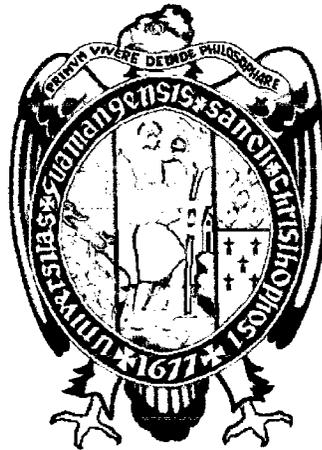


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE
HUAMANGA**

FACULTAD DE INGENIERIA DE MINAS, GEOLOGIA Y CIVIL

**ESCUELA DE FORMACIÓN PROFESIONAL DE
INGENIERIA CIVIL**



**MODELACIÓN BIDIMENSIONAL PARA FLUJO EN TRAMOS
CURVOS DE CANALES ABIERTOS.**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

PRESENTADO POR

Br. LUIS ALBERTO VARGAS HUAMANTUMBA

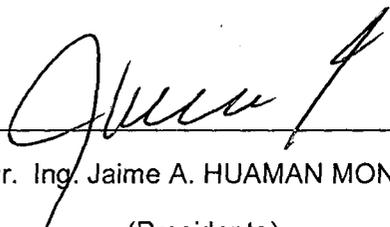
AYACUCHO - PERÚ

2017

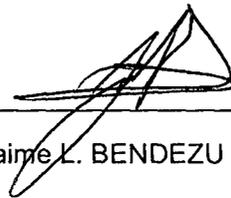
**“MODELACION BIDIMENSIONAL PARA FLUJOS EN TRAMOS CURVOS DE
CANALES ABIERTOS”**

RECOMENDADO : 05 DE DICIEMBRE DE 2017

APROBADO : 21 DE DICIEMBRE DE 2017



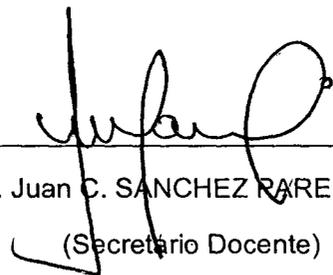
Dr. Ing. Jaime A. HUAMAN MONTES
(Presidente)



M.Sc. Ing. Jaime L. BENDEZU PRADO
(Miembro)

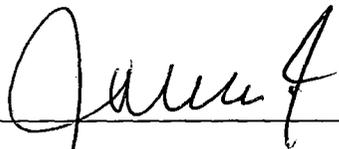


M.Sc. Ing. Edmundo CANCHARI GUTIERREZ
(Miembro)

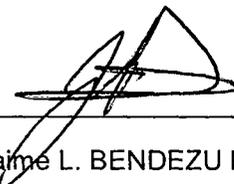


Arq. Juan C. SANCHEZ PAREDES
(Secretario Docente)

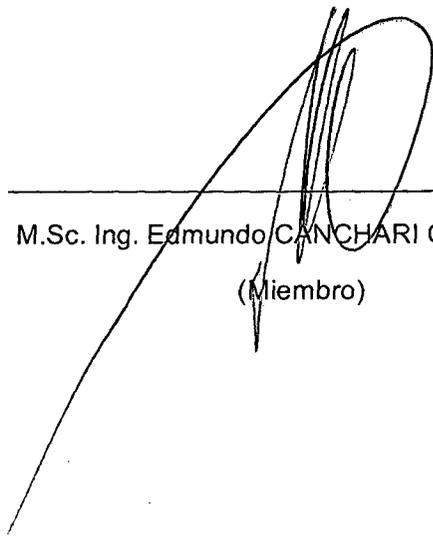
Según el acuerdo constatado en el acta, levantado el 21 de diciembre de 2017, en la sustentación de Tesis presentado por el Bachiller en Ciencias de la Ingeniería Civil Sr. Luis Alberto VARGAS HUAMANTUMBA, con la tesis titulado **“MODELACION BIDIMENSIONAL PARA FLUJOS EN TRAMOS CURVOS DE CANALES ABIERTOS”**, fue calificada con la nota de DIECISÉIS (16) por lo que se da la respectiva APROBACIÓN.



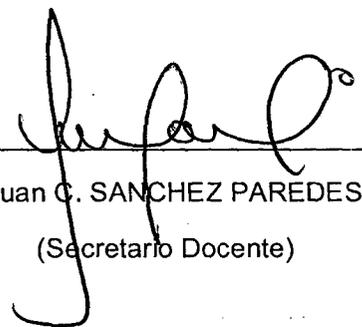
Dr. Ing. Jaime A. HUAMAN MONTES
(Presidente)



M.Sc. Ing. Jaime L. BENDEZU PRADO
(Miembro)



M.Sc. Ing. Edmundo CANCHARI GUTIERREZ
(Miembro)



Arq. Juan C. SANCHEZ PAREDES
(Secretario Docente)

DEDICATORIA

A Dios, por haberme regalado el don de la vida, Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis objetivos, además de su infinita bondad y amor. A mi abuelita Floriza, por ser mi fortaleza en mis momentos de debilidad, que desde el cielo siempre ilumina mi camino.

A mi amada esposa Linda Elizabeth por su apoyo y animo que me brinda día a día que junto a nuestro pequeño hijo Luis Enrique motor de nuestra unión, son la razón de mis logros.

A Mamita, por haberme apoyado incansablemente, Por los ejemplos de perseverancia y constancia que la caracterizan que me ha permitido ser una persona de bien, por el valor mostrado para salir adelante, pero más que nada, por su paciencia y amor.

A esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron listas para brindarme toda su ayuda, ahora toca regresar un poquito de todo lo inmenso que me han otorgado. Con todo mi cariño está tesis se las dedico a ustedes Mis hermanas: Edith, Liz y Mel

AGRADECIMIENTOS

A mi Alma Mater la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga forjadora de excelentes profesionales al servicio de la sociedad y del país.

A los docentes de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga de la Facultad de Ingeniería de Minas Geológica y Civil, por sus enseñanzas, motivaciones y dedicación durante mi formación académica y profesional.

A mi asesor Msc. Ingeniero Cristian, Castro Pérez, por compartir sus experiencias y conocimientos científicos.

Al Dr. Ingeniero Hans Paul, Sánchez Tueros, por su acogida, motivación y sus apreciadas sugerencias en la elaboración de esta tesis.

A todas las personas que apoyaron desinteresadamente en la ejecución y culminación del presente trabajo de investigación.

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA	II
AGRADECIMIENTOS.....	III
ÍNDICE GENERAL	IV
ÍNDICE DE TABLAS.....	VIII
ÍNDICE DE FIGURAS.....	IX
RESUMEN	XIV
1. CAPITULO I. INTRODUCCION	1
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	1
1.2 JUSTIFICACIÓN E IMPORTANCIA.....	3
1.3 OBJETIVOS	4
1.3.1 <i>Objetivo General</i>	4
1.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	4
2. CAPITULO II. REVISION HISTORICA (O ESTADO DEL ARTE) DEL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA	6
2.1 CRITERIO PARA DISEÑO DE CANALES ABIERTOS	6
2.1.1 <i>Consideraciones generales</i>	6
2.1.2 <i>Elementos básicos en el diseño de canales</i>	6
2.1.2.1 Trazo de canales	7
2.1.2.2 Radios mínimos en canales.....	8
2.1.2.3 Elementos de una curva	10
2.1.2.4 Rasante de un canal.....	11
2.1.2.5 Sección hidráulica óptima.....	13
2.1.2.6 Diseño de secciones hidráulicas	15
2.2 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA EL ESTUDIO DEL FLUJO EN CANALES ABIERTOS.....	21
2.2.1 <i>Introducción</i>	21
2.2.2 <i>Ecuaciones de Navier - Stokes</i>	22

2.2.3	<i>Ecuaciones bidimensionales de Saint Venant</i>	23
2.2.4	<i>Versiones y discusión de los términos de las ecuaciones de Saint Venant en coordenadas rectangulares</i>	36
2.2.4.1	Versiones integrales y diferenciales	36
2.2.4.2	Versiones conservativa y no conservativa.....	36
2.2.4.3	Discusión de los términos de las ecuaciones de Saint Venant.....	37
2.2.5	<i>Coordenadas curvilíneas rectangulares y generales</i>	42
2.2.5.1	Versiones de un mismo vector en coordenadas generales.....	44
2.2.5.1.1	Base local covariante	45
2.2.5.1.2	Base local contravariante	49
2.2.5.1.3	Bases unitarias y sus correspondientes bases duales.....	54
2.2.5.2	Deducción de la versión Covariante de las ecuaciones de hidrodinámica.....	60
2.2.5.3	Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante.....	63
2.2.5.4	Resumen de las ecuaciones dinámicas en coordenadas curvilíneas generales con componentes físicos.	72
2.2.5.4.1	Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante	72
2.2.5.4.2	Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo η constante	72
2.2.5.5	Ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas generales.	73
2.2.6	<i>Parámetros y tensores métricos en coordenadas polares</i>	75
2.2.6.1	Sistema de coordenadas polares.....	75
2.2.6.2	Transformación de la ecuación de hidrodinámica a coordenadas polares.....	78
2.2.6.2.1	Ecuación de continuidad en coordenadas polares.....	78
3.	CAPITULO III. MÉTODO DE SOLUCION NUMÉRICA	79
3.1	MÉTODOS PARA EL CÁLCULO DE FLUJO A SUPERFICIE LIBRE	79
3.2	SOLUCIÓN NUMÉRICA POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	83
3.2.1	<i>Esquemas explícitos y esquemas implícitos</i>	87
3.2.1.1	Esquemas explícitos de diferencias finitas	87
3.2.1.2	Esquemas implícitos de diferencias finitas	88
3.2.2	<i>Esquema de MacCormack</i>	89
3.2.2.1	Metodología de cálculo.....	90

3.2.2.2	Discretización de las ecuaciones	93
3.2.2.3	Condiciones de frontera.....	105
3.2.2.4	Filtro numérico y condición de estabilidad	109
4.	CAPITULO IV. DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO	111
4.1	INTRODUCCIÓN	111
4.2	DESCRIPCIÓN DEL PROGRAMA.....	111
4.3	DESARROLLO DEL PROGRAMA EN MATLAB	112
4.4	PROCESO DE CÁLCULO DE UN TRAMO CURVO DE CANAL	116
5.	CAPITULO V. COMPARACION DE RESULTADOS.....	122
5.1	INTRODUCCIÓN	122
5.2	PATRÓN DE COMPARACIÓN	122
5.2.1	<i>Modelo Iber</i>	122
5.2.2	<i>Pre – Proceso</i>	124
5.2.2.1	Construcción de la geometría	125
5.2.2.2	Condiciones Hidrodinámicas.....	128
5.2.2.3	Rugosidad	131
5.2.2.4	Construcción del mallado.....	132
5.2.2.5	Datos del problema.....	134
5.2.2.6	Ejecución de cálculo	134
5.2.3	<i>Post – Proceso</i>	135
5.3	COMPARACIÓN Y VERIFICACIÓN DE RESULTADOS	137
6.	CAPITULO VI. MODELADO DEL TRAMO CURVO DEL CANAL EN ESTUDIO .	139
6.1	INTRODUCCIÓN	139
6.2	IDENTIFICACIÓN DEL CANAL EN ESTUDIO	139
6.2.1	<i>Ubicación</i>	139
6.2.2	<i>Características geométricas e hidráulicas</i>	140
6.2.3	<i>Recolección y análisis de datos</i>	142
6.2.3.1	Materiales y equipo empleado	142
6.2.3.2	Plan de medición.....	143

6.3 ANÁLISIS DE DATOS OBTENIDOS.....	145
6.3.1 Caudales de ingreso.....	145
6.3.2 Tirantes medidos en el centro de la curva.....	146
6.4 MODELIZACIÓN CON IBER DEL TRAMO CURVO DEL CANAL EN ESTUDIO	146
6.4.1 Pre – Proceso.....	146
6.4.1.1 Construcción de la geometría	147
6.4.1.2 Condiciones Hidrodinámicas.....	151
6.4.1.3 Rugosidad.....	152
6.4.1.4 Construcción del mallado.....	153
6.4.1.5 Datos del problema.....	154
6.4.2 Post – Proceso	154
6.5 COMPARACIÓN E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	156
6.6 CALIBRACIÓN DEL MODELO.....	157
6.7 ANÁLISIS DEL DISEÑO EN DIFERENTES ESCENARIOS	158
6.7.1 Escenario 1.....	159
6.7.2 Escenario 2.....	161
6.7.3 Escenario 3.....	162
7. CAPITULO VII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	164
7.1 CONCLUSIONES.....	164
7.2 RECOMENDACIONES.....	165
BIBLIOGRAFIA	166
PANEL FOTOGRAFICO Y ANEXOS	167

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 2-1 RADIO MÍNIMO EN FUNCIÓN AL CAUDAL.....	8
TABLA 2-2 RADIO MÍNIMO PARA $Q < 20 \text{ m}^3/\text{s}$ CAPACIDAD DEL CANAL	9
TABLA 2-3 RADIO MÍNIMO EN CANALES ABIERTOS EN FUNCIÓN DEL ESPEJO DE AGUA.....	9
TABLA 2-4 RELACIÓN PLANTILLA VS TIRANTE PARA, MÁXIMA EFICIENCIA, MÍNIMA INFILTRACIÓN Y EL PROMEDIO DE AMBAS.....	14
TABLA 2-5 VALORES DE RUGOSIDAD "n" DE MANNING	16
TABLA 2-6 RELACIONES GEOMÉTRICAS DE LAS SECCIONES TRANSVERSALES MÁS FRECUENTES	17
TABLA 2-7 TALUDES APROPIADOS PARA DISTINTOS TIPOS DE MATERIAL.....	18
TABLA 2-8 PENDIENTES LATERALES EN CANALES SEGÚN TIPO DE SUELO	18
TABLA 2-9 MÁXIMA VELOCIDAD PERMITIDA EN CANALES NO RECUBIERTOS DE VEGETACIÓN.....	19
TABLA 2-10 VELOCIDADES MÁXIMAS EN HORMIGÓN EN FUNCIÓN DE SU RESISTENCIA.....	19
TABLA 2-11 BORDE LIBRE EN FUNCIÓN DEL CAUDAL.....	20
TABLA 2-12 BORDE LIBRE EN FUNCIÓN DE LA PLANTILLA DEL CANAL	21
TABLA 2-13 VERSIONES DEL VECTOR \mathbf{q} EN FUNCIÓN DE BASES UNITARIAS Y RECÍPROCAS.....	59
TABLA 4-1 DATOS GEOMÉTRICOS DEL TRAMO CURVO EN COORDENADAS UTM.	117
TABLA 5-1 COORDENADAS UTM DE PUNTOS DEL CANAL.	127
TABLA 6-1 TIRANTES EN AMBOS EXTREMOS DE LA CURVA EN FUNCIÓN A LA ABERTURA DE LA COMPUERTA.....	144
TABLA 6-2 CAUDALES DE INGRESO POR LA COMPUERTA.....	146
TABLA 6-3 TIRANTES EN AMBOS EXTREMOS DE LA CURVA EN FUNCIÓN AL CAUDAL.	146
TABLA 6-4 TIRANTES CALCULADOS A AMBOS EXTREMOS DE LA CURVA.....	156
TABLA 6-5 TIRANTES CALCULADOS A AMBOS EXTREMOS DE LA CURVA - ESCENARIO 1.....	159
TABLA 6-6 TIRANTES CALCULADOS A AMBOS EXTREMOS DE LA CURVA ESCENARIO 2.....	161
TABLA 6-7 TIRANTES CALCULADOS A AMBOS EXTREMOS DE LA CURVA ESCENARIO 3.....	163

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1 ELEMENTOS DE CURVA.....	10
FIGURA 2.2 SECCIÓN TÍPICA DE UN CANAL.....	12
FIGURA 2.3 DEFINICIÓN DE α_x , α_y Y α_z	31
FIGURA 2.4 SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES (X,Y) Y CURVILÍNEAS GENERALES (ξ,η)	43
FIGURA 2.5 VECTORES BASE COVARIANTES	44
FIGURA 2.6 VECTORES BASE CONTRAVARIANTES.....	50
FIGURA 2.7 CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DE HIDRODINÁMICA	60
FIGURA 2.8 RELACIÓN DE COORDENADAS RECTANGULARES - POLARES.....	76
FIGURA 3.1 PORCIÓN DE UNA MALLA DE CÁLCULO UNIFORME $t = t_i$	84
FIGURA 3.2 MALLA COMPUTACIONAL BIDIMENSIONAL DE DIFERENCIAS FINITAS	84
FIGURA 3.3 MALLA DE CÁLCULO EN EL PLANO COMPUTACIONAL	92
FIGURA 3.4 CELDA CON FRONTERA CERRADA.....	106
FIGURA 3.5 CELDA i, j CON FRONTERA DE NIVEL H^{k+1} CONOCIDO.....	107
FIGURA 3.6 CELDA i, j CON FRONTERA DE GASTO Q^{k+1} CONOCIDO.....	109
FIGURA 4.1 VENTANA PRINCIPAL DEL PROGRAMA.....	117
FIGURA 4.2 INGRESO DE GEOMETRÍA DEL CANAL Y ENMALLADO.	118
FIGURA 4.3 INGRESO DE PARÁMETROS HIDRODINÁMICOS DE CÁLCULO.	119
FIGURA 4.4 VENTANA DE PROCESAMIENTO CULMINADO.....	120
FIGURA 4.5 VENTANA DE RESULTADOS DESPLEGABLE PARA CADA PASO DE TIEMPO.	120
FIGURA 4.6 GRAFICO DE RESULTADOS EN BANDA DE COLORES.....	121
FIGURA 4.7 MATRIZ DE RESULTADOS DE M X N CELDAS.	121
FIGURA 5.1 OPCIONES DE IBER PARA IMPORTAR GEOMETRÍAS CON DISTINTOS FORMATOS.....	126
FIGURA 5.2 PLANO 2D DEL DOMINIO CONSIDERADO.....	126
FIGURA 5.3 ESQUEMA DE COORDENADAS.....	127
FIGURA 5.4 CREACIÓN DE GEOMETRÍA A PARTIR DE PUNTOS EN IBER.....	128

FIGURA 5.5 GEOMETRÍA REAL DEL TRAMO CURVO EN ESTUDIO FORMADA POR SUPERFICIE. ...	128
FIGURA 5.6 ASIGNACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES HIDRODINÁMICAS EN IBER.	129
FIGURA 5.7 ASIGNACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO DE ENTRADA EN IBER.	131
FIGURA 5.8 ASIGNACIÓN DE LA RUGOSIDAD EN IBER.	132
FIGURA 5.9 PROPIEDADES DE LA MALLA.	133
FIGURA 5.10 MALLADO ESTRUCTURADO DEL TRAMO CURVO.	133
FIGURA 5.11 EJECUCIÓN DE CÁLCULO CON IBER.	135
FIGURA 5.12 INTERFAZ DE IBER PARA EL POST-PROCESO, MENÚ PARA ANÁLISIS DE RESULTADOS.	136
FIGURA 5.13 MENÚ PARA REPRESENTACIÓN DE GRÁFICOS.	137
FIGURA 5.14 MENÚ PARA REPRESENTACIÓN DE GRÁFICOS.	137
FIGURA 6.1 SECCIÓN TRANSVERSAL DEL CANAL.	141
FIGURA 6.2 DESCARGA A TRAVÉS DE UN ORIFICIO.	144
FIGURA 6.3 UBICACIÓN DEL TRAMO CURVO DE CANAL EN ESTUDIO.	147
FIGURA 6.4 UBICACIÓN DEL TRAMO CURVO DE CANAL EN ESTUDIO.	148
FIGURA 6.5 UBICACIÓN DEL TRAMO CURVO DE CANAL EN ESTUDIO.	148
FIGURA 6.6 OPCIONES DE IBER PARA IMPORTAR GEOMETRÍAS EN FORMATO DXF.	149
FIGURA 6.7 CREACIÓN DE GEOMETRÍA A PARTIR DE PUNTOS EN IBER.	150
FIGURA 6.8 GEOMETRÍA REAL DEL TRAMO CURVO EN ESTUDIO FORMADA POR SUPERFICIE. ...	150
FIGURA 6.9 ASIGNACIÓN DE LAS CONDICIONES INICIALES HIDRODINÁMICAS EN IBER.	151
FIGURA 6.10 ASIGNACIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO DE ENTRADA EN IBER.	152
FIGURA 6.11 ASIGNACIÓN DE LA RUGOSIDAD EN IBER.	153
FIGURA 6.12 MALLADO ESTRUCTURADO DEL TRAMO CURVO.	153
FIGURA 6.13 EJECUCIÓN DE CÁLCULO CON IBER.	154
FIGURA 6.14 INTERFAZ DE IBER PARA EL POST-PROCESO, MENÚ PARA ANÁLISIS DE RESULTADOS.	155
FIGURA 6.15 MENÚ PARA REPRESENTACIÓN DE GRÁFICOS.	156
FIGURA 6.16 GRAFICO CAUDAL - TIRANTES MEDIDO Y CALCULADO PARA N=0.015.	157
FIGURA 6.17 GRAFICO CAUDAL - TIRANTES MEDIDO Y CALCULADO PARA N=0.019.	158

FIGURA 6.18 GRAFICO CAUDAL – TIRANTES, SECCIÓN CENTRAL DE LA CURVA.	160
FIGURA 6.19 GRAFICO RADIO – TIRANTES, SECCIÓN CENTRAL DE LA CURVA.	162
FIGURA 6.20 GRAFICO ANGULO – TIRANTES, SECCIÓN CENTRAL DE LA CURVA.	163

SIMBOLOGÍA EMPLEADA

Q	: Caudal
n	: Coeficiente de rugosidad de Manning
A	: Sección transversal del canal
R	: Radio hidráulico
μ	: Viscosidad dinámica
P	: Presión
ρ	: Densidad del agua
∇^2	: Operador de Laplace
X, Y	: Ejes del sistema de coordenadas rectangulares
V	: Amplitud de la velocidad de flujo
h	: Profundidad del flujo medido verticalmente o Tirante
u	: Componente de la velocidad a lo largo de la dirección x
v	: Componente de la velocidad a lo largo de la dirección y
\bar{u}	: Velocidad media de u sobre la profundidad del canal
\bar{v}	: Velocidad media de v sobre la profundidad del canal
C	: Coeficiente de Chezy
g	: Aceleración de la gravedad
e_x, e_y	: Vectores unitarios asociados a las direcciones de los ejes rectangulares
ξ, η	: Ejes del sistema de coordenadas curvilíneas generales
J	: Jacobiano de la transformación inversa
g_{ij}	: Elementos del tensor métrico covariante
g^{ij}	: Elementos del tensor métrico contravariante
$u_{(\xi)}$: Componentes covariantes físicos de la velocidad en la dirección ξ

$v_{(\eta)}$: Componentes covariantes físicos de la velocidad en la dirección η

θ, r : Ejes del sistema de coordenadas polares

Δt : Incremento de Tiempo

$\Delta \xi$: Incremento de espacio en la dirección ξ

$\Delta \eta$: Incremento de espacio en la dirección η

R_f : Filtro numérico esquema de MacCormack

$f_{i,j}$: Variable que se va a filtrar

$f_{i,j}^f$: Variable filtrada

α : Factor de peso esquema de MacCormack

C_n : Número de Courant

RESUMEN

El presente trabajo tiene por finalidad ofrecer un conocimiento amplio del flujo bidimensional en tramos curvos de canales abiertos y da las pautas para su aplicación empleando métodos de cálculo accesibles que permitan resolver de manera acertada las ecuaciones que rigen. Con la finalidad de mostrar el tema de una manera clara y detallada, se desarrolla la tesis en siete capítulos los cuales describimos en forma resumida a continuación.

