas, que es el ambiente donde investigamos las 1 formas integrales. También introducimos las explosiones, los campos de planos, y finalmente el importante teorema de Briot-Bouquet. Hemos consultado varias bibliografías. Para las equivalencias del Teorema de Frobenius consultamos el segundo capítulo y el apéndice de [1], profundizando en [3] otras deducciones del teorema anterior.

## 1.1. Conceptos de foliaciones complejas

Presentamos las ideas estándares de la Teoría de Foliaciones Complejas, aunque comenzó en el contexto de los números reales. Enunciamos las placas de las foliaciones, ejemplos clásicos de las foliaciones, las equivalencias de foliaciones, las foliaciones singulares, la explosión, etc.
Veremos en este estudio la interrelación de un conjunto de ideas de la Topología Diferencial, Análisis Complejo de Varias Variables y la Geometría Algebraica Compleja. También describimos el fenómeno de la explosión en un punto singular de una foliación.
Ahora definimos la foliación compleja, que es central en el estudio de Sistemas Dinámicos Complejos, y en nuestra investigación.

### 1.1.1. Foliaciones complejas

Existen dos tipos de foliaciones, las llamadas foliaciones regulares y las foliaciones singulares. Nos centramos en la primera de ellas, donde el conjunto singular dado es vacío.

Entendemos una **variedad compleja $M$ de dimensión m y clase $C^{\infty}$**, como un espacio topológico de Hausdorff, de base enumerable y conexo, que localmente es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{C}^m$; además, los cambios de coordenadas son difeomorfismo de clase $C^{\infty}$ en abiertos de $\mathbb{R}^{2m}$.

Podemos definir la foliación en la variedad compleja dada.

**Definición 1.** *Sea $M$ una variedad compleja de dimensión $m$ y clase $C^{\infty}$. Una **foliación de clase** $C^r$ $(0 < r \leq \infty)$**y dimensión** $n$ $(0 < n < m)$ de $M$, denotada por $\mathcal{F}$, es un atlas maximal con las siguientes propiedades:*

a) *Si la carta $(U, \phi) \in \mathcal{F}$, con $U$ abierto en $M$, entonces $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$, donde $U_1$ y $U_2$ son polidiscos abiertos y centrados en el origen de $\mathbb{C}^n$ y de $\mathbb{C}^{m-n}$, respectivamente.*

b) *Si $(U, \phi)$ y $(V, \psi)$ son dos cartas de la foliación $\mathcal{F}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas será de clase $C^r$ y es dada por $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \bigcap V) \to \psi(U \bigcap V)$ bajo la siguiente regla*

$$\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)),$$

*donde $h_1 : \phi(U \cap V) \to \mathbb{C}^n, h_2 : \phi(U \cap V) \to \mathbb{C}^{m-n}$ son funciones de clase $C^r$.*

Existen otras dos formas equivalentes de foliaciones regulares, con las submersiones locales y las formas locales y numerables de cada hoja.

Describamos las placas de las foliaciones. Sea la siguiente situación, sea una carta local cualquiera de la foliación $(U, \phi)$ de $\mathcal{F}$ tal que la imagen $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$ está dada como el producto de dos polidiscos $U_1, U_2$. Las preimágenes de la forma $\phi^{-1}(U_1 \times \{c\}) \subset U$, $c \in U_2$ son llamadas **placas de $\mathcal{F}$**, ellas rápidamente verifican ser subvariedades conexas de dimensión n y clase $C^r$ de M, pero no necesariamente mergulladas.

Un **camino de placas de** $\mathcal{F}$ es una secuencia finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de placas de $\mathcal{F}$ tal que los respectivos dominios indexados $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo los valores $j \in \{1, \ldots, k-1\}$. Definimos en la foliación $\mathcal{F}$ la siguiente relación de equivalencia en $M$:

Sea dos puntos cualesquiera $p, q \in M$, definimos la relación binaria $p\,\mathcal{R}\,q$ si existe un camino de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ con $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$. Las clases de equivalencia de la relación $\mathcal{R}$ son llamadas **hojas de** $\mathcal{F}$, es decir, una hoja de la foliación es de la forma

$$\mathcal{F}_p = \{q \in M | \text{ existen placas } \alpha_j = 1, \ldots k \text{ tal que } p \in \alpha_1, q \in \alpha_k, \alpha_1 \cap \alpha_k \neq \emptyset\};$$

se puede decir que la hoja que pasa por $p$ es el conjunto de todas las placas que se intersectan unas a continuación de otras, donde $p \in M$.

Toda hoja de $\mathcal{F}$ tiene las siguientes propiedades topológicas: es conexo (unión no vacía de placas), conexo por caminos (cada placa es conexo por caminos y jusxtaponemos los caminos en cada placa) y posee una estructura de variedad $C^r$ de dimensión n, que es la dimensión de la foliación $\mathcal{F}$; la estructura de variedad se deduce tomando constante $y = c$ y considerar el cambio de coordenadas

$$\psi \underbrace{\phi^{-1}(x, c)}_{\in\, placa} = (h_1(x, c), h_2(c)), x \in \phi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^n.$$

También por el hecho que las hojas de $\mathcal{F}$ son clases de equivalencias, tenemos las siguientes afirmaciones:

- Si $p$ y $q$ son dos puntos de M, entonces, $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_q$.
- $M = \bigcup_{p \in M} \mathcal{F}_p$, unión disjunta.
- Cada $\mathcal{F}_p$ es una subvariedad de M, no necesariamente mergullada.

A continuación proponemos los siguientes ejemplos, tanto en el caso de las foliaciones reales y complejos.

**Ejemplo.** Sea $M = \mathbb{R}^2$ el plano real que es una variedad real de dimensión dos y variedad compleja de dimensión uno, y sea la proyección canónica $f(x, y) = x$, tenemos una foliación [ real ] de dimensión 1 y las hojas de esa foliación son las rectas verticales en $\mathbb{R}^2$, por la razón que $id^{-1}(x, c) = (x, c)$, fijando c. Cada placa se convierte en una hoja. Las rectas verticales son conexas, conexas por caminos y son subvariedades mergulladas en el plano cartesiano.

En general, si $f : M \to N$ es una submersión de variedades sobre $N$. Por la forma local de las submersiones, existen cartas locales $(U, \phi)$ en M y $(V, \psi)$ en N tal que $\psi \circ f\phi^{-1}$ coincide con la segunda proyección $(x, y) \to y$. Luego, las cartas locales $(U, \phi)$ definen una estructura de variedad foliada en el dominio M, donde las hojas son las componentes conexas de las superficies de nivel siguiente $f^{-1}(c)$, para $c \in N$.

Con estas ideas corrientes, deduzcamos la conocida foliación de Reeb.

2

**Ejemplo** Sea la foliación en el sólido cilindro sin ningún borde, $M = D^2 \times [0, 1]$, donde $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ es la bola abierta en el plano real. Primero se considera la submersión $f : D^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r) \exp x_3$, donde $\alpha(r) = \exp[-\exp 1/(1 - r^2)]$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; la submersión se debe a En $D^2 \times [0, 1]$ identificamos los puntos del borde de manera siguiente: $(x_1, x_2, 0) \equiv (y_1, y_2, 1)$ si y solamente si $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, de esta manera se obtiene una equivalencia en el cilindro; se deduce un toro. Entonces la foliación de las superficies de nivel, que son los gráficos de $x_3 = \exp 1/(1 - r^2)$, inducen una foliación en $D^2 \times \mathbb{R}$ llamada la foliación de Reeb.

### 1.1.2. Explosión

Definamos inicialmente lo que viene a ser la explosión en $\mathbb{C}^2$ en el origen de coordenadas $0 = (0, 0)$ del plano complejo. Concepto que va a ser utilizado para explotar la foliación en los llamados puntos singulares de la foliación, $Sing\,(\mathcal{F})$. Sea $\mathbb{C}P(1)$ el espacio proyectivo de dimensión compleja 1, es decir, el conjunto de las rectas pasando por el origen $0 \in \mathbb{C}^2$, y las coordenadas de ella, las dos aplicaciones homeomorfas siguientes:

$$\alpha_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P(1), \alpha_1(t) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = tx\} = [x : y] = [1 : t]\},$$

$$\alpha_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}P(1), \alpha_2(u) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x = uy\} = [x : y] = [u : 1]\}.$$

Obsérvese que el cambio de coordenadas asociadas a un punto de $\mathbb{C}P(1)$ está dada por $tu = 1$; luego, está verificada que $\mathbb{C}P(1)$ es una variedad compleja de dimensión uno.

Denotemos algunos elementos del espacio proyectivo, sea $p = (p_1, p_2) \neq 0 \in \mathbb{C}^2$, $0p$ simboliza la recta que pasa por el origen y el punto $p$ en $\mathbb{C}^2$. $0x$ el eje $X$, $0y$ el eje $Y$.

**Definición.** La explosión de $\mathbb{C}^2$ en el origen $0 \in \mathbb{C}^2$ es el subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$ dada por

$$\mathbb{C}_0^2 = \{(p, 0p), p \neq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{C}P(1)).$$

Lo que hace la explosión es reemplazar $0 \in \mathbb{C}^2$ por el espacio proyectivo $\mathbb{C}P(1)$. Justifiquemos que la explosión $\mathbb{C}_0^2$ es una superficie compleja:

Sea la aplicación $\eta : \mathbb{C}_0^2 \to \mathbb{C}P(1)$ llamada proyección continua y dada de la siguiente forma $\eta(p, 0p) = 0p$, $\eta(0, 0p) = 0p$. Sean los conjuntos abiertos en $\mathbb{C}P(1)$,

$$V_1 = \mathbb{C}P(1) - \{0y\}, \quad V_2 = \mathbb{C}P(1) - \{0x\}.$$

Calculemos $\eta^{-1}(V_1) = \{(p, 0p), \vee(0, 0p) : p_1 \neq 0\}$; ahora, calculemos $\eta^{-1}(V_2) = \{(p, 0p) \vee (0, 0p) : p_2 \neq 0\}$; estos van a ser los abiertos coordenados de la variedad $\mathbb{C}_0^2$. Definamos las cartas $\beta_i : \eta^{-1}(V_i) \to \mathbb{C}^2$(i=1,2).

$\beta_1(p, 0p) = (p_1, \alpha_1^{-1}(0p))$, $\beta_1(0, 0p) = (0, \alpha_1^{-1}(0p))$ $\beta_2(p, 0p) = (\alpha_2^{-1}(0p), p_2)$, $\beta_2(0, 0p) = (\alpha_2^{-1}(0p), 0)$; y tenemos el siguiente diagrama del cambio de coordenadas

$$\begin{tikzcd}
 & \eta^{-1}(V_1 \cap V_2) \arrow[dl, "\beta_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & \\
\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \arrow[rr, "\beta_2 \circ \beta_1^{-1}"'] & & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

De donde deducimos que $\beta_2 \circ \beta_1^{-1}(x,t) = (\frac{1}{t}, xt) = (u,y)$. Una proyección importante es $\phi_0 : \mathbb{C}_0^2 \to \mathbb{C}^2$ dada por $\phi_0(p, 0p) = p, \quad \phi_0(0, 0p) = 0$. Escrita en coordenadas tenemos $\phi_0(x,t) = (x, xt), \phi_0(u,y) = (uy, y)$. Lo que implica que $\phi_0$ es holomorfa. Además por la forma de estas reglas de correspondencias y como $\phi_0^{-1}(0,0) = CP(2)$, entonces la restricción $\phi_0 : \mathbb{C}_0^2 - CP(2) \to \mathbb{C}^2 - (0,0)$ es un biholomorfismo. De esta manera entendemos que se reemplaza el punto $(0,0)$ por el espacio proyectivo $CP(2)$.

