

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTOBAL DE
HUAMANGA**

FACULTAD DE INGENIERÍA MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS**



**“REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE WEIERSTRASS
PARA SUPERFICIES MÍNIMAS”**

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN
CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA POR
EL BACHILLER:**

NELSON BERROCAL HUAMANÍ

ASESORA: Mg. MARTHA NINA ESCALANTE

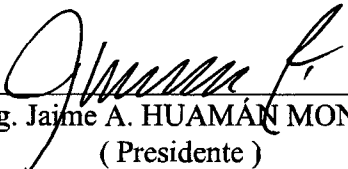
AYACUCHO - PERÚ

JUNIO-2017

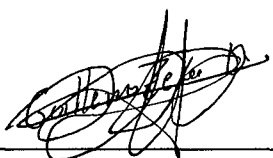
REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE WEIERSTRASS PARA SUPERFICIES MÍNIMAS.

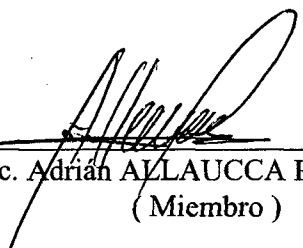
RECOMENDADO : 10 DE AGOSTO DEL 2017

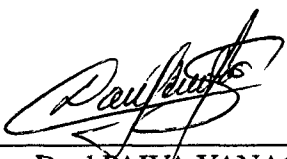
APROBADO : 27 DE SETIEMBRE DEL 2017


Dr. Ing. Jaime A. HUAMÁN MONTES
(Presidente)


Msc. José L. CONDORI CONDORI
(Miembro)


Lic. Guillermo J. ZELA QUISPE
(Miembro)


Lic. Adrián ALLAUCCA PAUCAR
(Miembro)


Msc. Daul PAIVA YANACO
(Secretario docente)

Según el acuerdo en el acta, levantada el 10 de agosto del 2017, en la sustentación de tesis presentado por el Bachiller Nelson BERROCAL HUAMANÍ, con la tesis Titulado “**REPRESENTACIÓN CANÓNICA DE WEIERSTRASS PARA SUPERFICIES MÍNIMAS**”, fue calificado con la nota de **DIECISÉIS (16)** por lo que se da la respectiva **APROBACIÓN**.



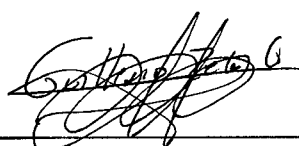
Dr. Ing. Jaime A. HUAMÁN MONTES

(Presidente)



Msc. José L. CONDORI CONDORI

(Miembro)



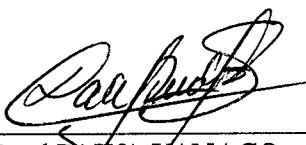
Lic. Guillermo J. ZELA QUISPE

(Miembro)



Lic. Adrián ALLAUCCA PAUCAR

(Miembro)



Msc. Daul PAIVA YANACO

(Secretario docente)

Dedicatoria

Dedico este trabajo a Dios que con amor me dio una nueva vida, a mamá que con grande esfuerzo me supo educar.

Agradecimientos

Dios te agradezco a ti ya que tu amor y bondad no tiene fin que desde el momento en que te conocí me diste una nueva vida y la alegría de vivir en las dificultades y bendiciones. Y ahora me das la bendición de concluir esta etapa de mi formación con este trabajo, que son consecuencia de tu ayuda. Agradezco también a mi esposa Nery Akida Redolo Licas y a nuestro hijo que esta por nacer Joás Isaías Berrocal Redolfo por darme su amor que no tiene fin, a mi familia que me dio el sustento para concluir mis estudios universitarios a mamá Julia Huamaní Parihuamán, a papá Telmo Alvino Berrocal Gomez y a todos mis hermanos. Y como no agradecer a todos mis compañeros y mis profesores de la escuela de Ciencias Físico Matemáticas, por su guía y enseñanzas en especial a los profesores, Solado Reynoso en física, Enrique Aviles en topología y claro a mi asesora Martha Nina en geometría.

También un especial agradecimiento a mis hermanos en la fe de la Iglesia Cristiana Pentecostés del Perú Movimiento Misionero Mundial, al siervo del Señor Ps. Teódulo Ramírez Álamo por su guía espiritual y oraciones por este su servidor.

Índice general

Introducción	1
1. Superficies Diferenciables y Variable Compleja	3
1.1. Superficies regulares	3
1.1.1. Superficies Orientables	7
1.2. Plano tangente	9
1.3. Primera Forma Fundamental	10
1.4. La Aplicación de Gauss y la Segunda Forma Fundamental	12
1.5. Curvaturas Principales	16
1.5.1. Superficies Mínimas	17
1.6. Funciones en una variable compleja	19
1.6.1. Funciones Holomorfas, Meromorfas y Polos	22
2. Propiedades de las Superficies Mínimas y la Representación canónica de Weierstrass	24
2.1. Superficies mínimas	24
2.2. Funciones Armónicas	27
2.3. Coordenadas Isotérmicas	29
2.4. Armonicidad	31
2.5. Representación Canónica de Weierstrass para Superficies Mínimas . . .	36
3. Aplicaciones	42
3.1. Ejemplos	43
3.1.1. La Helicoide	43

3.1.2. La Catenoides	45
3.1.3. La superficie de Scherk's	46
3.1.4. Superficie de Henneberg's	48
3.1.5. Superficie de Enneper's	49
3.2. Conclusiones	50
Referencias Bibliográficas	51

Introducción

En la Geometría diferencial uno de los temas de investigación que tiene en la actualidad una gran acogida son el estudio de las superficies mínimas. Por primera vez fueron introducidas por Lagrange en 1762 [5], cuando este buscaba la solución al problema de encontrar superficies con área mínima para un contorno prefijado. Un hecho que hace atractivas a las superficies mínimas es que pueden ser presentadas de diferentes maneras, en relación con distintas disciplinas. La primera forma de representarlas fue dada por el mismo Lagrange, mediante un algoritmo para el cálculo de variaciones, quien obtuvo el resultado, que las superficies mínimas son aquellas superficies que localmente se pueden expresar como la gráfica de una función el cual verifica la ecuación diferencial:

$$(1 + f_x^2)f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_y^2)f_{xx} = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación de segundo orden, se conoce en la literatura como ecuación de Euler-Lagrange (posteriormente, ecuación de los grafos mínimas) [1]. Sin embargo, Lagrange no proporcionó ninguna solución nueva a parte del plano y el catenoide. En 1776, Meusnier mostró que el helicoides también es una solución de la ecuación (1). Otra manera de representarlas fue dada por Meusnier, mediante una interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange para tales superficies: “la semisuma de las curvaturas principales se anula idénticamente (en todo punto de la superficie)” [3], esta cantidad se conoce actualmente, por sugerencia de Sophie Germain, como la curvatura media de la superficie. Hoy en día, esta caracterización es la que se ha tomado por definición de superficie mínima. También existe un punto de vista físico desde el que contemplar estas superficies. J. Plateau observó hacia 1842 que las superficies mínimas modelan matemáticamente la forma que adoptan las películas de jabón que se apoyan en un contorno de alambre fijo. Esto motivó lo que hoy se conoce como problema de Plateau, es decir, la formulación matemática de la existencia o no de superficies mínimas con frontera prefijada. En 1860, Weierstrass, construye una representación local intuitiva de las superficies mínimas usando

la representación de Weierstrass. La representación de Weierstrass es un par de funciones de valor complejo (f, g) , definida sobre un dominio simplemente conexo U del plano complejo \mathbb{C} , $U \subset \mathbb{C}$ tal que f es holomorfo, g es meromorfo, y fg^2 es holomorfo [5]. Esta teoría también desarrollada por Enneper (1864) de forma independiente. En este trabajo, representaremos a las superficies mínimas usando la denominada **Representación Canónica de Weierstrass**, el cual consiste en la obtención de fórmulas que representarán a superficies mínimas, y estas se obtienen a partir de una relación entre las inmersiones mínimas y la representación de Weierstrass. Esta forma de representar a las superficies mínimas es útil, pues permite expresar las principales características de una superficie mínima en términos de las funciones de la representación canónica de Weierstrass, como por ejemplo la curvatura Gaussiana.

Este trabajo fue dividido en capítulos de la siguiente forma:

En el capítulo 1, introduciremos algunas definiciones y resultados que serán usadas a lo largo de este trabajo, como algunos conceptos relativos a la Geometría Diferencial de superficies enfocándonos en la primera y segunda forma fundamental, definiendo también una superficie mínima, culminando con algunos resultados de las funciones de una variable compleja.

En el capítulo 2, estudiaremos las superficies mínimas, algunas de sus propiedades y nos enfocaremos en el estudio de la conexión de la superficie mínima y la variable compleja y el último resultado que enunciaremos y probaremos es el teorema principal de este trabajo “la representación canónica de weierstrass para superficies mínimas”.

En el capítulo 3, daremos como aplicación algunos ejemplos como calcular la curvatura Gaussiana en función de las dos funciones que intervienen en la representación canónica de weierstrass y de como construir superficies mínimas a partir de “la representación canónica de weierstrass para superficies mínimas”.

Al final daremos algunas conclusiones acerca del teorema de “la representación canónica de weierstrass para superficies mínimas”.

Las figuras presentes en este trabajo fueron hechas utilizando el programa Inkscape [10].

Capítulo 1

Superficies Diferenciables y Variable Compleja

En este capítulo, daremos algunos resultados de las superficies diferenciables y al final daremos algunas definiciones y resultados de las funciones en una variable compleja.

1.1. Superficies regulares

En esta sección, introduciremos algunos conceptos y resultados necesarios para el entendimiento de este trabajo, tales como: Superficies regulares, plano tangente, la primera forma fundamental, orientación de superficies, aplicación de Gauss, segunda forma fundamental y superficies mínimas.

Las superficies es uno de los conceptos más importantes en el estudio de la topología y las superficies diferenciables son estudiadas por la geometría diferencial en la cual esta basada el trabajo, en esta sección presentaremos la definición de las superficies diferenciables y algunos ejemplos.

Las referencias utilizadas son: [3],[8].

Definición 1.1. *Un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si, para cada $p \in M$, existe un entorno V en \mathbb{R}^3 y una aplicación $X : U \rightarrow V \cap M$ de un subconjunto abierto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap M \subset \mathbb{R}^3$ tal que ver Figura [3.2].*

1. X es diferenciable. Esto significa que si escribimos

$$X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

las funciones $x^1(u, v)$, $x^2(u, v)$, $x^3(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los ordenes en U .

2. X es un homeomorfismo.

3. Condición de regularidad. Para cada $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación X es llamada de **parametrización** o un sistema local de coordenadas en un entorno de p . El entorno $V \cap M$ se denomina un **entorno coordinado**.

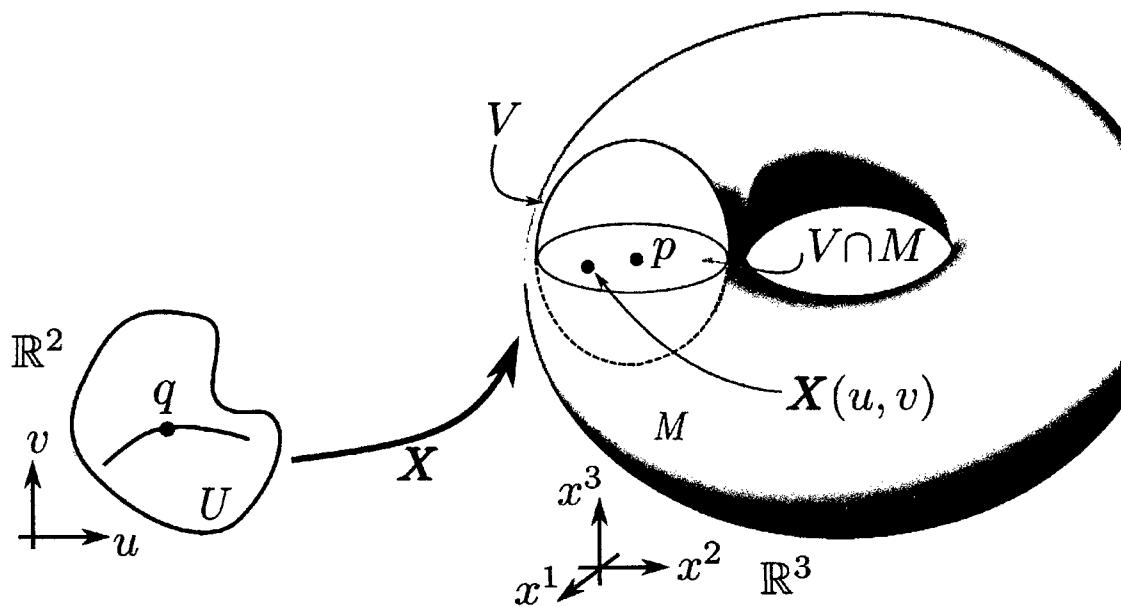


Figura 1.1: Superficie regular M .

Observación 1.2. Primero calculemos la matriz de la aplicación lineal dX_q en las bases canónicas $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ de \mathbb{R}^2 , de coordenadas (u, v) , y $l_1 = (1, 0, 0)$, $l_2 = (0, 1, 0)$, $l_3 = (0, 0, 1)$ de \mathbb{R}^3 , de coordenadas (x^1, x^2, x^3) .

Sea $q = (u_0, v_0)$. El vector e_1 es tangente a la curva $u \rightarrow (u, v_0)$ cuya imagen a través de X es la curva

$$u \rightarrow (x^1(u, v_0), x^2(u, v_0), x^3(u, v_0)).$$

Esta curva imagen (denominada la curva coordenada $v = v_0$) está contenida en M y tiene en $X(q)$ el vector tangente

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u}, \frac{\partial x^2}{\partial u}, \frac{\partial x^3}{\partial u} \right) = (x_u^1, x_u^2, x_u^3),$$

donde las derivadas están evaluadas en (u_0, v_0) y el vector se expresa por sus coordenadas en la base (l_1, l_2, l_3) . En virtud a la definición de diferencial,

$$d\mathbf{X}_q(e_1) = (x_u^1, x_u^2, x_u^3) = \mathbf{X}_u.$$

De manera similar, utilizando la curva coordenada $u = u_0$ (la imagen por \mathbf{X} de la curva $v \rightarrow (u_0, v)$), obtenemos

$$d\mathbf{X}_q(e_2) = (x_v^1, x_v^2, x_v^3) = \mathbf{X}_v.$$

Así, la base de la aplicación lineal $d\mathbf{X}_p$ en la matriz referida es

$$d\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} x_u^1 & x_v^1 \\ x_u^2 & x_v^2 \\ x_u^3 & x_v^3 \end{pmatrix}.$$

La condición 1. de la Definición [1.1] puede expresarse ahora pidiendo que los vectores columna de esta matriz sean linealmente independientes; o equivalentemente, que el producto vectorial $\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \neq 0$; o todavía de otra forma, que uno de los menores de orden dos de la matriz de $d\mathbf{X}_p$, es decir, uno de los determinantes jacobianos $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \neq 0$.