El Capítulo uno, se presenta el planteamiento del problema, la justificación e importancia del trabajo de investigación. Además se hace un planteamiento sobre los objetivos que se persigue con la tesis.

El Capítulo dos, se desarrolla la revisión histórica (o estado del arte) del tratamiento del problema: se da un repaso de los criterios para el diseño de canales abiertos que se manejan en el medio, se presentan las ecuaciones que gobiernan el flujo bidimensional en coordenadas rectangulares, se describe el proceso de la transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas curvilíneas generales de las ecuaciones de hidrodinámica de la versión rectangular a la versión covariante con componentes físicos, se determinan los parámetros y tensores métricos de transformación de coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

El Capítulo tres, se presenta el desarrollo del modelo numérico para calcular el flujo bidimensional a superficie libre con régimen subcrítico, el modelo utiliza un sistema de coordenadas curvilíneas generales, se presenta un esquema de diferencias finitas, esquema explícito de segundo orden en el espacio de MacCormack para discretizar y resolver las ecuaciones de hidrodinámica en

coordenadas curvilíneas y coordenadas polares, junto con las condiciones de frontera y estabilidad del esquema.

El Capítulo cuatro, se demuestra la bondad del modelo numérico desarrollado en este estudio inmerso en el programa Bend Flow 2D. Para ello se escogió un tramo curvo de canal de sección rectangular. Se muestra el proceso de introducción de datos, cálculo y obtención de resultados.

El Capítulo cinco, se presenta el programa Iber versión 2.04 en donde se compara los resultados obtenidos por el modelo numérico implementado en el programa Bend Flow 2D.

El Capítulo seis, se realiza la modelización del tramo curvo del canal en estudio mediante el programa Iber versión 2.04, su correspondiente comparación y calibración de los resultados con base en los respectivos datos medidos en campo. Se analizan tres escenarios distintos: uno, haciendo variar los caudales de ingreso: dos, variando el Radio de la curva y tres, variando el Angulo del talud; a fin de determinar la implicancia en los tirantes de ambos extremos de la sección central de la curva y su correspondiente sobreelevación.

El Capítulo siete, finalmente se expone las conclusiones y recomendaciones sobre el tema tratado en el presente trabajo.

1. CAPITULO I. INTRODUCCION

1.1 Planteamiento del Problema

La presente investigación se enfoca en el estudio del comportamiento del flujo bidimensional en tramos curvos de canales abiertos, a fin predecir y de tomar las consideraciones necesarias en su diseño hidráulico y topográfico.

La presencia de curvas en el alineamiento de canales abiertos es inevitable, el flujo presente en estas curvas está bajo la influencia de la aceleración centrífuga la cual es responsable de la sobreelevación y demás fenómenos que se producen en la superficie del flujo a lo largo de un canal curvo. La velocidad longitudinal y el radio de la curva condicionan la determinación de la aceleración centrífuga y por ende de la sobreelevación que es la inclinación transversal de la superficie del flujo. Por otro lado es importante el cálculo de la sobreelevación en la superficie del flujo porque la diferencia de niveles delinea la planicie de inundación y determina la altura requerida para proyectar estructuras hidráulicas.

Dado que la geometría del canal condiciona las características del flujo en canales curvos en este trabajo se abordara metodologías para la modelación bidimensional, para esto es necesario el estudio de las leyes del flujo bidimensional que están establecidas por las ecuaciones de Saint Venant o

ecuaciones de aguas someras promediadas en la profundidad conocidos también como ecuaciones de hidrodinámica para flujos bidimensionales horizontales a superficie libre, dichas ecuaciones constituyen un sistema hiperbólico de leyes de conservación no lineales y, debido a su complejidad, no poseen solución analítica salvo en ciertos casos particulares.

En vista a esta dificultad se recurren a diversos métodos de solución encontrándose al método numérico como la alternativa que mejor solución da al problema.

En muchos estudios desarrollados es común el uso de modelos matemáticos en la solución de problemas de flujos a superficie libre, dependiendo del problema que se quiera resolver se puede usar modelos unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales.

Dada la escasa información científica que existe en el medio sobre el análisis del flujo bidimensional en el presente trabajo se desarrolla la interpretación completa de un modelo numérico para determinar las características hidráulicas, correspondientes a tirantes, velocidades, sobreelevación, radios de curvatura adecuados y demás parámetros.

Los modelos numéricos suponiendo que el flujo es bidimensional, se basa en la ecuación de continuidad y las ecuaciones de cantidad de movimiento en coordenadas rectangulares, de los resultados obtenidos permiten concluir que el uso de sistemas de coordenadas rectangulares para representar fronteras con curvatura o con alineamiento distinto a la dirección de los ejes rectangulares requiere hacer aproximaciones que puedan introducir grandes errores, una manera ventajosa de resolver el problema que presentan fronteras irregulares es emplear sistemas de coordenadas curvilíneas para representar en forma

adecuada fronteras definidas por curvas, la ventaja radica en que al disponer de una malla en coordenadas curvilíneas ajustadas a las fronteras, el espacio físico se puede representar en el llamado plano computacional, el cual se define como un plano o conjunto de planos rectangulares donde el tamaño lateral de la celda que componen la malla rectangular es unitario y adimensional en el cual se puede aplicar los métodos de diferencias finitas en forma similar a como se aplica en coordenadas rectangulares los cuales han sido estudiados ampliamente y son relativamente sencillos.

La aplicación práctica de la presente investigación se realizara en el canal de riego de Suytucchocha, perteneciente a la provincia de Andahuaylas del Departamento de Apurímac.

1.2 Justificación e importancia

La mayoría de consultores hoy en día trabajan ciegamente, en el diseño topográfico e hidráulico de los tramos curvos de canales abiertos sin tomar las consideraciones y previsiones necesarias para determinar de las características geométricas de estos.

El desarrollo y la generalización de los ordenadores personales cada vez más económicos y potentes han permitido que la modelación numérica se convierta en una herramienta práctica, que muestra el proceso numérico permitiendo realizar un estudio exhaustivo del funcionamiento hidráulico de un canal durante el transcurso de una avenida.

A partir del análisis del método numérico, se podrá observar en detalle los parámetros hidráulicos en todo el tramo curvo del canal, que permitan finalmente realizar un diseño adecuado de los radios de curvatura y demás parámetros, teniendo en cuenta la vida útil, así como finalmente contar con una estructura

económica que garantice funcionalidad, sin perjuicio de las instituciones del estado de tener que construir nuevamente otra estructura hidráulica.

La presente investigación permite mostrar el proceso de cálculo, a través de un modelo numérico inmerso en el programa Bend Flow 2D en donde se puede obtener los parámetros de diseño geométrico e hidráulico tales como tirantes, velocidades y otros de todo el tramo curvo del canal en estudio.

La importancia de la presente investigación radica en la entrega del análisis completo de la formulación matemática que forma parte del programa Bend Flow 2D, que permita a estudiantes y consultores contar con una herramienta valiosa para el diseño geométrico e hidráulico en tramos curvos de canales abiertos.

En el desarrollo de éste trabajo de investigación se obtienen los parámetros geométricos e hidráulicos del tramo curvo del canal abierto por el método de diferencias finitas

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Realizar un análisis completo y detallado de un modelo numérico implementado en un programa computacional para el cálculo del flujo bidimensional, que permita obtener los parámetros geométricos e hidráulicos necesarios para el diseño de los tramos curvos de canales abiertos.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Compara los resultados obtenidos del modelo numérico implementado en el programa Bend Flow 2D a través del programa Iber versión 2.04.

- Transitar caudales de diseño a través del tramo curvo del canal en estudio, para obtener resultados correspondientes a tirantes, sobreelevación y radios de la curva, analizar la implicancia en el diseño de la estructura.
- Interpretar, comparar y calibrar los datos medidos en campo del canal en estudio con los resultados del programa Iber versión 2.04.

2. CAPITULO II. REVISION HISTORICA (O ESTADO DEL ARTE) DEL TRATAMIENTO DEL PROBLEMA

2.1 Criterio para diseño de canales abiertos

2.1.1 Consideraciones generales

Por definición, un canal abierto es un conducto por el cual circula un flujo, que tiene una superficie libre expuesta a la atmósfera. Esta superficie es esencialmente una interface entre dos fluidos de diferente densidad. En el caso de la atmósfera, la densidad del aire es mucho menor que la densidad del agua.

El movimiento del flujo (agua) en los canales abiertos es producido por efecto de la gravedad, y la distribución de presiones dentro del fluido es generalmente hidrostática. El término canal abierto abarca los flujos que ocurren en canales naturales que recorren los campos, las calles residenciales, las autopistas; así como, los conductos parcialmente llenos que transportan aguas negras, los canales de irrigación y los ríos.

2.1.2 Elementos básicos en el diseño de canales

Se consideran elementos; topográficos, geológicos, geotécnicos, hidrológicos, hidráulicos, ambientales, agrológicos, entre otros.

2.1.2.1 Trazo de canales

Para trazar un canal o un sistema de canales es necesario recolectar la siguiente información básica:

- Fotografías aéreas, imágenes satelitales, para localizar los poblados, caseríos, áreas de cultivo, vías de comunicación, etc.
- Planos topográficos y catastrales.
- Estudios geológicos, salinidad, suelos y demás información que pueda conjugarse en el trazo de canales.

Una vez obtenido los datos precisos, se procede a trabajar en gabinete dando un trazo preliminar, el cual se replantea en campo, donde se hacen los ajustes necesarios, obteniéndose finalmente el trazo definitivo.

En el caso de no existir información topográfica básica se procede a levantar el relieve del canal, procediendo con los siguientes pasos:

a. Reconocimiento del terreno.- Se recorre la zona, anotándose todos los detalles que influyen en la determinación de un eje probable de trazo, determinándose el punto inicial y el punto final (geo referenciados).

b. Trazo preliminar.- Se procede a levantar la zona con una brigada topográfica, clavando en el terreno las estacas de la poligonal preliminar y luego el levantamiento con teodolito, posteriormente a este levantamiento se nivelará la poligonal y se hará el levantamiento de secciones transversales, estas secciones se harán de acuerdo a criterio, si es un terreno con una alta distorsión de relieve, la sección se hace a cada 5 m, si el terreno no muestra muchas variaciones y es uniforme la sección es máximo a cada 20 m.

c. Trazo definitivo.- Con los datos del trazo preliminar se procede al trazo definitivo, teniendo en cuenta la escala del plano, la cual depende básicamente de la topografía de la zona y de la precisión que se desea:

- Terrenos con pendiente transversal mayor a 25%, se recomienda escala de 1:500.
- Terrenos con pendiente transversal menor a 25%, se recomienda escalas de 1:1000 a 1:2000.

2.1.2.2 Radios mínimos en canales

En el diseño de canales, el cambio brusco de dirección se sustituye por una curva cuyo radio no debe ser muy grande, y debe escogerse un radio mínimo, dado que al trazar curvas con radios mayores al mínimo no significa ningún ahorro de energía, es decir la curva no será hidráulicamente más eficiente, en cambio sí será más costoso al darle una mayor longitud o mayor desarrollo. Las siguientes tablas indican radios mínimos según el autor o la fuente:

Tabla 2-1 Radio mínimo en función al caudal

Capacidad del canal	Radio mínimo
Hasta 10 m ³ /s	3 * ancho de la base
De 10 a 14 m ³ /s	4 * ancho de la base
De 14 a 17 m ³ /s	5 * ancho de la base
De 17 a 20 m ³ /s	6 * ancho de la base
De 20 m ³ /s a mayor	7 * ancho de la base

Fuente: "International Institute For Land Reclamation And Improvement" ILRI, Principios y Aplicaciones del Drenaje, Tomo IV, Wageningen The Netherlands 1978.

Tabla 2-2 Radio mínimo para $Q < 20 \text{ m}^3/\text{s}$ Capacidad del canal

Capacidad del canal	Radio mínimo
20 m ³ /s	100 m
15 m ³ /s	80 m
10 m ³ /s	60 m
5 m ³ /s	20 m
1 m ³ /s	10 m

Fuente: Ministerio de Agriculuray Alimentación, Boletín Técnico N° 7 "Consideraciones Generales sobre Canales Trapezoidales" Lima 1978.

Tabla 2-3 Radio mínimo en canales abiertos en función del espejo de agua

Canal de riego		Canal de drenaje	
Tipo	Radio	Tipo	Radio
Sub – canal	4T	Colector principal	5T
Lateral	3T	Colector	5T
Sub – lateral	3T	Sub – colector	5T

Fuente: SalzgitterConsult GMBH "Planificación de Canales, Zona Piloto Ferreñafe" Tomo II/ 1- Proyecto Tinajones –Chiclayo 1984.

2.1.2.3 Elementos de una curva

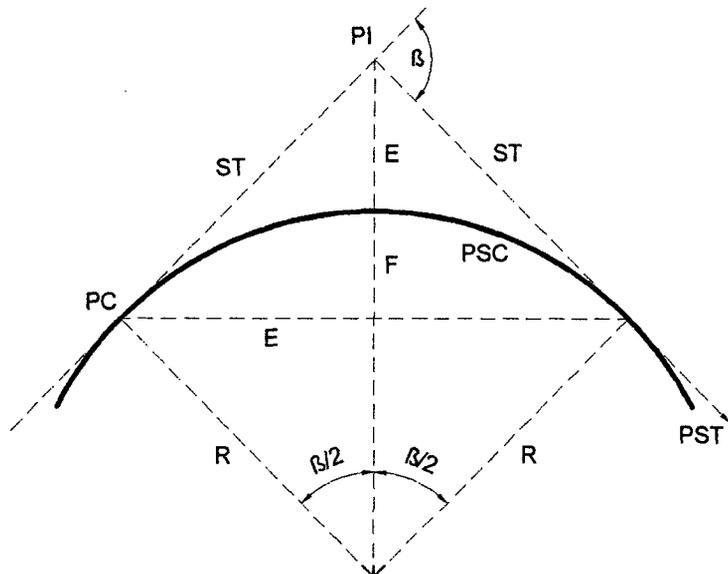


Figura 2.1 Elementos de curva

Fuente: Criterios de diseños de obras hidráulicas para la formulación de proyectos hidráulicos Autoridad Nacional del Agua –Lima 2010.

Donde:

- A : Arco, es la longitud de curva medida en cuerdas de 20 m.
- C : Cuerda larga, es la cuerda que sub – tiende la curva desde PC hasta PT.
- β : Angulo de deflexión, formado en el PI.
- E : External, es la distancia de PI a la curva medida en la bisectriz.
- F : Flecha, es la longitud de la perpendicular bajada del punto medio de la curva a la cuerda larga.
- G : Grado, es el ángulo central.
- LC : Longitud de curva que une PC con PT.
- PC : Principio de una curva.
- PI : Punto de inflexión.
- PT : Punto de tangente.
- PSC : Punto sobre curva.

PST : Punto sobre tangente.

R : Radio de la curva.

ST : Sub tangente, distancia del PC al PI.

2.1.2.4 Rasante de un canal

Una vez definido el trazo del canal, se proceden a dibujar el perfil longitudinal de dicho trazo, las escalas más usuales son de 1:1000 ó 1:2000 para el sentido horizontal y 1:100 ó 1:200 para el sentido vertical, normalmente la relación entre la escala horizontal y vertical es de 1 a 10. El procesamiento de la información y dibujo se puede efectuar empleando el software AUTOCAD CIVIL 3D (AUTOCAD clásico, AUTOCAD LAND, AUTOCAD MAP o AUTOCAD CIVIL). Para el diseño de la rasante se debe tener en cuenta:

- La rasante se debe trabajar sobre la base de una copia del perfil longitudinal del trazo
- Tener en cuenta los puntos de captación cuando se trate de un canal de riego y los puntos de confluencia si es un dren u obra de arte.
- La pendiente de la rasante de fondo, debe ser en lo posible igual a la pendiente natural promedio del terreno (optimizar el movimiento de tierras), cuando esta no es posible debido a fuertes pendientes, se proyectan caídas o saltos de agua.
- Para definir la rasante del fondo se prueba con el caudal especificado y diferentes cajas hidráulicas, chequeando la velocidad obtenida en relación con el tipo de revestimiento a proyectar o si va ser en lecho natural, también se tiene la máxima eficiencia o mínima infiltración.
- El plano final del perfil longitudinal de un canal, debe presentar como mínimo la siguiente información: kilometraje, cota de terreno, BMs (cada 500 ó 1000

m), Cota de rasante, Pendiente, Indicación de las deflexiones del trazo con los elementos de curva, ubicación de las obras de arte, sección o secciones hidráulicas del canal, indicando su kilometraje, tipo de suelo, cuadro con elementos geométricos e hidráulicos del diseño.

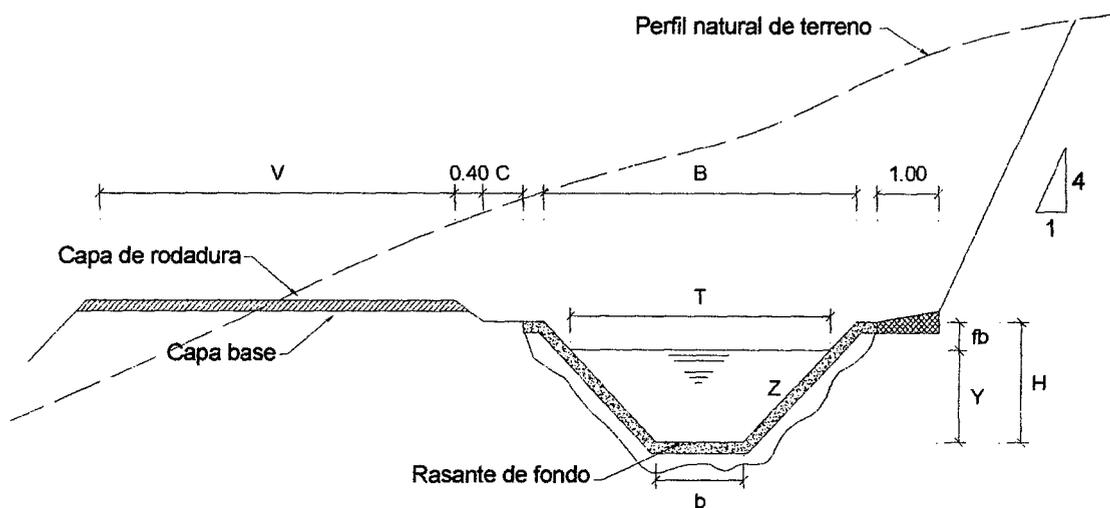


Figura 2.2 Sección típica de un canal

Fuente: Criterios de diseños de obras hidráulicas para la formulación de proyectos hidráulicos Autoridad Nacional del Agua –Lima 2010.

Donde:

T : Ancho superior del canal,

b : Plantilla,

Z : Valor horizontal de la inclinación del talud,

C : Berma del camino, puede ser: 0,5; 0,75; 1,00 m., según el canal sea de tercer, segundo o primer orden respectivamente,

V : Ancho del camino de vigilancia, puede ser: 3; 4 y 6 m., según el canal sea de tercer, segundo o primer orden respectivamente,

H : Altura de caja o profundidad de rasante del canal.