Veamos algunos resultados que involucran varias nociones de formas diferenciales, campos vectoriales y foliaciones. Ellas son resumidas en el llamado Teorema de Frobenius.

## 1.2. Nociones básicas

Enunciamos algunas definiciones de campos vectoriales. Sean X,Y dos campos de vectores en una variedad M de dimensión n, donde X es de clase $C^2$, Y de clase $C^1$. Denotamos por $X_t$ el flujo de X definido en $\mathbb{R} \times M$. Fijado $p \in M$ y $t \in \mathbb{R}$ el vector

$$v(t) = X_t^*(Y)(p) = DX_{-t}(X_t(p)) \cdot Y(X_t(p))$$

es tangente a M en p, luego, $t \to v(t)$ es una curva de clase $C^1$ en $T_pM$.

El corchete de Lie entre los campos X e Y es el campo de vectores $[X,Y]$ definido en M por

$$[X,Y](p) = \frac{dv}{dt}(0).$$

Dado un campo de k-planos P en M, diremos que **el campo de vectores X es tangente** a P si $X(q) \in P(q)$ para todo $q$ en el dominio de X.

Un campo de k-planos P de clase $C^r (r \geq 1)$ es llamado **involutivo** si dados $X, Y$ campos de clase $C^1$ tangentes a P entonces $[X,Y]$ es tangente a P.

Diremos que P es **completamente integrable** si existe una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión k y clase $C^r$ en M tal que $T\mathcal{F} = P$, donde $T\mathcal{F}$ es el campo de planos tangente a $\mathcal{F}$.

Con estas definiciones presentamos la primera versión del Teorema de Frobenius como sigue.

**Teorema 1.** *Sea $P$ un campo de k-planos de clase $C^r$, $(r \geq 1)$ definido en $M$. Entonces $P$ es completamente integrable si y sólamente es involutivo.*

*Además si se cumple la equivalencia la foliación tangente a $P$ es única.*

Dejamos la prueba de la equivalencia para el informe final. Nos centramos en la segunda versión del teorema.

## 1.3. Campos de planos

Un campo de k-planos en una variedad M es una aplicación $P$ que asocia a cada punto $q \in T_qM$ un subespacio vectorial de dimensión k de $T_qM$.

Un campo de 1-plano se le llama un **campo de líneas**. Por ejemplo sea $X$ un campo de vectores sin singularidad en M, podemos definir un campo de líneas P en M haciendo $P(q) = \mathbb{R} \cdot X(q)$, un subespacio de dimensión uno de $T_qM$ generado por $X(q)$.

Diremos que un campo de k-planos P en M es de clase $C^r$ si para todo $q \in M$ existen k campos de vectores $C^r$, $X^1, \ldots, X^k$ definidos en una vecindad V de $q$ tal que para todo $x \in V$ se tiene que $\{X^1(x), \ldots, X^k(x)\}$ es una base de $P(x)$.

Un hecho relevante en foliaciones es la siguiente proposición.

**Proposición 1.** *Toda foliación $\mathcal{F}$ de dimensión k y clase $C^r$, $r \geq 1$, en M, define un campo de k-planos de clase $C^{r-1}$ en M, el cual será denotado por $T\mathcal{F}$.*

**Prueba** Sea $P(x) = T_x\mathcal{F}$ el subespacio de $T_xM$ tangente en x a la hoja que pasa por x. Dado $x_0 \in M$, sea $(U, \varphi), x_0 \in U$, una carta local distinguida de $\mathcal{F}$. Se comprueba que para todo $x \in U$ $P(x)$ es el subespacio generado por los vectores $\partial_i(x) = (D\varphi(x))^{-1}(e_i), i = 1, \ldots, k$, siendo los $e_i$ vectores canónicos de $\mathbb{R}^n$. ■

Se dice que un campo de planos P es involutivo si dados dos campos de vectores $X, Y$ tal que para todo $q \in M$ si se cumple $X(q), Y(q) \in P(q)$ entonces el corchete de Lie $[X, Y](q) \in P(q)$.

## 1.4. Campos de planos definidos por formas diferenciales

Veremos una versión del Teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales.

Sean $w^1, \dots, w^k$ 1-formas diferenciales de clase $C^r (r \geq 0)$ definidas y linealmente independientes en un abierto $U \subset M^n$. Para cada $q \in U$ definamos

$$P(q) = \{v \in T_qM| \quad w_q^1(v) = \cdots = w_q^k(v) = 0\}.$$

Como $w_q^1, \dots, w_q^k$ son elementos linealmente independientes de $(T_qM)^*$, resulta que el conjunto $P(q)$ es un subespacio de codimensión k de $T_qM$ ($dim = n - k$), afirmación que resulta de aplicar completaciones de base y la base dual y el teorema de la dimensión finita a la aplicación lineal

$$w_q = (w_q^1, \dots, w_q^k) : T_qM \to \mathbb{R}^k.$$

Afirmamos que el campo de planos $P : q \to P(q)$ es de clase $C^r$. En efecto, dado $p \in U$, sea $p \in U$ ydado una carta local $x : V \to \mathbb{R}^n$ con $p \in V \subset U$, donde denotamos por $x(q) = (x_1(q), \dots, x_n(q))$, $x_j : V \to \mathbb{R}$ para $j = 1, \dots, n$. Consideremos para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ las 1-formas de clase $C^\infty$. Entonces, el conjunto de 1-formas $\{dx_1(p), \dots, dx_n(p)\}$ es una base de $(T_pM)^*$, luego, es posible determinar índices $i_1, \dots, i_{n-k}$ tal que

$$\{w_p^1, \dots, w_p^k, dx_{i_1}(p), \dots, dx_{i_{n-k}}(p)\}$$

es una base de $(T_pM)^*$. Coloquemos por comodidad $dx_{i_1} = w^{k+1}, \dots, dx_{i_{n-k}} = w^n$, de tal forma que $\{w_p^1, \dots, w_p^n\}$ es una base de $(T_pM)^*$.

Por continuidad, es posible determinar una vecindad W de p con $W \subset V$ tal que $\{w_q^1, \dots, w_q^n\}$ sigue siendo una base de $(T_qM)^*$ para todo $q \in W$.

Consideremos campos de vectores $X^1, \dots, X^n$ definidos en W, tal que para todo $q \in W$ el conjunto $\{X^1(q), \dots, X^n(q)\}$ es la base dual de $\{w_q^1, \dots, w_q^n\}$. Es fácil ver ahora que los campos $x^1, \dots, x^n$ son de clase $C^r$, y además de esto que $P(q)$ estÃ¡ generada por los vectores $X^{k+1}(q), \dots, X^n(q)$, $q \in W$.

Recíprocamente, dado un campo de planos $P$ de codimensión k y clase $C^r$ definidos en $U \subset M$; afirmamos que es posible definir $P$ como el núcleo de $k$ 1-formas de clase $C^r$. En efecto, dado $p \in U$ consideremos $n-k$ campos de vectores de clase $C^r$, $X^{k+1}, \ldots, X^n$ tal que $P(q)$ es el subespacio de $T_qM$ generado por $X^{n-k}(q), \ldots, X^n(q)$ para todo $q \in V \subset U$. Con argumentos análogos hechos para el caso de formas, es posible definir k campos de vectores $x^1, \ldots, X^k$ de clase $C^\infty$ en V tal que $X^1, \ldots, X^n$ son linealmente independientes en una vecindad $W$ con $p \in W \subset V$. Basta considerar la base dual $\{w^1, \ldots, w^n\}$, la cual está cosntituido de formas de clase $C^r$. Entonces se cumple

$$P(q) = \{v \in T_qM| \quad w_q^1(v) = \ldots = w_q^k(v) = 0\}.$$

Resumimos el conjunto de razonamientos anterior en la siguiente proposición.

**Proposición 2.** *Un campo de planos de codimensión $k$ y clase $C^r(r \geq 0)$ puede ser definido localmente como el núcleo de $k$ 1-formas linealmente independientes de clase $C^r$.*

*Recíprocamente, si $w^1, \ldots, w^k$ son formas de clase $C^r$ linealmente independientes entonces*

$$P(q) = \{v \in T_qM| \quad w_q^1(v) = \cdots = w_q^k(v) = 0\}$$

*define un campo de planos de codimensión $k$ y clase $C^r$.*

La proposición sugiere que debe haber una versión del teorema de Frobenius en términos de formas diferenciales. Esta versión está dada por el siguiente teorema.

**Teorema 2.** *Sea $P$ un campo de planos de codiemnsión $k$ y clase $C^r(r \geq 1)$ definido en un abierto $U \subset M$ por $k$ 1-formas de clase $C^r$ linealmente independientes $w^1, \ldots, w^k$.*

*Entonces $P$ es completamente integrable si y sólo si para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ tengamos*

$$dw^j \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^k = 0 \qquad (*)$$

Antes de probar el teorema necesitamos de los siguientes dos lemas.

**Lema 1.** *Sea $\eta$ una 2-forma en $U$ tal que $\eta \wedge w^1 \wedge \ldots \wedge w^k$. Dado $p \in U$ existe una vecindad $V$ de $p$ con $V \subset U$ y $k$ 1-formas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tal que*

$$\eta = \alpha_1 \wedge w^1 + \cdots + \alpha_k \wedge w^k.$$

**Prueba** Como las 1-formas $w^1, \ldots, w^k$ son linealmente independientes es posible definir $n-k$ 1-formas de clase $C^\infty$, $w^{k+1}, \ldots, w^n$ y una vecindad $V$ de p con $V \subset U$ tal que para todo $q \in V$ , se tiene una base $\{w_q^1, \ldots, w_q^n\}$ de $(T_qM)^*$. Podemos escribir $\eta = \sum_{i,j} a_{ij} w^i \wedge w^j$. Por la hipótesis se tiene

$$(\sum_{i<j} a_{ij} w^i \wedge w^j) \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^k = 0,$$

o sea $a - ij = 0$ si se cumple $k < i < j$.