Lema 1.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Condición de regularidad. Para cada $q \in U$, la diferencial $d\mathbf{X}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva,
- Los vectores $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v}$ son independientes,
- $\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \neq 0$,
- La matriz Jacobiana J tiene rango 2, $\exists i, j : 1 \leq i < j \leq 3$, tal que $\frac{\partial(x^i, x^j)}{\partial(u, v)} \neq 0$.

Demostración: La prueba viene directamente de la Observación [1.2]. \square

Proposición 1.4. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable sobre un conjunto abierto U de \mathbb{R}^2 , entonces la gráfica de f , es decir, el subconjunto de \mathbb{R}^3 dado por $(x, y, f(x, y))$ para $(x, y) \in U$, es una superficie regular.

Demostración: Basta con demostrar que la aplicación $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\mathbf{X}(u, v) = (u, v, f(u, v)),$$

es una parametrización de la gráfica cuyo entorno coordenado recubre cada punto de dicha gráfica. La condición 1 se satisface claramente y la condición 3 tampoco ofrece dificultad alguna pues, dado $p \in U$, $\mathbf{X}_u = (1, 0, f_u)$ y $\mathbf{X}_v = (0, 1, f_v)$ así

$$d\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}.$$

Entonces $\partial(x, y)/\partial(u, v) = 1 \neq 0$. Finalmente, cada punto (x, y, z) de la gráfica está en la imagen mediante \mathbf{X} del punto único $(u, v) = (x, y) \in U$. Por esta razón \mathbf{X} es inyectiva y, ya que \mathbf{X}^{-1} es la restricción a la gráfica de f de la proyección (continua) de \mathbb{R}^3 sobre el plano xy , \mathbf{X} es continua. \square

Proposición 1.5. *Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y $p \in M$. Entonces existe un entorno V de p en M tal que V es la gráfica de una función diferenciable que tiene una de las tres formas siguientes: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$.*

Demostración: Sea $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización de M en p , y escribamos $\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in U$. Por la condición 3 de la Definición [1.1], supongamos sin pérdida de generalidad que el determinante del jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0,$$

donde $\mathbf{X}^{-1}(p) = q$. consideremos la aplicación $\pi \circ \mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde π es la proyección $\pi(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $\pi \circ \mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, y, como $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \neq 0$, podemos aplicar el teorema de la función inversa para garantizar la existencia de entornos V_1 de q , V_2 de $\pi \circ \mathbf{X}(q)$ talque $\pi \circ \mathbf{X}$ aplica V_1 difeomórficamente sobre V_2 . Se sigue que π restringida a $\mathbf{X}(V_1) = V$ es inyectiva y que hay una inversa diferenciable $(\pi \circ \mathbf{X})^{-1} : V_2 \rightarrow V_1$. Obsérvese que, como \mathbf{X} es un homomorfismo, V es un entorno de p en M . Si componemos ahora la aplicación $(\pi \circ \mathbf{X})^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ con la función $(u, v) \rightarrow z(u, v)$, encontramos que V es la gráfica de la función diferenciable $z = (u(x, y), v(x, y)) = f(x, y)$, y así obtenemos lo que queríamos. \square

Proposición 1.6. (Cambio de parámetros). *Sea p un punto de una superficie regular M , y sean $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, y $\mathbf{Y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ dos parametrizaciones de M tal que $p \in \mathbf{X}(U) \cap \mathbf{Y}(V) = W$.*

Entonces el cambio de coordenadas $h = \mathbf{X}^{-1} \circ \mathbf{Y} : \mathbf{Y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{X}^{-1}(W)$ es un difeomorfismo; es decir, h es diferenciable y tiene inversa diferenciable.

Una demostración de esta proposición está dada en página 80 del texto de referencia [3].

1.1.1. Superficies Orientables

Una superficie es orientable cuando ella es posible distinguir el lado de arriba y el lado de abajo de la superficie, de modo que un observador, allí ubicado puede distinguir izquierda de derecha en cada punto de la superficie.

Definición 1.7. Se dice que un superficie regular es M es orientable si es posible recubrirla con una familia de vecindades coordenadas de modo que si un punto p pertenece a 2 vecindades coordenadas de esta familia, entonces el cambio de coordenadas tiene el Jacobiano con determinante positivo en p .

Ejemplo 1.8. Daremos a seguir un ejemplo de superficie no orientable; la que denomina **banda de Mobius**. Esta superficie se obtiene al considerar el círculo S^1 dado por $x^2 + y^2 = 4$ y el segmento abierto AB del plano yz dado por $y = 2, \|z\| < 1$. Moveremos el centro c de AB a lo largo de S^1 y giramos AB alrededor de c en el plano cz , de manera que cuando c recorra un ángulo u , AB haya rotado un ángulo $u/2$. Cuando c completa un recorrido alrededor del círculo, AB retorna a su posición inicial, con sus extremos invertidos, ver Figura [1.2].

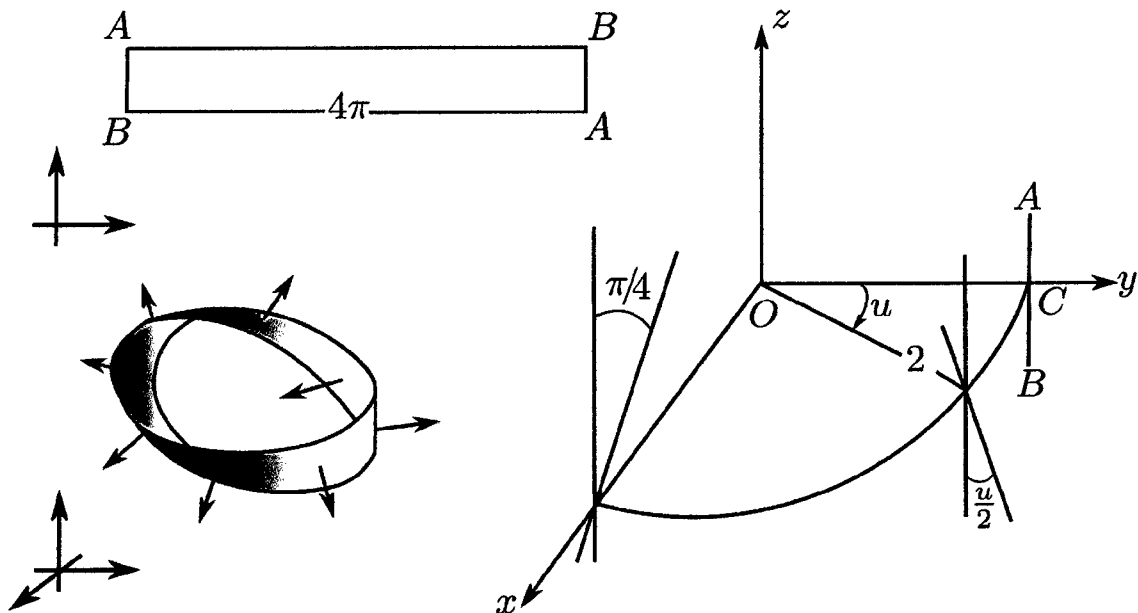


Figura 1.2: Superficie Mobius.

Resulta evidente, geoméricamente, que la banda de Mobius M es una superficie

regular no orientable. Vamos a dar una demostración analítica de este hecho. Una parametrización para la banda de Mobius está dado por

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right),$$

donde $0 < u < 2\pi$ y $-1 < v < 1$. El entorno coordenado correspondiente suprime los puntos del intervalo abierto $u = 0$. Al tomar entonces el origen de la u en el eje x obtenemos otra parametrización $\bar{\mathbf{X}}$ dada por

$$\mathbf{X}(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right) \sin \bar{u}, \left(2 - \bar{v} \sin \frac{\bar{u}}{2} \right) \cos \bar{u}, \bar{v} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2} \right) \right),$$

cuyo entorno coordenado suprime el intervalo $u = \pi/2$. Estos dos entornos coordenados recubren la banda de Mobius y pueden utilizarse para demostrar que es una superficie regular. Obsérvese que la intersección de los dos entornos coordenados no es conexa sino que consta de las dos componentes conexas:

$$W_1 = \{ \mathbf{X}(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi \},$$

$$W_2 = \{ \mathbf{X}(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2} \}.$$

El cambio de coordenadas viene dado por

$$\bar{u} = u - \frac{\pi}{2}, \quad \bar{v} = v, \quad \text{en } W_1, \quad \text{y} \quad \bar{u} = \frac{3\pi}{2} + u, \quad \bar{v} = -v, \quad \text{en } W_2.$$

Se deduce que

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0 \quad \text{en } W_1, \quad \text{y} \quad \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0 \quad \text{en } W_2.$$

Para demostrar que la banda de Mobius es no orientable, podemos suponer que el cambio de coordenadas siempre es positivo. Por tanto como podemos ver, el jacobiano del cambio de coordenadas es -1 en W_1 o W_2 , dependiendo de qué cambios del tipo $u \rightarrow v, \bar{u} \rightarrow \bar{v}$ se hubieran efectuado. Si p es un punto de esa componente de la intersección, entonces

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)},$$

lo que constituye una contradicción.

En adelante sólo consideraremos superficies orientables.

1.2. Plano tangente

En esta sección mostraremos que a cada punto $p \in M$ podemos asociarlo naturalmente un plano, conocido como plano tangente. Así sea M una superficie regular con $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización de M esto es $X(u, v)$, $(u, v) \in U$. Considerando u y v como funciones diferenciables de un parámetro t , $t \in I \subset \mathbb{R}$, obtenemos una curva diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$ dada por $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ cuyo trazo está contenido en la superficie descrita por X . Una curva α definida así es una curva de la superficie. Vamos a definir un vector tangente a la superficie como siendo un vector tangente a una curva de la superficie. Considerando $\beta : I \rightarrow U$, definida por $\beta(t) = (u(t), v(t))$, $t \in I$ tenemos que $\alpha(t) = X(u(t), v(t)) = X(\beta(t))$, así $\alpha = X \circ \beta$. Más precisamente.

Definición 1.9. Sea M una superficie regular, $p \in M$ con $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización tal que $p \in X(U)$, decimos que un vector ω de \mathbb{R}^3 es un **vector tangente** a M en p , si $\omega = \alpha'(t_0) = dX(\beta(t_0))\beta'(t_0) = \frac{d}{dt}(X \circ \beta)(t_0)$, donde $\alpha(t) = X(\beta(t))$ es una curva de la superficie, $p = \alpha(t_0) = X(q)$ tal que $\beta(t_0) = (u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0) = q$, ver Figura [1.3].

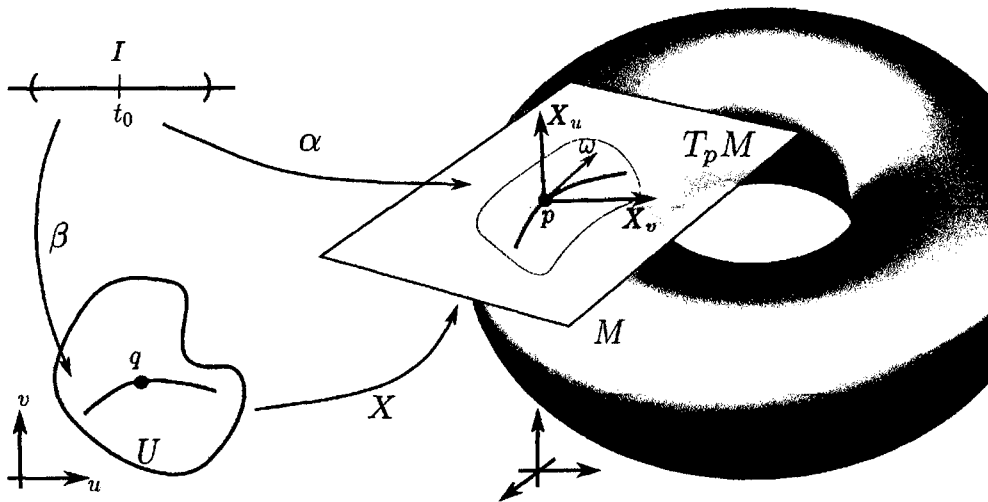


Figura 1.3: Plano Tangente $T_p M$.

Los vectores $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$ son vectores tangentes a X en (u_0, v_0) , ya que son tangente a las curvas coordenadas de X .

Definición 1.10. El **plano tangente** a M en $p = X(u_0, v_0)$ es el conjunto de todos los vectores tangente a M en $p = X(u_0, v_0)$, que denotamos por $T_p M$.

Proposición 1.11. Sea M una superficie regular y $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una parametrización de M y dado $p = X(q) \in M$, $q = (u_0, v_0) \in U$. Entonces, $T_p M$ es un conjunto de vectores obtenidos como combinación lineal de $X_u(u_0, v_0)$ y $X_v(u_0, v_0)$.

Una demostración de esta proposición está dada en página 133 del texto referencia [7].

Observación 1.12. Dado que, el plano tangente a M en cada $p = \mathbf{X}(u_0, v_0)$ está dado por

$$T_p M = \{a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Como el vector normal a $T_p M$ es dado por el vector $\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0)$, tenemos que

$$V = (x, y, z) \in T_p M \iff \langle V, \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle = 0.$$

Definición 1.13. Dada una parametrización \mathbf{X} de una superficie regular M y sea $p = \mathbf{X}(u_0, v_0) \in M$, sabemos que $\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0)$ es un vector no nulo y ortogonal al plano tangente, $T_p M$ generado por $\mathbf{X}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{X}_v(u_0, v_0)$, definimos el **vector normal unitario** a la superficie regular en p por

$$N(p) = \frac{\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0)}{\|\mathbf{X}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{X}_v(u_0, v_0)\|}.$$

1.3. Primera Forma Fundamental

La primera forma fundamental es la expresión de cómo la superficie M hereda el producto interno natural de \mathbb{R}^3 . Geométricamente, nos permite hacer mediciones en la superficie (longitud de curvas, ángulos entre vectores tangente, área de regiones) sin necesidad de referirnos al espacio ambiente \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie.