En algunos casos el camino de vigilancia puede ir en ambos márgenes, según las necesidades del canal, igualmente la capa de rodadura de 0,10 m. a veces no será necesaria, dependiendo de la intensidad del tráfico.

2.1.2.5 Sección hidráulica óptima

- **Determinación de Máxima Eficiencia Hidráulica**

Se dice que un canal es de máxima eficiencia hidráulica cuando para la misma área y pendiente conduce el mayor caudal posible, ésta condición está referida a un perímetro húmedo mínimo, la ecuación que determina la sección de máxima eficiencia hidráulica es:

$$\frac{b}{y} = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.1)$$

Siendo:

θ : Angulo que forma el talud con la horizontal, $\arctan \left(\frac{1}{z} \right)$,

b : Plantilla del canal,

y : Tirante o altura de agua.

- **Determinación de Mínima Infiltración**

Se aplica cuando se quiere obtener la menor pérdida posible de agua por infiltración en canales de tierra, esta condición depende del tipo de suelo y del tirante del canal, la ecuación que determina la mínima infiltración es:

$$\frac{b}{y} = 4 \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.2)$$

La siguiente tabla 2.4 presenta estas condiciones, además del promedio el cual se recomienda

Tabla 2-4 Relación plantilla vs tirante para, máxima eficiencia, mínima infiltración y el promedio de ambas.

Talud	Angulo	Máxima Eficiencia	Mínima Infiltración	Promedio
Vertical	90°00´	2.0000	4.0000	3.0000
1 / 4 : 1	75°58´	1.5616	3.1231	2.3423
1 / 2 : 1	63°26´	1.2361	2.4721	1.8541
4 / 7 : 1	60°15´	1.1606	2.3213	1.7410
3 / 4 : 1	53°08´	1.0000	2.0000	1.5000
1 : 1	45°00´	0.8284	1.6569	1.2426
1 ¼ : 1	38°40´	0.7016	1.4031	1.0523
1 ½ : 1	33°41´	0.6056	1.2111	0.9083
2 : 1	26°34´	0.4721	0.9443	0.7082

Fuente: Criterios de diseños de obras hidráulicas para la formulación de proyectos hidráulicos Autoridad Nacional del Agua –Lima 2010.

De todas las secciones trapezoidales, la más eficiente es aquella donde el ángulo a que forma el talud con la horizontal es 60°, además para cualquier sección de máxima eficiencia debe cumplirse:

$$R = \frac{y}{2} \quad (2.3)$$

Donde:

R : Radio hidráulico,

y : Tirante del canal.

No siempre se puede diseñar de acuerdo a las condiciones mencionadas, al final se imponen una serie de circunstancias locales que imponen un diseño propio para cada situación.

2.1.2.6 Diseño de secciones hidráulicas

Se debe tener en cuenta ciertos factores, tales como: tipo de material del cuerpo del canal, coeficiente de rugosidad, velocidad máxima y mínima permitida, pendiente del canal, taludes, etc.

La ecuación más utilizada es la de Manning o Strickler, y su expresión es:

$$Q = \frac{1}{n} AR^{2/3} S^{1/2} \quad (2.4)$$

Donde:

Q : Caudal (m³/s),

n : Rugosidad,

A : Área (m²),

R : Radio hidráulico (Área de la sección húmeda / Perímetro húmedo).

En la tabla 2.6, se muestran las secciones más utilizadas.

• Criterios de diseño

Se tienen diferentes factores que se consideran en el diseño de canales, los cuales tendrán en cuenta: el caudal a conducir, factores geométricos e hidráulicos de la sección, materiales de revestimiento, la topografía existente, la geología y geotecnia de la zona, los materiales disponibles en la zona o en el mercado más cercano, costos de materiales, disponibilidad de mano de obra

a) Rugosidad.- Esta depende del cauce y el talud, dado a las paredes laterales del mismo, vegetación, irregularidad y trazado del canal, radio hidráulico y obstrucciones en el canal, generalmente cuando se diseñan canales en tierra se supone que el canal está recientemente abierto, limpio y con un trazado uniforme, sin embargo el valor de rugosidad inicialmente asumido difícilmente se conservará

con el tiempo, lo que quiere decir que en la práctica constantemente se hará frente a un continuo cambio de la rugosidad.

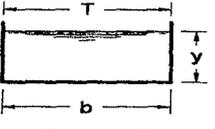
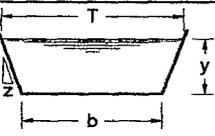
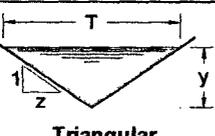
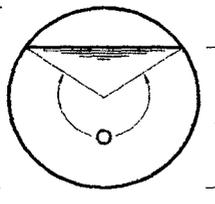
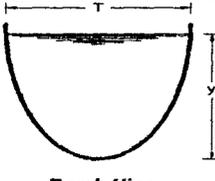
En canales proyectados con revestimiento, la rugosidad es función del material usado, que puede ser de concreto, geomanta, tubería PVC ó HDP ó metálica, o si van a trabajar a presión atmosférica o presurizados. La siguiente tabla nos da valores de "n" estimados, estos valores pueden ser refutados con investigaciones y manuales, sin embargo no dejan de ser una referencia para el diseño: calificada, tecnología actual, optimización económica, socioeconomía de los beneficiarios, climatología, altitud, etc. Si se tiene en cuenta todos estos factores, se llegará a una solución técnica y económica más conveniente.

Tabla 2-5 Valores de rugosidad "n" de Manning

n	Superficie
0.010	Muy lisa, vidrio, plástico, cobre.
0.011	Concreto muy liso.
0.013	Madera suave, metal, concreto frotachado.
0.017	Canales de tierra en buenas condiciones.
0.020	Canales naturales de tierra, libres de vegetación.
0.025	Canales naturales con alguna vegetación y piedras esparcidas en el fondo
0.035	Canales naturales con abundante vegetación.

Fuente: Criterios de diseños de obras hidráulicas para la formulación de proyectos hidráulicos Autoridad Nacional del Agua –Lima 2010.

Tabla 2-6 Relaciones geométricas de las secciones transversales más frecuentes

Sección	Area hidráulica A	Perimetro mojado P	Radio hidráulico R	Espejo de agua T
 <p>Rectangular</p>	by	$b + 2y$	$\frac{by}{b + 2y}$	b
 <p>Trapezoidal</p>	$(b + zy)y$	$b + 2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{(b + zy)y}{b + 2y\sqrt{1 + z^2}}$	$b + 2zy$
 <p>Triangular</p>	zy	$2y\sqrt{1 + z^2}$	$\frac{zy}{2\sqrt{1 + z^2}}$	$2zy$
 <p>Circular</p>	$\frac{(\theta - \text{sen}\theta) D^2}{8}$	$\frac{\theta D}{2}$	$\left(1 - \frac{\text{sen}\theta}{\theta}\right) \frac{D}{4}$	$\left(\text{sen} \frac{\theta}{2}\right) D$ ó $2\sqrt{y(D - Y)}$
 <p>Parabólica</p>	$\frac{2}{3} Ty$	$T + \frac{8y^2}{3T}$	$\frac{2T^2y}{3T + 8y^2}$	$\frac{3A}{2y}$

Fuente: VEN TE CHOW (2000), Hidráulica de canales abiertos. McGRAW-HILL INTERAMERICANA S.A. Colombia.

b) Talud apropiado según el tipo de material.- La inclinación de las paredes laterales de un canal, depende de varios factores pero en especial de la clase de terreno donde están alojados, la U.S. BUREAU OF RECLAMATION recomienda un talud único de 1,5:1 para sus canales, a continuación se presenta un cuadro de taludes apropiados para distintos tipos de material:

Tabla 2-7 Taludes apropiados para distintos tipos de material

MATERIAL	TALUD (h : v)
Roca	Prácticamente vertical
Suelos de turba y detritos	0.25 : 1
Arcilla compacta o tierra con recubrimiento de concreto	0.5 : 1 hasta 1:1
Tierra con recubrimiento de piedra o tierra en grandes canales	1 : 1
Arcilla fina o tierra en canales pequeños	1.5 : 1
Tierra arenosa suelta	2 : 1

Fuente: Aguirre Pe, Julián, "Hidráulica de canales", Centro Interamericano de Desarrollo de Aguas y Tierras – CIDIAT, Mérida, Venezuela, 1974

Tabla 2-8 Pendientes laterales en canales según tipo de suelo

MATERIAL	CANALES POCO PROFUNDOS	CANALES PROFUNDOS
Roca en buenas condiciones	Vertical	0.25 : 1
Arcillas compactas o conglomerados	0.5 : 1	1 : 1
Limos arcillosos	1 : 1	1.5 : 1
Limos arenosos	1.5 : 1	2 : 1
Arenas sueltas	2 : 1	3 : 1

Fuente: Aguirre Pe, Julián, "Hidráulica de canales", Centro Interamericano de Desarrollo de Aguas y Tierras – CIDIAT, Mérida, Venezuela, 1974

c) Velocidades máxima y mínima permisible.- La velocidad mínima permisible es aquella velocidad que no permite sedimentación, este valor es muy variable y no puede ser determinado con exactitud, cuando el agua fluye sin limo este valor carece de importancia, pero la baja velocidad favorece el crecimiento de las plantas, en canales de tierra. El valor de 0.8 m/seg se considera como la velocidad apropiada que no permite sedimentación y además impide el crecimiento de plantas en el canal.

La velocidad máxima permisible, algo bastante complejo y generalmente se estima empleando la experiencia local o el juicio del ingeniero; las siguientes tablas nos dan valores sugeridos.

Tabla 2-9 Máxima velocidad permitida en canales no recubiertos de vegetación

MATERIAL DE LA CAJA DEL CANAL	"n" Manning	Velocidad (m/s)		
		Agua limpia	Agua con partículas coloidales	Agua transportando arena, grava o fragmentos
Arena fina coloidal	0.02	1.45	0.75	0.45
Franco arenoso no coloidal	0.02	0.53	0.75	0.6
Franco limoso no coloidal	0.02	0.6	0.9	0.6
Limos aluviales no coloidales	0.02	0.6	1.05	0.6
Franco consistente normal	0.02	0.75	1.05	0.68
Ceniza volcánica	0.02	0.75	1.05	0.6
Arcilla consistente muy coloidal	0.025	1.13	1.5	0.9
Limo aluvial coloidal	0.025	1.13	1.5	0.9
Pizarra y capas duras	0.025	1.8	1.8	1.5
Grava fina	0.02	0.75	1.5	1.13
Suelo franco clasificado no coloidal	0.03	1.13	1.5	0.9
Suelo franco clasificado coloidal	0.03	1.2	1.65	1.5
Grava gruesa no coloidal	0.025	1.2	1.8	1.95

Fuente: KrochinSviatoslav. "Diseño Hidráulico", Ed. MIR, Moscú, 1978

Para velocidades máximas, en general, los canales viejos soportan mayores velocidades que los nuevos; además un canal profundo conducirá el agua a mayores velocidades sin erosión, que otros menos profundos.

Tabla 2-10 Velocidades máximas en hormigón en función de su resistencia

RESISTENCIA, (kg/cm ²)	PROFUNDIDAD DEL TIRANTE (m)				
	0.5	1	3	5	10
50	9.6	10.6	12.3	13	14.1
75	11.2	12.4	14.3	15.2	16.4
100	12.7	13.8	16	17	18.3
150	14	15.6	18	19.1	20.6

Fuente: KrochinSviatoslav. "Diseño Hidráulico", Ed. MIR, Moscú, 1978

La Tabla 2.10, da valores de velocidad admisibles altos, sin embargo la U.S. BUREAU OF RECLAMATION, recomienda que para el caso de revestimiento de canales de hormigón no armado, las velocidades no deben exceder de 2.5 – 3.0

m/seg. Para evitar la posibilidad de que el revestimiento se levante. Cuando se tenga que proyectar tomas laterales u obras de alivio lateral, se debe tener en cuenta que las velocidades tienen que ser previamente controladas (pozas de regulación), con la finalidad que no se produzca turbulencias que originen perturbaciones y no puedan cumplir con su objetivo.

d) Borde libre.- Es el espacio entre la cota de la corona y la superficie del agua, no existe ninguna regla fija que se pueda aceptar universalmente para el cálculo del borde libre, debido a que las fluctuaciones de la superficie del agua en un canal, se puede originar por causas incontrolables.

La U.S. BUREAU OF RECLAMATION recomienda estimar el borde libre con la siguiente fórmula:

$$\text{Borde Libre} = \sqrt{CY} \quad (2.5)$$

Borde libre: en pies

$C = 1.5$ para caudales menores a 20 pies³/seg., y hasta 2.5 para caudales del orden de los 3000 pies³/seg.

$Y =$ Tirante del canal en pies La secretaría de Recursos Hidráulicos de México, recomienda los siguientes valores en función del caudal:

Tabla 2-11 Borde libre en función del caudal

Caudal m ³ /seg	Revestido (cm)	Sin revestir (cm)
≤ 0.05	7.5	10
0.05 – 0.25	10	20
0.25 – 0.50	20	40
0.50 – 1.00	25	50

Fuente: Ministerio de Agricultura y Alimentación, Boletín Técnico N- 7 "Consideraciones Generales sobre Canales Trapezoidales" Lima 1978

Máximo Villón Béjar, sugiere valores en función de la plantilla del canal:

Tabla 2-12 Borde libre en función de la plantilla del canal

Ancho de la plantilla (m)	Borde libre (m)
Hasta 0.8	0.4
0.8 – 1.5	0.5
1.5 – 3.0	0.6

Fuente: Villón Béjar, Máximo; "Hidráulica de canales", Dpto. De Ingeniería Agrícola – Instituto Tecnológico de Costa Rica, Editorial Hozlo, Lima, 1981

2.2 Ecuaciones fundamentales para el estudio del flujo en canales abiertos

2.2.1 Introducción

En este capítulo se presentan las ecuaciones de flujo a superficie libre o ecuaciones de Saint Venant, ecuaciones que deben resolverse para la modelación del flujo bidimensional (objeto de esta tesis).

Se deducen las ecuaciones a partir de las leyes físicas de conservación que rigen el flujo de un fluido en general, particularizando a un fluido incompresible e isótropo, como es el agua, se obtienen las ecuaciones de Navier-Stokes para el movimiento instantáneo y de ellas se deducen, considerando variables medias en el tiempo, las ecuaciones de Reynolds. Estas serían las ecuaciones básicas que habría que resolver en el caso de flujo tridimensional de agua. Su resolución exigiría una desratización tridimensional del dominio de estudio y el esquema numérico sería complejo pero sobretodo muy costoso computacionalmente.

La mayoría de las veces el flujo de agua en cauces naturales presenta unas características que permiten simplificar estas ecuaciones más generales y obtener resultados suficientemente precisos con mucho menos costo. De las ecuaciones de Reynolds, integrando en la profundidad para eliminar en ellas la dimensión vertical, se obtienen las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales, válidas cuando el flujo que se quiere representar tiene también este carácter

bidimensional, con velocidades verticales pequeñas, pendientes del fondo del cauce suaves, y en general, las dimensiones horizontales predominantes sobre la vertical (E. Bladé 2005).

Gran parte de esta tesis trata la resolución de estas ecuaciones. A continuación de su deducción, en este capítulo se discuten los términos que aparecen en la forma más general de las ecuaciones de Saint Venant, y especialmente cómo se pueden aproximar y cuáles se pueden despreciar para simplificar las ecuaciones al máximo sin que dejen de representar lo mejor posible los fenómenos de propagación de avenidas en canales abiertos que nos interesan.

Finalmente se describe la transformación de la versión rectangular de las ecuaciones deducidas a la versión covariante con componentes físicos.

2.2.2 Ecuaciones de Navier - Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes particularizando a un fluido incompresible e isótropo, como es el agua son los siguientes:

Ecuación de Continuidad (Conservación de masa): $\frac{d}{dt}(m) = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

Ecuación de movimiento (Segunda ley de Newton): $\frac{d}{dt}(mv) = F$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla_u^2 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla_v^2 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w \quad (2.9)$$

Donde:

$$g = (g_x, g_y, g_z)^T.$$

μ : Viscosidad dinámica.

p : Presión.

∇^2 : Operador de Laplace.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2.2.3 Ecuaciones bidimensionales de Saint Venant

En gran parte de los flujos a superficie libre, el valor de las variables cambia poco en una misma vertical (E. Bladé 2005), esta consideración permite pensar en una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes a dos dimensiones mediante un promedio vertical de las ecuaciones tridimensionales. Para poder hacer esta simplificación se consideran las hipótesis siguientes:

1. Profundidad de la capa de agua pequeña con relación a las otras dimensiones del problema.
2. Distribución hidrostática de presiones en la vertical.
3. Pendiente de fondo reducida.

Estas tres hipótesis están estrechamente ligadas. Para que se cumpla la distribución hidrostática de presiones es necesario que la curvatura de las líneas de corriente sea pequeña. El cumplimiento de estas hipótesis implica además que las componentes de la velocidad y aceleración en el eje z son despreciables

frente a las componentes en los otros ejes, y también que estas últimas tienen una marcada uniformidad vertical (E. Bladé 2005).

Vamos a integrar las ecuaciones de Navier-Stokes sobre la profundidad del flujo para así obtener las ecuaciones promediadas en la vertical, ecuaciones de Saint Venant:

Ecuación de Continuidad (Conservación de masa):

$$\int_{z_b}^z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_b}^z \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{z_b}^z \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

$$\int_{z_b}^z \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_b}^z \frac{\partial v}{\partial y} dz + w(Z) - w(Z_b) = 0$$

(2.10)

Donde Z , Z_b son las coordenadas en la dirección vertical, de la superficie del agua y el fondo del canal, respectivamente (medidos perpendicularmente al fondo del canal).

Recordemos la regla de Leibnitz de derivación de una integral

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} f(\varepsilon) d\varepsilon = \int_{\phi(x)}^{\varphi(x)} \frac{\partial f}{\partial x} d\varepsilon + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(\varphi(x)) - \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} f(\phi(x))$$

En nuestro caso tendremos

$$\int_{z_b}^z \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^z u dz - u(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + u(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x}$$

$$\int_{z_b}^z \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^z v dz - v(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} + v(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial y} \quad (2.11)$$

Si la función $Z(x, y, t)$ es la coordenada vertical, de la superficie libre del agua y se supone que cualquier partícula en la superficie no lo deja, entonces la velocidad vertical de una partícula en la superficie del agua $w(Z)$ viene dado por

$$w(Z) = \frac{DZ}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} + v(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \quad (2.12)$$

Del mismo modo suponiendo que la parte inferior del canal es rígido, entonces $f_b = Z_b(x, y) - z = 0$, en donde $Z_b(x, y)$ es la coordenada vertical de la parte inferior del canal, por lo tanto

$$w(Z_b) = \frac{Df_b}{Dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + u(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} + v(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial y} \quad (2.13)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación 2.11 y 2.10 respectivamente tendremos:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}d)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}d)}{\partial y} = 0 \quad (2.14)$$

Donde \bar{u} y \bar{v} es la velocidad media de u, v sobre la profundidad del canal respectivamente

$$\bar{u} = \frac{1}{d} \int_{Z_b}^Z u dz \quad \bar{v} = \frac{1}{d} \int_{Z_b}^Z v dz \quad (2.15)$$

Donde $d = Z - Z_b$, es la profundidad del agua medida en perpendicular a la parte inferior del canal

Ecuación de movimiento (Conservación de cantidad de movimiento):

Asumiendo que la aceleración vertical es insignificante:

$$\frac{Dw}{Dt} \approx 0 \quad \mu \nabla^2 w = 0 \quad (2.16)$$

Por lo tanto la ecuación 2.9 se reduce a:

$$g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

Integrando la ecuación 2.17 en la dirección z teniendo en cuenta la presión atmosférica igual a cero tenemos:

$$p = \rho g_z (z - Z) \quad (2.18)$$

Por lo tanto se deduce que:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g_z \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g_z \frac{\partial z}{\partial y} \quad (2.20)$$

multiplicando a la ecuación 2.6 por u , añadiendo a la ecuación 2.7 y sustituyendo

la expresión para $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ de la ecuación 2.19, reordenando los términos de la

ecuación resultante, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = g_x + g_z \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \quad (2.21)$$

Del mismo modo multiplicando la ecuación 2.6 por v , añadiendo a la ecuación

2.8, sustituyendo la expresión $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$, obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = g_y + g_z \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \quad (2.22)$$

Integrando las ecuaciones 2.21 y 2.22 en la dirección z , para simplificar consideraremos los lados izquierdos y derechos de las ecuaciones por separado.