Luego, $\eta = \sum_{i \leq k, i<j} a_{ij} w^i \wedge w^j = \sum_{i=1}^k \alpha_i \wedge w^i$, donde $\alpha_i = -\sum_{j>i} a_{ij} w^j$. ∎

**Lema 2.** *Sea $w$ una 1-forma de clase $C^r (r \geq 1)$ y $X, Y$ dos campos de vectores $C^1$ definidos en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$dw(X,Y) = d(w(X)) \cdot Y - d(w(Y)) \cdot X + w([X,Y]).$$

*Por el símbolo $w(X)$ denota la función $q \to w_q(X(q))$.*

**Prueba** Supongamos que $w = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ donde $a_i : U \to \mathbb{R}$ es de clase $C^r$ para $i = 1, \ldots, n$ y $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ es la base dual de la base canónica $e_1, \ldots, e_n$. Coloquemos también $X = \sum_{i=1} b_i e_i$ y $Y = \sum_{i=1} c_i e_i$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
(i) \quad w(X) &= \sum_{i=1}^n a_i b_i, w(Y) = \sum_{i=1}^n a_i c_i \\
w([X,Y]) &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n (b_j \partial_j c_i - c_j \partial_j b_i) \\
&= \sum_{i,j} a_i (b_j \partial_j c_i - c_j \partial_j b_i).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii) \quad dw &= \sum_{i<j} a - ij dx_i \wedge dx_j, \; a_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i; \\
dw(X,Y) &= \sum_{i<j} a_{ij} (b_i c_j - b_j c_i).
\end{aligned}$$

Por (i) tenemos

$$d(w(X)) \cdot Y = \sum_{i,j} \partial_j(a_i b_i) \cdot c_j = \sum_{i,j} c_j(a_i \partial_j b_i + b_i \partial_j a_i)$$

y

$$d(w(Y)) \cdot X = \sum_{i,j} \partial_j(a_i c_i) \cdot b_j = \sum_{i,j} b_j(a_i \partial_j c_i + c_i \partial_j a_i).$$

Luego,

$$\begin{aligned}(iii) \quad dw(X) \cdot Y - dw(Y) \cdot X &= \sum_{i,j} a_i(c_j \partial_j b_i - b_j \partial_j c_i) + \\ &+ \sum_{i,j} \partial_j a_i(b_i c_j - b_j c_i).\end{aligned}$$

Sumando la expresión de $w([X,Y])$ de (i) con $(iii)$ obtenemos

$$dw(X) \cdot Y - dw(Y) \cdot X + w([X,Y]) = \sum_{i,j} \partial_j a_i(b_i c_j - b_j c_i).$$

Sin embargo,

$$\sum_{i,j} \partial_j a_i(b_i c_j - b_j c_i) = \sum_{i<j} (\partial_j a_i - \partial_i a_j)(b_i c_j - b_j c_i) = dw(X,Y).$$

■

**Prueba del Teorema** Supongamos que $X, Y$ son dos campos de clase $C^1$ tangentes a P. Como $dw^j \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^k = 0$, del lema 1 obtenemos

$$dw^j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j \wedge w^i,$$

y por tanto,

$$dw^j(X,Y) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^j(X) w^i(Y) - \alpha_i^j(X) Y) = 0,$$

una vez que para todo $i = 1, \ldots, k$ tenemos $w^i(X) = w^i(Y) = 0$.

Por otro lado, del lema 2 obtenemos

$$0 = dw^j(X,Y) = d(w^j(X)) \cdot Y - d(w^j(Y)) \cdot X + w^j([X,Y]).$$

Como $w^j(X) = w^j(Y) = 0$, vemos que $w^j([X,Y]) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, k$, o sea $[X,Y]$ es tangente a P.

Veamos la recíproca, es decir, vamos a probar la ecuación

$$dw^j \wedge w^1 \wedge \cdots \wedge w^k = 0$$

para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Observamos la presencia de una $k+2$ forma diferencia definidos en el abierto $U \subset M$. Para comprobar que sea una $k+2$ forma diferencial nula tenemos que evaluar en una cantidad de $k+2$ campos vectoriales. En el caso particular que $dimP = n-k = 1$ entonces, $k+2 = n+1$ implica automáticamente que la $k+2$ forma es nula.

En otro caso, $dimP > 1$ entonces tomemos dos campos independientes $X, Y$ de $P$ y completamos a una base de campos vectoriales de dimensión n; como se anula en $w_j(X) = w_j(Y) = 0$ entonces se cumple $dw^j(X,Y) = -w^j([X,Y]) = 0$, por consiguiente la $k+2$ forma se anula. ■

## 1.5. Teorema de Briot-Bouquet

El Teorema de Briot-Bouquet se enuncia del siguiente modo.

**Teorema 3.** *La ecuación diferencial ordinaria*

$$\begin{cases} z_1' = \lambda_1 z_1 + A_1(z), \\ z_2' = \lambda_2 z_2 + A_2(z) \end{cases} \tag{1.5.1}$$

*con los cocientes* $\lambda_1/\lambda_2$ *o* $\lambda_2/\lambda_1 \in\not\in \mathbb{N} \cup \{0\}, multA_j \geq 2, j = 1,2$. *El cambio de coordenadas* $z = \xi(w)$ *analítico,*

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + \xi_1(w), \\ z_2 = w_2 + \xi_2(w) \end{cases} \tag{1.5.2}$$

*transforma la ecuación diferencial anterior en*

$$\begin{cases} w_1' = \lambda_1 w_1 + w_1 w_2 a_1(w), \\ w_2' = \lambda_2 w_2 + w_1 w_2 a_2(w) \end{cases} \tag{1.5.3}$$

La última ecuación tiene las rectas $w_1 = 0$ y $w_2 = 0$ invariantes; esto significa que si escribimos el campo vectorial respectivo como

$$Z = (\lambda_1 w_1 + w_1 w_2 a_1(w))\frac{\partial}{\partial w_1} + (\lambda_2 w_2 + w_1 w_2 a_2(w))\frac{\partial}{\partial w_2};$$

la solución de la forma $(w_1, 0)$ satisfacen

$$Z(w_1, 0) = \lambda_1 w_1 \frac{\partial}{\partial w_1}$$

tiene solución en la curva $w_2 = 0$.

El mismo análisis en la otra curva $w_1 = 0$. Entonces tenemos dos separatrices invariantes que pasan por el origen $(0, 0)$, ambas separatrices son analíticas y convergentes.

Otra versión del teorema dice si se tiene una separatriz formal en el punto singular simple, dada por la dirección de un autovalor no nulo, entonces se tiene que la separatriz formal es convergente.

**Teorema 4.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación sobre $\mathbb{C}^2$ con una singularidad simple en el origen. Supongamos que $\mathcal{F}$ tiene una curva integral convergente no singular $C$. Entonces, $\mathcal{F}$ posee una única curva integral formal $\Gamma$ diferente de $C$. Además, la curva $\Gamma$ es lisa, transversal a $C$ y su espacio tangente $T_0\Gamma$ es una dirección propia para $\mathcal{F}$. Cuando $T_0\mathcal{F}$ es una dirección fuerte, la curva $\Gamma$ es convergente.*

**Prueba** Elegimos un sistema de coordenadas $(x, y)$ en las cuales

$$C : \{x = 0\} \quad w = (\lambda y + G(x, y))dx - x(\mu + H(x, y))dy$$

con $G \in (x, y)^2$ y $H \in (x, y)$. Se busca $\Gamma$ para metrizado por

$$t \mapsto \gamma(t) = (t, \sum_{n \geq 2} a_n t^n).$$

La condición $\gamma^* w = 0$ equivale a tener la relación de coeficientes

$$(\lambda - n\mu)a_n = P_n(a_2, \ldots, a_{n-1}), \quad n \geq 2$$

los $P_n$ son polinomios en las variables $a_2, \ldots, a_{n-1}$. Como se cumple $\lambda - n\mu \neq 0$ para todo $n$, existe una única solución. Por un cambio formal de coordenadas, dada por

$$(x, y) \mapsto (x, y - \sum_{n=2} a_n x^n)$$

se puede suponer que $y = 0$ es también una curva integral. En coordenadas formales $w$ se escribe como

$$xy((\lambda + \widehat{a}(x,y))\frac{dx}{x} - (\mu + \widehat{b}(x,y))\frac{dy}{y})$$

con $\widehat{a}(0,0) = 0, \widehat{b}(0,0) = 0$. Supongamos que existe otra curva integral $\Gamma_1$ diferente de $\mathcal{C}$. Por el Teorema de Puiseux formal $\Gamma_1$ se tiene la curva $\gamma_1$ de la forma

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t^r, \\ y = a_q t^q + a_{q+1}t^{q+1} + \cdots, \quad a_q \neq 0 \end{cases}$$

para una buena elección del parámetro $t$. La condición $\gamma_1^* w = 0$ implica las relaciones $(r\lambda - q\mu)a_q = 0$ : contradicción; la curva $\Gamma$ es única.

Falta probar la convergencia cuando $\mu \neq 0$. La ipótesis permiten escribir $w$, bajo una unidad multiplicativa, bajo ola forma de Briot - Bouquet siguientes

$$w = (\frac{\lambda}{\mu}y - \sum_{j+k\geq 2} A_{jk}x^i y^k)dx - xdy.$$

Se va a demostrar que la serie $\sigma(t) = \sum a_n t^n$ construido precedentemente converge. Para esto, precisamos que los polinomios $P_n$, se tiene

$$(\frac{\lambda}{\mu} - n)a_n = P_n(\{A_{jk}\}_{j+k\geq n}; \quad \{a_l\}_{l\leq n-1})$$

donde los $P_n$ son los polinomios universales y los $A_{jk}$ y $a_l$ dan los coeficientes de $t^n$ en la expresión $A(t,\sigma(t))$ con $A = \sum A_{jk}x^j y^k$. Observamos que los $P_n$ tienen coeficientes enteros positivos. Sea $\alpha$ el número real estrictamente positivo definido por

$$\alpha = Inf\,\{|\frac{\lambda}{\mu} - n| : n = 2,3,\ldots,\}.$$

Consideramos la curva analítica real dada por

$$\alpha \cdot v = \sum_{j+k\geq 2} |A_{jk}|u^j v^k.$$

Desde que $\alpha \neq 0$, el teorema de la función implícita asegura la existencia de una única solución convergente $v = b(u) = \sum_{j\geq 2} b_j u^j$. Los coeficientes $b_j$ son dados por

$$\alpha b_n = P_n(\{|A_{jk}|\}_{j+k\leq n}; \{b_l\}_{l\leq n-1}).$$

Como los $P_n$ tienen coeficientes enteros positivos, se demuestra por recurrencia que $|a_n| \leq b_n$ para todo $n \geq 2$, de donde se sigue la convergencia de $\gamma$. ∎

Si la dirección tangente a $\Gamma$ no es fuerte, entonces $\Gamma$ no es necesariamente convergente; esto se ve en particular en el siguiente ejemplo debido a Euler:

$$(y - x)dx - x^2 dy$$

que tiene la curva integral formal $y = \sum_{n \geq 0} n! x^{n+1}$.

Una consecuencia de la descomposición de Jordan de un campo vectorial complejo $X$ es dada poe el siguiente teorema.

**Teorema 5.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación con una singularidad simple. Existe un sistema de coordenadas formales $\widehat{x}, \widehat{y}$ en las que el germen formal $\widehat{O}_2\mathcal{F}$ es descrito por una de las tres formas siguientes:*

$\widehat{w}_{(i)} = \widehat{x}\widehat{y}(\alpha\frac{d\widehat{x}}{\widehat{x}} - \frac{d\widehat{y}}{\widehat{y}})$

$\widehat{w}_{(ii)} = \widehat{x}\widehat{y}\widehat{y}^r(\frac{d\widehat{x}}{\widehat{x}} + \lambda\frac{d\widehat{y}}{\widehat{y}} + d(\frac{1}{y^r}))$

$\widehat{w}_{(iii)} = \widehat{x}\widehat{y}(\widehat{x}^r\widehat{y}^q)^k)(\lambda\frac{d\widehat{x}}{\widehat{x}} + \mu\lambda\frac{d\widehat{y}}{\widehat{y}} + d(\frac{1}{(\widehat{x}^r\widehat{y}^q)^k}))$

*donde $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $r, q, k \in \mathbb{N}$.*

# MATERIALES Y METODOS

Esta investigación es un tipo de investigación básica en la lectura de los libros y artículos referidos en la bibliografía. Trata de probar la existencia de las integrales primeras holomorfas para foliaciones de codimensión mayor a dos.

Tipo de investigación: básica Nivel de investigación: explicativa Método: deductivo, inductivo y analítico Diseño: explicativo Instrumentos: bibliografía especializada

# Capítulo 2

# RESULTADOS

Veamos algunos resultados naturales de las 1-formas que definen localmente las foliaciones de codimensión uno; ellos son algunos elementos de las foliaciones holomorfas en general.