Definición 1.14. La primera forma fundamental de una superficie regular M en $p \in M$ está dada por la forma cuadrática I_p definida por

$$I_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$I_p(V) = \langle V, V \rangle = \|V\|^2, \quad \text{para todo } V \in T_p M.$$

Como $T_p M \subset \mathbb{R}^3$, tenemos que $I_p(V) = x^2 + y^2 + z^2$, donde $V = (x, y, z)$. Por otro lado, sea $\mathbf{X} : U \rightarrow M$ una parametrización de M tal que $p \in U \subset M$ y usando el hecho que $\{\mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0)\}$ es una base de $T_p M$, podemos determinar los coeficientes de I_p , como sigue, supongamos que

$$V = a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0) \in T_p M \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} I_p(V) &= \langle a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0), a\mathbf{X}_u(u_0, v_0) + b\mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle, \\ &= a^2 \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \rangle + 2ab \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle + b^2 \langle \mathbf{X}_v(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle. \end{aligned}$$

Es decir la primera forma fundamental I_p queda determinada por los coeficientes E , F y G , conocidas como los **coeficientes de la primera forma fundamental** y están definidas por

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \rangle, \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{X}_u(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle = \langle \mathbf{X}_v(u_0, v_0), \mathbf{X}_u(u_0, v_0) \rangle, \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{X}_v(u_0, v_0), \mathbf{X}_v(u_0, v_0) \rangle. \end{aligned}$$

Luego la matriz que representa I_p en la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ es dada por

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle & \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle \\ \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle & \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \end{pmatrix}.$$

Aplicaciones,

- La longitud de arco de una curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ viene dada por

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(\xi)| d\xi = \int_0^t \sqrt{I(\alpha'(\xi))} d\xi.$$

- El ángulo θ bajo el que se cortan dos curvas parametrizadas $\alpha : I \rightarrow M$, $\beta : I \rightarrow M$ en $t = t_0$ viene dado por,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{|\alpha'(t_0)| |\beta'(t_0)|},$$

en particular, el ángulo ψ entre las curvas coordenadas de una parametrización $\mathbf{X}(u, v)$ es

$$\cos(\psi) = \frac{\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle}{|\mathbf{X}_u| |\mathbf{X}_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Una otra aplicación de la primera forma fundamental es el cálculo de regiones limitadas por superficies regulares.

Definición 1.15. Sea $R \subset M$ una región de una superficie regular contenida en el entorno coordenado de una parametrización $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$. El número positivo

$$A(R) = \int \int_Q \|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v\| dudv, \quad Q = \mathbf{X}^{-1}(R),$$

Se denomina área de R .

Observemos que $\| \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \|^2 + \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle^2 = \| \mathbf{X}_u \|^2 \| \mathbf{X}_v \|^2$, entonces $\| \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \| = \sqrt{EG - F^2}$. Así de la Definición [1.15], tenemos que $A(R)$ en términos de los coeficientes de la primera fundamental puede ser escrita como

$$A(R) = \int \int_Q \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

1.4. La Aplicación de Gauss y la Segunda Forma Fundamental

En esta sección definiremos una herramienta muy importante conocida como la **aplicación de Gauss**, esta aplicación nos permitirá obtener más información de la superficie al cual está asociada esta aplicación.

Definición 1.16. Sea M un superficie regular, S^2 la esfera unitaria centrada en el origen de \mathbb{R}^3 . Definimos la **aplicación de Gauss** como la aplicación $N : M \rightarrow S^2$ que transforma cada punto p , $p \in M$, en $N(p)$, $N(p) \in S^2$, la extremidad final del vector paralelo al vector normal unitario a M en p y con origen en el centro de la esfera S^2 , ver Figura [1.4].

Observación 1.17. La aplicación de Gauss N es diferenciable. Por abuso de notación, indicamos por $N(p) = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{\| \mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v \|}$ donde $\mathbf{X} : U \rightarrow M$ es una parametrización de M en un punto $p = \mathbf{X}(u, v)$. La aplicación Gauss es diferenciable y la derivada dN_p de N en p , $p \in M$ es una aplicación de $T_p M$ en $T_{N(p)} S^2$.

Como $T_p M$ y $T_{N(p)} S^2$ son planos paralelos así dN_p puede observarse como una aplicación lineal en $T_p M$.

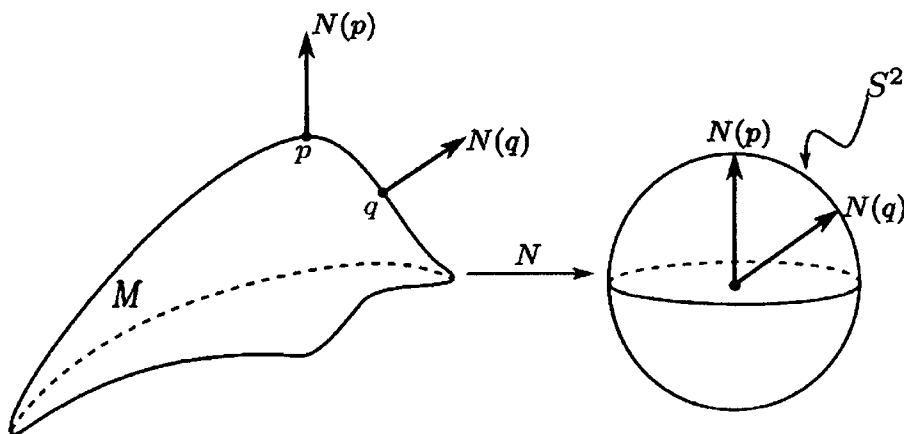


Figura 1.4: La aplicación de Gauss de M .

Ejemplo 1.18. Si la superficie regular es una esfera centrada en el origen y radio r , entonces la aplicación de Gauss es simplemente dado por el vector posición normalizado.

$$dN_p(v) = v.$$

Teorema 1.19. La derivada $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ de la aplicación de Gauss es una aplicación lineal autoadjunta, es decir

$$\langle dN_p(v), \omega \rangle = \langle v, dN_p(\omega) \rangle, \quad \text{para todo } v, \omega \in T_pM.$$

Demostración: Como dN_p es lineal, basta mostrar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para una base $\{w_1, w_2\}$ de T_pM . Sea $\mathbf{X}(u, v)$ una parametrización de M en p y $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ la base asociada de T_pM . Si $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ es una curva parametrizada en M , con $\alpha(0) = p$, tenemos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(\mathbf{X}_u u'(0) + \mathbf{X}_v v'(0)), \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0}, \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0), \end{aligned}$$

en particular, $dN_p(\mathbf{X}_u)$ y $dN_p(\mathbf{X}_v) = N_v$. Por lo tanto, para probar que dN_p es autoadjunta, basta con demostrar que

$$\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle.$$

Para ver esto, tomemos las derivadas de $\langle N, \mathbf{X}_u \rangle = 0$ y $\langle N, \mathbf{X}_v \rangle$, con respecto a v y u , respectivamente, y obtenemos

$$\begin{aligned} \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle + \langle N, \mathbf{X}_u v \rangle &= 0, \\ \langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle + \langle N, \mathbf{X}_v u \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle = -\langle N, \mathbf{X}_v u \rangle = \langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle.$$

□

Definición 1.20. Sea M una superficie regular y $p \in M$. La aplicación $\Pi_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle,$$

es llamada la **segunda forma fundamental** de M en p .

Ejemplo 1.21. Sea $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$ el cilindro. Halleemos $\Pi_p(v)$.

Solución: Calculando $N : M \rightarrow S^2$, tenemos

$$N(x, y, z) = (x, y, 0),$$

cuya derivada en p es

$$dN_p(\omega) = (\omega_1, \omega_2, 0),$$

donde, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in T_p M$ entonces

$$\Pi_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle = \langle (v_1, v_2, 0), (v_1, v_2, v_3) \rangle = -v_1^2 + v_2^2.$$

□

Definición 1.22. Sea C una curva regular en M que pasa por $p \in M$, κ la curvatura de C en p , y $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$, donde n es el vector normal a C y N es el vector normal a M en p . El número $\kappa_n = \kappa \cos(\theta)$ se denomina la curvatura normal de $C \subset M$ en p , ver Figura [1.5].

$$\| \text{Proy}_N^{\kappa_n} \| = \| \kappa \cos(\theta) N \| = |\kappa_n|.$$

Observación 1.23. La curvatura normal de C no depende de la orientación de C sino cambia de signo con un cambio de orientación de la superficie.

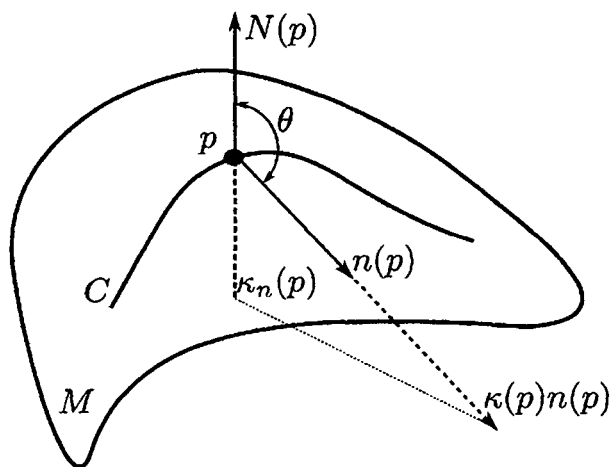


Figura 1.5: Curvatura normal de C .

Expresemos la segunda forma fundamental en términos de la curvatura normal. Sea $\alpha : I \rightarrow C$ una parametrización de C con $\alpha(0) = p$ parametrizada por longitud de arco.

Sea $\beta(s) = (N \circ \alpha)(s)$ Entonces,

$$\langle \beta(s), \alpha'(s) \rangle = 0, \quad \text{para cada } s \in I.$$

Derivando,

$$\langle \beta(s), \alpha''(s) \rangle + \langle \beta'(s), \alpha'(s) \rangle = 0,$$

$$\langle \beta(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle \beta'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Luego,

$$\Pi_p(\alpha'(0)) = -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle,$$

calculando

$$\Pi_p(\alpha'(0)) = \kappa_n.$$

Por tanto la segunda forma fundamental mide Π_p en un vector v unitario, mide la curvatura normal de alguna curva que pasa por p con vector tangente unitario v en p .

Sea $\mathbf{X}(u, v)$ una parametrización en un punto $p \in S$ de una superficie S , y sea $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$ una curva parametrizada en M , con $\alpha(0) = p$. Procediendo de manera semejante a como lo hicimos con la primera forma fundamental, podemos calcular los coeficientes asociados a la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ de $T_p S$. Estos coeficientes, que denotaremos por e, f, g , pueden calcularse en términos de \mathbf{X} y de N .

Para simplificar las notaciones, adoptaremos la convención de que todas las funciones que aparecen más abajo representan sus valores en el punto p .

El valor de la tangente a $\alpha(t)$ en p es

$$\alpha' = \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v',$$

y

$$dN(\alpha') = dN(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Luego, la expresión de la segunda forma fundamental en la base $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle, \\ &= -\langle dN(u(t), v(t)), \alpha' \rangle, \\ &= \langle N_u u' + N_v v', \mathbf{X}_u u' + \mathbf{X}_v v' \rangle, \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2. \end{aligned}$$

Y puesto que, $\langle N, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_v \rangle = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} e &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{uu} \rangle, \\ f &= -\langle N_v, \mathbf{X}_u \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{uv} \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{vu} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{X}_v \rangle, \\ g &= -\langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

1.5. Curvaturas Principales

Sea M una superficie regular orientable y $N : M \rightarrow S^2$ una aplicación de Gauss para M .

La derivada de N en $p \in M$, $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ es una aplicación lineal autoadjunta, por tanto, por un resultado de álgebra lineal existe una base ortonormal $\{v_1, v_2\}$ para T_pM formado por autovectores de dN_p .

Supongamos que:

$$dN_p(v_1) = (-\kappa_1)v_1 \quad \text{y} \quad dN_p(v_2) = (-\kappa_2)v_2,$$

donde $(-\kappa_1)$ y $(-\kappa_2)$ son autovalores de dN_p asociados a v_1 y v_2 , respectivamente.

Definición 1.24. Los valores κ_1 y κ_2 son llamados curvaturas principales de S en p , si $\kappa_1 < \kappa_2$ llamaremos a v_1 y v_2 en T_pS direcciones principales de M en p .

Teorema 1.25. Sea M una superficie regular. El conjunto de curvaturas normales en $p \in S$ están en el intervalo $[\kappa_1, \kappa_2]$ si $\kappa_1 < \kappa_2$ Donde κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales de M en p .

Una demostración para este teorema esta dada en la página 219 [3].

Definición 1.26. Sea $p \in M$ y sea $dN_p : T_pM \rightarrow T_pM$ la derivada de la aplicación de Gauss. El determinante de dN_p es la curvatura gaussiana K de M en p . El opuesto de la mitad de la traza de dN_p se denomina la curvatura media H de M en p .

Podemos escribir, en términos de las curvaturas principales,

$$K = \kappa_1\kappa_2, \quad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

También es posible expresar la curvatura gaussiana K y la curvatura media H ya definidas anteriormente, mediante los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental y están dadas por:

$$K = \frac{eg - f^2}{EF - F^2} \quad \text{y} \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Ejemplo 1.27. Con frecuencia la superficie viene dada como la gráfica de función diferenciable $z = h(x, y)$, donde (x, y) pertenece a un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Por esta razón, es conveniente disponer de fórmulas para los conceptos relevantes de este caso. Para obtener tales fórmulas parametricemos la superficie mediante

$$X(u, v) = (u, v, h(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

donde $u = x$, $v = y$. Un simple cálculo prueba que

$$\mathbf{X}_u = (1, 0, h_u), \quad \mathbf{X}_v = (0, 1, h_v), \quad \mathbf{X}_{uu} = (0, 0, h_{uu}),$$

$$\mathbf{X}_{u,v} = (0, 0, h_{uv}), \quad \mathbf{X}_{vv} = (0, 0, h_{vv}).$$

Así

$$N(x, y) = \frac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{(1 + h_x^2 + h_y^2)}},$$

es un campo unitario normal sobre la superficie y los coeficientes de la segunda forma fundamental en esta orientación viene dada por

$$\begin{aligned} e &= \frac{h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ f &= \frac{h_{xy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ g &= \frac{h_{yy}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

De las expresiones precedentes cualquier fórmula que necesite puede calcularse fácilmente. Por ejemplo, de las ecuaciones

$$K = \frac{eg - f^2}{EF - F^2} \quad y \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Obtenemos que la curvatura gaussiana K y media H esta dada por

$$\begin{aligned} K &= \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ 2H &= \frac{(1 + h_{xy}^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Observación 1.28. Sea M la superficie con la parametrización dada en el Ejemplo [1.27] definida por $\mathbf{X}(u, v) = (u, v, h(u, v))$, $(u, v) \in U$, entonces tenemos que

$$H = 0 \iff (1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_xh_yh_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx} = 0.$$

1.5.1. Superficies Mínimas

En esta subsección definiremos cuando se dice que una superficie es mínima, la cual es muy importante pues este trabajo esta basado en este tipo de superficies y su relación con las funciones complejas.