Integrando el lado izquierdo de la ecuación 2.21 y aplicando la regla de Leibnitz tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^z u dz - u(Z) \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^z u^2 dz - u^2(Z) \frac{\partial Z}{\partial x} \\ & u^2(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^z uv dz - u(Z)v(Z) \frac{\partial Z}{\partial y} \\ & u(Z_b)v(Z_b) \frac{\partial Z_b}{\partial y} + u(Z)w(Z) - u(Z_b)w(Z_b) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Basándose en el supuesto de distribución de velocidad uniforme (es decir u y v son constantes en la dirección z) y sustituyendo en la ecuación 2.12 y 2.13, la expresión 2.23 se simplifica a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}d) \quad (2.24)$$

Del mismo modo el lado izquierdo de la ecuación 2.22 se simplifica a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2d) \quad (2.25)$$

Integrando el lado derecho de las ecuaciones 2.21 y 2.22 tenemos

$$\left(g_x + g_z \frac{\partial Z}{\partial x} \right) d + \int_{z_b}^z \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u dz \quad (2.26)$$

$$\left(g_y + g_z \frac{\partial Z}{\partial y} \right) d + \int_{Z_b}^z \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v dz \quad (2.27)$$

Puesto que el plano $x - y$ es paralelo a la parte inferior del canal, Z_b es constante por lo tanto

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial (Z_b + d)}{\partial x} = \frac{\partial d}{\partial x} \quad (2.28)$$

Del mismo modo,

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial d}{\partial y} \quad (2.29)$$

Ahora vamos a considerar los términos de esfuerzo cortante.

En el flujo turbulento la viscosidad dinámica se sustituye por un coeficiente de viscosidad de remolino, por otro lado se hace distinción entre las tensiones que actúan en los planos $x - z$ e $y - z$, por ejemplo la expresión del esfuerzo cortante de la ecuación de movimiento en la dirección x puede ser escrito como

$$\epsilon_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \epsilon_{zx} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2.30)$$

Donde ϵ_{xy} y ϵ_{zx} son los coeficientes de viscosidad de remolino, Además se supone que las tensiones efectivas están dominados por las tensiones de corte inferior, esto significa que el primer término de la ecuación 2.30 es insignificante en comparación con el segundo término, por lo tanto la tensión de corte de la ecuación 2.30 se reduce a $\epsilon_{zy} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. La integración de esta expresión con respecto a z resulta:

$$\int_{Z_b}^Z \epsilon_{zx} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz = \epsilon_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=Z} - \epsilon_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=Z_b} = \tau_{s_x} - \tau_{b_x} \quad (2.31)$$

Donde τ_{s_x} y τ_{b_x} son las tensiones de corte en la superficie y fondo del canal que actúan en la dirección x .

Del mismo modo el termino de tensión de corte de la ecuación 2.27 se reduce a

$$\tau_{s_y} - \tau_{b_y} \quad (2.32)$$

Los esfuerzos de corte τ_{s_x} y τ_{s_y} , debido a la velocidad del viento que actúan en la superficie del agua son despreciables y los esfuerzos en la parte inferior del canal τ_{b_x} y τ_{b_y} son evaluados mediante el uso de fórmulas empíricas, por ejemplo la ecuación de Chezy

$$\tau_b = \frac{\rho g}{C^2} V^2 \quad (2.33)$$

Donde V es la amplitud de la velocidad de flujo (es decir $V = \sqrt{u^2 + v^2}$) y C es el coeficiente de Chezy. Se deduce de la ecuación 2.33 que

$$\begin{aligned} \tau_{b_x} &= \tau_b \cos \theta = \frac{\rho g}{C^2} \bar{u} V \\ \tau_{b_y} &= \tau_b \sin \theta = \frac{\rho g}{C^2} \bar{v} V \end{aligned} \quad (2.34)$$

Donde θ es el ángulo entre el vector de velocidad y el eje x .

Los diferentes términos de Integración respecto a la profundidad puede unirse, la sustitución de las ecuaciones 2.24 a 2.29, 2.31, 2.32, 2.34 en las ecuaciones 2.21 y 2.22 da

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2 d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}d) = \left(g_x - g_z \frac{\partial d}{\partial x} \right) gd - \frac{g}{C^2} \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

(2.35)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}d) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2 d) = \left(g_y - g_z \frac{\partial d}{\partial y} \right) gd - \frac{g}{C^2} \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$$

(2.36)

Las ecuaciones 2.35 y 2.36 son las ecuaciones de movimiento con respecto al sistema de coordenadas $x - y$, paralelo a la parte inferior del canal.

Para el caso del flujo unidimensional, las ecuaciones anteriores se reducen para canales rectangulares con $\bar{v} = 0$ y $\frac{\partial d}{\partial y} = 0$, La ecuación 2.35 resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}d) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2 d) + gd \cos \alpha_x \frac{\partial d}{\partial x} = gd \left(\text{sen} \alpha_x - S_{f_x} \right) \quad (2.37)$$

Donde α_x es el ángulo de inclinación del fondo del canal.

Las ecuaciones 2.14, 2.35 y 2.36 pueden expresarse en un sistema horizontal de coordenadas $\tilde{x} - \tilde{y} - \tilde{z}$ (Figura 2.1), en este sistema de coordenadas los canales pueden tener por tramos pendiente inferior constante.

Con el fin de transformar del sistema $x - y - z$ inclinada al sistema horizontal $\tilde{x} - \tilde{y} - \tilde{z}$, se requiere hacer girar el ex sistema de coordenadas. A una rotación de este tipo se le define mediante el uso de los cosenos directores que dan lo

ángulos entre los ejes de ambos sistemas. Sin embargo en este caso es mejor para expresar la rotación como una función para los ángulos entre la parte inferior del canal y el eje x e y (α_x y α_y) ya que estos ángulos son generalmente conocidos. De acuerdo con la Figura 2.3 y después de algunos procedimientos vectoriales la transformación entre ambos sistemas de coordenadas está dado por

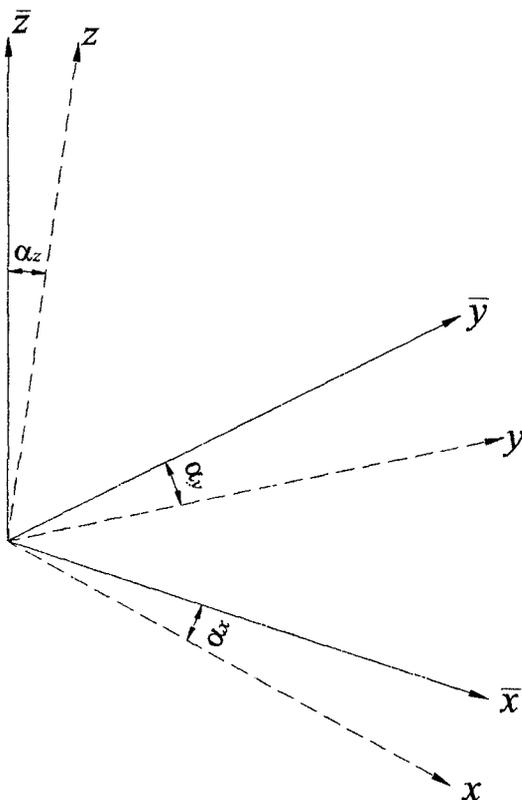


Figura 2.3 Definición de α_x , α_y y α_z

Fuente: M Hanif Chaudhry, Open Channel Flow. Springer -New York 2008.

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_x & -\frac{\cos \varphi \cos \alpha_x}{\operatorname{sen} \varphi} & \tan \alpha_x \cos \alpha_z \\ 0 & \frac{\cos \alpha_y}{\operatorname{sen} \varphi} & \tan \alpha_y \cos \alpha_z \\ -\operatorname{sen} \alpha_x & -\frac{\operatorname{sen} \alpha_y \cos^2 \alpha_x}{\operatorname{sen} \varphi} & \cos \alpha_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

$$\cos \alpha_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_x + \tan^2 \alpha_y}}$$

$$\cos \varphi = \text{sen} \alpha_x \cos \alpha_y$$

$$\text{sen} \varphi = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha_x \text{sen}^2 \alpha_y}$$

Los términos g_x, g_y y g_z se puede calcular a partir de la ecuación 2.38

$$g_x = g \cdot \hat{e}_1 = -g \cdot \tilde{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = g \text{sen} \alpha_x \quad (2.39)$$

En donde \hat{e}_i son los vectores unitarios del sistema $x - y - z$ y \tilde{e}_i son los vectores unitarios del sistema $\tilde{x} - \tilde{y} - \tilde{z}$, se debe tener en cuenta que el término $-\text{sen} \alpha_x$ en la ecuación 2.39 es $(3,1)$ elemento de la matriz de transformación, por lo tanto,

$$g_x = g \text{sen} \alpha_x$$

$$g_y = g \frac{\text{sen} \alpha_y \cos^2 \alpha_x}{\text{sen} \varphi}$$

$$g_z = -g \cos \alpha_z \quad (2.40)$$

Donde α_x, α_y y α_z se define en la Figura 2.3. Es necesario cierta simplificación antes de llevar a cabo la transformación, supongamos que aunque $\text{sen} \alpha_x$ y $\text{sen} \alpha_y$ no son necesariamente pequeños su producto es pequeño es decir,

$$\text{sen} \alpha_x \text{sen} \alpha_y \approx \text{sen}^2 \alpha_x \approx \text{sen}^2 \alpha_y \approx 0 \quad (2.41)$$

Esta aproximación introduce un pequeño error ($< 3\%$), si $|\alpha_x|, |\alpha_y| < 10^\circ$. Se deduce de la ecuación 2.41 que,

$$\text{sen}\varphi = 1; \quad \text{cos}\varphi = 0 \quad (2.42)$$

Sobre la base de estas aproximaciones y la ecuación 2.38, podemos escribir,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x \cos \alpha_x + z \tan \alpha_x \cos \alpha_z \\ \tilde{y} &= y \cos \alpha_y + z \tan \alpha_y \cos \alpha_z \end{aligned} \quad (2.43)$$

Las variables dependientes transformadas se convierten en

$$\begin{aligned} h &= \frac{d}{\cos \alpha_z} \\ \tilde{u} &= \bar{u} \cos \alpha_x \\ \tilde{v} &= \bar{v} \cos \alpha_y \end{aligned} \quad (2.44)$$

En la que h es la profundidad del flujo medido verticalmente \tilde{u} y \tilde{v} son los componentes de la velocidad a lo largo de las direcciones \tilde{x} y \tilde{y} respectivamente, además de acuerdo a la ecuación 2.43 se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \alpha_x \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tan \alpha_x \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \cos \alpha_y \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \tan \alpha_y \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

La presencia de derivadas a lo largo de la dirección \tilde{z} es indeseable, ya que la idea básica es eliminar una dimensión espacial para salir del problema, sin embargo se puede demostrar que términos como $\tan \alpha_x \cos \alpha_z \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}$ son del orden de $\text{sen}^2 \alpha_x$ y por lo tanto son insignificantes. Introduciendo las ecuaciones 2.38,

2.43, 2.44 y 2.45 en las ecuaciones 2.14, 2.35 y 2.36, lo que significa dejar el símbolo \sim .

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(uh) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2h) + \frac{\partial}{\partial y}(uvh) = gh \left[\cos \alpha_x S_{o_x} - (\cos \alpha_y \cos \alpha_z)^2 \frac{\partial h}{\partial x} - S_{f_x} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(vh) + \frac{\partial}{\partial x}(uvh) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2h) = gh \left[\cos \alpha_y S_{o_y} - (\cos \alpha_y \cos \alpha_z)^2 \frac{\partial h}{\partial y} - S_{f_y} \right]$$

(2.46)

Donde,

$$S_{o_x} = \text{sen} \alpha_x \quad S_{o_y} = \text{sen} \alpha_y$$

$$S_{f_x} = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{(C \cos \alpha_z)^2 h} \quad S_{f_y} = \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{(C \cos \alpha_z)^2 h} \quad (2.47)$$

Las expresiones 2.47 es la fórmula de Chezy donde C , es el coeficiente de Chezy.

Para pendientes pequeños de fondo del canal, las ecuaciones 2.46 puede escribirse como,

$$U_t + E_x + F_y + S = 0 \quad (2.48)$$

Donde,

$$\begin{aligned}
 U &= \begin{pmatrix} h \\ uh \\ vh \end{pmatrix}; & E &= \begin{pmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{pmatrix}; & F &= \begin{pmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{pmatrix} \\
 S &= \begin{pmatrix} 0 \\ -gh(S_{o_x} - S_{f_x}) \\ -gh(S_{o_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix} \tag{2.49}
 \end{aligned}$$

(uh) y (vh) son momentos por convección en las direcciones x e y . Si se utiliza las ecuaciones de Manning para calcular los términos de fricción en lugar de la ecuación de Chezy tenemos,

$$S_{f_x} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{c_o^2 h^{1.33}} \quad S_{f_y} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{c_o^2 h^{1.33}} \tag{2.50}$$

Donde: n es el coeficiente de Manning, c_o Constante adimensional ($c_o = 1$ para unidades SI; $c_o = 1.49$ para unidades Inglesas)

En términos de las variables de flujo h, u, v las ecuaciones que rigen pueden ser escritas como

$$V_t + P_x + R_y + T = 0 \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}; & P &= \begin{pmatrix} uh \\ \frac{1}{2}u^2 + gh \\ uv \end{pmatrix}; & R &= \begin{pmatrix} vh \\ uv \\ \frac{1}{2}v^2 + gh \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 \\ -g(S_{o_x} - S_{f_x}) \\ -g(S_{o_y} - S_{f_y}) \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

2.2.4 Versiones y discusión de los términos de las ecuaciones de Saint Venant en coordenadas rectangulares

2.2.4.1 Versiones integrales y diferenciales

Cuando se acepta que las variables de flujo son funciones discontinuas, se requieren ecuaciones integrales, mientras que cuando las variables son continuas, las ecuaciones pueden ser integrales o diferenciales. (Berezowsky 2004), por lo tanto se requiere usar versiones integrales cuando las variables del flujo pueden ser discontinuas, mientras que si se tiene la seguridad de que las variables son continuas se pueden usar versiones integrales o diferenciales lo cual es fundamental para el método numérico que se emplee.

2.2.4.2 Versiones conservativa y no conservativa

Se define como la versión conservativa de una ecuación aquella que se obtiene al aplicar un principio (de masa o cantidad de movimiento) a un volumen de control que permanece fijo con respecto a un sistema de referencia, en caso de que el volumen de control sea móvil y que dicho volumen conserve su masa invariante mientras que su volumen y forma cambien, se dice que la ecuación es no conservativa.

Introduciendo la ecuación de continuidad en las ecuaciones de movimiento se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant en forma no conservativa.

La forma no conservativa de la ecuación 2.48 es,

$$U_t + AU_x + BU_y + S = 0 \quad (2.53)$$

Donde A y B son los jacobianos de E y F

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + gh & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + gh & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Del mismo modo la forma no conservativa de la ecuación 2.52 es,

$$V_t + GV_x + HV_y + T = 0 \quad (2.55)$$

$$G = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} v & 0 & h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Las matrices A y B , G y H de las ecuaciones 2.54 y 2.56, tienen la propiedad de que sus valores propios o direcciones características son idénticos y están dados por

$$A, G \begin{cases} \lambda_1 = u \\ \lambda_2 = u + c \\ \lambda_3 = u - c \end{cases} \quad B, H \begin{cases} \omega_1 = v \\ \omega_2 = v + c \\ \omega_3 = v - c \end{cases} \quad (2.57)$$

Donde c , es la celeridad de onda ($c = \sqrt{gh}$).

La forma conservativa de las ecuaciones 2.48 y 2.51, tiene la ventaja de ser superiores en la conservación de las variables de flujo, estas presentan grandes ventajas a la hora de plantear esquemas de resolución que permiten obtener soluciones con discontinuidades.

2.2.4.3 Discusión de los términos de las ecuaciones de Saint Venant

En este trabajo se considera que no hay discontinuidades en el flujo, como saltos hidráulicos o frentes de onda, por lo que se puede usar la versión diferencial de las ecuaciones de cantidad de movimiento las cuales junto con la ecuación de

continuidad se conocen como ecuaciones de hidrodinámica para fluidos bidimensionales horizontales a superficie libre ecuaciones de Saint Venant bidimensionales.

Las expresiones 2.53 son los componentes rectangulares de la versión diferencial no conservativa de las ecuaciones de cantidad de movimiento, integrados en la profundidad, esta versión ha sido ampliamente usada en distintos trabajos de investigación como por ejemplo: Berezowsky 2004, entre otros, cuyo modelo produce buenos resultados.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uh) + \frac{\partial}{\partial y}(vh) = 0 \quad (2.58a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{g}{C^2} \frac{u}{h} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2.58b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{g}{C^2} \frac{v}{h} \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2.58c)$$

Aceleración local

Los términos de aceleración local $\frac{\partial u}{\partial t}$ y $\frac{\partial v}{\partial t}$, representan la variación de la velocidad con el tiempo en un punto fijo. Son los responsables del carácter no permanente del flujo.

Aceleración convectiva

Son los términos, $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $v \frac{\partial u}{\partial y}$, $u \frac{\partial v}{\partial x}$, $v \frac{\partial v}{\partial y}$, que representan el efecto del transporte con el flujo del gradiente de la velocidad. Son los responsables de la formación de vórtices, y su efecto es más importante cuanto mayor sea el número

de Reynolds (relación entre fuerzas viscosas y fuerzas de inercias), como se desprende de un análisis adimensional de las ecuaciones, En presencia de altas velocidades o pequeña viscosidad, y desde el punto de vista matemático, son los responsables de la no-linealidad del sistema de ecuaciones.

La suma de la aceleración local y la convectiva es la derivada material, que representa la aceleración total de las partículas del fluido.

Pendiente de la superficie libre (gradiente hidráulico)

Es el término, $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}$, que multiplicado por la aceleración de la gravedad g , representa la acción de las fuerzas gravitatorias, y se ha obtenido utilizando la hipótesis de presión hidrostática.

Este término se puede descomponer en la suma de la pendiente de fondo y el gradiente del tirante, donde la primera es conocida ya que depende sólo de la geometría del problema. La pendiente de fondo es la principal responsable de la no homogeneidad de las ecuaciones, y su presencia aumenta la complejidad de los esquemas numéricos de resolución de forma considerable.

Tensiones en el fondo (resistencia al flujo)

Los términos debidos a la fricción contra el fondo τ_{b_x} y τ_{b_y} , tienen un efecto no lineal de retardo del flujo. Aproximando el radio hidráulico por el tirante se tiene

$\tau_b = g S_f = \frac{\tau_o}{\rho h}$ (Chaudhry 2008), donde S_f es la pendiente motriz. Para ésta,

una expresión comúnmente utilizada es la fórmula de Chezy. Con ella, para el caso de flujo bidimensional, la pendiente motriz se puede calcular como:

$$S_{f_x} = \frac{u\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} \quad S_{f_y} = \frac{v\sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 h} \quad (2.59)$$

Donde C es el coeficiente de Chezy. Para $C = \frac{h^{\frac{1}{6}}}{n}$ se obtiene la fórmula de Manning.

Cuando no se considera ningún modelo de turbulencia, lo cual es muy común en modelación de flujo en canales y cauces naturales, la disipación de energía debida a las tensiones efectivas se puede suponer que se incluye en la pendiente motriz, es decir, mediante la fórmula de Manning no se pretende aproximar solamente el efecto de las tensiones en el fondo, sino también el efecto de todo el término de tensiones efectivas (E. Bladé 2005).

Tensiones tangenciales en la superficie libre

La presencia de las tensiones tangenciales en la superficie libre τ_s puede ser importante en grandes superficies con vientos fuertes. Existen distintas fórmulas para estimar este término lo cual queda fuera del alcance de los objetivos del presente trabajo.

Fuerzas por unidad de masa

Las fuerzas por unidad de masa que actúan sobre el fluido son, en general, la fuerza de gravedad, la fuerza geostrofica o de Coriolis y el efecto de las mareas que es también una fuerza por unidad de masa debida a la atracción de la luna y del sol.

Tensiones efectivas

Las tensiones efectivas constan de tres contribuciones. El primer término de *tensiones viscosas* (o tensiones viscosas laminares), el único de los tres que

representa unas tensiones reales, debido a la viscosidad del fluido. El segundo término de las tensiones efectivas son *las tensiones turbulentas*, fruto del promedio temporal de las ecuaciones de Navier-Stokes para obtener las ecuaciones de Reynolds en variables promediadas. Para flujos turbulentos desarrollados las tensiones viscosas laminares son mucho más pequeñas que las turbulentas y sólo tienen importancia en una pequeña capa próxima a los contornos, por lo que, o bien se suelen despreciar o bien se consideran conjuntamente con las segundas mediante un modelo de turbulencia. El intento de modelar correctamente las tensiones turbulentas ha dado origen a toda la teoría de turbulencia y a los distintos modelos de turbulencia. Para flujo gradualmente variable la importancia de este término con respecto a las tensiones del fondo suele considerarse despreciable (E. Bladé 2005). Finalmente el tercer término o término de *tensiones convectivas* resulta de la integración sobre la profundidad de los términos convectivos tridimensionales. Este término, también llamado término de *dispersión* o de *advección diferencial*, se anularía si realmente la distribución de velocidades fuera uniforme en la vertical, y es más relevante cuanto más nos alejamos de la hipótesis de presión hidrostática. Es un término únicamente fruto del promedio en la vertical, por lo que no tiene nada que ver con los fenómenos turbulentos. Pese a que ha habido algunos intentos de modelar este término, ello no tiene demasiado sentido ya que solamente es importante cuando nos alejamos de las hipótesis de deducción de las ecuaciones, es decir, cuando éstas dejan de ser válidas. En el caso de no poder despreciar las tensiones convectivas, habría que considerar flujo tridimensional con sus correspondientes ecuaciones (E. Bladé 2005).