## 2.1. División de Rham-Saito para 1-formas

La división de Rham-Saito para 1-formas concluye que se pueden factorizar las 1-formas si el producto de dos de ellas es cero.

**Proposición 3.** *Consideramos dos 1-formas diferenciales $w_1, w_2$ definidos en el polidisco $\Delta(m, \rho) \subset \mathbb{C}^n$. Escribamos*

$$w_1 = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j$$

*con las funciones $a_j \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\Delta(m, \rho))$ y consideramos el conjunto analítico*

$$Sing\, w_1 = \{a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0\} \subset \Delta(m, \rho).$$

*Supongamos que $cod\, Sing w_1 \geq 2$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- $w_1 \wedge w_2 = 0$;
- *Existe $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\Delta(m, \rho))$ tal que $w_2 = h w_1$.*

**Prueba** Se cumple de manera directa la relación $w_1 \wedge w_2$. Recíprocamente, si consideramos la 1-forma $w_2 = \sum_{j=1}^{n} b_j dz_j$, la condición $w_1 \wedge w_2 = 0$ se despliega por

$$a_j b_k - a_k b_j = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Sean los valores $m' \in \Delta(m, \rho) - Sing w_1$; existe un entero $1 \leq k \leq n$ tal que $a_k(m') \neq 0$. En una vecindad reducida de $m'$ se tiene

$$h = b_k / a_k.$$

Como se cumplen las igualdades $h = b_j / a_j$ definimos, un elemento holomorfo $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}(\Delta(m, \rho)) - Sing w_1$. Por construcción realizada se satisface la relación $w_2 = h w_1$. ∎

Podemos extraer algunas consecuencias de la proposición de Rham-Saito. En primer lugar, si consideramos $w_1 = w_2$ entonces se cumple $w_1 \wedge w_1 = 0$. En segundo lugar, sabemos que localmente la 1-forma $w_2$ es una forma cerrada, así, existe una función $f \in \mathcal{O}_m$ diferenciable tal que $w_2 = df$; entonces, tenemos que si se cumple $w_1 \wedge df = 0$ implica que $w_1 = h df$, para alguna función holomorfa $h$. En tercer lugar, por independencia de las 1-formas $dz_i, dz_j$, donde $i \neq j$, se cumple que $dz_i \wedge dz_j \neq 0$.

Veamos el siguiente caso en el plano complejo de dimensión dos. Tomemos dos 1-formas $w_1 = z_1 dz_2, w_2 = z_2 dz_2$. Veamos algunos cálculos

$$w_1 \wedge w_2 = z_1 z_2 dz_2 \wedge dz_2 = 0.$$

Ahora calculemos la singularidad: $Sing w_1 = \{0\} \times \mathbb{C}, Sing w_2 = \mathbb{C} \times \{0\}$. Se cumple que la codimensión de las singularidades son uno; geométricamente ambas singularidades se cruzan transversalmente. También $w_2 = \frac{z_2}{z_1} w_1$. La función $h(z_1, z_2) = \frac{z_2}{z_1}$ no es holomorfa salvo si $z_1 \neq 0$.

## 2.2. Rectificación de un campo de vectores

Ahora, presentamos una forma equivalente y local de expresar campos vectoriales alrededor de puntos regulares con campos constantes.

Considere dos variedades complejas $M, N$ y dos campos de vectores $X, Y$ sobre las variedades $M, N$ respectivamente. Se dice que $X, Y$ son **conjugados** si existe un difeomorfismo $\Phi : M \to N$ tal que $\Phi_* X = Y$, es decir,

$$D\Phi \circ X = Y,$$

donde $D\Phi : TM \to TN$ es la aplicación tangente.

Sean $m$ y $q$ dos puntos de M y N, respectivamente. Se dice que $X, Y$ son localmente conjugados en $m$ y $q$ si existen dos abiertos $m \in U \subset M$, $q \in V \subset N$ y un difeomorfismo $\Phi : U \to V$ tal que

$$\Phi(m) = q, \quad D\Phi \circ (X|_U) = Y|_V \circ \Phi.$$

Se llama **campo constante** sobre el espacio afín $\mathbb{C}^n$ a todo campo de vectores de la forma

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + \lambda_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

donde los $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Observemos que tales campos constantes no nulos son conjugados al campo constante $\frac{\partial}{\partial z_1}$.

**Teorema 6** (Teorema de rectificación). *Sea $M$ una variedad analítica compleja, $X$ un campo de vectores sobre $M$ y $m$ un punto de $M$ tal que $X(m) \neq 0$. Entonces $X$ es localmente conjugado en $m$ a un campo constante.*

**Prueba** Sin perder generalidad, bajo el difeomorfismo del sistema de coordenadas, se puede suponer que el campo X está definida en un abierto de $\mathbb{C}^n$ y que $m$ es el origen de coordenadas.Por una aplicación lineal se tiene

$$X|_0 = \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Consideramos la aplicación definida por

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = (exp(z_1 X))(0, z_2, \ldots, z_n).$$

El teorema de la función inversa muestra que $\Phi$ es un difeomorfismo que, por construcción, conjuga X y el campo constante $\partial/\partial z_1$.

$\blacksquare$

Observe que el campo constante es el más simple, es decir, $\partial/\partial z_1$. Tomemos el siguiente campo vectorial $X = z_1 \partial_1 + z_1 z_2 \partial_2$, ella se anula en el conjunto de puntos $\{0\} \times \mathbb{C}$, donde no se sabe cómo se comportan los diagramas de fases.

## 2.3. Teorema de Frobenius. Codimensión 1

Veamos una manera simple de expresar las 1-formas integrables alrededor de puntos regulares.

Consideramos $w$ una 1-forma sobre M, U un abierto de M y $m$ un punto de M; pongamos las notaciones siguientes:

- $Ker\, w(U) = \{X \in \Theta_M(U) | i_X w|_U = 0\}$.
- $Ker\, w_m = \{X \in \Theta_{M,m} | i_X w_m = 0\}$.

Observamos que $h \in \mathcal{O}_m$ y $h \neq 0$, entonces $Kerw_m = Ker(hw)_m$.
Se dice que $w$ es **integrable** si $w \wedge dw = 0$.

**Lema 3.** *Sea M una variedad analítica compleja. Si $w$ es una 1-forma integrable sobre M. Entonces $Ker\, w_m$ y $Ker\, w(U)$ son estables por corchetes de Lie.*

**Prueba** La propiedad buscada es local, así, es suficiente considerar el caso de $Ker\, w_m$. Podemos considerar el caso donde los coeficientes de $w$ no tienen factor común y por consecuencia $Cod\,Sing\, w \geq 2$. Si $X \in Ker\, w_m$ entonces se cumple $i_X\, w = 0$ y luego,

$$L_X w = i_X dw + d(i_x w) = i_X w.$$

Por otra parte,

$$0 = i_X(w \wedge dw) = i_X(w) \wedge dw - w \wedge (i_X dw) = -w \wedge L_X w.$$

Por el lema de división se implica la existencia de un elemento $h \in \mathcal{O}_{M,m}$ tal que $L_X w = hw$. Consideremos dos campos vectoriales $X, Y$ en el $Ker\, w_m$, se tiene

$$i_{[X,Y]} w = L_X(i_Y w) - i_Y(L_X w) = -i_Y(hw_m) = 0.$$

■

Ahora vamos a probar el teorema de Frobenius convergente de codimensión uno.

**Teorema 7.** *Sea M una variedad analítica compleja, $w$ una forma integrable sobre M y $m$ un punto de M tal que $w(m) \neq 0$. Entonces, existen dos gérmenes de funciones $u, f$ en $O_M$ tal que*

$$u(m) \neq 0, \quad df|_m \neq 0, \quad w_m = udf.$$

**Prueba** Escribimos $w$ en forma local como sigue

$$w = a_1 dz_1 + a_2 dz_2 + cdots + a_n dz_n$$

, donde los coeficientes $a_j \in O_{M.m}$. Bajo un cambio lineal de coordenadas se puede suponer que $a_1(m) \neq 0, a_j(m) = 0)$ para todo $j = 2, \ldots, n$. Los gérmenes de los campos de vectores

$$X_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{a_j}{a_1}\frac{\partial}{\partial z_1}, \quad j = 2, \ldots, n$$

forman una base del $O_{M,m}$ módulo libre $ker\, w_m$. Se tiene

$$[X_j, X_k] = f_{jk}\frac{\partial}{\partial z_1}$$

donde $f_{jk} \in O_{M,m}$. El lema anterior asegura que el corchete de Lie de $[X_j, X_k]$ pertenece a $ker\, w_m$. Se deduce que $[X;j, X;k] = 0$ para todo $j, k = 2, \ldots, n$. Consideramos la aplicación

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = [exp(z_2 X_2) \circ \cdots exp(z_n X_n)](z_1, 0, \ldots, 0)$$

y $\Psi$ es un difeomorfismo local porque $D\Psi(0) = Id$. Como los campos $X_j$ conmutan, se tiene

$$\Phi(z_1, \ldots, z_n) = [exp(z_2 X_2 + \cdots + z_n X_n)](z_1, 0, \ldots, 0).$$

Por construcción, $\Psi$ conjuga $X_j$ al campo constante $\partial/\partial z_j$ para todo $j = 2, \ldots, n$, porque

$$\Psi^* w = (\frac{\partial}{\partial z_j}) = 0, \quad \forall j = 2, \ldots, n,$$

se tiene $\Psi^* w = \widehat{u} dz_1$, con $\widehat{u}(0) \neq 0$. ■

Es decir, el teorema de Fobenius concluye una manera simple de expresar 1-formas integrables en puntos regulares y de modo local.

## 2.4. División de Rham-Saito

Nosotros vamos a redefinir dos casos especiales de la división de Rham-Saito. Para ello, repasamos algunos términos del álgebra conmutativa. Ello nos da el fundamento algebraico de la presente investigación. También, al final de la sección, damos otras expresiones del teorema de Frobenius.

Sea J un ideal de $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ y A el álgebra analítica $\mathcal{O}_n/J$. Recordemos que si $\tilde{A} \subset A$ es un ideal, la **profundidad** de $\tilde{A}$ es el más grande entero $q$ para los cuales existen elementos $a_1, \ldots, a_q$ de $\tilde{A}$ con la propiedad siguiente: $a_j$ no es un divisor de cero en $A/(a_1, \ldots, a_{j-1})$ para todo $j = 1, \ldots, q$. La denotamos por $prof\tilde{A}$.

Otra manera equivalente de enunciar: la profundidad del ideal $\widetilde{A}$ es el mayor eentero $j$ para los cuales existe un elemento $b \notin (a_1, \ldots, a_{j-1})$ tal que $ab \in (a_1, \ldots, a_{j-1})$.

Consideramos el $\mathcal{O}_n$-módulo $\Omega_{\mathbb{C}^n,o} = \bigoplus_k \Omega^k_{\mathbb{C}^n,0}$ de gérmenes de formas diferenciales de cualquier orden $k$ en el origen de $\mathbb{C}^n$ y

$$\bigwedge A = \bigoplus_k \bigwedge^k A,$$

donde

$$\bigwedge^k A = \Omega^k_{\mathbb{C}^n,0} \bigotimes_{\mathcal{O}_n} A$$

el A-módulo de formas diferenciales con coeficientes en A. Un elemento de $\bigwedge^k A$ se escribe en la base $dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}$ como

$$\sum \underline{a}_{j_1 j_2 \cdots j_k} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}$$

donde $\underline{a}_{j_1 \cdots j_k} = a_{j_1 \cdots j_k} + J$ es un elemento de $\mathcal{O}_n$. Notamos por $\bigwedge^0 A = A$ y $\bigwedge^{n+j} A = 0$ para $j \geq 1$.