Definición 1.29. Una superficie regular M es mínima si su curvatura media H se anula en todos los puntos de la superficie.

Ejemplo 1.30. Sea la superficie formada por todas las semirrectas perpendiculares que salen de los puntos del eje de la hélice,

$$\alpha(v) = (\cos(v), \operatorname{sen}(v), v), \quad v \in \mathbb{R},$$

para los puntos de la hélice, esta superficie es llamada la **Helicoide**, ver Figura [1.6], y esta parametrizada por

$$\mathbf{X}(t, v) = (t\cos(v), t\operatorname{sen}(v), v), \quad (t, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Así calculando tenemos que

$$\mathbf{X}_t = (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_v = (t\operatorname{sen}(v), -t\cos(v), 1),$$

luego

$$E = \langle \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_t \rangle = \langle (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0), (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0) \rangle = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_v \rangle = \langle (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0), (t\operatorname{sen}(v), -t\cos(v), 1) \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle (t\operatorname{sen}(v), -t\cos(v), 1), (t\operatorname{sen}(v), -t\cos(v), 1) \rangle = 1.$$

Ahora calculando los coeficientes de la segunda forma fundamental, observemos que

$$N(t, v) = \frac{\mathbf{X}_t \times \mathbf{X}_v}{\|\mathbf{X}_t \times \mathbf{X}_v\|} = \frac{(\operatorname{sen}(v), -\cos(v), t)}{t} \quad (t, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Así calculando tenemos

$$e = \langle N, \mathbf{X}_{tt} \rangle = \frac{1}{t} \langle (\operatorname{sen}(v), -\cos(v), t), (0, 0, 0) \rangle = 0,$$

$$f = \langle N, \mathbf{X}_{tv} \rangle = \frac{1}{t} \langle (\operatorname{sen}(v), -\cos(v), t), (\operatorname{sen}(v), -\cos(v), 0) \rangle = \frac{1}{t},$$

$$g = \langle N, \mathbf{X}_{vv} \rangle = \frac{1}{t} \langle (\operatorname{sen}(v), -\cos(v), t), (-t\cos(v), -t\operatorname{sen}(v), 0) \rangle = 0.$$

Por tanto reemplazando en la fórmula de la curvatura media II tenemos

$$II(t, v) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{(0)(1) - 2(1/t)(0) + (0)(1)}{(1)(1) - (0)^2} = 0, \quad (t, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Concluimos que la curvatura media de la Helicoide es cero en cada punto de la misma, luego la Helicoide es una superficie mínima.



Figura 1.6: La Helicoide.

1.6. Funciones en una variable compleja

En esta sección daremos algunos resultados de las funciones de una variable compleja que serán suficientes para poder comprender las definiciones y resultados que se presentarán a seguir en este trabajo. Las referencias utilizadas para esta sección son [2] y [6].

Sea D un conjunto de números complejos. Una función f definida sobre U es una regla que asigna a cada ζ en D un número complejo ω . El número ω se llama el valor de f en ζ y se denota por $f(\zeta)$ esto es

$$\omega = f(\zeta).$$

Supongamos que $\omega = u + iv$ es el valor de la función f en $\zeta = x + iy$; es decir

$$u + iv = f(x + iy),$$

y también se escribe como

$$f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Definición 1.31. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función donde D es un dominio que contiene un entorno de ζ_0 . La derivada de f en ζ_0 , escrita como $f'(\zeta_0)$, se define por la ecuación

$$f'(\zeta_0) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0},$$

si este límite existe. La función f se dice **diferenciable en ζ_0** cuando existe su derivada en ζ_0 y diremos que f es diferenciable en D si f es diferenciable en ζ para todo ζ en D .

Teorema 1.32. [6] Si f y g son diferenciables en D entonces $f + g$ y $f \cdot g$ también lo son y

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg',$$

además f/g es diferenciable en los puntos de D donde g no se anula y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + fg'}{g^2}.$$

Teorema 1.33. [2] Supongamos que

$$f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y),$$

y que $f'(z)$ existe en un punto $\zeta_0 = x_0 + iy_0$. Entonces las primeras derivadas parciales de u y v deben existir en ese punto y deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann que son

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x,$$

Además $f'(\zeta_0)$ se puede expresar como

$$f'(\zeta_0) = u_x + iv_x,$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (x_0, y_0) .

Ejemplo 1.34. Dada la función

$$f(\zeta) = \zeta^2 = x^2 - y^2 + i2xy,$$

es fácil ver que es diferenciable en todas partes, con $f'(\zeta) = 2\zeta$. Para probar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen, notemos que $u(x, y) = x^2 - y^2$ y

$v(x, y) = 2xy$. Así pues,

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

Además, de acuerdo con la última ecuación del Teorema [1.33],

$$f'(\zeta) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2\zeta.$$

Que ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfagan en un punto de $\zeta_0 = (x_0, y_0)$ no basta para asegurar la existencia de la derivada de una función $f(\zeta)$ en ese punto. Pero con ciertos requisitos de continuidad se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.35. [2] *Sea la función*

$$f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y)$$

definida en algún entorno D de un punto $\zeta_0 = x_0 + iy_0$. Supongamos que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de un entorno y son continuas en (x_0, y_0) . Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x,$$

en (x_0, y_0) , la derivada $f'(\zeta_0)$ existe.

Ejemplo 1.36. *Supongamos que*

$$f(\zeta) = e^x(\cos y + i \sin y),$$

donde hay que tomar y en radianes a la hora de evaluar $\cos y$ y $\sin y$. Entonces

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Como $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ en todas partes, y las derivadas son continuas en todas partes, las condiciones requeridas por el teorema se cumplen en todo el plano complejo. Por tanto, $f'(\zeta)$ existe en todas partes, y

$$f'(\zeta) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Nótese que $f'(\zeta) = f(\zeta)$.

1.6.1. Funciones Holomorfas, Meromorfas y Polos

En esta parte definiremos las funciones **Holomorfas** y **Meromorfas** que son muy importantes en la teoría compleja y en particular para este trabajo pues este tipo de funciones son muy importantes ya que tienen un papel crucial en el enunciado del teorema central de este trabajo.

Definición 1.37. Una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ abierto, se dice **holomorfa** si tiene derivada en todo punto de ese abierto.

Una condición necesaria, pero en modo alguno suficiente, para que f sea holomorfa en un dominio D es claramente la continuidad de f sobre D . El que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann es también necesario, pero tampoco suficiente.

Teorema 1.38. [6] Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, donde $U \subset \mathbb{C}$ es de un abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) f es holomorfa en $\zeta_0 \in \mathbb{C}$.
- b) las partes real e imaginaria de f satisfacen las relaciones de Cauchy-Riemann y f es diferenciable en ζ_0 del punto de vista real.

Definición 1.39. Sea f una función analítica en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Decimos que $z_0 \in \mathbb{C} - U$ es una **singularidad aislada** de f si existe $r > 0$ tal que $D_r(\zeta_0) - \{\zeta_0\} \subset U$. En otras palabras, f está definida y es holomorfa en todos los puntos de la vecindad de ζ , con excepción de ζ_0 . Para fijar una notación, diremos que W es una vecindad perforada de ζ_0 , si $\zeta_0 \in W$ y $W \cap \{\zeta_0\}$ es una vecindad de ζ_0 .

Ejemplo 1.40. 0 es una singularidad aislada de las siguientes funciones: $1/\zeta$, $e^{1/\zeta}$, $\sin(1/\zeta)$, $\zeta^3 \sin(1/\zeta)$, $\operatorname{cotg}(\zeta)$.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $\zeta_0 \in \mathbb{C} - U$ una singularidad aislada de f . De acuerdo con la definición, existe $r > 0$ tal que el anillo $D_r(\zeta_0) - \{\zeta_0\} \subset U$, luego podemos considerar el desenvolvimiento de f en serie en este anillo:

$$f(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j (\zeta - \zeta_0)^j.$$

Así si existe $n > 0$ tal que $a_{-n} \neq 0$ y $a_j = 0$ para todo $j < -n$. En este caso diremos que ζ_0 es un **polo de orden n** de f , o simplemente un **polo** de f .

Observe que para $\zeta \in D_r(\zeta_0) - \{\zeta_0\}$, podemos escribir:

$$f(\zeta) = \frac{a_n}{(\zeta - \zeta_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(\zeta - \zeta_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{\zeta - \zeta_0} + \sum_{j \leq 0} a_j (\zeta - \zeta_0)^j.$$

La función $P(\zeta) = \frac{a_n}{(\zeta - \zeta_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{\zeta - \zeta_0}$ es llamada la **parte principal** del polo ζ_0 de f . Observe además que la función $g(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^n \cdot f(\zeta)$ posee una singularidad removible en ζ_0 , ya que

$$(\zeta - \zeta_0)^n \cdot f(\zeta) = a_{-n} + a_{-n+1}(\zeta - \zeta_0) + \dots + a_{-1}(\zeta - \zeta_0)^{n-1} + (\zeta - \zeta_0)^n \sum_{j \leq 0} (\zeta - \zeta_0)^j.$$

Por tanto, si colocamos $g(\zeta_0) = a_{-n}$, la función g se extiende a una función holomorfa en $D_r(\zeta)$. De esto tenemos que

$$\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} f(\zeta) = \frac{g(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^n} = \infty,$$

pues $\lim_{\zeta \rightarrow \zeta_0} g(\zeta) = a_{-n} \neq 0$.

Ejemplo 1.41. Los puntos $\zeta = 1$, $\zeta = 2$ son los polos de primer orden de la función $f(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)}$. En efecto, calculando tenemos que

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta-1} - \frac{1}{1-(\zeta-1)} = -\frac{1}{\zeta-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)(\zeta-1)^n \quad (0 < |\zeta-1| < 1),$$

y por otro lado,

$$f(\zeta) = -\frac{1}{\zeta-2} - \frac{1}{1-(2-\zeta)} = \frac{1}{\zeta-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(\zeta-1)^n \quad (0 < |\zeta-2| < 1).$$

Definición 1.42. Decimos que una función f es **meromorfa** en un abierto $U \subset \mathbb{C}$, si existe un conjunto discreto $\Gamma \subset U$ tal que f es holomorfa en $U - \Gamma$ y los puntos de Γ son polos de f .

Ejemplo 1.43. Del Ejemplo [1.41] tenemos que la función $f(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-1)(\zeta-2)}$ es holomorfa en $U_1 = \{\zeta \in \mathbb{C}; 0 < |\zeta-1| < 1\}$ y en $U_2 = \{\zeta \in \mathbb{C}; 0 < |\zeta-2| < 1\}$. y meromorfa en $U_1 \cup \{1\}$ y $U_2 \cup \{2\}$.

Capítulo 2

Propiedades de las Superficies Mínimas y la Representación canónica de Weierstrass

2.1. Superficies mínimas

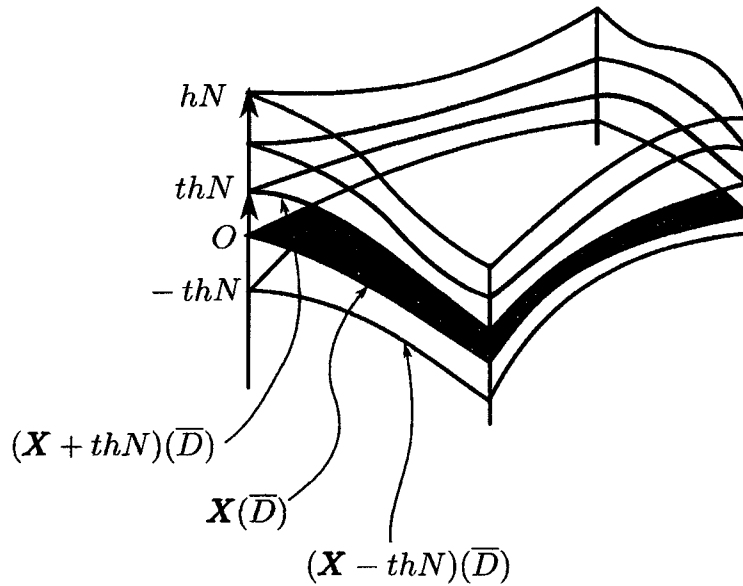
Del capítulo anterior tenemos que una superficie regular es mínima si su curvatura media H se anula en todos los puntos de la superficie. Una superficie regular M es mínima si cada una de sus parametrizaciones es mínima.

Para ver por qué usamos el adjetivo mínima para referirnos a estas superficies, introducimos la noción de variación. Consideremos una superficie regular y sea una de sus parametrizaciones $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ y escojamos un dominio acotado $D \subset U$ y una función diferenciable $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \bar{D} es la unión del dominio D con su frontera ∂D . La variación normal de $\mathbf{X}(\bar{D})$, determinada por h , es la aplicación dada por:

$$\varphi : \bar{D} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{X}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, \quad t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Intuitivamente, esto corresponde a sumar un múltiplo del vector normal $N(u, v)$ al punto $\mathbf{X}(u, v)$, obteniendo así una nueva superficie parametrizada.

Figura 2.1: Una variación normal de $\mathbf{X}(D)$

Fijemos $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $\epsilon > 0$. Observemos que el mapa $\mathbf{X}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{X}^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$ es una superficie parametrizada con,

$$\frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial u} = \mathbf{X}_u + thN_u + th_u N,$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}^t}{\partial v} = \mathbf{X}_v + thN_v + th_v N.$$

Entonces, si denotamos por E^t, F^t, G^t los coeficientes de la primera forma fundamental de \mathbf{X}^t , efectuando los cálculos necesarios, obtenemos

$$E^t = E + th(\langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle + \langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u,$$

$$F^t = F + th(\langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v,$$

$$G^t = G + th(\langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v.$$

Usando el hecho,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X}_u, N_u \rangle &= -e, \\ \langle \mathbf{X}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{X}_v, N_u \rangle &= -2f, \\ \langle \mathbf{X}_v, N_v \rangle &= g. \end{aligned}$$

donde e, f, g son los coeficientes de la segunda forma fundamental de \mathbf{X} , y tenemos también que:

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R, \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R, \end{aligned}$$

donde $\lim_{t \rightarrow 0}(R/t) = 0$.