Tras la discusión de los distintos términos de la ecuación bidimensional de flujo a superficie libre, si no se considera la fuerza de Coriolis, que para cauces de ríos no suele ser significativa, ni las tensiones efectivas, que tienen poca importancia

con respecto a los otros términos, ni las tensiones producidas por el viento en la superficie libre, se pueden escribir las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales en su versión diferencial no conservativa como la expresión 2.59. En este sistema de ecuaciones, con el que se trabajará en adelante, se ha supuesto pues que el efecto de la fuerza de Coriolis y la tensión debida al viento en la superficie libre son despreciables teniendo en cuenta la naturaleza de los problemas en los que se centra este trabajo, tampoco se ha considerado aquí ningún modelo de turbulencia, por lo que la disipación de los términos de tensiones efectivas solamente se puede tener en cuenta, de manera muy aproximada, en el término de la pendiente motriz, juntamente con las tensiones de fondo.

2.2.5 Coordenadas curvilíneas rectangulares y generales

En un sistema de coordenadas curvilíneas generales, en cada punto del sistema se identifican dos grupos de vectores base locales: un grupo de estas bases se distingue porque los vectores base son tangentes a los ejes curvilíneos, y el otro porque los vectores base son perpendiculares a dichos ejes.

En la Figura 2.4 se muestra los sistemas de coordenadas rectangulares (X, Y) , y curvilíneas generales (ξ, η) ; estos sistemas están relacionados por las funciones de transformación $\xi = \xi(X, Y)$ y $\eta = \eta(X, Y)$.

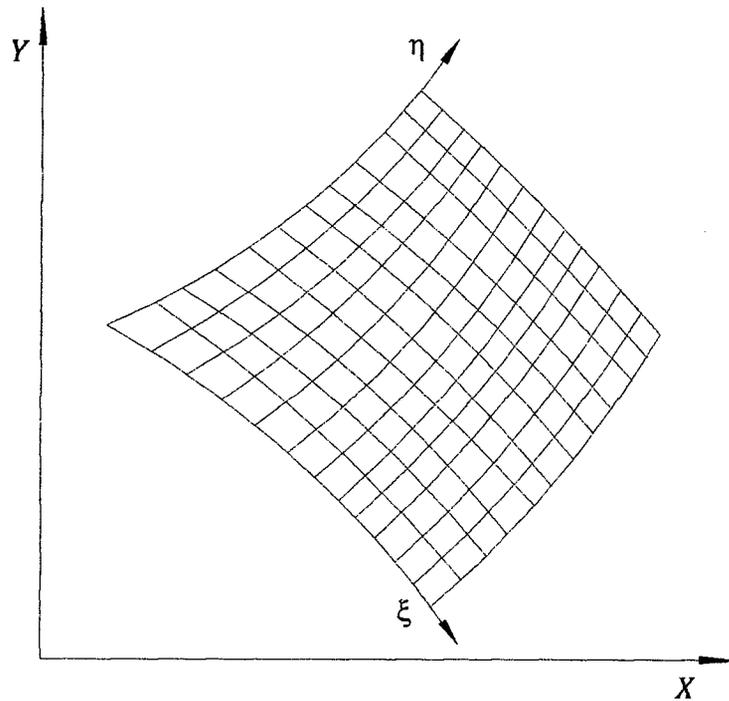


Figura 2.4 Sistema de coordenadas rectangulares (X, Y) y curvilíneas generales (ξ, η)

Fuente: A Jiménez y M Berezowsky, Modelación de flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México DF 2004.

El sistema de coordenadas (ξ, η) , se define de tal manera que los ejes son adimensionales y las mallas construidas en dicho sistema tienen espaciamiento unitario (Mejía y Berezowsky 1996). Se demuestra que cuando el determinante del Jacobiano de la transformación es diferente de cero, se pueden obtener las funciones inversas; éstas se denotan como $X = X(\xi, \eta)$ y $Y = Y(\xi, \eta)$. El Jacobiano de la transformación inversa es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante J es:

$$J = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad (2.60)$$

Nótese que las unidades del Jacobiano son $[L^2]$ y geoméricamente se interpreta como el área de un cuadrilátero de la malla. A los términos que forman la expresión 2.60 se les conoce como los métricos de la transformación inversa. Los métricos de las transformaciones directa e inversa se relacionan con las expresiones siguientes.

$$\frac{\partial \xi}{\partial X} = \frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial Y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial X} = -\frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial Y} = \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \xi} \quad (2.61)$$

2.2.5.1 Versiones de un mismo vector en coordenadas generales

Sea el vector de posición r mostrado en la Figura 2.5, definido en el plano rectangular como función de las coordenadas rectangulares.

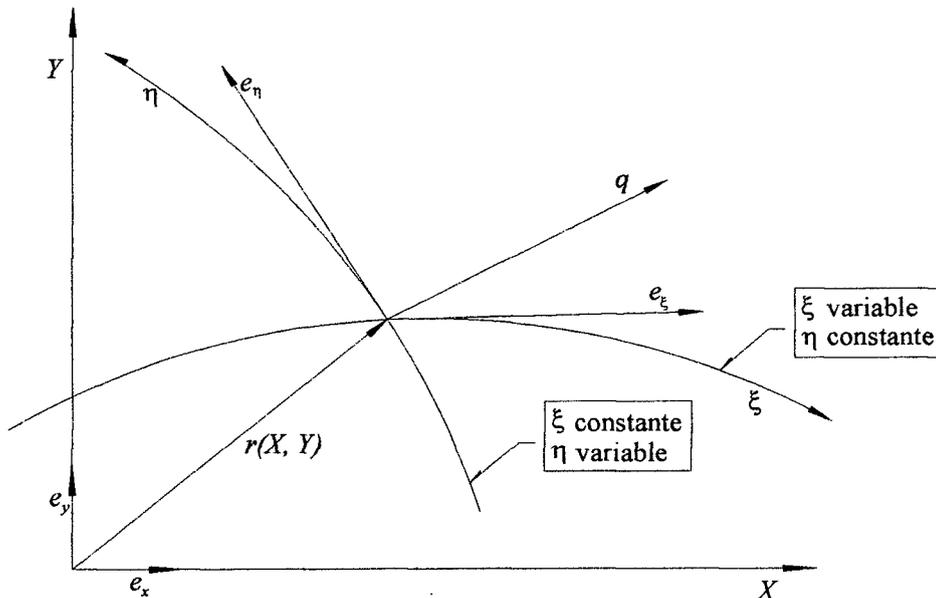


Figura 2.5 Vectores base covariantes

Fuente: A Jiménez y M Berezowsky, Modelación de flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México DF 2004.

$$r = X(\xi, \eta)e_x + Y(\xi, \eta)e_y \quad (2.62)$$

Donde e_x y e_y son los vectores unitarios (adimensionales) asociados a las direcciones de los ejes rectangulares X e Y respectivamente. Y sea q otro vector que tiene su origen donde termina el vector r . El vector q expresado con coordenadas rectangulares es

$$q = u e_x + v e_y \quad (2.63)$$

Para los fines de este trabajo, el vector q representa la velocidad del flujo en el punto P ; por tanto, los componentes rectangulares u y v tienen unidades de $[LT^{-1}]$.

2.2.5.1.1 Base local covariante

El vector q se puede expresar en función de vectores base locales covariantes y componentes contravariantes como

$$q = u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta \quad (2.64)$$

Donde e_ξ y e_η se conocen como los vectores base locales covariantes en el punto P , y u^ξ y v^η son los componentes contravariantes del vector. Las derivadas parciales del vector de posición r con respecto a las coordenadas curvilíneas, definen a los vectores base locales covariantes en el punto P , es decir.

$$e_\xi = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y \quad e_\eta = \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\partial X}{\partial \eta} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_y \quad (2.65)$$

El vector e_ξ es tangente al eje curvilíneo ξ , y e_η es tangente al eje curvilíneo η ambos en el punto P , como se muestra en la Figura 2.5 en general estos vectores base locales covariantes no son unitarios y tienen unidades de longitud $[L]$.

Escribiendo las expresiones 2.65 en forma de matricial tenemos:

$$\begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

Denotemos por CV a la matriz cuadrada de la expresión anterior, es decir,

$$CV = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

La matriz CV se puede interpretar como aquella que permite obtener, en cualquier punto del plano (ξ, η) , los componentes de los vectores base locales covariantes a partir de los vectores base del sistema rectangular.

Ahora obtengamos la relación que existe entre las coordenadas o componentes rectangulares y las componentes contravariantes de un vector q . Para esto tenemos:

$$q = u e_x + v e_y, y q = u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta$$

De la primera expresión tenemos

$$u = q e_x \quad v = q e_y$$

Y como $q = u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta$ entonces

$$u = [u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta] \cdot e_x \quad v = [u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta] \cdot e_y \quad (2.67)$$

Al sustituir las expresiones 2.65 en 2.67,

$$u = \left[u^\xi \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y \right) + v^\eta \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_y \right) \right] \cdot e_x$$

$$v = \left[u^\xi \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y \right) + v^\eta \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_y \right) \right] \cdot e_y$$

Desarrollando tenemos

$$u = \frac{\partial X}{\partial \xi} u^\xi + \frac{\partial X}{\partial \eta} v^\eta \quad v = \frac{\partial Y}{\partial \xi} u^\xi + \frac{\partial Y}{\partial \eta} v^\eta \quad (2.68)$$

Las expresiones 2.68 se pueden ver como un sistema de ecuaciones lineales donde las incógnitas son las componentes contravariantes del vector q . Resolviendo este sistema tenemos las componentes contravariantes en función de los componentes rectangulares:

$$u^\xi = \frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u - \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \eta} v \quad v^\eta = -\frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u + \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \xi} v \quad (2.69)$$

De estas expresiones se deduce que las unidades de los componentes contravariantes son $[T^{-1}]$. Las expresiones 2.69 se pueden escribir matricialmente de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} u^\xi \\ v^\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{-1}{J} \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{-1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Denotemos por CT a la matriz cuadrada de la expresión anterior, es decir,

$$CT = \begin{pmatrix} \frac{1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \eta} & \frac{-1}{J} \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{-1}{J} \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{1}{J} \frac{\partial X}{\partial \xi} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

La matriz CT , se puede interpretar como aquella que permite obtener, en cualquier punto del plano (ξ, η) , los componentes contravariantes del vector q a partir de las componentes del sistema rectangular. Los componentes obtenidos con la matriz CT por definición, se dice que son contravariantes y se les denota con un superíndice.

El cuadrado del módulo del vector q se obtiene del producto escalar sobre sí mismo, es decir

$$|q|^2 = (u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta) \cdot (u^\xi e_\xi + v^\eta e_\eta) \quad (2.71)$$

De donde

$$|q|^2 = (u^\xi)^2 (e_\xi \cdot e_\xi) + 2u^\xi v^\eta (e_\xi \cdot e_\eta) + (v^\eta)^2 (e_\eta \cdot e_\eta)$$

Por lo tanto

$$|q| = \sqrt{g_{11} (u^\xi)^2 + 2g_{12} u^\xi v^\eta + g_{22} (v^\eta)^2} \quad (2.72)$$

Donde,

$$g_{11} = e_\xi \cdot e_\xi = \left(\frac{\partial X}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \xi} \right)^2 \quad g_{22} = e_\eta \cdot e_\eta = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (2.73)$$

$$g_{12} = e_\xi \cdot e_\eta = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \quad g_{21} = e_\eta \cdot e_\xi = g_{12}$$

A g_{11} , g_{12} y g_{22} se les conoce como los elementos del tensor métrico covariante, el tensor métrico covariante es la matriz

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

La determinante de esta matriz es denotado por g_* , entonces $g_* = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$

Usando las fórmulas 2.73 se verifica fácilmente que

$$J = \sqrt{g_*} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \quad (2.74)$$

y son iguales al área de la superficie de un cuadrilátero en el sistema de coordenadas curvilíneas.

Además, el ángulo θ_1 entre los dos vectores base local covariante se obtiene de

$$e_\xi \cdot e_\eta = |e_\xi| |e_\eta| \cos \theta_1 \quad (2.75)$$

2.2.5.1.2 Base local contravariante

El vector q en función de los vectores base locales contravariantes y componentes covariantes se expresa de la manera siguiente:

$$q = u_\xi e^\xi + v_\eta e^\eta \quad (2.76)$$

Donde e^ξ y e^η se conocen como los vectores de la base contravariante en el punto P , y u_ξ y v_η son los componentes covariantes del vector q . En este caso, e^ξ es perpendicular al eje curvilíneo dado por ξ constante (eje curvilíneo η), y e^η es perpendicular al eje η constante (eje curvilíneo ξ), como se muestra en la Figura 2.6.

$$e^\xi = \nabla \xi(X, Y) = \frac{\partial \xi}{\partial X} e_x + \frac{\partial \xi}{\partial Y} e_y \quad e^\eta = \nabla \eta(X, Y) = \frac{\partial \eta}{\partial X} e_x + \frac{\partial \eta}{\partial Y} e_y \quad (2.77)$$

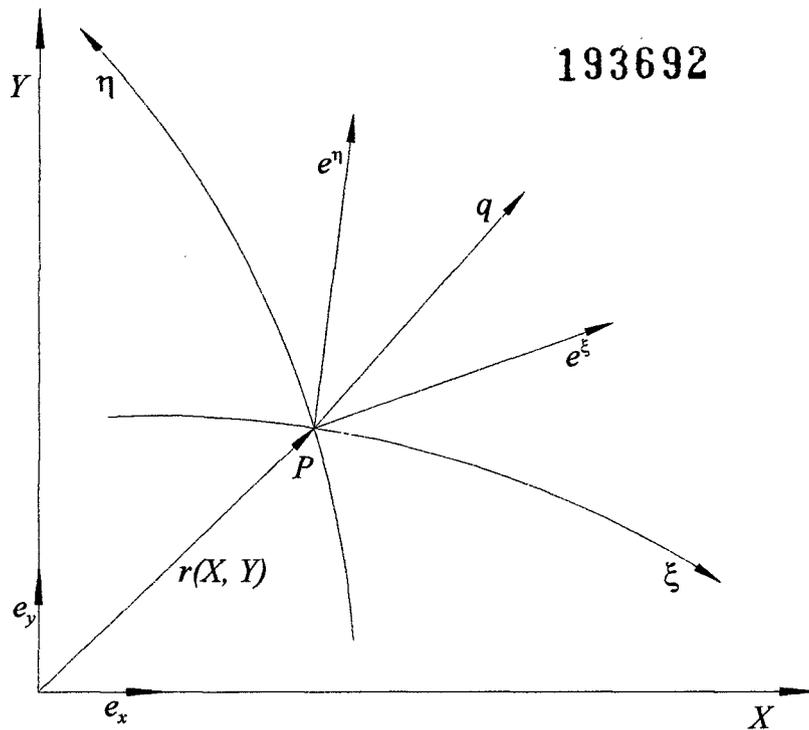


Figura 2.6 Vectores base contravariantes

Fuente: A Jiménez y M Berezowsky, Modelación de flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México DF 2004.

Veamos cómo obtener los vectores de la base local contravariante. Tenemos que

$$e_\xi = \frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y \quad e_\eta = \frac{\partial X}{\partial \eta} e_x + \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_y$$

Entonces usando las fórmulas 2.61 tenemos

$$e_{\xi} = J \frac{\partial \eta}{\partial Y} e_x - J \frac{\partial \eta}{\partial X} e_y \quad e_{\eta} = -J \frac{\partial \xi}{\partial Y} e_x + J \frac{\partial \xi}{\partial X} e_y$$

De donde

$$e_{\xi} = J \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y} e_x - \frac{\partial \eta}{\partial X} e_y \right) \quad e_{\eta} = J \left(-\frac{\partial \xi}{\partial Y} e_x + \frac{\partial \xi}{\partial X} e_y \right)$$

Y como e^{ξ} y e^{η} , e^{η} y e_{ξ} son ortogonales, entonces definamos

$$e^{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial X} e_x + \frac{\partial \xi}{\partial Y} e_y = \nabla \xi(X, Y) \quad e^{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial X} e_x + \frac{\partial \eta}{\partial Y} e_y = \nabla \eta(X, Y)$$

Al sustituir las igualdades de 2.61 en 2.77, se obtiene que los vectores base contravariantes se expresan como sigue:

$$e^{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y \quad e^{\eta} = -\frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_x + \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_y \quad (2.78)$$

Escribiendo matricialmente 2.78 tenemos:

$$\begin{pmatrix} e^{\xi} \\ e^{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} & -\frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ -\frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

de donde la matriz de coeficientes es idéntica a la definida como CT . Por ello, esta base local de vectores recibe el nombre de contravariante. Estos vectores de la base local contravariante tampoco son unitarios; para este caso sus unidades son $[L^{-1}]$.

Ahora obtengamos la relación que existe entre las coordenadas o componentes rectangulares y las componentes covariantes de un vector q . Para esto tenemos:

$$q = u e_x + v e_y, y q = u_\xi e^\xi + v_\eta e^\eta$$

De la primera expresión tenemos

$$u = q \cdot e_x \quad v = q \cdot e_y$$

y como $q = u_\xi e^\xi + v_\eta e^\eta$ entonces

$$u = [u_\xi e^\xi + v_\eta e^\eta] \cdot e_x \quad v = [u_\xi e^\xi + v_\eta e^\eta] \cdot e_y \quad (2.79)$$

Al sustituir las expresiones 2.78 en 2.79 y obtenemos

$$u = \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u_\xi - \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} v_\eta; \quad v = -\frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial X}{\partial \eta} u_\xi + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v_\eta \quad (2.80)$$

Las ecuaciones. 2.75 se pueden manejar como un sistema lineal, de donde se despejan los componentes covariantes como sigue:

$$u_\xi = \frac{\partial X}{\partial \xi} u + \frac{\partial Y}{\partial \xi} v \quad v_\eta = \frac{\partial X}{\partial \eta} u + \frac{\partial Y}{\partial \eta} v \quad (2.81)$$

Nótese que las unidades de los componentes covariantes de las ecuaciones 2.81 son $[L^2 T^{-1}]$; Si las ecuaciones 2.81 se matricialmente, es decir

$$\begin{pmatrix} u_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial X}{\partial \eta} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes es idéntica a la CV definida por la ecuación 2.66.

El cuadrado del módulo del vector \mathbf{q} en función de los vectores base local contravariante y componentes covariantes se obtiene al aplicar el producto escalar del vector con respecto a sí mismo, como sigue:

$$|\mathbf{q}|^2 = (u_\xi \mathbf{e}^\xi + v_\eta \mathbf{e}^\eta) \cdot (u_\xi \mathbf{e}^\xi + v_\eta \mathbf{e}^\eta) \quad (2.82)$$

Al desarrollar esta expresión se tiene que

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{g^{11}u_\xi^2 + 2g^{12}u_\xi v_\eta + g^{22}v_\eta^2} \quad (2.83)$$

donde

$$g^{11} = \mathbf{e}^\xi \cdot \mathbf{e}^\xi = \frac{g_{22}}{g_*}; \quad g^{22} = \mathbf{e}^\eta \cdot \mathbf{e}^\eta = \frac{g_{11}}{g_*}; \quad g^{12} = \mathbf{e}^\xi \cdot \mathbf{e}^\eta = -\frac{g_{12}}{g_*} \quad (2.84)$$

Los términos g^{11} , g^{12} y g^{22} se conocen como los elementos del tensor métrico contravariante; el tensor métrico contravariante es la matriz

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix}$$

Es importante aclarar que los vectores de la base local contravariante también se conocen como vectores de la base recíproca o base dual de los vectores de la base local covariante, ya que entre estas dos bases se cumplen las igualdades siguientes:

$$\mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}^\xi = 1; \quad \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}^\eta = 1; \quad \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}^\xi = 0; \quad \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}^\eta = 0 \quad (2.85)$$

A partir de las expresiones 2.85, conocidos los vectores base covariantes, se pueden obtener los vectores base contravariantes y viceversa. Además de las relaciones

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{g^*}; \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{g^*}; \quad g^{12} = -\frac{g_{12}}{g^*}$$

Tenemos

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{g^*} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1}$$

Esto significa que el inverso del tensor métrico contravariante es el tensor métrico covariante y viceversa, por lo que el producto de estos dos tensores es el tensor identidad.

2.2.5.1.3 Bases unitarias y sus correspondientes bases duales

Distintos investigadores, han considerado que no es conveniente utilizar la forma covariante o contravariante para transformar las ecuaciones de coordenadas rectangulares a curvilíneas. Esto se debe a que tanto los vectores base locales como los correspondientes componentes tienen unidades y escalas diferentes con respecto a los del sistema rectangular. Se ha encontrado que estas diferencias producen problemas en los métodos de solución para resolver las ecuaciones de hidrodinámica en coordenadas curvilíneas generales. Para evitar esta desventaja se ha propuesto dividir a los vectores base entre su módulo; de esta manera se tienen vectores base unitarios con componentes, llamados físicos, que tienen unidades y escalas iguales a las que se tienen en el sistema rectangular. A los componentes de las bases unitarias y

adimensionales se les denota con un subíndice (o superíndice) entre paréntesis (Berezowsky 2004).