El siguiente lema se usará para relacionar la profundidad de un ideal engendrado.

**Lema 4.** *Sea* $w = \sum \underline{a}_j dz_j$ *un elemento no nulo de* $\bigwedge^1 A$. *Si* $\beta \in \bigwedge^k A$ *verifica* $\beta \wedge w = 0$, *entonces existen* $\theta_j$ *en* $\bigwedge^{k-1} A$ *tal que*

$$\underline{a}_j \beta = w \wedge \theta_j.$$

**Prueba** Basta aplicar los campos $\frac{\partial}{\partial z_j}$ por producto interior a la igualdad $\beta \wedge w = 0$. ∎

**Teorema 8.** *Sea $w = \sum \underline{a}_j dz_j$ en $\bigwedge^1 A$ y $\mathcal{A}$ el ideal engendrado por los coeficientes de $w$. Si $\beta$ es un elemento de $\bigwedge^k A$ tal que $w \wedge \beta = 0$ y si $k < prof\mathcal{A}$, entonces existe $\theta \in \bigwedge^{k-1} A$ tal que $\beta = w \wedge \theta$.*

**Prueba** Un bosquejo de la prueba dice, primero se hace recurrencia sobre $k$. Si $k = 0$, $\beta = b \in A$, verifica $bw = 0$, es decir,

$$b\underline{a}_j = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n;$$

Como $prof\mathcal{A} > 0$ se deduce que $b = 0$. Supongamos el resultado establecido para los índices $j < k$, se aplica el lema anterior para la existencia del elemento $\theta' \in \bigwedge k - 1A$. ∎

Los resultados que vamos logrando tratan de diversas condiciones o hipótesis para despejar formas factores o divisores de cero en función a la otra forma. El teorema que sigue toma en cuenta la codimensión de la singularidad de la 1-forma.

**Teorema 9** (Teorema de Rham-Saito). *Consideramos el germen de la 1-forma holomorfa $w = \sum \underline{a}_j n dz_j$ en el origen de $\mathbb{C}^n$ y $\beta$ un germen de $k$-forma tal que $w \wedge \beta = 0$. Si $k < codSing(w)$, entonces existe un germen $\theta$ de $(k-1)$-forma tal que $\beta = w \wedge \theta$.*

En particular cuando $w$ tiene una singularidad aislada, el enunciado se aplica a toda forma $\beta$ de grado inferior o igual a $n - 1$.

**Prueba** Sea J el ideal engendrado por los coeficientes de $w$. Es suficiente observar que $prof\ J \geq codimSing(w)$.

∎

Fijemos un germen $w = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j$ de 1-formas integrales en el origen de $\mathbb{C}^n$ tal que $cod\,Singw \geq 3$. Presentemos el siguiente algoritmo formal de Godbillon-Vey que produce una integral primera formal de $w$.

Como $w$ es integrable se cumple $w \wedge dw = 0$. El primer teorema de Rham Saito asegura la existencia de un germen de forma $w_1 \in \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0}$, tal que

$$dw = w \wedge w_1.$$

Diferenciando la igualdad precedente se obtiene

$$0 = dw \wedge w_1 - w \wedge dw_1 = -w \wedge dw_1.$$

De nuevo existe $w_2$ tal que

$$dw_1 = w \wedge w_2.$$

Por recurrencia, se construye un conjunto de gérmenes de 1-formas $w_j \in \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0}$, tal que

$$dw_j = w \wedge w_{j+1} + \sum_{1 \leq k \leq j} C_j^k w_k \wedge w_{j-k+1}.$$

Siguiendo la idea de Martinet, nos ayudamos de una variable $t$ y se considera la forma diferencial formal

$$\widehat{w} = dt + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j w_j}{j!}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} d\widehat{w} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(w \wedge w_{j+1} + \sum_{\leq k \leq j} C_j^k) w_k \wedge w_{j-k+1}) \\ &+ dt \wedge \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} w_j. \end{aligned}$$

De donde

$$d\widehat{w} = \widehat{w} \wedge \sum_{j=1}^{i} nfty$$

Por consecuencia la 1-forma formal $\widehat{w}$ es no singular e integrable. El teorema de Frobenius formal, que es una adaptación elemental del primer teorema asegura la existenci de dos series formales $F, G$ en $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ tal que

$$G(0) \neq 0, \quad \widehat{w} = GdF.$$

Para $t = 0$ esta igualdad conduce al enunciado siguiente.

**Teorema 10.** *Si $w = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j$ es un germen de 1-forma integrable en el origen de $C^n$ tal que $Cod\,Sing w \geq 3$, entonces $w$ posee una integral primera formal; es decir, existen dos series formales $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ tal que*

$$\widehat{g}(0) \neq 0, \quad w = \widehat{g}\, d\widehat{f}.$$

Este teorema establece la formalidad de las 1 formas integrales sin interesar que el origen sea punto singular de $\mathbb{C}^n$.

## 2.5. Teorema de Frobenius singular

El siguiente lema resuelve el problema del paso de la integral primera formal a integral primera holomorfa en las singularidades simples.

Se dice que el origen es una singularidad simple en el origen de una foliación $\mathcal{F}$ dada localmente por $w = a(x,y)dx + b(x,y)dy$ si la matriz jacobiana

$$J_0(w;x,y) = \begin{pmatrix} -b_x(0) & -b_y(0) \\ a_x(0) & a_y(0) \end{pmatrix}$$

tiene dos valores propios distintos $\lambda, \mu$ tal que $\mu \neq 0$ y $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$. La definición no depende de la elección de $w$ ni de las coordenadas $(x,y)$.

Observe , en particular, que si $\lambda = 0$ y $\mu$ es cualquier valor no nulo entonces el cociente $\lambda/\mu = 0 \notin \mathbb{Q}^+$. Luego, el origen es una singularidad simple; en este caso , llamamos al origen una singularida simple **silla nodo**.

**Lema 5.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación con una singularidad simple en el origen del plano $\mathbb{C}^2$. Si $\mathcal{F}$ posee una integral primera formal no constante $\widehat{f}$, entonces $\mathcal{F}$ tiene una integral primera holomorfa $f$.*

**Prueba** Las componentes irreducibles de $\widehat{f}$ son las curvas integrales formales y $\mathcal{F}$ tiene una singularidad simple en el origen, luego, existe un sistema de coordenadas formales $(\widehat{x}, \widehat{y})$ tal que

$$\widehat{f} = \widehat{x}^r \widehat{y}^q$$

donde $r, q$ son números enteros primos relativos. Por consiguiente $\mathcal{F}$ es formalmente linealizable y descrito por

$$\widehat{x}\widehat{y}(r\frac{d\widehat{x}}{\widehat{x}} + q\frac{d\widehat{y}}{\widehat{y}})$$

. El teorema de Briot- Bouquet asegura la convergencia de las curvas $\widehat{x} = 0, \widehat{y} = 0$. Existe un sistema de coordenadas convergentes $(x,y)$ en las que $\mathcal{F}$ es dada por

$$w = rydx + qx(1 + U(x,y))dy, \quad U(0,0) = 0.$$

También se tiene

$$\widehat{f}(x,y) = x^r y^q \widehat{W}(x,y) = \widehat{x}^r \widehat{y}^q$$

donde $\widehat{W}(x,,y)$ es una unidad formal $\widehat{W}(0) = 1$ Consideramos el campo de vectores

$$X = qx(1 + U(x, y))\frac{\partial}{\partial x} - ry\frac{\partial}{\partial y}$$

y el flujo $\Phi_t = exp\, tX$ el grupo de 1 parámetro es decir, tiene la forma

$$\Phi_t(x, y) = (xexp\,(qt)V(x, y, t), yexp(-rt))$$

con $V(0, 0, t) = V(x, y, 0) = 1$. Designamos por X para representar el germen del mismo X definido sobre la bola $B \subset \mathbb{C}^2$ centrado en el origen. Si B es suficientemente pequeño , la aplicación $(x, y, t) \mapsto \Psi_t(x, y)$ está definido sobre $B \times D(0, 7)$ donde $D(0, 7)$ es el disco de radio 7 centrado en el origen. Como $X\widehat{f} = 0$ para todo $t \in D(0, 7)$ se tiene $\widehat{f} \circ \Phi_{2i\pi} = \widehat{f}$ El difeomorfismo $\Phi_{2i\pi}(x, y) = (xV(x, y, 2i\pi), y) ==$ $(xV_1(x, y), y)$ es tangente a la identidad, se deduce

$$V_1^r(x, y)\widehat{W}(xV_1, y) = \widehat{W}(x, y).$$

El teorema de la función implícita aplicado a la ecuación precedente conduce a $V_1 = 1$, es decir, $\Phi_{2i\pi} = Id_{\mathbb{C}^2}$

Notamos por $D\Phi_t(0)$ la diferencial de $\Phi_t$ en el punto 0 e introducimos la aplicación

$$H(x, y) = \int_0^1 (D\Phi_{2i\pi}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi t}(x, y)dt$$

que es holomorfo sobre una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$. Observamos que $DH(0) = Id$. Para un número real $s$ vecindad de 0 se tiene

$$\begin{aligned} H \circ \Phi_{2i\pi s} &= \int_0^1 (D\Phi_{2i\pi t}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt \\ &= \int_0^1 D\Phi_{2i\pi s}(0)(D\Phi_{2i\pi(t+s)}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt \\ &= D\Phi_{2i\pi s}(0)\int_0^1 (D\Phi_{2i\pi(t+s)}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt \end{aligned}$$

Como $t \mapsto \Phi_{2i\pi t}$ es periódico de período 1, se puede escribir

$$\int_0^1 (D\Phi^{-1}_{2i\pi(t+s)(0)})\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt = \int_0^1 (D\Phi_{2i\pi t}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi t}(x, y)dt = H(x, y).$$

Finalmente, $(H \circ \Phi_{2i\pi s}(x, y) = (D\Phi_{2i\pi s}(0) \circ H)(x, y)$ para todo $s$ suficientemente pequeño; como H es holomorfo, se tiene

$$H \circ \Phi_t = D\Phi_t(0)) \circ H.$$

Tenemos que H lienealiza X. El campo X y $w$ poseen una integral primera convergente $f$, que puede elegirse bajo la forma $x^r y^q$. ∎

Quiere decir, si $\mathcal{F}$ es el germen de una foliación con una singularidad simple entonces la integral primera formal y holomorfa son equivalentes.

El caso general la obtenemos a partir de las singularidades simples y del comportamiento de las integrales primeras por explosiones.

**Observación** Sea $f = x^r y^q$, donde $r, q$ son primos entre sí. Observamos en la prueba anterior, que si $\widehat{g}$ es una integral primera formal de $\mathcal{F}$, luego, existe $\widehat{t} \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $\widehat{g} = \widehat{t} \circ f$. Además, $\widehat{g}$ es convergente si y sólo si $\widehat{t}$ es convergente.