Entonces, para ϵ suficientemente pequeño, X^t es una superficie parametrizada. Aún más, el área $A(t)$ de $X^t(\bar{D})$ es

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv, \\ &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4hH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv, \end{aligned}$$

donde $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$. Por lo tanto, si ϵ es pequeño, A es una función diferenciable y su derivada en $t = 0$ es,

$$A'(0) = - \int \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

El siguiente teorema justifica el uso de la palabra mínima en relación a superficies con curvatura promedio $H = 0$.

Teorema 2.1. *Sea M una superficie regular y $\mathbf{X} : U \rightarrow M$ una parametrización de M y $D \subset U$ un dominio (abierto y conexo) acotado en U . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) M es mínima,
- b) $A'(0) = 0$ para todo $D \subset U$ con las condiciones ya descritas y todas las variaciones normales de $\mathbf{X}(\bar{D})$.

Demostración: a) \implies b) Tenemos que M es mínima, de esto tenemos que $H = 0$ luego reemplazando esto en la ecuación

$$A'(0) = - \int \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

obtenemos que,

$$A'(0) = 0,$$

lo que prueba a) \implies b).

b) \implies a) Tenemos que $A'(0) = 0$, por contradicción, asumamos que $\exists q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$ y se tenga que $A'(0) = 0$ luego tomemos un $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$h(q) = H(q)$, donde h es idénticamente cero fuera de una pequeña vecindad W de q .

Luego de la ecuación

$$A'(0) = - \int \int_{\overline{D}} 2hH\sqrt{EG - F^2}dudv.$$

se tiene que,

$$A'(0) = - \int \int_{\overline{W}} 2(h(q))^2\sqrt{EG - F^2}dudv < 0.$$

$$A'(0) < 0.$$

Para esta variación que esta dada por esta h , lo cual contradice a b). Esto prueba $b) \implies a)$.

□

2.2. Funciones Armónicas

Las funciones armónicas son un tipo especial de funciones en la cual sus segundas derivadas parciales están relacionadas verificando la ecuación de Laplace, mas precisamente veamos la definición.

Definición 2.2. Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ donde U un abierto de \mathbb{R}^2 , decimos que F es armónica en U si es de clase C^2 y verifica la siguiente ecuación,

$$F_{xx} - F_{yy} = 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in U,$$

llamada la ecuación de Laplace.

Teorema 2.3. Dada una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ donde $D \subset \mathbb{C}$ es un dominio y $f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y)$ tenemos que si f es holomorfa en el dominio D entonces las funciones u y v son armónicas en D .

Demostración: En efecto, sea f es holomorfa en $\zeta = x + iy \in D$ entonces tenemos que u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann así,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad \text{para todo } \zeta = x + iy \in D.$$

Derivando estas dos ecuaciones respecto de x y de y

$$\begin{aligned} u_x = v_y, u_y = -v_x &\implies u_{xx} = v_{yx}, u_{yx} = -v_{xx} \wedge u_{xy} = v_{yy}, u_{yy} = -v_{xy} \\ &\implies u_{xx} = v_{yx} = v_{yx} = -u_{yy} \wedge v_{yy} = u_{xy} = u_{yx} = -v_{xx} \\ &\implies u_{xx} + u_{yy} = 0 \wedge v_{yy} + v_{xx} = 0, \forall (x, y) \in D. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(\zeta) = e^{-3x} \cos(3y) - ie^{-3x} \operatorname{sen}(3y) + 7i$ muestre que $u(x, y) = e^{-3x} \cos(3y)$ es una función armónica y f satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Solución

Mostremos primero que $u(x, y) = e^{-3x} \cos(3y)$ es una función armónica.

En efecto, u tiene que cumplir la siguiente ecuación

$$\nabla^2 u = 0 = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{du}{dx}[-3e^{-3x} \cos(3y)], \\ &= 9e^{-3x} \cos(3y). \\ \frac{d^2 u}{dy^2} &= \frac{du}{dy}[3e^{-3x} \operatorname{sen}(3y)], \\ &= -9e^{-3x} \cos(3y). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} = 0.$$

Ahora mostremos que f satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, esto es:

$f(\zeta) = e^{-3x} \cos(3y) + i(-e^{-3x} \operatorname{sen}(3y) + 7) = u + iv$, así $u = e^{-3x} \cos(3y)$ y $v = -e^{-3x} \operatorname{sen}(3y) + 7$, luego verifiquemos que u, v cumple:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ \frac{d}{dx}[e^{-3x} \cos(3y)] &= \frac{d}{dy}[-e^{-3x} \operatorname{sen}(3y) + 7] \\ -3e^{-3x} \cos(3y) &= -3e^{-3x} \cos(3y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= -v_x, \\ \frac{d}{dy} [e^{-3x} \cos(3y)] &= -\frac{d}{dx} [-e^{-3x} \operatorname{sen}(3y) + 7] \\ -3e^{-3x} \operatorname{sen}(3y) &= -3e^{-3x} \operatorname{sen}(3y). \end{aligned}$$

Por tanto, f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann. \square

2.3. Coordenadas Isotérmicas

En el estudio de las propiedades de una superficie, que son independientes de la elección de los parámetros, es conveniente elegir los parámetros de tal manera que las propiedades geométricas de la superficie se reflejan en el plano paramétrico. Como ejemplo, se puede pedir que la parametrización del plano paramétrico sobre la superficie sea conforme esto es, de modo que los ángulos entre las curvas en la superficie son iguales a los ángulos entre las curvas correspondientes en el plano paramétrico.

Analíticamente, esta condición se expresa en términos de la siguiente definición.

Definición 2.5. Decimos que una superficie regular M está parametrizada con coordenadas isotérmicas (u, v) si existe una parametrización $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ de M dado por $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ y verifica las siguientes ecuaciones

$$\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle \quad \text{y} \quad \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0,$$

esto es,

$$E = G \quad \text{y} \quad F = 0.$$

Ejemplo 2.6. Del Ejemplo [1.30] tenemos que la **Helicoide**, ver Figura [1.6], y está parametrizada por

$$\mathbf{X}(u, v) = (u \cos(v), u \operatorname{sen}(v), v), \quad (u, v) \in (u, v) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}.$$

Mostremos que la \mathbf{X} es una parametrización isotérmica, en efecto calculando tenemos que

$$\mathbf{X}_u = (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{X}_v = (u \operatorname{sen}(v), -u \cos(v), 1),$$

luego,

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0), (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0) \rangle = 1, \\ F &= \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = \langle (\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0), (u \operatorname{sen}(v), -u \cos(v), 1) \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = \langle (u \operatorname{sen}(v), -u \cos(v), 1), (u \operatorname{sen}(v), -u \cos(v), 1) \rangle = 1. \end{aligned}$$

Así, \mathbf{X} es una parametrización isotérmica.

Teorema 2.7. (Existencia de coordenadas isotérmicas). Sea M una superficie regular en \mathbb{R}^3 . Entonces para cualquier punto p de M hay una vecindad U , $q = \mathbf{X}^{-1}(p) \in U$, y coordenadas locales (u, v) en esta vecindad U tal que (u, v) son coordenadas isotérmicas.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mathbf{X}(p) = (0, 0, 0)$ y $N(p) = (0, 0, 1)$, y hay un dominio simplemente conexo $(0, 0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que cerca de $(0, 0, 0)$, $\mathbf{X}(M)$ podemos escribir como un grafo $(x, y, f(x, y))$, con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de la ecuación de la superficie mínima dada en la Observación [1.28] luego, f cumple lo siguiente

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Sea la forma de tres funciones:

$$\frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

haciendo un cambio de variable por conveniencia ponemos $p = f_x$, $q = f_y$, y $\omega = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$. Recalamos que $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$ es el elemento de área de la superficie M .

Así tenemos para la ecuación de superficies mínimas tenemos las siguientes relaciones:

$$\left(\frac{1 + p^2}{\omega}\right)_y = \left(\frac{pq}{\omega}\right)_x, \quad \left(\frac{1 + q^2}{\omega}\right)_x = \left(\frac{pq}{\omega}\right)_y.$$

En efecto, calculando directamente tenemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + f_x^2}{\omega}\right)_y - \left(\frac{f_x f_y}{\omega}\right)_x &= -\frac{f_y}{\omega} [(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}], \\ \left(\frac{1 + f_y^2}{\omega}\right)_x - \left(\frac{f_x f_y}{\omega}\right)_y &= -\frac{f_x}{\omega} [(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}]. \end{aligned}$$

Y considerando una vecindad simplemente conexa del origen en el plano $T_P M$ hay funciones $F(x, y)$ y $G(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1 + p^2}{\omega}, & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{pq}{\omega}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{pq}{\omega}, & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1 + q^2}{\omega}. \end{aligned}$$

Sea nuestra aplicación específica $\Phi : (x, y) \rightarrow (u, v)$ dado por

$$u = x + F(x, y), \quad v = y + G(x, y).$$

Entonces (u, v) es una coordenada isotérmica. En efecto, el Jacobiano J de la aplicación Φ es igual a $J = \partial(u, v)/\partial(x, y) = (1 + \omega)^2/\omega$, así $J > 0$, y luego Φ es un difeomorfismo local. Por tanto, existe una vecindad del origen donde la aplicación Φ tiene una inversa diferenciable Φ^{-1} con matriz Jacobiana igual a

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \omega + q^2 & -pq \\ -pq & 1 + \omega p^2 \end{pmatrix} \frac{1}{(1 + \omega)^2}.$$

Luego en la nueva coordenada (u, v) de la superficies M esta dada por la parametrización $\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), f(x(u, v), y(u, v)))$, de donde

$$\begin{aligned} x_u &= \frac{1 + \omega + q^2}{(\omega + 1)^2}, & x_v &= -\frac{pq}{(\omega + 1)^2}, \\ y_u &= -\frac{pq}{(\omega + 1)^2}, & y_v &= \frac{1 + \omega + p^2}{(\omega + 1)^2}, \\ f_u &= px_u + qy_u, & f_v &= px_v + qy_v. \end{aligned}$$

Calculando probamos que

$$\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle = \frac{\omega}{J} = \frac{\omega^2}{(\omega + 1)^2}, \quad \langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0.$$

Por tanto (u, v) es una coordenada isotérmica. □

2.4. Armonicidad

Sea una superficie regular M en \mathbb{R}^3 y dada una parametrización local dada por $\mathbf{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde (u, v) son coordenadas isotérmicas en M . Sea $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ denota el Laplaciano euclidiano estándar.

Proposición 2.8. *El vector $\Delta \mathbf{X} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ es perpendicular a la superficies M .*

Demostración: Dada que (u, v) son coordenadas isotérmicas en M , tenemos que $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_v, \mathbf{X}_v \rangle$ y $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$. Derivando la primera igualdad respecto a u y la segunda respecto a v , obtenemos

$$\langle \mathbf{X}_{uu}, \mathbf{X}_u \rangle = \langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_v \rangle; \quad \langle \mathbf{X}_{vv}, \mathbf{X}_v \rangle = -\langle \mathbf{X}_{uv}, \mathbf{X}_u \rangle.$$

Así $\langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{X}_v \rangle = 0$, de manera similar, $\langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{X}_u \rangle = 0$. \square

Teorema 2.9. *El vector $\Delta \mathbf{X}$ es igual a $2\lambda^2 H N$, donde H es la curvatura media de M , N es el vector normal unitario de M y $\lambda = |\mathbf{X}_u| = |\mathbf{X}_v|$ es llamado el factor conformal. Si M es una superficie mínima, entonces en coordenadas isotérmicas (u, v) la parametrización $\mathbf{X}(u, v)$ que localmente describe la superficie M satisface la ecuación $\Delta \mathbf{X} = 0$.*

Demostración: De la Proposición [2.8] tenemos $\langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{X}_v \rangle = 0$ y $\langle \Delta \mathbf{X}, \mathbf{X}_u \rangle = 0$, así $\Delta \mathbf{X}$ es paralela a N . Luego,

$$\begin{aligned} \langle \Delta \mathbf{X}, N \rangle &= \langle \mathbf{X}_{uu} + \mathbf{X}_{vv}, N \rangle, \\ &= -\langle N_u, \mathbf{X}_u \rangle - \langle N_v, \mathbf{X}_v \rangle, \\ &= |\mathbf{X}_u|^2 \left\langle -dN \left(\frac{\mathbf{X}_u}{|\mathbf{X}_u|} \right), \frac{\mathbf{X}_u}{|\mathbf{X}_u|} \right\rangle + |\mathbf{X}_v|^2 \left\langle -dN \left(\frac{\mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_v|} \right), \frac{\mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_v|} \right\rangle, \\ &= \lambda^2 \text{tr}(-dN), \\ &= 2\lambda^2 H. \end{aligned}$$

Luego $\Delta \mathbf{X} = 2\lambda^2 H N$, donde $\lambda = |\mathbf{X}_u| = |\mathbf{X}_v|$.

Ahora si M es una superficie mínima parametrizada con coordenadas isotérmicas se tiene que $H = 0$ entonces \mathbf{X} satisface la ecuación $\Delta \mathbf{X} = 0$. \square

Corolario 2.10. *En coordenadas isotérmicas la minimalidad de una superficie M es equivalente a la armonicidad de la parametrización \mathbf{X} de M .*

Demostración: \square

Observación 2.11. *Del Corolario [2.10] notamos que las superficies mínimas surgen naturalmente en un contexto muy diferente a la de minimizar el área. Queremos proseguir con la conexión a las funciones armónicas.*

Para proseguir en esta dirección, primero daremos algunos resultados de geometría diferencial compleja.

Sea f es una función de valores-complejos definido en un dominio $U \subset \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$

con coordenadas (u, v) y sea $\zeta = u + iv$ la correspondiente coordenada compleja. Consideremos los operadores diferenciales complejos dado por

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

el cual actúa en funciones de valores complejos de forma natural. Por ejemplo, si $f(u, v) = \varphi(u, v) + i\psi(u, v)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) (\varphi + i\psi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + i \frac{\partial \psi}{\partial v} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right).$$

Corolario 2.12. [4] *La curvatura Gaussiana de M con esta observación esta dada por*

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda,$$

donde $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2$ denota el Laplaciano.