Normalizando los vectores de la base local covariante, tenemos:

$$e_{(\xi)} = \frac{1}{|e_{\xi}|} e_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} e_{\xi}; \quad e_{(\eta)} = \frac{1}{|e_{\eta}|} e_{\eta} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} e_{\eta} \quad (2.86a)$$

Los vectores $e_{(\xi)}$ y $e_{(\eta)}$ son vectores unitarios los cuales formarán la base local covariante unitaria. Reemplazando 2.60 en 2.81a tenemos

$$e_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y; \quad e_{(\eta)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_x + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_y \quad (2.86b)$$

En esta base unitaria el vector q se escribe de la siguiente manera

$$q = u^{(\xi)} e_{(\xi)} + v^{(\eta)} e_{(\eta)}$$

donde $u^{(\xi)}$ y $v^{(\eta)}$ son las componentes contravariante unitaria. Hallemos estas componentes. Por un lado tenemos que

$$q = u^{\xi} e_{\xi} + v^{\eta} e_{\eta} = u^{\xi} \sqrt{g_{11}} e_{(\xi)} + v^{\eta} \sqrt{g_{22}} e_{(\eta)}$$

entonces

$$u^{(\xi)} = u^{\xi} \sqrt{g_{11}}; \quad v^{(\eta)} = v^{\eta} \sqrt{g_{22}}$$

y como

$$u^{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u - \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v; \quad v^{\eta} = -\frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u + \frac{1}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v$$

obtenemos

$$u^{(\xi)} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v; \quad v^{(\eta)} = -\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v$$

De forma análoga normalizamos los vectores de la base local contravariante, es decir,

$$e^{(\xi)} = \frac{1}{|e^\xi|} e^\xi = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} e^\xi; \quad e^{(\eta)} = \frac{1}{|e^\eta|} e^\eta = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} e^\eta \quad (2.87)$$

Ahora los vectores $e^{(\xi)}$ y $e^{(\eta)}$ son vectores unitarios los cuales formarán la base local contravariante unitaria. Reemplazando 2.78 en 2.87 obtenemos

$$e^{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}} \sqrt{g_*}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{1}{\sqrt{g^{11}} \sqrt{g_*}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y$$

$$e^{(\eta)} = -\frac{1}{\sqrt{g^{22}} \sqrt{g_*}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_x + \frac{1}{\sqrt{g^{22}} \sqrt{g_*}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_y$$

De las relaciones que existen entre las componentes del tensor métrico covariante y contravariante, tenemos los vectores de la base local contravariante unitaria de la siguiente forma

$$e^{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y \quad e^{(\eta)} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_y$$

En esta base unitaria el vector q se escribe de la siguiente manera:

$$q = u_{(\xi)} e^{(\xi)} + v_{(\eta)} e^{(\eta)}$$

donde $u_{(\xi)}$ y $u_{(\eta)}$ son las componentes covariante unitaria. Determinemos estas componentes. Tenemos que

$$q = u_{\xi} e^{\xi} + v_{\eta} e^{\eta} = u_{\xi} \sqrt{g^{11}} e_{(\xi)} + v_{\eta} \sqrt{g^{22}} e_{(\eta)}$$

entonces

$$u_{(\xi)} = u_{\xi} \sqrt{g^{11}}; \quad v_{(\eta)} = v_{\eta} \sqrt{g^{11}}$$

y como

$$u_{\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi} u + \frac{\partial Y}{\partial \xi} v \quad v_{\eta} = \frac{\partial X}{\partial \eta} u + \frac{\partial Y}{\partial \eta} v$$

Obtenemos

$$u_{(\xi)} = \sqrt{g^{11}} \frac{\partial X}{\partial \xi} u + \sqrt{g^{11}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} v \quad v_{(\eta)} = \sqrt{g^{22}} \frac{\partial X}{\partial \eta} u + \sqrt{g^{22}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} v$$

Nuevamente usamos las relaciones que existen entre las componentes del tensor métrico covariante y contravariante, haciendo los cálculos obtenemos las componentes covariante unitaria

$$u_{(\xi)} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} u + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} v \quad v_{(\eta)} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} u + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} v$$

Cada una de estas dos nuevas bases locales de vectores unitarios, la covariante y la contravariante, tienen sus correspondientes bases recíprocas; así, la base dual de los vectores base covariantes unitarios se obtiene de,

$$e_{\xi} \cdot E^{\xi} = 1; \quad e_{\eta} \cdot E^{\eta} = 1; \quad e_{\eta} \cdot E^{\xi} = 0; \quad e_{\xi} \cdot E^{\eta} = 0$$

De manera similar, la base dual de los vectores base contravariantes se obtiene de,

$$e^{\xi} \cdot E_{\xi} = 1; \quad e^{\eta} \cdot E_{\eta} = 1; \quad e^{\eta} \cdot E_{\xi} = 0; \quad e^{\xi} \cdot E_{\eta} = 0$$

Así, se dispone en total de seis formas diferentes para expresar un vector en coordenadas curvilíneas generales. En la tabla 2.1 se incluyen las expresiones de los vectores base unitarios covariantes y contravariantes, sus correspondientes bases recíprocas y también los correspondientes componentes que los acompañan. En Berezowsky 2004, se deducen las expresiones de dicha tabla.

**Tabla 2-13 Versiones del vector q en función de bases unitarias y
recíprocas**

Base covariante unitaria	Base dual covariante unitaria
$q = u^{(\xi)} e_{(\xi)} + v^{(\eta)} e_{(\eta)}$	$q = U_{\xi} E^{\xi} + V_{\eta} E^{\eta}$
$e_{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y$	$E^{\xi} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y$
$u^{(\xi)} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v$	$U_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} u + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} v$
$v^{(\eta)} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v$	$V_{\eta} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} u + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} v$
Base contravariante unitaria	Base dual contravariante unitaria
$q = u_{(\xi)} e^{(\xi)} + v_{(\eta)} e^{(\eta)}$	$q = U^{\xi} E_{\xi} + V^{\eta} E_{\eta}$
$e^{(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} e_x - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} e_y$	$E_{\xi} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} e_x + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} e_y$
$u_{(\xi)} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} u + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} v$	$U^{\xi} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} u - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} v$
$v_{(\eta)} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial X}{\partial \eta} u + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial Y}{\partial \eta} v$	$V^{\eta} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial Y}{\partial \xi} u + \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial X}{\partial \xi} v$

2.2.5.2 Deducción de la versión Covariante de las ecuaciones de hidrodinámica

Puesto que las ecuaciones dinámicas son componentes vectoriales, estas se pueden expresar también ya sea como componentes covariantes o contravariantes en un sistema de coordenadas curvilíneas generales. En la Figura 2.7 se muestra una clasificación de las principales versiones que hay de las ecuaciones de hidrodinámica en función del tipo de coordenadas.

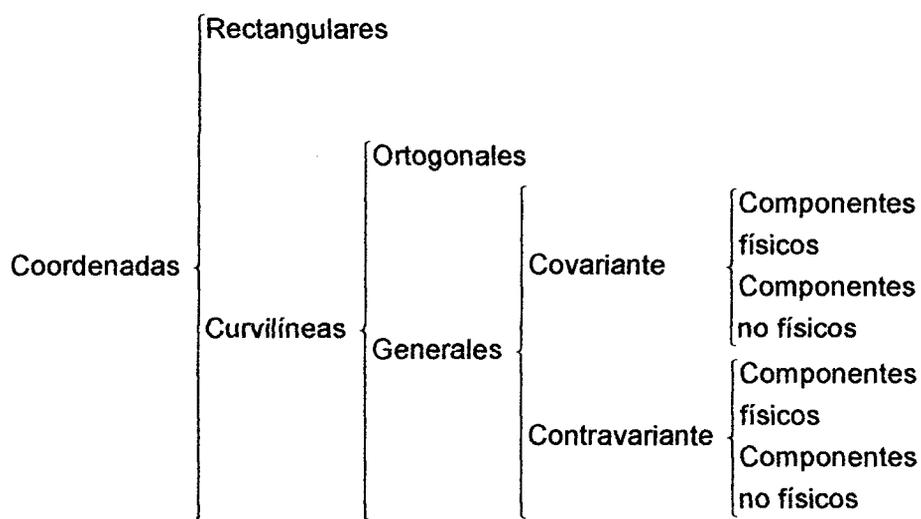


Figura 2.7 Clasificación de las ecuaciones de hidrodinámica

Fuente: A Jiménez y M Berezowsky, Modelación de flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México DF 2004.

En general la mayoría de los últimos trabajos publicados de modelos numéricos que usan coordenadas curvilíneas generales utilizan componentes contravariantes físicos para representar la velocidad; con base en la interpretación geométrica de las distintas formas de expresar un vector, es mejor usar la versión covariante con componentes físicos; los vectores base contravariantes físicos son perpendiculares a los ejes curvilíneos, lo que garantiza que el cálculo del flujo de masa que pasa por una sección transversal se haga de manera correcta, esto facilita revisar la conservación de masa. Dicha condición no se cumple cuando se

usa la versión contravariante, puesto que en este caso los correspondientes vectores base locales covariantes son tangentes a los ejes curvilíneos (Berezowsky 2004).

Para simplificar la notación de los métricos de transformación inversa dados en la ecuación 2.60, se hacen las siguientes definiciones:

$$x_{\xi} = \frac{\partial X}{\partial \xi}; \quad y_{\xi} = \frac{\partial Y}{\partial \xi}; \quad x_{\eta} = \frac{\partial X}{\partial \eta}; \quad y_{\eta} = \frac{\partial Y}{\partial \eta}$$

Los componentes covariantes físicos, $u_{(\xi)}$, $v_{(\eta)}$ y los componentes rectangulares, u y v , del vector velocidad están relacionados por las expresiones.

$$u_{(\xi)} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{*}}} x_{\xi} u + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{*}}} y_{\xi} v \quad (2.88a)$$

$$v_{(\eta)} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{*}}} x_{\eta} u + \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{*}}} y_{\eta} v \quad (2.88b)$$

o en forma inversa

$$u = \frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \quad (2.89a)$$

$$v = -\frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \quad (2.89b)$$

En las expresiones 2.88, se observa cómo se obtienen los componentes físicos del vector velocidad en función de los componentes rectangulares, de manera similar se obtienen los componentes covariantes físicos de las ecuaciones dinámicas en coordenadas curvilíneas generales. Así, para obtener tales

ecuaciones en función de las coordenadas del sistema curvilíneo, se siguen estos tres pasos.

- a) Con base en la regla de la cadena, todas las derivadas parciales con respecto a las coordenadas rectangulares se sustituyen por derivadas parciales con respecto a las coordenadas curvilíneas.
- b) Los componentes rectangulares de la velocidad se sustituyen por sus correspondientes componentes covariantes físicos dados por las ecuaciones 2.89. Las ecuaciones así obtenidas siguen siendo las ecuaciones dinámicas en las direcciones del sistema rectangular.

A los componentes rectangulares de la ecuación dinámica obtenidas en el inciso anterior, se les aplica la transformación dada por las ecuaciones 2.88, con lo cual se obtienen las ecuaciones dinámicas en dirección perpendicular a los ejes curvilíneos, en términos de las coordenadas curvilíneas y de los componentes covariantes físicos.

Con base en la regla de la cadena, las derivadas parciales de una función cualquiera $f(X, Y)$ se expresan en función de las coordenadas curvilíneas y los parámetros métricos como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (2.90a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = -\frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{*}}} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (2.90b)$$

2.2.5.3 Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante.

Con las consideraciones antes expuestas vamos a realizar la transformación de cada uno de los términos de las ecuaciones 2.58 a la versión covariante con componentes físicos en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante, en coordenadas curvilíneas generales.

Aceleración local

Con base a las ecuaciones 2.88, los componentes rectangulares de la aceleración local se expresan como (primer término de las ecuaciones 2.58b y 2.58c)

$$ALX = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right] \quad (2.91a)$$

$$ALY = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right] \quad (2.91b)$$

El término de la aceleración local en la dirección normal al eje ξ constante se obtiene como sigue (véase la ecuación 2.88a)

$$AL = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} x_\xi ALX + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} y_\xi ALY \quad (2.92)$$

Al sustituir las ecuaciones 2.91 en la 2.92, y puesto que los parámetros métricos no cambian con el tiempo, se puede tomar como factor común a las derivadas parciales de los componentes covariantes físicos de la velocidad, es decir

$$AL = \frac{(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial t} + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{(-x_\xi y_\xi + x_\xi y_\xi)}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial t} \quad (2.93)$$

Después de simplificar algunos términos en 2.93, se obtiene

$$AL = \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial t} \quad (2.94)$$

Aceleración convectiva

La parte convectiva de la ecuación dinámica en la dirección del vector e_x se define como (segundo y tercer sumandos de la ecuación 2.58b)

$$ACX = u \frac{\partial u}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial Y} \quad (2.95a)$$

y con respecto a la dirección del vector e_y es (segundo y tercer sumandos de la ecuación 2.58c)

$$ACY = u \frac{\partial v}{\partial X} + v \frac{\partial v}{\partial Y} \quad (2.95b)$$

Al aplicar la regla de la cadena en las ecuaciones 2.95, y tomar como factor común las derivadas parciales de los componentes rectangulares u y v , se obtiene

$$ACX = \frac{(y_\eta u - x_\eta v)}{\sqrt{g_\star}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{(-y_\xi u + x_\xi v)}{\sqrt{g_\star}} \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad (2.96a)$$

$$ACY = \frac{(y_\eta u - x_\eta v)}{\sqrt{g_\star}} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{(-y_\xi u + x_\xi v)}{\sqrt{g_\star}} \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (2.96b)$$

La aceleración convectiva en la dirección normal al eje ξ constante se obtiene como (ecuación 2.88a)

$$AC = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_\star}} x_\xi ACX + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_\star}} y_\xi ACY \quad (2.97)$$

Al sustituir las ecuaciones 2.96 y los componentes rectangulares de la velocidad que están fuera de las derivadas parciales en función de los componentes covariantes, en la ecuación 2.97 resulta

$$AC = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \left[\begin{array}{c} \frac{y_\eta}{\sqrt{g^*}} \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) - \\ \frac{x_\eta}{\sqrt{g^*}} \left(\frac{-x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \end{array} \right] \left(x_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \quad (2.98)$$

$$\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \left[\begin{array}{c} \frac{-y_\xi}{\sqrt{g^*}} \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) + \\ \frac{x_\xi}{\sqrt{g^*}} \left(\frac{-x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \end{array} \right] \left(x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$$

Al desarrollar la expresión 2.98 y sustituir algunos parámetros métricos por los correspondientes elementos del tensor métrico covariante, ecuación 2.73, se llega a

$$AC = \left(u_{(\xi)} + g^{(12)} v_{(\eta)} \right) \frac{g_{22}}{g^*} \left[x_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] + \quad (2.99)$$

$$\left(v_{(\eta)} + g^{(12)} u_{(\xi)} \right) \frac{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}{g^*} \left[x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right]$$

donde

$$g^{(12)} = e^{(\xi)} \cdot e^{(\eta)} = \frac{-g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} = \cos \theta_2$$

Se hace notar que θ_2 es el ángulo entre los vectores base locales $e^{(\xi)}$ y $e^{(\eta)}$.

Los términos de las derivadas parciales con respecto a ξ de la ecuación 2.97, se expresan con las ecuaciones 2.89 como sigue:

$$x_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = x_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \quad (2.100a)$$

$$y_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} = y_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-\frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \quad (2.100b)$$

Al desarrollar primero cada una de las variables, después de sustituir alguno de los elementos del tensor métrico covariante y factorizar, se llega a que

$$\frac{g_{22}}{g_{\star}} \left[\begin{array}{c} x_{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ + y_{\xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \end{array} \right] = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{g_{22}}{g_{\star}} \left[\begin{array}{c} x_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} \\ - y_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} \end{array} \right] u_{(\xi)} + \quad (2.101)$$

$$\frac{g_{22}}{g_{\star}} \left[y_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} - x_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} \right] v_{(\eta)}$$

Se puede demostrar que para la expresión anterior se cumple que

$$\frac{g_{22}}{g_{\star}} \left[x_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} - y_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} \right] = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \Gamma_{12}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{22}} \quad (2.102a)$$

$$\frac{g_{22}}{g_{\star}} \left[y_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} - x_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} \right] = \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{\star}} \sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^1 \quad (2.102b)$$

donde

$$\Gamma_{12}^2 = [x_{\xi} y_{\xi\eta} - y_{\xi} x_{\xi\eta}] y \Gamma_{12}^1 = [x_{\xi} y_{\xi\xi} - y_{\xi} x_{\xi\xi}]$$

Forman parte del conjunto de los símbolos de Schwarz - Christoffel de segunda especie.

Al sustituir las expresiones 2.102 en 2.101, se obtiene

$$\frac{g_{22}}{g_*} \left[x_\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} \right] = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \xi} + \quad (2.103)$$

$$\left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_*}} \Gamma_{12}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{22}} \right) u_{(\xi)} - \frac{g_{22}}{\sqrt{g_*} \sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^1$$

Procediendo de manera similar, las derivadas de los componentes rectangulares con respecto a η (ecuación 2.99), se escribe como

$$x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} = x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \quad (2.104a)$$

$$y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} = y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \quad (2.104b)$$

Nuevamente, al desarrollar las derivadas de las ecuaciones 2.104 y factorizar se obtiene

$$\frac{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}{g_*} \left[x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] = \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_*} \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \eta} + \quad (2.105)$$

$$\frac{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}{g_*} \left[x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \right] u_{(\xi)} +$$

$$\frac{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}{g_*} \left[y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} - x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} \right] v_{(\eta)}$$

Se puede demostrar que para la expresión 2.100 se cumple que

$$\frac{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}{g_*} \left[x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} \right] = \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_*} \left(\Gamma_{22}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{22}} \right) \quad (2.106a)$$

$$\frac{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}{g_*} \left[y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} - x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} \right] = -\frac{\sqrt{g_{22}}}{g_*} \Gamma_{12}^2 \quad (2.106b)$$

donde

$$\Gamma_{22}^2 = [x_\xi y_{\eta\eta} - y_\xi x_{\eta\eta}] y \Gamma_{12}^1 = [x_\xi y_{\xi\xi} - y_\xi x_{\xi\xi}]$$

También forman parte del conjunto de expresiones conocidas como los símbolos de Schwarz - Christoffel. Así, al sustituir las expresiones 2.105 en 2.106, se obtiene que

$$\frac{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}}{g_*} \left[x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right] = \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_*} \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \eta} + \quad (2.107)$$

$$\frac{\sqrt{g_{11}}}{g_*} \left[\Gamma_{22}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{22}} \right] u_{(\xi)} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_*} \Gamma_{12}^2 v_{(\eta)}$$

Finalmente, los términos que forman la aceleración convectiva en coordenadas curvilíneas se obtienen al sustituir las expresiones 2.103 y 2.107 en 2.99, de donde

$$\begin{aligned}
AC &= \left(u_{(\xi)} + g^{(12)} v_{(\eta)} \right) \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_*}} \\
&\left[\frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \xi} + \left(\Gamma_{12}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{22}} \right) u_{(\xi)} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^1 v_{(\eta)} \right] + \\
&\left(v_{(\eta)} + g^{(12)} u_{(\xi)} \right) \frac{\sqrt{g_{11}}}{g_*} \\
&\left[\frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \eta} + \left(\Gamma_{22}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{22}} \right) u_{(\xi)} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^2 v_{(\eta)} \right]
\end{aligned} \tag{2.108}$$

Los símbolos de Christoffel de segunda especie toman en cuenta que los vectores base contravariantes unitarios cambian de dirección a lo largo de los ejes curvilíneos. Estos términos dependen de la geometría de la malla y son independientes de las variables hidrodinámicas, por lo tanto, sus valores permanecen constantes mientras las coordenadas del sistema curvilíneo permanezcan fijas. En estos términos se incluye el efecto de la curvatura de la malla (Berezowsky 2004).