**Lema 6.** *Sea $\widehat{F} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ y $\pi : E \to (\mathbb{C}^n, o)$ la explosión del origen de $\mathbb{C}^n$. Si existe un punto $m \in \pi^{-1}(0)$ tal que $(\widehat{F} \circ \pi)_m$ sea convergente, entonces $\widehat{F}$ es convergente.*

**Prueba** Haciendo un cambio lineal de coordenadas, es suficiente mostrar que la convergencia de la serie formal

$$\sum a_{j_1 \cdots j_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$$

es equivalente a

$$\sum a_{j_1 \cdots j_n} z_1^{j_1 + \cdots j_n} z_2^{j_2} \cdots z_n^{j_n}.$$

La convergencia de la segunda serie asegura la existencia de una constante $A > 1$ tal que

$$|a_{j_1 \cdots j_n}| \leq A^{j_1 + 2(j_2 + \cdots j_n)};$$

sigue $|a_{j_1 \cdots j_n}| \leq (A^2)^{j_1 + j_2 + \cdots j_n}$ y la primera serie converge. ∎

**Proposición 4.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación en el origen de $\mathbb{C}^2$ que posee una integral primera formal*

$$\widehat{f} = \widehat{f}_1 \widehat{f}_2$$

*donde $\widehat{f}_1$ es irreducible y $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ no poseen factores comunes. Existe*

$$\widehat{\tau} \in t\mathbb{C}[[t]], \quad \partial\widehat{\tau}/\partial t(0) \neq 0$$

*tal que $\widehat{\tau} \circ \widehat{f}$ sea convergente. En particular $\mathcal{F}$ posee una integral primera convergente.*

**Prueba** La prueba se hace por recurrencia sobre el número mínimo $q$ de explosiones necesarias para reducir la singularidad de $\mathcal{F}$.

Si $q = 0$ se aplica el lema anterior de dimensión dos.

Supongamos ahora que el resultado sea verdad para las foliaciones donde la reducción de singularidades se hace en menos de $q$ explosiones Sea $\pi : E \to \mathbb{C}^2$ la explosión en el origen de $\mathbb{C}^2$ y $m \in \pi^{-1}$ el punto del divisor por el que pasa el transformado estricto $\widehat{f}_1' = 0$ de la curva formal $\widehat{f}_1 = 0$: La recurrencia se aplica al germen en $m$ del transformado estricto $\pi^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ y se tiene

$$(\widehat{f} \circ \pi)_m = \widehat{f}_1'\widehat{g};$$

existe $\widehat{\tau} \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $\widehat{\tau} \circ (\widehat{f} \circ \pi)_m$ sea convergente: La convergencia de $\widehat{\tau} \circ \widehat{f}$ es asegurado por el lema anterior. ■

**Lema 7.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación en el origen de $\mathbb{C}^n$ que posee una integral primera formal $\widehat{f}$. Supongamos que existe*

$$\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$$

*tal que $\widehat{f} \circ \gamma$ converge y sea no constante , entonces $\widehat{f}$ converge.*

**Prueba** Sea $\pi : E \to \widehat{C^n}$ la explosión en el origen. Consideramos la elevación $\widehat{\gamma} : (\mathbb{C}, 0) \to E$ de $\gamma$ por la explosión $\pi$. Supongamos que $\widehat{\gamma}(0) = m$ no sea parte de $Sing|a_{j_1 \cdots j_n}| \leq A^{j_1 + 2(j_2 + \cdots j_n)}$. El teorema de Frobenius clásico asegura la existencia de coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ en $m$ tal que $\pi^*\mathcal{F}$ sea dado por $dy_1$, por consiguiente $(\widehat{f} \circ \pi)_m = \widehat{l}(y_1)$ para un cierto $l$ en $\mathbb{C}[[t]]$. Porque

$$\widehat{f} \circ \pi\widehat{\gamma} = \widehat{l}(y_1(\gamma))$$

es convergente y no constante, $\widehat{l}$ es convergente. Se sigue enseguida que $(\widehat{f} \circ \pi)_m$ también. El lema anterior implica la convergencia de $\widehat{f}$.

■

Finalmente, probamos el importante teorema de Frobenius. El espacio donde se trabaja es el espacio $\mathbb{C}^n$.

**Teorema 11** (Teorema de Frobenius singular). *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación en el origen de $\mathbb{C}^n$ de codimensión uno. Si $Codim\, Sing\mathcal{F} \geq 3$, entonces $\mathcal{F}$ posee una integral primera convergente.*

**Prueba** Si se tiene una germen de foliación $\mathcal{F}$ de codimensión uno, entonces existe un germen de 1-forma $w$ integrable. Del teorema de Frobenius formal , existen $\widehat{f}, \widehat{g}$ en $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ tal que $w = \widehat{g}d\widehat{f}$, donde $\widehat{g}(0) \neq 0$. Tenemos a $\widehat{f}$ una integral primera formal de la foliación. Si la aplicación $i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es una inmersión transversal a $\mathcal{F}$, la cual existe por [4], luego , por definición $Sing(i^*\mathcal{F}) = \{0\}$; esto significa que $Codim\, Sing(i^*\mathcal{F}) = 2$ donde se trabaja el espacio. Entonces, pasando al espacio $\mathbb{C}^2$ tenemos

$$i^*w = (\widehat{g} \circ i)d(\widehat{f} \circ i)$$

y la composición $\widehat{f_0} = \widehat{f} \circ i$ satisface las hipótesis de la proposición 4, porque en caso contrario si $\widehat{f_0}$ no es irreducible, se tiene que $Codim\, Singd\widehat{f_0} = 1$, contradiciendo la inmersión transversal de $i$. Por consiguiente existe $\widehat{l}$ en $t\mathbb{C}[[t]]$ tal que $\widehat{l} \circ \widehat{f} \circ i$ sea convergente. La convergencia de $\widehat{l} \circ \widehat{f}$ es consecuencia del lema anterior, allí, se aplica en elegir la curva $\gamma = i \circ \gamma_1$, donde

$$\gamma_1 : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$$

es tal que $\widehat{f} \circ \gamma$ sea no constante. La función holomorfa $\widehat{l} \circ \widehat{f}$ es la integral primera holomorfa de $\mathcal{F}$. ∎

# DISCUSIÓN

Usando [2], hemos llegado a probar un teorema importante en el estudio de las foliaciones holomorfas; esto nos permite relacionar e interactuar nociones de campos vectoriales, 1-formas diferenciales y foliaciones integrales. Nuestro objeto de investigación son la integrales primeras, es decir, una función $f \in \mathcal{O}(M)$ no constante tal que $w_j \wedge df = 0$ donde $\{(U_j, w_j)\}$ es un sistema de coordenadas para una foliación $\mathcal{F}$ de la variedad M.

Podemos tomar las 1-formas del sistema de coordenadas y exigir la afirmación de las formas diferenciales del teorema de Frobenius en el caso particular de foliaciones de codimensión 1, donde se cumple $dw_j \wedge w_j = 0$ en cada partición $U_j$ de M.

Sabemos que se tiene localmente integrales primeras a la luz de la nueva hipótesis $dw_j \wedge w_j = 0$, queremos buscar alguna condición global para las integrales primeras holomorfas.

# CONCLUSIONES

1. Si $\mathcal{F}$ es una foliación sobre $\mathbb{C}^2$ con una singularidad simple en el origen, existe una curva convergente siguiendo la dirección del autovalor no nulo en el origen y transversal a una curva integral dada de la foliación.

2. Existe un germen de una integral primera formal para foliaciones que tengan codimensión mayor a dos.

3. La explosión de una foliación alrededor del origen preserva la convergencia de series formales, es decir, si el explotado de la serie es convergente entonces la serie original es convergente.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] CAMACHO, C., LINS NETO, A. *Teoria geométrica das folheacoes*, Impa, 1979, 238 p.

[2] CANO, F., CERVEAU y otros. *Théorie elementaire des feuilletages holomorphes singuliers*, Collection Echelles, 2013, 206 p.

[3] LINS, A., SCARDUA, B. *Folheacoes ALgebricas Complexas*, Impa, 1997, 253 p.

[4] MATTEI, J.F., MOUSSU, R. *Holonomie et integrales premieres*, Ann. Ec. Norm. Sup.13 (1980), 469-523 p.

[5] WARNER, F. *Foundation of Diffentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott Foresman ans Company , 1971, 270 p.

# EXISTENCIA DE INTEGRALES PRIMERAS HOLOMORFAS PARA FOLIACIONES DE CODIMENSIÓN MAYOR A DOS

CONDORI CONDORI, JOSE LUIS
PROGRAMA: Matemática AREA: Matemática Básica
email: jlcpazfeamor@hotmail.com

RESUMEN

En esta investigación estudiamos la existencia de integrales primeras convergentes para foliaciones de codimensión mayor a dos, extendiendo el resultado formal del Teorema de Frobenius singular formal con la construcción del algoritmo de Godbillon-Vey. Realizamos un estudio teórico de las foliaciones, explosiones y teoremas de integrabilidad de Frobenius. La existencia de integrales primeras permite entender la topología de las hojas de la foliación
Palabras claves: foliaciones, convergencia de integrales primeras

**Abstrac**

Existence of first integrals for foliations with codimension holomorphic greater than two

In this research we study the existence of convergence first integrate for foliations with codimension bigger than two, we extended the formal research of singularities of Frobenius theorem with the construction of Godbillon-Vey algorithm. We do the theoric study of foliations, blowup and theorems of Frobenius´integrable. The existence of firts integrate allows us to understand the topology of leaves foliations.
Keywords: foliations, first integrate convergence

## 1. Introducción

El artículo titulado " Existencia de integrales primeras holomorfas para foliaciones de codimensión mayor a dos" tiene el propósito de presentar de manera completa el llamado Teorema de Frobenius, pero extendiendo los resultados a las integrales primeras holomorfas para foliaciones de codimensión mayor a dos.

Presentamos el contexto de las foliaciones, explosiones, los campos vectoriales y el dual de las 1-formas diferenciales y el importante teorema de Briot-Bouquet.

En la parte de los resultados nos centramos en lograr demostrar la existencia de las integrales primeras para foliaciones de codimensión mayor a dos, bajo las siguientes inferencias: por el algoritmo de Godbillon-Vey construimos formalmente la existencia de una integral primera formal, la hipótesis de la codimensión mayor a dos proviene de los teoremas del álgebra conmutativa de Rham-Saito; presentamos la conversión de una integral primera formal e holomorfa para puntos simples y foliaciones de dimensión dos; aplicando resultados de explosiones se logra el resultado que deseamos.

José Luis Condori C.

Presentamos la definición de foliación holomorfa.

**Definición 1.** *Sea $M$ una variedad compleja de dimensión $m$ y clase $C^\infty$. Una* ***foliación de clase*** $C^r$ $(0 < r \leq \infty)$***y dimensión*** $n$ $(0 < n < m)$ *de $M$, denotada por $\mathcal{F}$, es un atlas maximal con las siguientes propiedades:*

a) *Si la carta $(U, \phi) \in \mathcal{F}$, con $U$ abierto en $M$, entonces $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n}$, donde $U_1$ y $U_2$ son polidiscos abiertos y centrados en el origen de $\mathbb{C}^n$ y de $\mathbb{C}^{m-n}$, respectivamente.*

b) *Si $(U, \phi)$ y $(V, \psi)$ son dos cartas de la foliación $\mathcal{F}$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas será de clase $C^r$ y es dada por $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \bigcap V) \to \psi(U \bigcap V)$ bajo la siguiente regla*
$$\psi \circ \phi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)),$$
*donde $h_1 : \phi(U \cap V) \to \mathbb{C}^n, h_2 : \phi(U \cap V) \to \mathbb{C}^{m-n}$ son funciones de clase $C^r$.*

Ahora presentamos la explosión en el plano $\mathbb{C}^2$.