Vamos a introducir la siguiente notación. Dada M una superficie regular y sea X una parametrización de M dado por $X(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$, considerando las siguientes funciones con valores complejos

$$\phi^j(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^j}{\partial u} - i \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) = \frac{1}{2} (x_u^j - i x_v^j) \in \mathbb{C}, \quad \text{donde } \zeta = u + iv \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Notemos las siguientes identidades,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (\phi^j(\zeta))^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 - \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 - 2i \sum_{j=1}^3 x_u^j x_v^j \right), \\ &= \frac{1}{4} (|x_u|^2 - |x_v|^2 - 2i \langle x_u, x_v \rangle), \\ &= \frac{1}{4} (E - G - 2iF). \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\phi^j(\zeta)|^2 &= \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^3 (x_u^j)^2 + \sum_{j=1}^3 (x_v^j)^2 \right), \\ &= \frac{1}{4} (E + G). \end{aligned}$$

Así tenemos las siguientes propiedades de las funciones $\phi^j(\zeta)$.

Proposición 2.13. *Sean las funciones con valores complejos ϕ^j con $j = 1, 2, 3$ dada encima. Entonces cada una de las siguientes equivalencias se cumplen independiente-*

mente,

- a) $\phi^j(\zeta)$ es holomorfa en $\zeta \iff x^j$ es armónica en u, v ;
 b) (u, v) son coordenadas isotérmicas \iff

$$\sum_{j=1}^3 (\phi^j(\zeta))^2 = 0;$$

- c) si (u, v) son coordenadas isotérmicas, entonces M es regular \iff

$$\sum_{j=1}^3 |\phi^j(\zeta)|^2 \neq 0.$$

Demostración: Para la parte a), la ida como $\phi^j(\zeta) = \frac{1}{2}(x_u^j - ix_v^j)$ por ser holomorfa satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y de la primera ecuación tenemos $(x_u^j)_u = (x_v^j)_v$. Para la recíproca como x^j es armónica tenemos que $x_{uu}^j - x_{vv}^j = 0$ así $(x_u^j)_u = (x_v^j)_v$ y como x^j es de clase \mathcal{C}^2 entonces $(x_u^j)_v = -(-x_v^j)_u$.

Para la parte b), la ida como (u, v) son isotérmicas tenemos $E = G$, $F = 0$ y por la primera identidad anterior tenemos $\sum_{j=1}^3 (\phi^j(\zeta))^2 = \frac{1}{4}(E - G - 2iF) = 0$, para la vuelta como $\sum_{j=1}^3 (\phi^j(\zeta))^2 = 0$ entonces $\frac{1}{4}(E - G - 2iF) = 0$ luego $E = G$ y $F = 0$. Para la parte c), para la ida como (u, v) son isotérmicas tenemos $E = G$, $F = 0$ y por la regularidad de M tenemos $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ son independientes luego podemos suponer $\mathbf{X}_u \neq 0$ así $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_u \rangle = E \neq 0$ luego $\sum_{j=1}^3 |\phi^j(\zeta)|^2 = \frac{1}{4}(E + G) = \frac{1}{2}(E) \neq 0$, para la vuelta como $\sum_{j=1}^3 |\phi^j(\zeta)|^2 = \frac{1}{4}(E + G) \neq 0$ y como (u, v) son coordenadas isotérmicas tenemos que $E = G \neq 0$ luego $\mathbf{X}_u \neq 0$, $\mathbf{X}_v \neq 0$ y como $F = 0$ esto es $\langle \mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v \rangle = 0$ por tanto \mathbf{X}_u y \mathbf{X}_v son independientes por tanto M es regular. \square

Corolario 2.14.

$$x^j = 2\operatorname{Re}\left(\int \phi^j(\zeta)d\zeta\right) + c_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Demostración: $\zeta = u + iv$ así $d\zeta = du + idv$ y como

$$\phi^j d\zeta = \frac{1}{2}(x_u^j - iv_v^j)(du + idv) = \frac{1}{2}((x_u^j du - iv_v^j dv) + i(x_u^j dv - iv_v^j du)).$$

$$\bar{\phi}^j d\bar{\zeta} = \frac{1}{2}(x_u^j + iv_v^j)(du - idv) = \frac{1}{2}((x_u^j du + iv_v^j dv) - i(x_u^j dv - iv_v^j du)).$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 dx^j &= \frac{\partial x^j}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial x^j}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta}, \\
 &= \phi^j d\zeta + \bar{\phi}^j d\bar{\zeta}, \\
 &= \frac{1}{2}(x_u^j du - iv_v^j dv) + \frac{1}{2}(x_u^j du + iv_v^j dv), \\
 &= x_u^j du + iv_v^j dv, \\
 &= 2\operatorname{Re}(\phi^j d\zeta). \\
 \implies x^j &= 2\operatorname{Re}\left(\int \phi^j d\zeta\right) + c_j, j = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}(u, v) &= \mathbf{X}(z, \bar{z}), \\
 &= (2\operatorname{Re}\left(\int \phi^1 d\zeta\right) + c_1, 2\operatorname{Re}\left(\int \phi^2 d\zeta\right) + c_2, 2\operatorname{Re}\left(\int \phi^3 d\zeta\right) + c_3),
 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{X}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)).$$

□

Teorema 2.15. *Sea M una superficie mínima regular y \mathbf{X} una parametrización que la define, dada por $\mathbf{X}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$, con u, v coordenadas isotérmicas, entonces la función $\phi^j(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^j}{\partial u} - i\frac{\partial x^j}{\partial v}\right)$ son holomorfas y satisfacen las ecuaciones en b) y c) de la Proposición [2.13].*

Recíprocamente, sea $\phi^j(\zeta)$ son holomorfas en ζ que satisfacen las ecuaciones en b) y c) de la Proposición [2.13], en un dominio simplemente conexo D . Entonces existe una superficie mínima M' con parametrización \mathbf{X} definida sobre D , de forma que la ecuación siguiente

$$\phi^j(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^j}{\partial u} - i\frac{\partial x^j}{\partial v}\right),$$

se cumple. Donde $\zeta = u + iv \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$.

Demostración: Para la primera parte de $\phi^j(\zeta)$, $j = 1, 2, 3$ tenemos que x^1, x^2, x^3 son armónicas por equivalencia de la parte a) de la de la Proposición [2.13] se tiene que los ϕ^j son holomorfas, ahora $\phi^j(\zeta)$, $j = 1, 2, 3$ cumple b) y c) de la Proposición [2.13] ya que las equivalencias se cumplen.

Ahora para la recíproca en vista del Corolario [2.10], definimos

$$x^j = 2\operatorname{Re}\left(\int \phi^j(\zeta) d\zeta\right) + c_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Entonces los x^j son funciones armónicas satisfaciendo la ecuación

$$\phi^j(\zeta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^j}{\partial u} - i \frac{\partial x^j}{\partial v} \right),$$

pues notemos que

$$\frac{\partial x^j}{\partial \zeta} = 2\phi^j, \quad j = 1, 2, 3,$$

así nuevamente aplicando las equivalencias $b)$, $c)$ y $a)$, esto último pues ϕ^j son holomorfas por hipótesis, así de la Proposición [2.13] la vuelta del lema sigue del Corolario [2.10]. \square

2.5. Representación Canónica de Weierstrass para Superficies Mínimas

En esta sección enunciamos y demostramos el teorema central de este trabajo, conocida como la **representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas**, el cual es muy importante pues relaciona la superficies mínimas y la teoría compleja.

Sea M una superficie mínima definida por una parametrización \mathbf{X} , dada por

$$\mathbf{X}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v)),$$

con (u, v) coordenadas isotérmicas. También sea $\zeta = u + iv$ la coordenada compleja correspondiente y recordemos que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

Y como $u = \frac{1}{2}(\zeta + \bar{\zeta})$ y $v = -\frac{i}{2}(\zeta - \bar{\zeta})$, así $\mathbf{X}(u, v)$ podemos escribir como

$$\mathbf{X}(u, v) = (x^1(\zeta, \bar{\zeta}), x^2(\zeta, \bar{\zeta}), x^3(\zeta, \bar{\zeta})).$$

Sea $\phi = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta}$, $\phi^j = \frac{\partial x^j}{\partial \zeta}$. Donde M es mínima, sabemos que ϕ^j son funciones complejas holomorfas, de donde \mathbf{X} es isotérmica, de esto tenemos que las coordenadas cumplen que

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = 0.$$

Proyección Estereográfica

La aplicación $\pi_t : S^2 \setminus \{P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\pi_t(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$ de la esfera S^2 en el plano $-xy := \mathbb{R}^2$, donde $P_N = (0, 0, 1)$.

La aplicación $\pi_t : S^2 \setminus \{P_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es llamada de **proyección estereográfica**. Sea (x, y) las coordenadas estándar en el plano xy . En el plano con coordenadas (u, v) formamos la correspondiente coordenada compleja $\xi = u + iv$, y en el plano xy la coordenada $\eta = x + iy$.

Considerando la aplicación de Gauss $N : M \rightarrow S^2$ nos define una aplicación del plano complejo $\mathbb{C}_\xi \cong \mathbb{R}_{(u,v)}$ en el plano complejo $\mathbb{C}_\eta \cong \mathbb{R}_{(x,y)}$:

$$\mathbb{C}_\xi \cong \mathbb{R}_{(u,v)} \rightarrow M \xrightarrow{N} S^2 \setminus P \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}_\eta \cong \mathbb{R}_{(x,y)},$$

donde \mathbb{C}_ξ y \mathbb{C}_η son planos complejos con coordenadas ξ y η . Ver Figura [2.2].

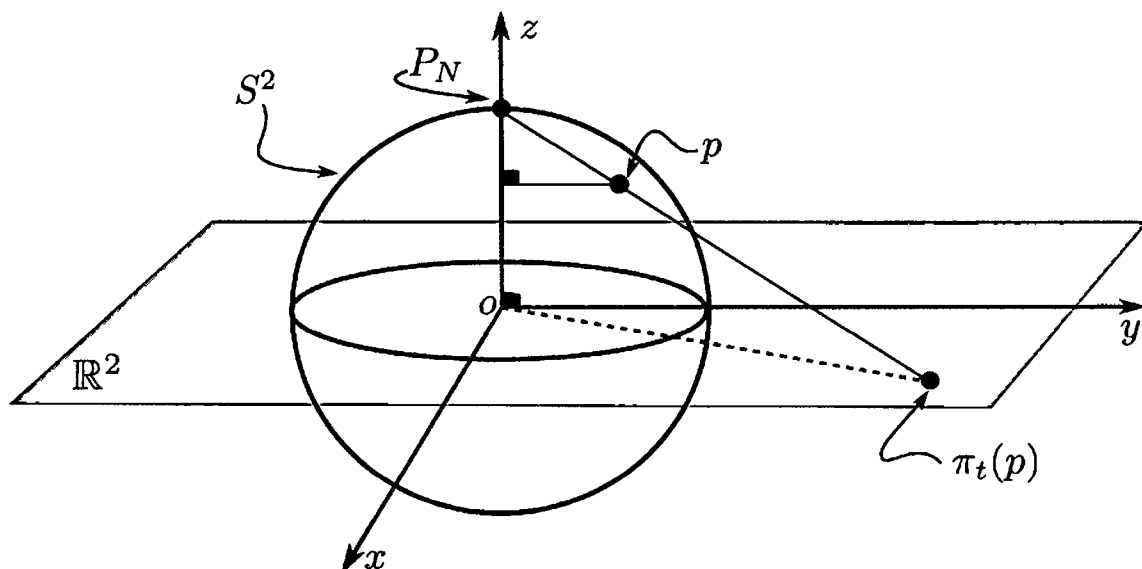


Figura 2.2: Proyección Estereográfica

Teorema 2.16. Sea una superficie mínima M , con parametrización X con (u, v) coordenadas isotérmicas. Entonces la aplicación de Gauss de M , $G : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ se puede identificar con la función meromorfa en términos de ϕ^j dada por

$$G(u, v) = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2},$$

donde $\phi^j = \frac{1}{2}(x_u^j - x_v^j)$, con $j = 1, 2, 3$.

Demostración: En efecto describiremos la aplicación de Gauss en términos de

ϕ^1 , ϕ^2 y ϕ^3 .

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v &= ((\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)^1, (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)^2, (\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)^3), \\ &= (x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2, x_u^3 x_v^1 - x_u^1 x_v^3, x_u^1 x_v^2 - x_u^2 x_v^1).\end{aligned}$$

Y considerando la primera componente $x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2$ tenemos

$$x_u^2 x_v^3 - x_u^3 x_v^2 = 4Im(\phi^2 \bar{\phi}^3),$$

de manera similar $(\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)^2 = 4Im(\phi^2 \bar{\phi}^1)$ y $(\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v)^3 = 4Im(\phi^1 \bar{\phi}^2)$ de donde obtenemos

$$\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v = 4Im(\phi^2 \bar{\phi}^3, \phi^2 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2) = 2\phi \times \bar{\phi}.$$

Ahora como $\mathbf{X}(u, v)$ tiene coordenadas isotérmicas entonces

$$|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v| = |\mathbf{X}_u|^2 = |\mathbf{X}_v|^2 = \frac{|\mathbf{X}_u|^2 + |\mathbf{X}_v|^2}{2} = 2|\phi|^2$$

. Así,

$$N = \frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|} = \frac{4Im(\phi^2 \bar{\phi}^3, \phi^2 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2)}{2|\phi|^2} = \frac{\phi \times \bar{\phi}}{|\phi|^2}.$$

Ahora

$$\begin{aligned}G(u, v) &= \pi_t(N(u, v)), \\ &= \pi_t\left(\frac{\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v}{|\mathbf{X}_u \times \mathbf{X}_v|}\right), \\ &= \pi_t\left(\frac{\phi \times \bar{\phi}}{|\phi|^2}\right), \\ &= \frac{2Im(\phi^2 \bar{\phi}^3, \phi^2 \bar{\phi}^1, \phi^1 \bar{\phi}^2)}{|\phi|^2}, \\ &= \left(\frac{2Im(\phi^2 \bar{\phi}^3)}{|\phi|^2 - 2Im(\phi^1 \bar{\phi}^2)}, \frac{2Im(\phi^3 \bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2Im(\phi^1 \bar{\phi}^2)}\right).\end{aligned}$$

Identificando las coordenadas (x, y) de \mathbb{R}^2 con $x + iy \in \mathbb{C}$ así podemos escribir

$$G(u, v) = \frac{2Im(\phi^2 \bar{\phi}^3) + i2Im(\phi^3 \bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2Im(\phi^1 \bar{\phi}^2)}$$

. Ahora calculando el numerador de la expresión para $G(u, v)$:

$$\begin{aligned}2Im(\phi^2 \bar{\phi}^3) + i2Im(\phi^3 \bar{\phi}^1) &= \frac{1}{i}(\phi^2 \bar{\phi}^3 - \bar{\phi}^2 \phi^3 + i\phi^3 \bar{\phi}^1 - i\bar{\phi}^3 \phi^1), \\ &= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) - \bar{\phi}^3(\phi^1 + i\phi^2).\end{aligned}$$

Usando la identidad

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2 = (\phi^1 - i\bar{\phi}^2)(\phi^1 + i\bar{\phi}^2) + (\phi^3)^2 = 0,$$

despejando,

$$\phi^1 + i\bar{\phi}^2 = -\frac{(\phi^3)^2}{\phi^1 - i\phi^2},$$

tenemos

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3) + i2\operatorname{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1) &= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) + \bar{\phi}^3 \cdot \frac{(\phi^3)^2}{\phi^1 - i\phi^2}, \\ &= \phi^3(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2) - \bar{\phi}^3(\phi^1 + i\phi^2), \\ &= \frac{\phi^3[(\bar{\phi}^1 + i\bar{\phi}^2)(\bar{\phi}^1 - i\bar{\phi}^2) + |\phi^3|^2]}{\phi^1 - i\phi^2}, \\ &= \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} [|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)]. \end{aligned}$$

Así reemplazando esto último en G tenemos

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \frac{2\operatorname{Im}(\phi^2\bar{\phi}^3) + i2\operatorname{Im}(\phi^3\bar{\phi}^1)}{|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}, \\ &= \frac{\frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} [|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)]}{|\phi|^2 - 2\operatorname{Im}(\phi^1\bar{\phi}^2)}, \\ &= \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}. \end{aligned}$$

Así $G(u, v) = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}$ es la función meromórfica correspondiente a la aplicación de Gauss. \square

Ahora definimos $g = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2}$. Ponemos $f = \phi^1 - i\phi^2$. La función f es obviamente holomorfa. Entonces podemos expresar las tres componentes de ϕ en términos de f y g como:

$$\phi^1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi^2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi^3 = fg,$$

y como ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3 son funciones holomorfas, el producto fg^2 debe ser holomorfa.