Gradiente hidráulico

Con base en la regla de la cadena, los términos del gradiente hidráulico en las direcciones de los vectores e_x y e_y se definen respectivamente como

$$GHX = g \frac{\partial H}{\partial X} = \frac{g}{\sqrt{g_*}} \left[y_{\eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} - y_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \tag{2.109a}$$

$$GHY = g \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{g}{\sqrt{g_*}} \left[-x_{\eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} + x_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \tag{2.109b}$$

El gradiente hidráulico en la dirección normal al eje ξ constante se expresa como (ecuación 2.88a)

$$GH = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\bullet}}} x_{\xi} GHX + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\bullet}}} y_{\xi} GHY \quad (2.110)$$

Al sustituir 2.109 en 2.110, se obtiene

$$GH = \frac{g}{\sqrt{g_{\bullet}}} \left[y_{\eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} - y_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\bullet}}} x_{\xi} + \quad (2.111)$$

$$\frac{g}{\sqrt{g_{\bullet}}} \left[-x_{\eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} + x_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\bullet}}} y_{\xi}$$

Al desarrollar y agrupar términos en la expresión anterior, se obtiene

$$GH = g \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{\bullet}} \left[x_{\xi} y_{\eta} \frac{\partial H}{\partial \xi} - x_{\xi} y_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} - x_{\eta} y_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \xi} + x_{\xi} y_{\xi} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right] \quad (2.112)$$

Al tomar como factores comunes a los términos de las derivadas parciales, la expresión anterior se reduce a

$$GH = g \frac{\sqrt{g_{22}}}{g_{\bullet}} \left[(x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) \frac{\partial H}{\partial \xi} \right] \quad (2.113)$$

en donde

$$GH = g \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\bullet}}} \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad (2.114)$$

Resistencia al flujo

El efecto de la fricción en las direcciones de los vectores e_x y e_y se expresa respectivamente así

$$SF_X = \frac{g}{C^2} \frac{u}{h} |V| \quad (2.115a)$$

$$SF_Y = \frac{g}{C^2} \frac{v}{h} |V| \quad (2.115b)$$

donde

$$|V| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{u_{(\xi)}^2 + 2g^{(12)}u_{(\xi)}v_{(\eta)} + v_{(\eta)}^2}$$

La resistencia al flujo en la dirección normal al eje curvilíneo ξ se obtiene como sigue

$$SF = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} x_{\xi} SF_X + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} y_{\xi} SF_Y \quad (2.116)$$

Nuevamente, al sustituir las expresiones 2.115 en 2.116, se tiene

$$SF = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} x_{\xi} \frac{g}{C^2} \frac{u}{h} |V| + \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} y_{\xi} \frac{g}{C^2} \frac{v}{h} |V| \quad (2.117)$$

Al sustituir 2.89 en 2.117 se obtiene

$$SF = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{g}{C^2} \frac{1}{h} |V| x_{\xi} \left(\frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) + \quad (2.118)$$

$$\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{\star}}} \frac{g}{C^2} \frac{v}{h} |V| y_{\xi} \left(\frac{-x_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)$$

Al reducir términos semejantes se llega a

$$SF = \frac{g}{C^2} \frac{1}{h} |V| \frac{u_{(\xi)}}{\sqrt{g^*}} (x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}) \quad (2.119)$$

con base en las ecuaciones 2.60 y 2.73 la expresión anterior se simplifica como

$$SF = \frac{g}{C^2} \frac{u_{(\xi)}}{h} |V| \quad (2.120)$$

2.2.5.4 Resumen de las ecuaciones dinámicas en coordenadas curvilíneas generales con componentes físicos.

2.2.5.4.1 Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial t} + \left(u_{(\xi)} + g^{(12)} v_{(\eta)} \right) \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \\ & \left[\frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \xi} + \left(\Gamma_{12}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{22}} \right) u_{(\xi)} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^1 v_{(\eta)} \right] + \left(v_{(\eta)} + g^{(12)} u_{(\xi)} \right) \frac{\sqrt{g_{11}}}{g^*} \\ & \left[\frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial \eta} + \left(\Gamma_{22}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{22}} \right) u_{(\xi)} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \Gamma_{12}^2 v_{(\eta)} \right] + \\ & g \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{g}{C^2} \frac{u_{(\xi)}}{h} \sqrt{u_{(\xi)}^2 + 2g^{(12)} u_{(\xi)} v_{(\eta)} + v_{(\eta)}^2} \quad (2.121) \end{aligned}$$

2.2.5.4.2 Ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo η constante

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial t} + \left(u_{(\xi)} + g^{(12)} v_{(\eta)} \right) \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \\
& \left[\frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial \xi} + \left(\Gamma_{11}^1 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{11}} \right) v_{(\eta)} - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{12}^2 u_{(\xi)} \right] + \left(v_{(\eta)} + g^{(12)} u_{(\xi)} \right) \frac{\sqrt{g_{11}}}{g^*} \\
& \left[\frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial \eta} + \left(\Gamma_{12}^2 - \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{11}} \right) v_{(\eta)} - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \Gamma_{22}^1 u_{(\xi)} \right] + \\
& g \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{g}{C^2} \frac{v_{(\eta)}}{h} \sqrt{u_{(\xi)}^2 + 2g^{(12)} u_{(\xi)} v_{(\eta)} + v_{(\eta)}^2} \quad (2.122)
\end{aligned}$$

2.2.5.5 Ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas generales.

La forma conservativa de las derivadas parciales de una función $f(X, Y)$ se expresa como sigue:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{1}{\sqrt{g^*}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\eta} f) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\xi} f) \right] \quad (2.123a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{g^*}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\eta} f) - \frac{\partial}{\partial \eta} (x_{\xi} f) \right] \quad (2.123b)$$

Al aplicar las ecuaciones 2.121 a la versión rectangular de la ecuación de continuidad, ecuación 2.58a, resulta

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g^*}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (y_{\eta} hu) - \frac{\partial}{\partial \eta} (y_{\xi} hu) \right] + \frac{1}{\sqrt{g^*}} \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} (x_{\eta} hu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (x_{\xi} hu) \right] \quad (2.124)$$

Si se aplica la propiedad asociativa a la suma de los operadores de las derivadas parciales en esta ecuación, se tiene

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} (y_\eta u h - x_\eta v h) \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} (-y_\xi u h + x_\xi v h) = 0 \quad (2.125)$$

Al sustituir los componentes rectangulares del vector velocidad por sus correspondientes componentes covariantes físicos, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[y_\eta h \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) - x_\eta h \left(\frac{-x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \right] + \\ \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-y_\xi h \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) + x_\xi h \left(\frac{-x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} + \frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.126)$$

Esta última expresión se factoriza como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{x_\eta^2 + y_\eta^2}{\sqrt{g_{22}}} h u_{(\xi)} - \frac{x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta}{\sqrt{g_{11}}} h v_{(\eta)} \right] + \\ \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{\sqrt{g_{11}}} h v_{(\eta)} - \frac{x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} h u_{(\xi)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.127)$$

Con base en las igualdades 2.73, la ecuación 2.125 se escribe como

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{g_{22}}{\sqrt{g_{22}}} h u_{(\xi)} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} h v_{(\eta)} \right] + \\ \frac{1}{\sqrt{g_*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}}} h v_{(\eta)} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{22}}} h u_{(\xi)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

o bien

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_{\bullet}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{g_{22}} \left(hu_{(\xi)} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} hv_{(\eta)} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\bullet}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{g_{11}} \left(hv_{(\eta)} - \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} hu_{(\xi)} \right) \right] = 0$$

Finalmente al sustituir la ecuación 2.95 en esta última expresión, se obtiene la versión diferencial, en coordenadas curvilíneas con componentes covariantes físicos, de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g_{\bullet}}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{g_{22}} \left(hu_{(\xi)} + g^{(12)} hv_{(\eta)} \right) \right] +$$

(2.129)

$$\frac{1}{\sqrt{g_{\bullet}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{g_{11}} \left(hv_{(\eta)} + g^{(12)} hu_{(\xi)} \right) \right] = 0$$

Los términos donde esta como factor $g^{(12)}$, son el complemento del flujo neto en la dirección normal a los ejes curvilíneos no ortogonales. En caso de que las coordenadas fueran ortogonales, el término $g^{(12)}$ es nulo.

2.2.6 Parámetros y tensores métricos en coordenadas polares

2.2.6.1 Sistema de coordenadas polares

El plano cartesiano es un sistema rectangular, debido a que las coordenadas de un punto geoméricamente describen un rectángulo. Si hacemos que este punto represente un vector de magnitud r que parte desde el origen y que tiene ángulo de giro θ , tendríamos otra forma de definir un punto.

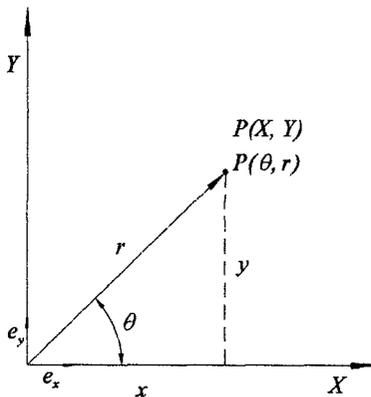


Figura 2.8 Relación de coordenadas rectangulares - polares

Sería suficiente, para denotar al punto de esta manera, mencionar el valor de r y el valor de θ . Esto se lo va a hacer indicando el par ordenado (θ, r) , en este caso se dice que son las coordenadas polares del punto P .

De la figura 2.8 se definen:

$$X = X(\theta, r) = r \cos \theta; \quad Y = Y(\theta, r) = r \operatorname{sen} \theta,$$

donde $r \in [0, +\infty]$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

El vector Posición es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, r) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)$$

Al mantener r fijo y variar θ en sentido positivo se obtienen circunferencias concéntricas de centro el origen. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta)$$

Al mantener θ fijo y variar r se obtienen semirrectas que parten del origen. Sus vectores tangentes son

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$$

Los vectores $\left\{ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\}$ forman una base ortogonal de \mathbb{R}^2 .

Con la expresión 2.60 del determinante del Jacobiano de la transformación inversa

J y haciendo $\xi = \theta, \eta = r$ tenemos

$$J = \sqrt{g_*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \theta} & \frac{\partial X}{\partial r} \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} & \frac{\partial Y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \\ r \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \end{pmatrix}$$

$$J = \sqrt{g_*} = -r \operatorname{sen}^2 \theta - r \cos^2 \theta = -r$$

En coordenadas polares los métricos de la transformación inversa se expresan como sigue

$$x_\xi = \frac{\partial X}{\partial \xi} = x_\theta = \frac{\partial X}{\partial \theta} = -r \operatorname{sen} \theta$$

$$y_\xi = \frac{\partial Y}{\partial \xi} = y_\theta = \frac{\partial Y}{\partial \theta} = r \cos \theta$$

$$x_\eta = \frac{\partial X}{\partial \eta} = x_r = \frac{\partial X}{\partial r} = \cos \theta$$

$$y_\eta = \frac{\partial Y}{\partial \eta} = y_r = \frac{\partial Y}{\partial r} = \operatorname{sen} \theta$$

Los elementos del tensor métrico covariante g_{11} , g_{12} y g_{22} se definen como

$$g_{11} = e_\theta \cdot e_\theta = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta} \right)^2 = r^2 \text{sen}^2 \theta + r^2 \text{cos}^2 \theta = r^2$$

$$g_{22} = e_r \cdot e_r = \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial r} \right)^2 = \text{cos}^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

$$g_{12} = e_\theta \cdot e_r = \frac{\partial X}{\partial \theta} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial Y}{\partial \theta} \frac{\partial Y}{\partial r} = (-r \text{sen} \theta)(\text{cos} \theta) + (r \text{cos} \theta)(\text{sen} \theta) = 0$$

$$g^{(12)} = e^{(\theta)} \cdot e^{(r)} = \frac{-g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} = 0$$

2.2.6.2 Transformación de la ecuación de hidrodinámica a coordenadas polares.

2.2.6.2.1 Ecuación de continuidad en coordenadas polares.

Reemplazando los valores obtenidos de los parámetros y tensores métricos en la expresión 2.129 tenemos:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (hu_{(\theta)}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rhv_{(r)}) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (hu_{(\theta)}) - \frac{1}{r} \cdot r \frac{\partial}{\partial r} (hv_{(r)}) = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (hu_{(\theta)}) - \frac{\partial}{\partial r} (hv_{(r)}) = 0 \quad (2.130)$$

3. CAPITULO III. MÉTODO DE SOLUCION NUMÉRICA

3.1 Métodos para el cálculo de flujo a superficie libre

La solución de las ecuaciones del flujo a superficie libre, ha sido estudiada desde diferentes puntos de vista, algunos de los métodos empleados se describen a continuación:

Mediciones in situ

Las mediciones in situ suponen la realización de un ensayo a escala real, lo cual implica disponer de medios precisos para realizarlos, así como esperar que un evento extraordinario ocurra para obtener los datos de su comportamiento. Ello es costoso y contrapone la intención de previsión.

Extrapolación de datos existentes

La carencia de datos reales impide extrapolar un resultado y realizar un análisis estadístico.

Ante estos problemas presentados, una solución posible consiste en modelar el problema en cuestión. Un modelo es una representación, un artificio físico, matemático que trata de reproducir un fenómeno real muy complejo, con ayuda de las características físicas más importantes de dichos fenómenos, a continuación se describe los tipos modelos de modelos más empleados

Modelos físicos

Representan en forma reducida y a escalas adecuadas los fenómenos del flujo, requieren además, una semejanza muy ajustada entre modelo y prototipo, lo que muchas veces no es fácil de conseguir. Su flexibilidad puede ser mucho menor y su extremada complejidad para el análisis en relación al costo y tiempo los hace poco usuales.

Modelos matemáticos o analíticos

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo a superficie libre presentan dificultades intrínsecas que no pueden integrarse de forma genérica, a menos que se haga una serie de restricciones y consideraciones que finalmente, desvirtúan la solución al no reflejar correctamente la realidad.

Modelos analógicos

Se basa en asociar las propiedades de un evento con otro, debido a la complejidad de un evento hidráulico no se puede completar la analogía en su totalidad.

Modelos numéricos

Consiste en obtener la solución de algunos puntos de las ecuaciones de flujo a superficie libre mediante técnicas de análisis numérico con ayuda de un ordenador. El proceso de modelación numérica comienza con la derivación de las ecuaciones de Saint Venant mediante esquemas numéricos, se elabora un algoritmo de cálculo el cual es desarrollado y codificado en forma de programa para finalmente verificar el modelo y simular el evento.

Existen gran variedad de técnicas numéricas para el tratamiento de las ecuaciones de Saint Venant, algunos de ellos se descartan debido a problemas de falta de realismo en los resultados, inestabilidad de la solución o excesivo tiempo de

cálculo. Las principales técnicas numéricas que resuelven las ecuaciones del flujo a superficie libre se pueden clasificar en:

Método de las características

En general las características son un conjunto de direcciones privilegiadas, líneas en el espacio (x,t) en el caso de flujo unidimensional y superficies en el espacio (x,y,t) en el caso bidimensional, en las cuales las ecuaciones diferenciales se simplifican considerablemente. En el primer caso el sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales original se puede sustituir, en las líneas características, por otro sistema de dos ecuaciones diferenciales pero ahora en derivadas totales. En el caso 2D, lo que se consigue en las superficies características es reducir el sistema original a otro sistema de ecuaciones con una variable independiente menos.

En concreto, las características serían hipersuperficies a través de las cuales una solución continua puede presentar discontinuidades en sus derivadas respecto la dirección normal a ellas, lo que veremos que es lo mismo que decir que las características actúan como elementos de transporte de este tipo de discontinuidades (E. Bladé 2005).

Método de las diferencias finitas

Los métodos o esquemas en diferencias finitas consisten en reemplazar las derivadas según cada variable dependiente por cocientes en diferencias de los valores de las variables en los puntos de discretización del dominio de solución. Según sea la forma de planteamiento, los esquemas de resolución se dividen en; Explícitos, es decir resolución punto a punto e Implícitos, en los que para cada Δt se resuelven conjuntamente todos los puntos.

Método de volúmenes finitos

En diferencias finitas se utilizan discretizaciones que consideran el valor de las variables en puntos concretos de la malla espacial; en volúmenes finitos, en cambio, el dominio de estudio se divide en una serie de celdas, o *volúmenes finitos*, y las variables utilizadas en el esquema numérico representan el valor medio de las variables dependientes en cada celda en un instante determinado.

En una dimensión y para esquemas conservativos la diferencia entre los volúmenes finitos y las diferencias finitas es principalmente conceptual, ya que el esquema numérico resultante es generalmente idéntico con las dos técnicas de discretización. En dos o más dimensiones, en cambio, los esquemas resultantes de utilizar una u otra técnica son muy diferentes, hasta el punto que utilizando volúmenes finitos se obtienen esquemas que permiten considerar soluciones discontinuas de manera inmediata mientras que con diferencias finitas ello se complica en gran manera. Los volúmenes finitos permiten además adaptar la discretización a dominios con formas arbitrarias muy fácilmente, mientras que con diferencias, en el caso de no tener mallas rectangulares y uniformes se obtienen esquemas muy complicados (E. Bladé 2005).

En el caso bidimensional el dominio físico se descompone en polígonos (cuadriláteros y triángulos) que son ahora los volúmenes de control o volúmenes finitos. Cada volumen tiene una superficie o contorno formado por los lados que lo encierran y viene definido por sus vértices. Los vértices pueden estar distribuidos irregularmente, formando una malla no estructurada, o formar parte de una malla estructurada (para cuadriláteros siempre habrá cuatro lados concurrentes en cada vértice, y para triángulos tres). En dos dimensiones los volúmenes finitos no son pues volúmenes tridimensionales sino áreas, y sus superficies son curvas cerradas.

Método de los elementos finitos

El sistema a resolver se divide en un número de elementos, las ecuaciones diferenciales se integran con ayuda de unas funciones de forma. Su uso está poco extendido en el modelamiento hidráulico de canales.

Cada método propuesto puede tener ventajas o desventajas en términos de convergencia, estabilidad, precisión y eficiencia.

3.2 Solución numérica por el método de diferencias finitas

Las ecuaciones de Saint Venant bidimensionales que gobiernan el flujo a superficie libre deducidas en el capítulo anterior son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales no lineales de primer orden e hiperbólicas.

La base del método de la diferencias finitas es el siguiente: funciones de argumentos continuos que describen el estado de flujo son reemplazadas por funciones definidas sobre un número finito de puntos en una malla dentro del dominio considerado (J. A. Cunge 1980).

El método de las diferencias finitas consiste en aproximar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias obtenidas usualmente a partir del truncamiento de series de Taylor. El conjunto de ecuaciones en diferencias resultante constituye un sistema de ecuaciones lineales, el cual se puede resolver numéricamente en un computador obteniendo una solución aproximada del problema original.

La notación utilizada para la malla computacional de diferencias finitas en el espacio (x, y, t) se muestra en la Figura 3.2. La dirección x se designa por el subíndice i , la dirección y por el subíndice j , y la dirección t por el superíndice k y el nivel de tiempo que se desconoce por el superíndice $k + 1$.

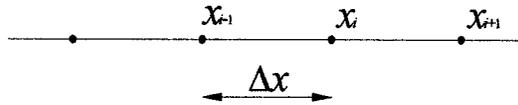


Figura 3.1 Porción de una malla de cálculo uniforme $t = t_i$

Fuente: A. Zozaya S, Método de las Diferencias Finitas - 2004.

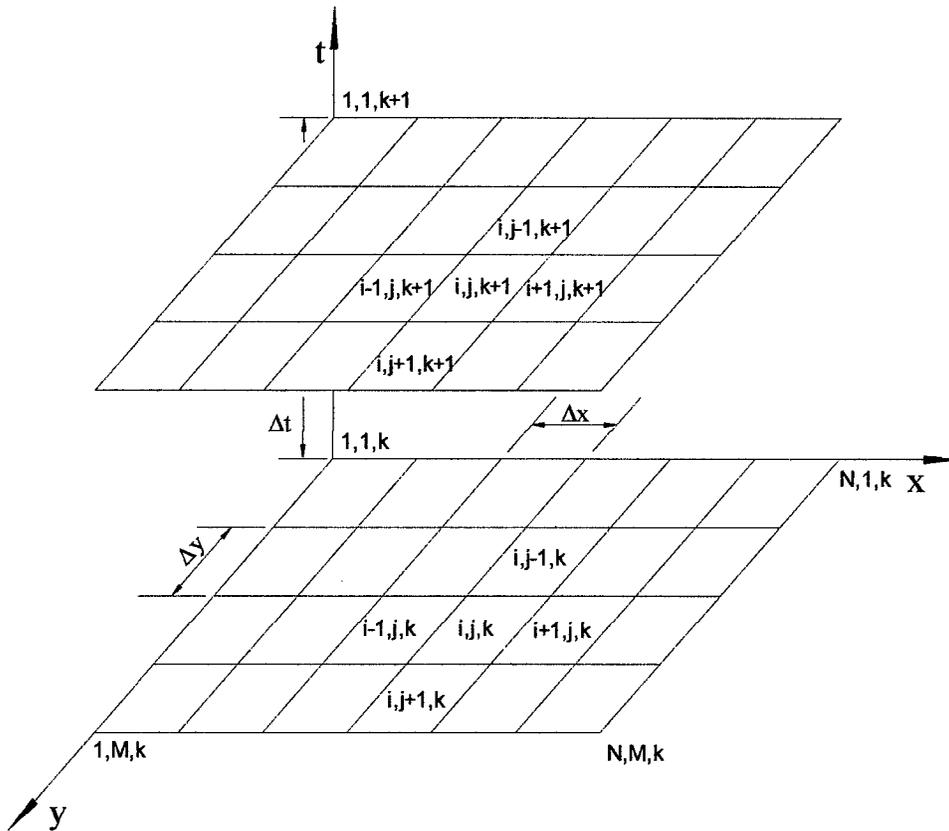


Figura 3.2 Malla computacional bidimensional de diferencias finitas

Fuente: M Hanif Chaudhry, Open Channel Flow. Springer - New York 2008.

Tomando como referencia la figura 3.1, poniendo $\Delta x = h$, y asumiendo que la función $f(x)$ posee derivadas de cualquier orden, es posible expandir $f(x_{i+1}) \equiv f(x_i + h)$ y $f(x_{i-1}) \equiv f(x_i - h)$ en sendas series de Taylor a partir del valor de la función $f(x)$ y sus derivadas en x_i , para el caso unidimensional, se extiende el razonamiento anterior al caso bidimensional.

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} + \frac{h^3}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_i}}_{\mathcal{O}(h^4)} \quad (3.1)$$

$$f(x_i - h) = f(x_i) - h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} + \frac{h^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_i} - \frac{h^3}{6} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_i} + \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x_i}}_{\mathcal{O}(h^4)}$$

(3.2)

donde $\mathcal{O}(h^n)$ es la notación empleada para indicar el *orden del error* que se comete cuando el valor deseado, por ejemplo $f(x_i + h)$ en la ecuación 3.1, es aproximado por una cantidad finita de elementos de la serie suprimiendo los términos a partir de n inclusive, asumiendo que h es muy pequeño. La potencia más pequeña de h de los términos suprimidos determina el orden del error porque los términos siguientes son despreciables bajo la premisa de que $h \ll 1$. Si llamamos $e(h)$ al error, siendo el orden del error de $\mathcal{O}(h^n)$, se puede demostrar que:

$$e(h) = \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{\xi} \quad (3.3)$$

donde $\xi \in [x, x+h]$ para $h > 0$ ecuación 3.1 o $\xi \in [x-|h|, x]$ para $h < 0$ ecuación 3.2.