**Definición.** La explosión de $\mathbb{C}^2$ en el origen $0 \in \mathbb{C}^2$ es el subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$ dada por

$$\mathbb{C}_0^2 = \{(p, 0p), p \neq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{C}P(1)).$$

Lo que hace la explosión es reemplazar $0 \in \mathbb{C}^2$ por el espacio proyectivo $\mathbb{C}P(1)$.

A continuación veamos los campos vectoriales. Dado un campo de k-planos P en M, diremos que **el campo de vectores X es tangente** a P si $X(q) \in P(q)$ para todo $q$ en el dominio de X.

Un campo de k-planos P de clase $C^r(r \geq 1)$ es llamado **involutivo** si dados $X, Y$ campos de clase $C^1$ tangentes a P entonces $[X, Y]$ es tangente a P.

Diremos que P es **completamente integrable** si existe una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión k y clase $C^r$ en M tal que $T\mathcal{F} = P$, donde $T\mathcal{F}$ es el campo de planos tangente a $\mathcal{F}$.

# 2. Materiales y métodos

Esta investigación es un tipo de investigación básica en la lectura de los artículos referidos en la bibliografía, en especial [2]. Trata de buscar la expresión formal a la equivalencia de una serie de coeficientes p-ádicos con una serie polinomial más sencilla llamada PDJ. Se da algunos ejemplos y se analiza en su generalidad.

Tipo de investigación: básica, nivel de investigación: explicativa, método: deductivo, inductivo y analítico, diseño: explicativo, instrumentos: bibliografía especializada

# 3. Resultados

En la primera subsección presentamos el fundamento formal de nuestra investigación con el teorema de frobenius formal. En la siguiente subsección probamos la veracidad de nuestra hipótesis de la existencia de integrales primeras holomorfas.

## 3.1. División de Rham-Saito

Nosotros vamos a redefinir dos casos especiales de la división de Rham-Saitó. Para ello, repasamos algunos términos del álgebra conmutativa. Ello nos da el fundamento algebraico de la presente investigación. También, al final de la sección, damos otras expresiones del teorema de Frobenius.

Sea J un ideal de $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ y A el álgebra analítica $\mathcal{O}_n/J$. Recordemos que si $\tilde{A} \subset A$ es un ideal, la **profundidad** de $\tilde{A}$ es el más grande entero $q$ para los cuales existen elementos $a_1, \ldots, a_q$ de $\tilde{A}$ con la propiedad siguiente: $a_j$ no es un divisor de cero en $A/(a_1, \ldots, a_{j-1})$ para todo $j = 1, \ldots, q$. La denotamos por $prof\tilde{A}$.

Otra manera equivalente de enunciar: la profundidad del ideal $\tilde{A}$ es el mayor eentero $j$ para los cuales existe un elemento $b \notin (a_1, \ldots, a_{j-1})$ tal que $ab \in (a_1, \ldots, a_{j-1})$.

Consideramos el $\mathcal{O}_n$-módulo $\Omega_{\mathbb{C}^n,o} = \bigoplus_k \Omega^k_{\mathbb{C}^n,0}$ de gérmenes de formas diferenciales de cualquier orden $k$ en el origen de $\mathbb{C}^n$ y

$$\bigwedge A = \bigoplus_k \bigwedge^k A,$$

donde

$$\bigwedge^k A = \Omega^k_{\mathbb{C}^n,0} \bigotimes_{\mathcal{O}_n} A$$

el A-módulo de formas diferenciales con coeficientes en A. Un elemento de $\bigwedge^k A$ se escribe en la base $dz_{j_1} \wedge dz_{j_2} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}$ como

$$\sum \underline{a}_{j_1 j_2 \cdots j_k} dz_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_k}$$

donde $\underline{a}_{j_1 \cdots j_k} = a_{j_1 \cdots j_k} + J$ es un elemento de $\mathcal{O}_n$. Notamos por $\bigwedge^0 A = A$ y $\bigwedge^{n+j} A = 0$ para $j \geq 1$.

El siguiente lema se usará para relacionar la profundidad de un ideal engendrado.

**Lema 1.** *Sea $w = \sum \underline{a}_j dz_j$ un elemento no nulo de $\bigwedge^1 A$. Si $\beta \in \bigwedge^k A$ verifica $\beta \wedge w = 0$, entonces existen $\theta_j$ en $\bigwedge^{k-1} A$ tal que*

$$\underline{a}_j \beta = w \wedge \theta_j.$$

**Prueba** Basta aplicar los campos $\frac{\partial}{\partial z_j}$ por producto interior a la igualdad $\beta \wedge w = 0$. ∎

**Teorema 1.** *Sea $w = \sum \underline{a}_j dz_j$ en $\bigwedge^1 A$ y $\mathcal{A}$ el ideal engendrado por los coeficientes de $w$. Si $\beta$ es un elemento de $\bigwedge^k A$ tal que $w \wedge \beta = 0$ y si $k < prof \mathcal{A}$, entonces existe $\theta \in \bigwedge^{k-1} A$ tal que $\beta = w \wedge \theta$.*

**Prueba** Un bosquejo de la prueba dice, primero se hace recurrencia sobre $k$. Si $k = 0$, $\beta = b \in A$, verifica $bw = 0$, es decir,

$$b\underline{a}_j = 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n;$$

Como $prof \mathcal{A} > 0$ se deduce que $b = 0$. Supongamos el resultado establecido para los índices $j < k$, se aplica el lema anterior para la existencia del elemento $\theta' \in \bigwedge k - 1A$. ∎

Los resultados que vamos logrando tratan de diversas condiciones o hipótesis para despejar formas factores o divisores de cero en función a la otra forma. El teorema que sigue toma en cuenta la codimensión de la singularidad de la 1-forma.

**Teorema 2** (Teorema de Rham-Saito). *Consideramos el germen de la 1-forma holomorfa $w = \sum \underline{a}_j n dz_j$ en el origen de $\mathbb{C}^n$ y $\beta$ un germen de k-forma tal que $w \wedge \beta = 0$. Si $k < codSing(w)$, entonces existe un germen $\theta$ de $(k-1)$-forma tal que $\beta = w \wedge \theta$.*

En particular cuando $w$ tiene una singularidad aislada, el enunciado se aplica a toda forma $\beta$ de grado inferior o igual a $n - 1$.

**Prueba** Sea J el ideal engendrado por los coeficientes de $w$. Es suficiente observar que $prof\, J \geq codimSing(w)$. ∎

Fijemos un germen $w = \sum_{j=1}^n a_j dz_j$ de 1-formas integrales en el origen de $\mathbb{C}^n$ tal que $cod\, Singw \geq 3$. Presentemos el siguiente algoritmo formal de Godbillon-Vey que produce una integral primera formal de $w$.

Como $w$ es integrable se cumple $w \wedge dw = 0$. El primer teorema de Rham Saito asegura la existencia de un germen de forma $w_1 \in \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0}$, tal que

$$dw = w \wedge w_1.$$

Diferenciando la igualdad precedente se obtiene

$$0 = dw \wedge w_1 - w \wedge dw_1 = -w \wedge dw_1.$$

De nuevo existe $w_2$ tal que

$$dw_1 = w \wedge w_2.$$

Por recurrencia, se construye un conjunto de gérmenes de 1-formas $w_j \in \Omega^1_{\mathbb{C}^n,0}$, tal que

$$dw_j = w \wedge w_{j+1} + \sum_{1 \leq k \leq j} C_j^k w_k \wedge w_{j-k+1}.$$

Siguiendo la idea de Martinet, nos ayudamos de una variable $t$ y se considera la forma diferencial formal

$$\widehat{w} = dt + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j w_j}{j!}.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} d\widehat{w} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}(w \wedge w_{j+1} + \sum_{\leq k \leq j} C_j^k) w_k \wedge w_{j-k+1}) \\ &+ dt \wedge \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} w_j. \end{aligned}$$

De donde

$$d\widehat{w} = \widehat{w} \wedge \sum_{j=1}^{i} nfty$$

Por consecuencia la 1-forma formal $\widehat{w}$ es no singular e integrable. El teorema de Frobenius formal, que es una adaptación elemental del primer teorema asegura la existencia de dos series formales $F, G$ en $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ tal que

$$G(0) \neq 0, \quad \widehat{w} = GdF.$$

Para $t = 0$ esta igualdad conduce al enunciado siguiente.

**Teorema 3.** *Si* $w = \sum_{j=1}^{n} a_j dz_j$ *es un germen de 1-forma integrable en el origen de* $C^n$ *tal que* $Cod\, Sing w \geq 3$, *entonces* $w$ *posee una integral primera formal; es decir, existen dos series formales* $\widehat{f}, \widehat{g} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ *tal que*

$$\widehat{g}(0) \neq 0, \quad w = \widehat{g}\, d\widehat{f}.$$

Este teorema establece la formalidad de las 1 formas integrales sin interesar que el origen sea punto singular de $\mathbb{C}^n$.

## 3.2. Teorema de Frobenius singular

El siguiente lema resuelve el problema del paso de la integral primera formal a integral primera holomorfa en las singularidades simples.

Se dice que el origen es una singularidad simple en el origen de una foliación $\mathcal{F}$ dada localmente por $w = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ si la matriz jacobiana

$$J_0(w; x, y) = \begin{pmatrix} -b_x(0) & -b_y(0) \\ a_x(0) & a_y(0) \end{pmatrix}$$

tiene dos valores propios distintos $\lambda, \mu$ tal que $\mu \neq 0$ y $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}^+$. La definición no depende de la elección de $w$ ni de las coordenadas $(x, y)$.

Observe , en particular, que si $\lambda = 0$ y $\mu$ es cualquier valor no nulo entonces el cociente $\lambda/\mu = 0 \notin \mathbb{Q}^+$. Luego, el origen es una singularidad simple; en este caso , llamamos al origen una singularida simple **silla nodo**.

**Lema 2.** *Sea* $\mathcal{F}$ *un germen de foliación con una singularidad simple en el origen del plano* $\mathbb{C}^2$. *Si* $\mathcal{F}$ *posee una integral primera formal no constante* $\widehat{f}$, *entonces* $\mathcal{F}$ *tiene una integral primera holomorfa* $f$.