Definición 2.17. *Un par de funciones de valores complejos (f, g) , definida en un dominio simplemente conexo U del plano complejo \mathbb{C} , $U \subset \mathbb{C}$, tal que f es holomorfa, g es holomorfa, y fg^2 es holomorfa, es llamado una **Representación canónica de Weierstrass**.*

Así, probamos el siguiente teorema.

Teorema 2.18. (*representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas*) Sea (f, g) , una Representación de Weierstrass en un (simplemente conexo) dominio U de \mathbb{C} . Si formamos tres funciones holomorfas $\phi^1 = \frac{1}{2}f(1-g^2)$, $\phi^2 = \frac{i}{2}f(1+g^2)$, y $\phi^3 = fg$, entonces la aplicación de U en \mathbb{R}^3 dado por

$$x^j(\zeta, \bar{\zeta}) = c_j + 2\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi^j d\zeta,$$

donde $|\phi|^2 \neq 0$ determina una superficie mínima regular (que es con posibles auto-intersecciones), y del hecho que $(\phi)^2 = \sum_{j=1}^3 (\phi^j)^2 = 0$, sigue que las coordenadas (u, v) , $\zeta = u + iv$, son isotérmicas (si $\mathbf{X}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$, entonces $\phi = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta}$). Aquí $\{x^j\}_{j=1}^3$ son las coordenadas Euclidianas estándar en \mathbb{R}^3 , y ζ es la coordenada compleja en $U \subset \mathbb{C}$.

Recíprocamente, si (u, v) son coordenadas isotérmicas en M en un dominio simplemente conexo $U \subset \mathbb{C}$, $\zeta = u + iv$ es la correspondiente coordenada compleja, $\mathbf{X}(u, v)$ es la parametrización local de M , y $\phi = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta}$ es la correspondiente parametrización holomorfa con componentes (ϕ^1, ϕ^2, ϕ^3) , entonces haciendo $f = \phi^1 - i\phi^2$ y $g = \phi^3/(\phi^1 - i\phi^2)$ obtenemos una Representación canónica de Weierstrass de la superficie mínima M en el dominio $U \subset \mathbb{C}$. La función g es una aplicación de Gauss de la superficie mínima M si en S^2 las coordenadas están dadas por la proyección estereográfica π_t desde el Polo Norte.

Demostración: Para la primera parte mostremos que

$$x^j(\zeta, \bar{\zeta}) = 2\operatorname{Re} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \phi^j d\zeta + c_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

determina una superficie mínima regular, en efecto como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 (\phi^j(\zeta))^2 &= (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + (\phi^3)^2, \\ &= \left(\frac{1}{2}f(1-g^2)\right)^2 + \left(\frac{i}{2}f(1+g^2)\right)^2 + (fg)^2, \\ &= \frac{1}{4}f^2(1-2g^2+g^4) - \frac{1}{4}f^2(1+2g^2+g^4) + (fg)^2, \\ &= \frac{1}{4}f^2(-4g^2) + f^2g^2, \\ &= 0, \end{aligned}$$

y luego de la equivalencia b) en la Proposición [2.13] tenemos que $\mathbf{X}(u, v)$ tiene

coordenadas isotérmicas. Además tenemos

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^3 |\phi^j(\zeta)|^2 &= |\phi^1|^2 + |\phi^2|^2 + |\phi^3|^2, \\
 &= \left| \frac{1}{2}f(1-g^2) \right|^2 + \left| \frac{i}{2}f(1+g^2) \right|^2 + |fg|^2, \\
 &= \frac{1}{4}|f|^2(1-2|g|^2+|g|^4) + \frac{1}{4}|f|^2(1+2|g|^2+|g|^4) + |f|^2|g|^2, \\
 &= \frac{1}{4}|f|^2(2+2|g|^4) + |f|^2|g|^2, \\
 &= \frac{1}{2}|f|^2(1+2|g|^2+|g|^4).
 \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{j=1}^3 |\phi^j(\zeta)|^2 = \frac{1}{2}|f|^2(1+|g|^2)^2 \neq 0, \text{ pues } f \neq 0, \text{ ya que } g \text{ es meromorfa.}$$

Como tenemos que $X(u, v)$ tiene coordenadas isotérmicas por la equivalencia $c)$ de la Proposición [2.13] tenemos que $M = X(U)$ es regular, cabe destacar que la condición de que el dominio sea simplemente conexo es para que la integral compleja este bien definida.

Además como tenemos que ϕ^j , $j = 1, 2, 3$ son holomorfas por la equivalencia $a)$ de la Proposición [2.13] tenemos que x^j , $j = 1, 2, 3$ son armónicas.

De esta última parte por la armonicidad de los x^j , $j = 1, 2, 3$ y por el Corolario 2.10 tenemos que $M = X(U)$ es una superficie mínima.

Para la recíproca es inmediato del Corolario [2.14] y del Teorema [2.16]. \square

En el siguiente capítulo presentaremos algunas aplicaciones del Teorema 2.18.

Capítulo 3

Aplicaciones

En este capítulo daremos algunas aplicaciones del Teorema 2.18, **representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas**, la más importante es la construcción de superficies mínimas que se darán a seguir y otra que presentaremos es el lema siguiente.

En el siguiente Lema expresaremos la fórmula de la curvatura de Gauss de una superficie mínima.

Lema 3.1. *Sea M una superficie mínima y \mathbf{X} una parametrización isotérmica de esta. Entonces usando la representación dada en el Teorema [2.18], la curvatura de Gauss en cada punto esta dado por*

$$K = - \left[\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2$$

Demostración: Del Corolario 2.12 tenemos que la curvatura de Gaussiana esta dada por

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta(\log \lambda),$$

donde $\Delta = \partial^2/\partial u^2 + \partial^2/\partial v^2 = 4\partial^2/\partial \bar{\zeta} \partial \zeta$ y $\lambda(u, v) = |\mathbf{X}_u| = |\mathbf{X}_v|$, luego en primer lugar tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(\log|f|) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}(\log f + \log \bar{f}) = \frac{f'}{2f}$$

así $\Delta(\log|f|) = 0$. Ahora reemplazando todo esto en K tenemos:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log \lambda, \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log|f| + \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \log(1 + |g|^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \frac{g' \bar{g}}{1 + |g|^2}, \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{g' \bar{g}' (1 + |g|^2) - g' \bar{g} g \bar{g}'}{(1 + |g|^2)^2}, \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2}, \\ &= -\frac{16|g'|^2}{|f|^2 (1 + |g|^2)^4}, \\ &= -\left[\frac{4|g'|}{|f|(1 + |g|^2)^2} \right]^2. \end{aligned}$$

□

3.1. Ejemplos

En adelante daremos ejemplos de como construir superficies mínimas usando el Teorema [2.18], conocidas de la literatura de geometría del espacio.

3.1.1. La Helicoide

Tomemos $U \subset \mathbb{C}$, $g(\zeta) = -ie^\zeta$ y $f(\zeta) = \frac{e^{-\zeta}}{2}$. Observe que ni g tiene polos, ni f tiene ceros en \mathbb{C} . Así por el Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \frac{1}{2} f(1 - g^2) = \frac{\cosh(\zeta)}{2}, \\ \phi^2 &= \frac{i}{2} f(1 + g^2) = -i \frac{\sinh(\zeta)}{2}, \\ \phi^3 &= fg = -\frac{i}{2}. \end{aligned}$$

Como $\cosh(\zeta)$, $\sinh(\zeta)$ y multiplicado por una constante son funciones holomorfas en \mathbb{C} , entonces $\int_\gamma \phi^j = 0$, para cada trayectoria cerrada γ en \mathbb{C} , $j = 1, 2, 3$. Por lo

tanto, $\phi^j d\zeta$ no tiene períodos, y del Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned}x^1 &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta \frac{\cosh(z)}{2} dz \right) = \operatorname{Re}(\cosh(\zeta)) = \cos(v) \operatorname{senh}(u), \\x^2 &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta -i \frac{\operatorname{senh}(z)}{2} dz \right) = \operatorname{Re}(-i \cosh(\zeta) + i) = \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u), \\x^3 &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^\zeta -\frac{i}{2} dz \right) = \operatorname{Re}(-i\zeta) = v.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos(v) \operatorname{senh}(u), \operatorname{sen}(v) \operatorname{senh}(u), v),$$

describe una superficie mínima. Si $\operatorname{senh}(u) = t$, la parametrización $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t, v)$ es una parametrización de la superficie mínima conocida como **la Helicoide**, ver Figura [3.1].

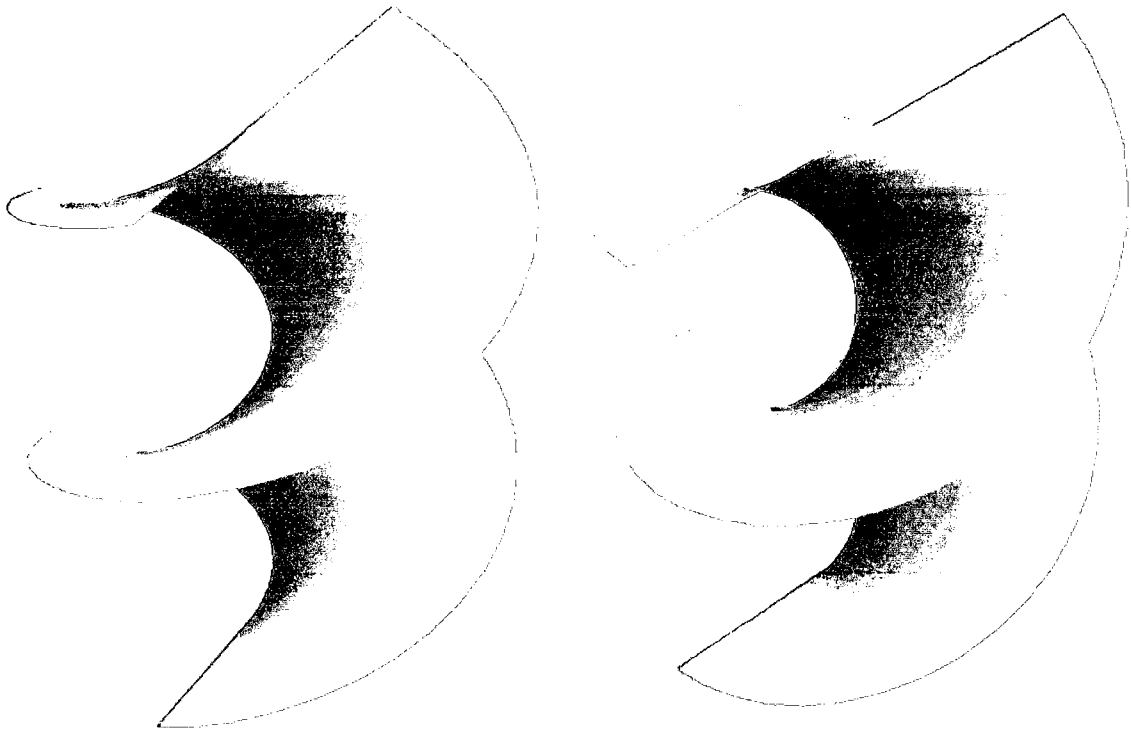


Figura 3.1: La Helicoide.

3.1.2. La Catenoide

Tomemos $U \subset \mathbb{C}$, $g(\zeta) = -e^\zeta$ y $f(\zeta) = -\frac{e^{-\zeta}}{2}$. Observe que g no tiene polos y f no tiene ceros en \mathbb{C} . Así por el Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2) = \frac{1}{2} \frac{(e^\zeta) - e^{-\zeta}}{2} = \frac{\sinh(\zeta)}{2}, \\ \phi^2 &= \frac{i}{2}f(1+g^2) = \frac{-i}{2} \frac{(e^\zeta) + e^{-\zeta}}{2} = -i \frac{\cosh(\zeta)}{2}, \\ \phi^3 &= fg = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Como $\cosh(\zeta)$, $\sinh(\zeta)$ y multiplicado por una constante son funciones holomorfas en \mathbb{C} , entonces $\int_\gamma \phi^j = 0$, para cada trayectoria cerrada γ en \mathbb{C} , $j = 1, 2, 3$. Por lo tanto, $\phi^j d\zeta$ no tiene períodos, y del Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned}x^1 &= 2\operatorname{Re}\left(\int_0^\zeta \frac{\sinh(z)}{2} dz\right) = \operatorname{Re}(\cosh(\zeta)) = \cos(v)\cosh(u) - 1, \\ x^2 &= 2\operatorname{Re}\left(\int_0^\zeta -i \frac{\cosh(z)}{2} dz\right) = \operatorname{Re}(-i\sinh(\zeta) + i) = \sin(v)\cosh(u), \\ x^3 &= 2\operatorname{Re}\left(\int_0^\zeta -\frac{i}{2} dz\right) = \operatorname{Re}(\zeta) = u.\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbf{X}(u, v) = (\cos(v)\cosh(u), \sin(v)\cosh(u), v) - (1, 0, 0),$$

describe una superficie mínima, conocida como **la Catenoide**, ver Figura [3.1].