**Prueba** Las componentes irreducibles de $\widehat{f}$ son las curvas integrales formales y $\mathcal{F}$ tiene una singularidad simple en el origen, luego, existe un sistema de coordenadas formales $(\widehat{x}, \widehat{y})$ tal que

$$\widehat{f} = \widehat{x}^r \widehat{y}^q$$

donde $r, q$ son números enteros primos relativos. Por consiguiente $\mathcal{F}$ es formalmente linealizable y descrito por

$$\widehat{x}\widehat{y}(r\frac{d\widehat{x}}{\widehat{x}} + q\frac{d\widehat{y}}{\widehat{y}})$$

. El teorema de Briot- Bouquet asegura la convergencia de las curvas $\widehat{x} = 0, \widehat{y} = 0$. Existe un sistema de coordenadas convergentes $(x, y)$ en las que $\mathcal{F}$ es dada por

$$w = rydx + qx(1 + U(x, y))dy, \quad U(0, 0) = 0.$$

También se tiene

$$\widehat{f}(x, y) = x^r y^q \widehat{W}(x, y) = \widehat{x}^r \widehat{y}^q$$

donde $\widehat{W}(x, , y)$ es una unidad formal $\widehat{W}(0) = 1$ Consideramos el campo de vectores

$$X = qx(1 + U(x, y))\frac{\partial}{\partial x} - ry\frac{\partial}{\partial y}$$

y el flujo $\Phi_t = exp\, tX$ el grupo de 1 parámetro es decir, tiene la forma

$$\Phi_t(x, y) = (xexp\,(qt)V(x, y, t), yexp(-rt))$$

con $V(0, 0, t) = V(x, y, 0) = 1$. Designamos por X para representar el germen del mismo X definido sobre la bola $B \subset \mathbb{C}^2$ centrado en el origen. Si B es suficientemente pequeño , la aplicación $(x, y, t) \mapsto \Psi_t(x, y)$ está definido sobre $B \times D(0, 7)$ donde $D(0, 7)$ es el disco de radio 7 centrado en el origen. Como $X\widehat{f} = 0$ para todo $t \in D(0, 7)$ se tiene $\widehat{f} \circ \Phi_{2i\pi} = \widehat{f}$ El difeomorfismo $\Phi_{2i\pi}(x, y) = (xV(x, y, 2i\pi), y) == (xV_1(x, y), y)$ es tangente a la identidad, se deduce

$$V_1^r(x, y)\widehat{W}(xV_1, y) = \widehat{W}(x, y).$$

El teorema de la función implícita aplicado a la ecuación precedente conduce a $V_1 = 1$, es decir, $\Phi_{2i\pi} = Id_{\mathbb{C}^2}$

Notamos por $D\Phi_t(0)$ la diferencial de $\Phi_t$ en el punto 0 e introducimos la aplicación

$$H(x, y) = \int_0^1 (D\Phi_{2i\pi}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi t}(x, y)dt$$

que es holomorfo sobre una vecindad del origen de $\mathbb{C}^2$. Observamos que $DH(0) = Id$. Para un número real $s$ vecindad de 0 se tiene

$$\begin{aligned} H \circ \Phi_{2i\pi s} &= \int_0^1 (D\Phi_{2i\pi t}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt \\ &= \int_0^1 D\Phi_{2i\pi s}(0)(D\Phi_{2i\pi(t+s)}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt \\ &= D\Phi_{2i\pi s}(0)\int_0^1 (D\Phi_{2i\pi(t+s)}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt \end{aligned}$$

Como $t \mapsto \Phi_{2i\pi t}$ es periódico de período 1, se puede escribir

$$\int_0^1 (D\Phi^{-1}_{2i\pi(t+s)(0)})\Phi_{2i\pi(t+s)}(x, y)dt = \int_0^1 (D\Phi_{2i\pi t}(0))^{-1}\Phi_{2i\pi t}(x, y)dt = H(x, y).$$

Finalmente, $(H \circ \Phi_{2i\pi s}(x, y) = (D\Phi_{2i\pi s}(0) \circ H)(x, y)$ para todo $s$ suficientemente pequeño; como H es holomorfo, se tiene

$$H \circ \Phi_t = D\Phi_t(0)) \circ H.$$

Tenemos que H lienealiza X. El campo X y $w$ poseen una integral primera convergente $f$, que puede elegirse bajo la forma $x^r y^q$. ∎

Quiere decir, si $\mathcal{F}$ es el germen de una foliación con una singularidad simple entonces la integral primera formal y holomorfa son equivalentes.

El caso general la obtenemos a partir de las singularidades simples y del comportamiento de las integrales primeras por explosiones.

**Observación** Sea $f = x^r y^q$, donde $r, q$ son primos entre sí. Observamos en la prueba anterior, que si $\widehat{g}$ es una integral primera formal de $\mathcal{F}$, luego, existe $\widehat{t} \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $\widehat{g} = \widehat{t} \circ f$. Además, $\widehat{g}$ es convergente si y sólo si $\widehat{t}$ es convergente.

**Lema 3.** *Sea $\widehat{F} \in \mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ y $\pi : E \to (\mathbb{C}^n, o)$ la explosión del origen de $\mathbb{C}^n$. Si existe un punto $m \in \pi^{-1}(0)$ tal que $(\widehat{F} \circ \pi)_m$ sea convergente, entonces $\widehat{F}$ es convergente.*

**Prueba** Haciendo un cambio lineal de coordenadas, es suficiente mostrar que la convergencia de la serie formal

$$\sum a_{j_1 \cdots j_n} z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$$

es equivalente a

$$\sum a_{j_1 \cdots j_n} z_1^{j_1 + \cdots j_n} z_2^{j_2} \cdots z_n^{j_n}.$$

La convergencia de la segunda serie asegura la existencia de una constante $A > 1$ tal que

$$|a_{j_1 \cdots j_n}| \leq A^{j_1 + 2(j_2 + \cdots j_n)};$$

sigue $|a_{j_1 \cdots j_n}| \leq (A^2)^{j_1 + j_2 + \cdots j_n}$ y la primera serie converge. ∎

**Proposición 1.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación en el origen de $\mathbb{C}^2$ que posee una integral primera formal*

$$\widehat{f} = \widehat{f}_1 \widehat{f}_2$$

*donde $\widehat{f}_1$ es irreducible y $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ no poseen factores comunes. Existe*

$$\widehat{\tau} \in t\mathbb{C}[[t]], \quad \partial\widehat{\tau}/\partial t(0) \neq 0$$

*tal que $\widehat{\tau} \circ \widehat{f}$ sea convergente. En particular $\mathcal{F}$ posee una integral primera convergente.*

**Prueba** La prueba se hace por recurrencia sobre el número mínimo $q$ de explosiones necesarias para reducir la singularidad de $\mathcal{F}$.

Si $q = 0$ se aplica el lema anterior de dimensión dos.

Supongamos ahora que el resultado sea verdad para las foliaciones donde la reducción de singularidades se hace en menos de $q$ explosiones Sea $\pi : E \to \mathbb{C}^2$ la explosión en el origen de $\mathbb{C}^2$ y $m \in \pi^{-1}$ el punto del divisor por el que pasa el transformado estricto $\widehat{f}'_1 = 0$ de la curva formal $\widehat{f}_1 = 0$: La recurrencia se aplica al germen en $m$ del transformado estricto $\pi^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ y se tiene

$$(\widehat{f} \circ \pi)_m = \widehat{f}'_1 \widehat{g};$$

existe $\widehat{\tau} \in \mathbb{C}[[t]]$ tal que $\widehat{\tau} \circ (\widehat{f} \circ \pi)_m$ sea convergente: La convergencia de $\widehat{\tau} \circ \widehat{f}$ es asegurado por el lema anterior. ■

**Lema 4.** *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación en el origen de $\mathbb{C}^n$ que posee una integral primera formal $\widehat{f}$. Supongamos que existe*

$$\gamma : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$$

*tal que $\widehat{f} \circ \gamma$ converge y sea no constante , entonces $\widehat{f}$ converge.*

**Prueba** Sea $\pi : E \to \widehat{C^n}$ la explosión en el origen. Consideramos la elevación $\widehat{\gamma} : (\mathbb{C}, 0) \to E$ de $\gamma$ por la explosión $\pi$. Supongamos que $\widehat{\gamma}(0) = m$ no sea parte de $Sing|a_{j_1 \cdots j_n}| \leq A^{j_1 + 2(j_2 + \cdots j_n)}$. El teorema de Frobenius clásico asegura la existencia de coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ en $m$ tal que $\pi^*\mathcal{F}$ sea dado por $dy_1$, por consiguiente $(\widehat{f} \circ \pi)_m = \widehat{l}(y_1)$ para un cierto $l$ en $\mathbb{C}[[t]]$. Porque

$$\widehat{f} \circ \pi\widehat{\gamma} = \widehat{l}(y_1(\gamma))$$

es convergente y no constante, $\widehat{l}$ es convergente. Se sigue enseguida que $(\widehat{f} \circ \pi)_m$ también. El lema anterior implica la convergencia de $\widehat{f}$.

■

Finalmente, probamos el importante teorema de Frobenius. El espacio donde se trabaja es el espacio $\mathbb{C}^n$.

**Teorema 4** (Teorema de Frobenius singular). *Sea $\mathcal{F}$ un germen de foliación en el origen de $\mathbb{C}^n$ de codimensión uno. Si $Codim\, Sing\mathcal{F} \geq 3$, entonces $\mathcal{F}$ posee una integral primera convergente.*

**Prueba** Si se tiene una germen de foliación $\mathcal{F}$ de codimensión uno, entonces existe un germen de 1-forma $w$ integrable. Del teorema de Frobenius formal , existen $\widehat{f}, \widehat{g}$ en $\mathbb{C}[[z_1, \ldots, z_n]]$ tal que $w = \widehat{g}d\widehat{f}$, donde $\widehat{g}(0) \neq 0$. Tenemos a $\widehat{f}$ una integral primera formal de la foliación. Si la aplicación $i : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ es una inmersión transversal a $\mathcal{F}$, la cual existe por [4], luego , por definición $Sing(i^*\mathcal{F}) = \{0\}$; esto significa que $Codim\, Sing(i^*\mathcal{F}) = 2$ donde se trabaja el espacio. Entonces, pasando al espacio $\mathbb{C}^2$ tenemos

$$i^*w = (\widehat{g} \circ i)d(\widehat{f} \circ i)$$

y la composición $\widehat{f}_0 = \widehat{f} \circ i$ satisface las hipótesis de la proposición 1, porque en caso contrario si $\widehat{f}_0$ no es irreducible, se tiene que $Codim\, Singd\widehat{f}_0 = 1$, contradiciendo la inmersión transversal de $i$. Por consiguiente existe $\widehat{l}$ en $t\mathbb{C}[[t]]$ tal que $\widehat{l} \circ \widehat{f} \circ i$ sea convergente. La convergencia de $\widehat{l} \circ \widehat{f}$ es consecuencia del lema anterior, allí, se aplica en elegir la curva $\gamma = i \circ \gamma_1$, donde

$$\gamma_1 : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$$

es tal que $\widehat{f} \circ \gamma$ sea no constante. La función holomorfa $\widehat{l} \circ \widehat{f}$ es la integral primera holomorfa de $\mathcal{F}$. ■

# 4. Discusión

Hemos llegado a probar un teorema importante en el estudio de las foliaciones holomorfas; esto nos permite relacionar e interactuar nociones de campos vectoriales, 1-formas diferenciales y foliaciones integrales. Nuestro objeto de investigación son la integrales primeras, es decir, una función $f \in \mathcal{O}(M)$ no constante tal que $w_j \wedge df = 0$ donde $\{(U_j, w_j)\}$ es un sistema de coordenadas para una foliación $\mathcal{F}$ de la variedad M.

Podemos tomar las 1-formas del sistema de coordenadas y exigir la afirmación de las formas diferenciales del teorema de Frobenius en el caso particular de foliaciones de codimensión 1, donde se cumple $dw_j \wedge w_j = 0$ en cada partición $U_j$ de M.

Sabemos que se tiene localmente integrales primeras a la luz de la nueva hipótesis $dw_j \wedge w_j = 0$, queremos buscar alguna condición global para las integrales primeras holomorfas.

# 5. Referencias bibliográficas


[1] CAMACHO, C., LINS NETO, A. *Teoria geométrica das folheacoes*, Impa, 1979, 238 p.

[2] CANO, F., CERVEAU y otros.*Théorie elementaire des feuilletages holomorphes singuliers*, Collection Echelles, 2013, 206 p.

[3] LINS, A., SCARDUA, B.*Folheacoes ALgebricas Complexas*, Impa, 1997, 253 p.

[4] MATTEI, J.F., MOUSSU, R.*Holonomie et integrales premieres*, Ann. Ec. Norm. Sup.13 (1980), 469-523 p.

[5] WARNER, F. *Foundation of Diffentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott Foresman ans Company , 1971, 270 p.