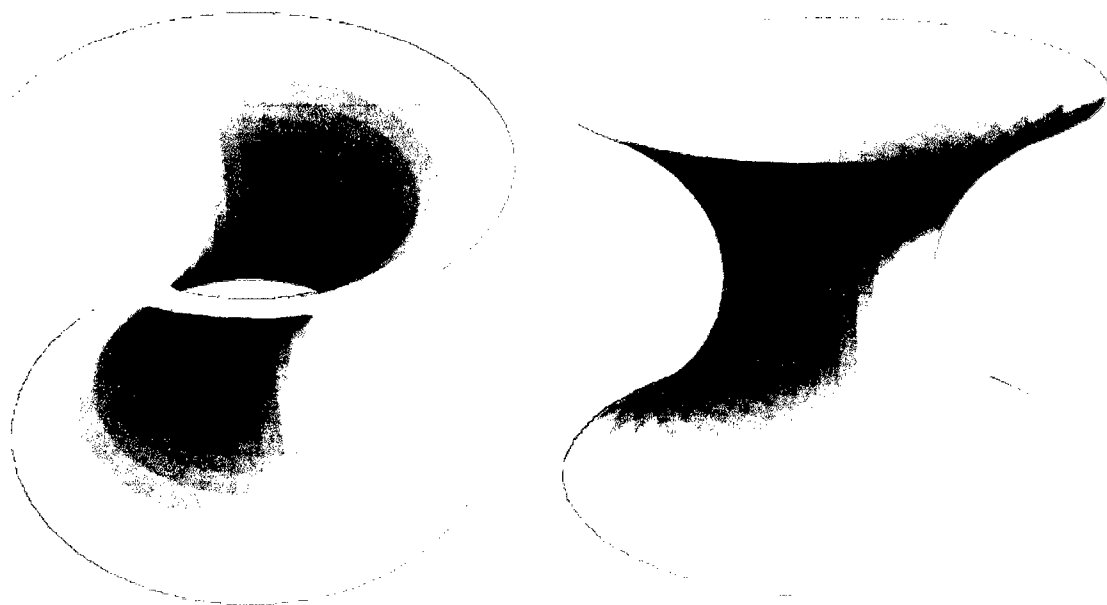


Figura 3.2: La Catenoide.

Observación 3.2. *Otra forma de obtener la Catenoide es la siguiente:*

Tomar $U = \mathbb{C} - 0$, $g(\zeta) = \zeta$ y $f(\zeta) = \frac{1}{2\zeta^2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\zeta^2} - 1\right), \\ \phi^2 &= \frac{i}{2}f(1+g^2) = \frac{i}{4}\left(\frac{1}{\zeta^2} + 1\right), \\ \phi^3 &= fg = \frac{1}{2\zeta}.\end{aligned}$$

Las funciones ϕ^1 y ϕ^2 no tienen períodos y ϕ^3 sólo tiene un período puramente imaginario. Así del Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned}x^1 &= -\frac{u}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right) + 1, \\ x^2 &= -\frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right), \\ x^3 &= \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2).\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(-\frac{u}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right), -\frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{u^2 + v^2}\right), \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) + (1, 0, 0)\right).$$

3.1.3. La superficie de Scherk's

Considere el disco unitario $D = \{\zeta \in \mathbb{C}; |\zeta| < 1\}$. Tomando $U = D$, $g(\zeta) = \zeta$ y $f(\zeta) = \frac{4\zeta}{1-\zeta^4}$, y de la Definición [2.17] obtenemos

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2) = \frac{2}{1+\zeta^2} = \left(\frac{i}{\zeta+i} - \frac{i}{\zeta-i}\right), \\ \phi^2 &= \frac{i}{2}f(1+g^2) = \frac{2i}{1-\zeta^2} = \left(\frac{i}{\zeta+1} - \frac{i}{\zeta-1}\right), \\ \phi^3 &= fg = \frac{4\zeta}{1-\zeta^4} = \left(\frac{2\zeta}{\zeta^2+1} - \frac{2\zeta}{\zeta^2-1}\right).\end{aligned}$$

Luego del Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned}x^1 &= \operatorname{Re}\left(i \log \frac{\zeta + i}{\zeta - i}\right) = -\operatorname{arg}\left(\frac{\zeta + i}{\zeta - i}\right), \\x^2 &= \operatorname{Re}\left(i \log \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right) = -\operatorname{arg}\left(\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1}\right), \\x^3 &= \operatorname{Re}\left(\log \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1}\right) = \log \left| \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2 - 1} \right|.\end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\frac{\zeta + i}{\zeta - i} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta - i|^2} + i \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{|\zeta - i|^2},$$

y

$$\frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} = \frac{|\zeta|^2 - 1}{|\zeta - 1|^2} + i \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{|\zeta - 1|^2}.$$

Donde $|\zeta|^2 - 1 < 1$ en U , tenemos que $-\frac{3\pi}{2} \leq x^1, x^2 \leq -\frac{\pi}{2}$, $\zeta = u + iv$. Y de las expresiones anteriores es sencillo ver que

$$\cos x^1 = \frac{|\zeta|^2 - 1}{\zeta^2 + 1} \quad y \quad \cos x^2 = \frac{|\zeta|^2 - 1}{\zeta^2 - 1},$$

de esto

$$x^3 = \log \left(\frac{\cos x^2}{\cos x^1} \right),$$

donde $x^1 \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ y $x^2 \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, así la aplicación $\mathbf{X} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ describe una parametrización de una superficie mínima, conocida como la **superficie de Scherk's**, ver Figura [3.3].

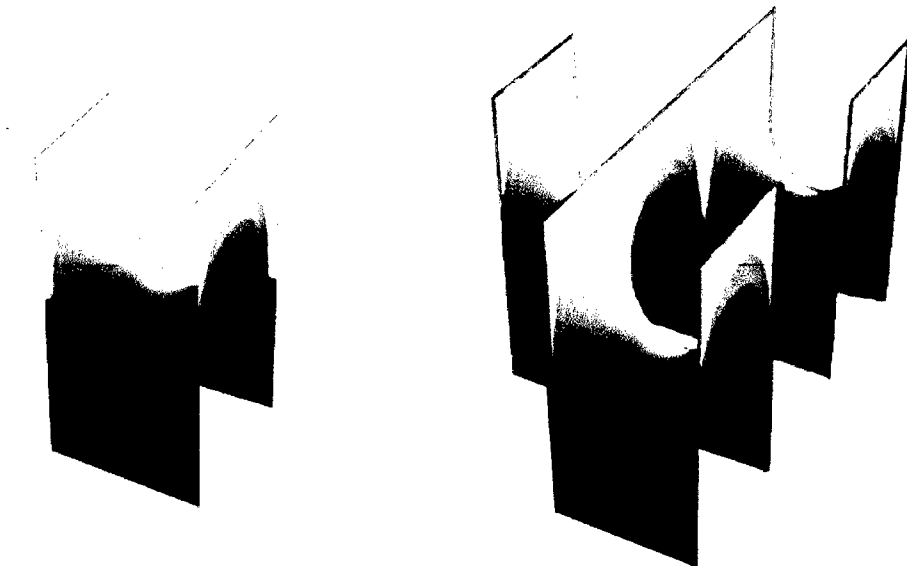


Figura 3.3: Superficie de Scherk's.

3.1.4. Superficie de Henneberg's

Tomemos $U = \mathbb{C} - \{0\}$, $g(\zeta) = \zeta$ y $f(\zeta) = 1 - \frac{1}{\zeta^4}$, obtenemos así

$$\begin{aligned}\phi^1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2) = \frac{2}{1+\zeta^2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\zeta^4} + \frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 + 1\right), \\ \phi^2 &= \frac{i}{2}f(1+g^2) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\zeta^4} - \frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 + 1\right), \\ \phi^3 &= fg = \zeta - \frac{1}{\zeta^3}.\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned}\int_1^\zeta \phi^1 dz &= \frac{(1-\zeta^2)^3}{6\zeta^3}, \\ \int_2^\zeta \phi^1 dz &= \frac{i(1+\zeta^2)^3}{6\zeta^3} - \frac{8i}{3}, \\ \int_1^\zeta \phi^3 dz &= fg = \frac{(\zeta^2-1)^2}{2\zeta^2}.\end{aligned}$$

Luego del Teorema [2.18] tenemos

$$\begin{aligned}x^1 &= 2\operatorname{Re}\left(\frac{(1-\zeta^2)^3}{6\zeta^3}\right) = \left(\frac{(\bar{\zeta} - |\zeta|^2\zeta)^3}{3|\zeta|^6}\right), \\ x^2 &= 2\operatorname{Re}\left(\frac{i(1+\zeta^2)^3}{6\zeta^3} - \frac{8i}{3}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{(\bar{\zeta} + |\zeta|^2\zeta)^3}{3|\zeta|^6}\right), \\ x^3 &= 2\operatorname{Re}\left(\frac{(\zeta^2-1)^2}{2\zeta^2}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{(\zeta|\zeta|^2 - \bar{\zeta})^2}{|\zeta|^4}\right).\end{aligned}$$

Y haciendo simples cálculos tenemos

$$\begin{aligned}x^1(u, v) &= \frac{[u^3(1-u^2-v^2)^3 - 3uv^2(1-u^2-v^2)(1+u^2+v^2)^2]}{3(u^2+v^2)^3}, \\ x^2(u, v) &= \frac{[3u^2v(1+u^2+v^2)^2(1-u^2-v^2) - v^3(1-u^2-v^2)^3]}{3(u^2+v^2)^3}, \\ x^3(u, v) &= \frac{[u^2(1-u^2-v^2)^2 - v^2(1+u^2+v^2)]}{(u^2+v^2)^2}.\end{aligned}$$

Así $\mathbf{X} = (x^1, x^2, x^3)$ describe la superficie conocida como la **superficie de Henneberg's**, ver Figura [3.4].

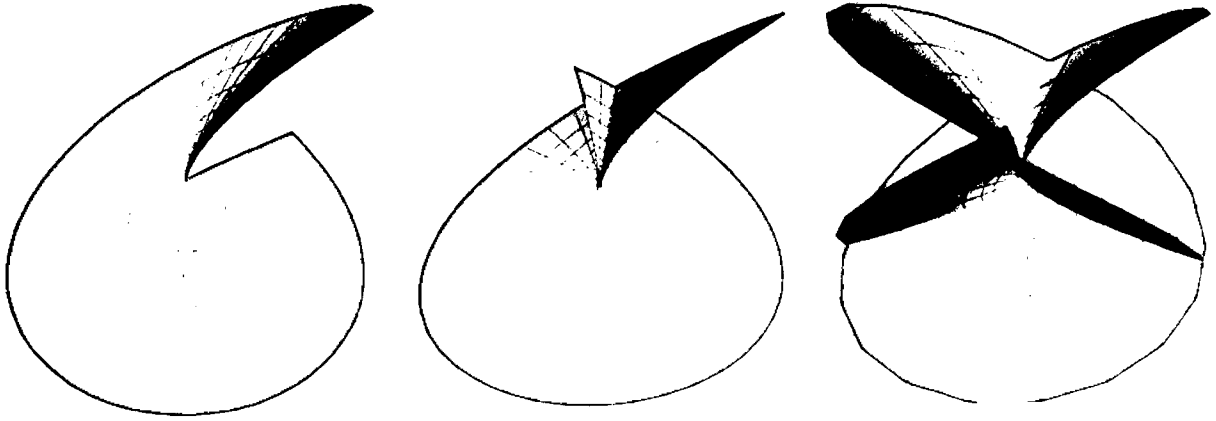


Figura 3.4: Superficie de Henneberg's.

3.1.5. Superficie de Enneper's

La elección más simple que uno puede hacer para U , g y f es tomar $U = \mathbb{C}$, $g(z) = \zeta$ y $f(\zeta) = \frac{1}{2}$. Así usando el Teorema [2.18] obtenemos una superficie mínima M cuya parametrización esta dada por $X : \mathbb{C} \rightarrow M$ definida por

$$X = \frac{1}{2} \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2 \right).$$

Esto describe la superficie conocida como la **superficie de Enneper's**, ver Figura [3.5].



Figura 3.5: Superficie de Enneper's.

3.2. Conclusiones

A partir del Teorema [2.18] tenemos las siguientes conclusiones.

- Toda superficie mínima puede ser representada localmente y/o globalmente mediante una pareja de funciones holomorfas.
- La representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas es un buen ejemplo en la cual podemos ver la interacción entre dos campos de la matemática que son la teoría Compleja y la Geometría.
- La representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas, da inicio al estudio de la superficies mínimas desde un enfoque más amplio y utilizando técnicas de la teoría compleja para mostrar resultados más avanzados en esta área que son desenvueltas en temas más avanzados.
- La representación canónica de Weierstrass para superficies mínimas, nos da una manera de construir más ejemplos de superficies mínimas de los pocos ya conocidos.

Bibliografía

- [1] Barbosa, M, L. y A. Colares., (1980) *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* . Brasil, Springer-Verlag.
- [2] Churchil, V, R. y J. Ward Brown., (1996) *Variable Compleja*, España, McGraw-Hill.
- [3] Do Carmo, M., (2007) *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, España, Alianza Universidad Textos.
- [4] Duren, P., (2004) *Harmonic Mappings in the Plane*, USA, Cambridge University Press.
- [5] Fomenko, A, T. y A. Tuzhilin., (1991) *Elements of the Geometry and Topology of Minimal Surfaces in three-Dimensional Space*. USA, American Mathematical Society.
- [6] Neto, L, A., (2008) *Funções de uma variável complexa*. Brasil, Projeto Euclides.
- [7] Teneblat, K., (2008) *Introdução à geometria diferencial*, Brasil, Editora Edgard Blucher Ltda.
- [8] Osserman, R., (1896) *A Survey of Minimal Surfaces*, USA, Dover Publications, Inc.
- [9] Shipman, P., (2012) “*The Weierstrass-Enneper Representations*” [En línea]. USA, disponible en: http://www.math.colostate.edu/~shipman/47/volume42011/M641_MKilchrist_Packard.pdf. [Accesado el día 03 de enero de 2017].
- [10] The Inkscape Team. (2003). Disponible en: <https://www.inkscape.org/es/>. [Accesado el día 09 de febrero de 2017].