Una expresión más compacta de las ecuaciones 3.1 y 3.2 se obtiene poniendo

$$x_i = x, \frac{df}{dx} = f' \text{ y } \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}.$$

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\
&= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}
\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\
&= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f'''(x) + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

De las ecuaciones 3.4, 3.5 y de su combinación obtenemos las aproximaciones de primero y segundo orden siguientes, respectivamente, para la primera derivada de la función $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x) \\
&= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
&\approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}
\end{aligned}
\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x) \\
&= \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \\
&\approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \sum_{\substack{n=3 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n)}(x) \\
&= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \\
&\approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Las ecuaciones 3.6, 3.7 y 3.8 se conocen como fórmulas de aproximación en diferencias *hacia adelante*, *hacia atrás* y *central* de la primera derivada de $f(x)$, respectivamente.

3.2.1 Esquemas explícitos y esquemas implícitos

3.2.1.1 Esquemas explícitos de diferencias finitas

Los esquemas explícitos son aquellos en los que el cálculo de las variables en un instante se efectúa tan sólo con los valores que toman en el instante anterior, es decir en los métodos explícitos de resolución se utiliza el valor de los nodos en el instante t , para aproximar el valor de las derivadas en el instante $t + \Delta t$.

Hacia atrás:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (3.9a)$$

Hacia adelante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \quad (3.9b)$$

Central:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (3.9c)$$

3.2.1.2 Esquemas implícitos de diferencias finitas

Por lo contrario, un esquema implícito evalúa las variables dependientes en el instante $t + \Delta t$ a partir de los valores en puntos adyacentes al del cálculo en el instante anterior t , pero también en el mismo instante $t + \Delta t$. La resolución de un punto del espacio en un instante implica pues los valores en otros puntos del espacio en el mismo instante, por lo que se debe resolver en cada paso de tiempo un sistema de ecuaciones que engloba todas las variables en todos los puntos del espacio en el instante $t + \Delta t$. Los métodos implícitos tratan de mejorar la estimación anterior utilizando tanto valores a tiempo t como $t + \Delta t$.

Hacia atrás:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_i^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{\Delta x} \quad (3.10a)$$

Hacia adelante:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_i^{k+1}}{\Delta x} \quad (3.10b)$$

Central:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f_{i+1}^{k+1} - f_{i-1}^{k+1}}{2\Delta x} \quad (3.10c)$$

Los esquemas explícitos tienen un coste computacional pequeño en cada paso de tiempo, pero para ser estables es necesario trabajar con incrementos de tiempo también pequeños.

Los esquemas implícitos tienen la ventaja sobre los esquemas explícitos que son incondicionalmente estables, aunque la convergencia a veces puede ser difícil de conseguir dependiendo de las condiciones iniciales.

3.2.2 Esquema de MacCormack

Es un método muy usado en dinámica y mecánica de fluidos para la resolución ecuaciones diferenciales parciales no lineales e hiperbólicos y también en el cálculo del campo de velocidades en flujos a superficie libre. Este método es conocido como esquema twoStep (dos pasos), se basan en el desarrollo de la serie de Taylor en segundo orden.

El esquema de MacCormack es explícito, de segundo orden en el espacio, y consta de dos etapas (tipo predictor - corrector): en la fase de predicción se calculan las variables dependientes (llamadas variables predichas) con diferencias espaciales hacia atrás, y en la fase de corrección se obtienen las variables dependientes (llamadas variables corregidas) con diferencias espaciales hacia adelante, en función de las variables calculadas en la etapa de predicción. Los

valores de las variables dependientes al final del intervalo de tiempo se obtienen en función de los valores de las variables al inicio del intervalo de tiempo y de las variables obtenidas en la fase de corrección.

Este esquema brinda mejores resultados cuando se alterna el cálculo de las diferencias en cada etapa del cálculo, es decir, en un paso de tiempo se calcula la etapa de predicción con diferencias hacia atrás y la etapa de corrección con diferencias hacia adelante, y en el siguiente paso de tiempo, la etapa de predicción se calcula con diferencias hacia adelante y la etapa de corrección con diferencias hacia atrás (Berezowsky 2004). Esta secuencia elimina el sesgo direccional de este esquema, que de otro modo pueden estar presentes si no se alternan los pasos (Chaudhry 2008).

Sea el plano computacional mostrado en la fig. 3.3, donde se incluye una malla de cálculo de M celdas en la dirección del eje ξ y N celdas en la del eje η . En la misma figura se indica que las celdas del lado izquierdo definen una frontera abierta donde se conoce el gasto que ingresa y en las celdas del lado derecho se conoce el nivel del agua, mientras que en la parte superior e inferior del plano computacional se tienen fronteras sólidas, llamadas también cerradas. Para aplicar el esquema de MacCormack, se propone que todas las variables dependientes sean calculadas en el centro de las celdas como se muestra en la fig. 3.3. Esto tiene la ventaja de que se requiere menor número de parámetros métricos en las ecuaciones discretizadas.

3.2.2.1 Metodología de cálculo

a) En un tiempo inicial $k\Delta t$, se conocen los valores de las variables

$\left(H^k, u_{(\xi)}^k, v_{(\eta)}^k \right)_{i,j}$ en el punto central (i, j) de cada una de las celdas.

Fase de predicción

b) Se calculan las variables dependientes de la etapa de predicción,

$\left(H^p, u_{(\xi)}^p, v_{(\eta)}^p\right)_{i,j}$ con diferencias finitas hacia atrás para $2 \leq i \leq M$, y $2 \leq j \leq N$.

c) Con base en la hipótesis de la frontera reflejante, la cual se explica posteriormente, se calculan las variables predichas para $j = 1$, y $2 \leq i \leq M$.

Fase de corrección

d) Se calculan las variables dependientes de la fase de corrección

$\left(H^c, u_{(\xi)}^c, v_{(\eta)}^c\right)_{i,j}$, en cada una de las celdas $2 \leq i \leq M-1$, y $1 \leq j \leq N-1$, con diferencias finitas hacia adelante y en función de los valores de las variables obtenidas en la etapa de predicción.

e) También con base en la hipótesis de frontera reflejante, se calculan los valores de las variables de la fase de corrección para $j = N$, y $2 \leq i \leq M-1$.

Valores para la etapa de tiempo $(k+1)\Delta t$

f) Hasta aquí se tienen tanto los valores predichos como los corregidos para las celdas comprendidas entre $2 \leq i \leq M-1$ y $1 \leq j \leq N$. Con esos valores, se calculan las variables dependientes al final del intervalo de tiempo para esas celdas, en función de los valores de las variables iniciales y corregidas como sigue:

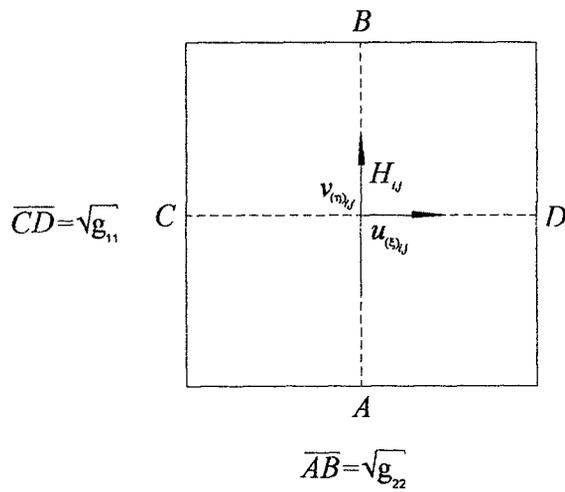
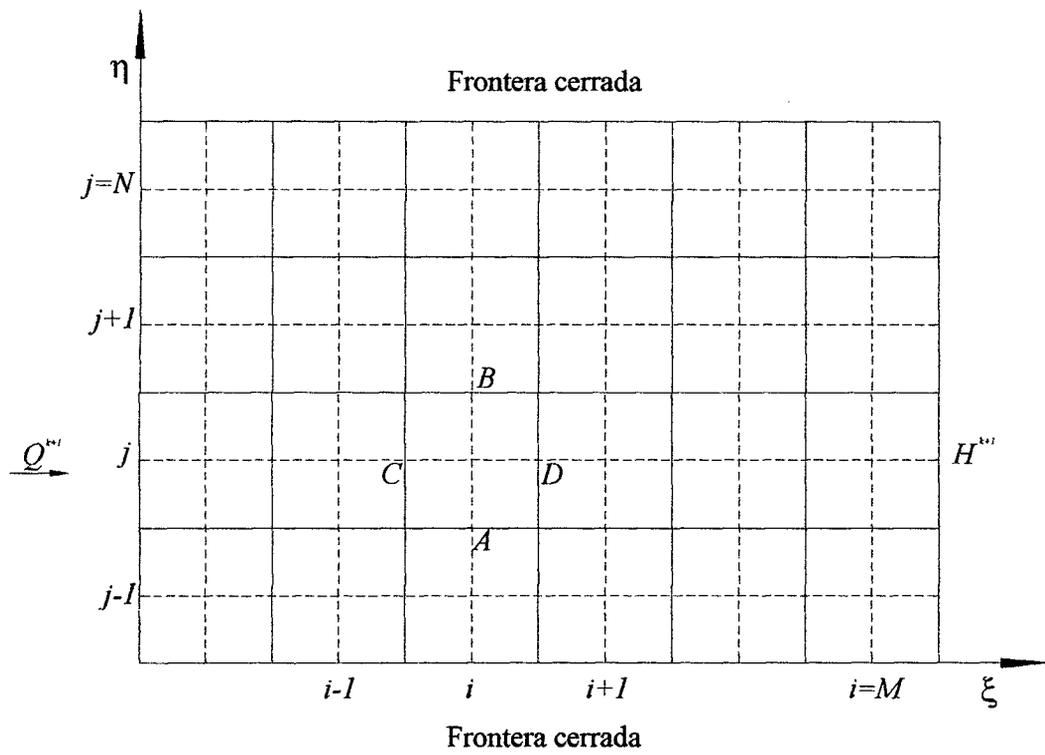


Figura 3.3 Malla de cálculo en el plano computacional

Fuente: M. Berezowsky, Modelación del flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México 2004.

$$H_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (H_{i,j}^k + H_{i,j}^c) \quad (3.11a)$$

$$u_{(\xi)i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left(u_{(\xi)i,j}^k + u_{(\xi)i,j}^c \right) \quad (3.11b)$$

$$v_{(\xi)i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} \left(v_{(\xi)i,j}^k + v_{(\xi)i,j}^c \right) \quad (3.11c)$$

Efecto de las fronteras abiertas

g) Se resuelven las celdas, para $i = 1$ e $i = M$, que definen las fronteras donde se conoce la velocidad del flujo o el nivel de la superficie libre del agua, con el procedimiento que se explica posteriormente.

h) Una vez que se tienen los valores de las variables dependientes para cada una de las celdas del plano computacional, los valores de las variables dependientes para el tiempo $(k+1)\Delta t$, se toman como valores iniciales y se repite el procedimiento de cálculo, pero ahora calculando primero la fase de predicción con diferencias finitas hacia adelante y la fase de corrección con diferencias hacia atrás.

La solución del campo de velocidades para un flujo con régimen permanente se obtiene cuando, durante el ciclo iterativo, las variables dependientes no cambian significativamente de una iteración a otra.

3.2.2.2 Discretización de las ecuaciones

Etapa de predicción con diferencias finitas hacia atrás

Cada uno de los términos que forman la ecuación de continuidad en coordenadas curvilíneas con componentes físicos, ecuación 2.129, se escribe de la manera siguiente

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_{i,j}^p - H_{i,j}^k}{\Delta t} \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\sqrt{g_{22}} \left(hu_{(\xi)} + g^{(12)} hv_{(\eta)} \right) \right] &= \frac{1}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(\sqrt{g_{22}} hu_{(\xi)} \right)_{i,j}^k - \left(\sqrt{g_{22}} hu_{(\xi)} \right)_{i-1,j}^k \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(\sqrt{g_{22}} g^{(12)} hv_{(\eta)} \right)_{i,j}^k - \left(\sqrt{g_{22}} g^{(12)} hv_{(\eta)} \right)_{i-1,j}^k \right] \end{aligned} \quad (3.12b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\sqrt{g_{11}} \left(hv_{(\eta)} + g^{(12)} hu_{(\xi)} \right) \right] &= \frac{1}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(\sqrt{g_{11}} hu_{(\xi)} \right)_{i,j}^k - \left(\sqrt{g_{11}} hu_{(\xi)} \right)_{i,j-1}^k \right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(\sqrt{g_{11}} g^{(12)} hv_{(\eta)} \right)_{i,j}^k - \left(\sqrt{g_{11}} g^{(12)} hv_{(\eta)} \right)_{i,j-1}^k \right] \end{aligned} \quad (3.12c)$$

Se recuerda que $\Delta\xi$ y $\Delta\eta$ tienen valores unitarios (véase el plano computacional de la figura 3.3). Al sustituir cada una de las expresiones 3.12 en la ecuación de continuidad 2.129, y despejar la variable $H_{i,j}^p$, se obtiene

$$\begin{aligned} H_{i,j}^p &= H_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h \right)_{i,j}^k - \left(\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h \right)_{i-1,j}^k \right] \\ &- \frac{\Delta t}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(g^{(12)} v_{(\eta)} h \right)_{i,j}^k - \left(g^{(12)} v_{(\eta)} h \right)_{i-1,j}^k \right] \\ &- \frac{\Delta t}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h \right)_{i,j}^k - \left(\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h \right)_{i,j-1}^k \right] \\ &- \frac{\Delta t}{\sqrt{g^*_{i,j}}} \left[\left(g^{(12)} u_{(\xi)} h \right)_{i,j}^k - \left(g^{(12)} u_{(\xi)} h \right)_{i,j-1}^k \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para obtener el componente $u_{(\xi),i,j}^p$ debe usar la ecuación dinámica 2.129 sin embargo, debido a que en dicha expresión hay muchos términos donde se

incluyen las mismas derivadas parciales, conviene escribir la ecuación en cuestión como sigue:

$$ALXIP + ACXIP + GHXIP + SFXIP = 0 \quad (3.14)$$

donde $ALXIP$ es la aceleración local, ecuación 2.94; $ACXIP$ la aceleración convectiva, ecuación 2.97; $GHXIP$ el gradiente hidráulico, ecuación 2.114; $SFXIP$ el efecto de la resistencia al flujo, ecuación 2.120. El valor predicho del componente de la velocidad $u_{(\xi),j}^p$ en la dirección normal al eje ξ constante, se obtiene al expresar cada uno de los sumandos de la ecuación dinámica 3.14 con diferencias finitas hacia atrás:

Aceleración local (ecuación 2.94)

$$ALXIP = \frac{\partial u_{(\xi)}}{\partial t} = \frac{u_{(\xi),j}^p - u_{(\xi),j}^k}{\Delta t} \quad (3.15)$$

Aceleración convectiva (ecuación 2.97)

Para estos términos, conviene calcular primero las derivadas parciales de los componentes rectangulares de la velocidad con respecto a las coordenadas curvilíneas dadas por la ecuación 2.104:

$$DUXI = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)$$

$$DUETA = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)$$

y con diferencias finitas

$$DUXI = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k - \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i-1,j}^k - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i-1,j}^k$$

(316a)

$$DUETA = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k - \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j-1}^k - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j-1}^k$$

(316b)

De manera similar, se obtienen las derivadas parciales del componente rectangular v con respecto a las coordenadas curvilíneas (ecuación 2.104b):

$$DVXI = - \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i-1,j}^k + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^k - \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i-1,j}^k$$

(3.16c)

$$DVETA = - \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j-1}^k + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^k - \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j-1}^k$$

(3.16d)

Con base en las expresiones 3.16 y la regla de la cadena, ecuaciones 2.90, se obtienen las expresiones para calcular las derivadas de los componentes rectangulares con respecto a las coordenadas rectangulares:

$$DUX = \frac{\partial u}{\partial X} = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUXI - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUETA \quad (3.17a)$$

$$DUY = \frac{\partial u}{\partial Y} = \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUXI + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUETA \quad (3.17b)$$

$$DVX = \frac{\partial v}{\partial X} = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVXI - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVETA \quad (3.17c)$$

$$DVY = \frac{\partial v}{\partial Y} = \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVXI + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVETA \quad (3.17d)$$

Ahora, con base en las expresiones 3.17 y 2.95, los componentes rectangulares de la aceleración convectiva se obtienen como

$$ACX = u_{i,j}^k DUX + v_{i,j}^k DUY \quad (3.18a)$$

$$ACY = u_{i,j}^k DVX + v_{i,j}^k DVY \quad (3.18b)$$

Finalmente, el componente de la aceleración convectiva en la dirección normal al eje ξ constante se obtiene como (ecuación 2.97)

$$ACXIP = \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} x_\xi \right)_{i,j} ACX + \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} y_\xi \right)_{i,j} ACY \quad (3.19)$$

Gradiente hidráulico (ecuación 2.114)

El término del gradiente hidráulico es

$$GHXIP = g \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial H}{\partial \xi} = g \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} (H_{i,j}^k - H_{i-1,j}^k) \quad (3.20)$$

Resistencia al flujo (ecuación 2.120)

El término que toma en cuenta la resistencia al flujo es

$$SF = \frac{g}{C^2} \frac{u_{(\xi)}}{h} |V| = \frac{g}{C_{i,j}^2} \left(\frac{u_{(\xi)}}{h} \right)_{i,j}^k |V_{i,j}^k| \quad (3.21)$$

donde

$$|V_{i,j}^k| = \sqrt{(u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2} = \sqrt{(u_{(\xi)i,j}^k)^2 + 2g^{(i,j)} u_{(\xi)i,j}^k v_{(\eta)i,j}^k + (v_{(\eta)i,j}^k)^2}$$

Con base a cada uno de los términos expresados en diferencias finitas, el componente de la velocidad $u_{(\xi)i,j}^p$, de la fase de predicción se obtiene como

$$u_{(\xi)i,j}^p = u_{(\xi)i,j}^k - \Delta t (ACXIP + GHXIP + SFXIP) \quad (3.22)$$

De manera similar se discretiza la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo η constante, ecuación 2.122, para obtener la variable predicha $v_{(\eta)i,j}^p$.

La expresión 3.46 se puede escribir como sigue:

$$ALETAP + ACETAP + GHETAP + SFETAP = 0 \quad (3.23)$$

Aceleración local:

$$ALETAP = \frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial t} = \frac{v_{(\eta)i,j}^p - v_{(\eta)i,j}^k}{\Delta t} \quad (3.24)$$

Aceleración convectiva:

Con base a las derivadas parciales de las componentes rectangulares de la velocidad con respecto a las coordenadas curvilíneas calculados en el párrafo anterior y la expresión 3.4b, el componente de la aceleración convectiva en la dirección normal al eje curvilíneo η constante se obtiene como:

$$ACETAP = \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} x_\eta \right)_{i,j} ACX + \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} y_\eta \right)_{i,j} ACY \quad (3.25)$$

Gradiente hidráulico:

El término del gradiente hidráulico es

$$GHETAP = g \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial H}{\partial \eta} = g \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} (H_{i,j}^k - H_{i,j-1}^k) \quad (3.26)$$

Resistencia al flujo:

El término que toma en cuenta la resistencia al flujo es

$$SFETAP = \frac{g}{C^2} \frac{v_{(\eta)}}{h} |V| = \frac{g}{C_{i,j}^2} \left(\frac{v_{(\eta)}}{h} \right)_{i,j}^k |V_{i,j}^k| \quad (3.27)$$

donde

$$|V_{i,j}^k| = \sqrt{(u_{i,j}^k)^2 + (v_{i,j}^k)^2} = \sqrt{(u_{(\xi)i,j}^k)^2 + 2g_{i,j}^{(12)} u_{(\xi)i,j}^k v_{(\eta)i,j}^k + (v_{(\eta)i,j}^k)^2}$$

Con base a cada uno de los términos expresados en diferencias finitas, el componente de la velocidad $v_{(\eta)i,j}^p$, de la fase de predicción se obtiene como

$$v_{(\eta)i,j}^p = v_{(\eta)i,j}^k - \Delta t (ACETAP + GHETAP + SFETAP) \quad (3.28)$$

Etapa de corrección con diferencias finitas hacia adelante

Se calculan las variables dependientes con diferencias finitas hacia adelante, en función de las variables obtenidas en la etapa de predicción; así, de la ecuación 2.129, se obtiene

$$\begin{aligned}
H_{i,j}^c &= H_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{\star,i,j}^{\star}}} \left[\left(\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h \right)_{i+1,j}^p - \left(\sqrt{g_{22}} u_{(\xi)} h \right)_{i,j}^p \right] + \\
&- \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{\star,i,j}^{\star}}} \left[\left(g^{(12)} v_{(\eta)} h \right)_{i+1,j}^p - \left(g^{(12)} v_{(\eta)} h \right)_{i,j}^p \right] + \\
&- \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{\star,i,j}^{\star}}} \left[\left(\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h \right)_{i,j+1}^p - \left(\sqrt{g_{11}} v_{(\eta)} h \right)_{i,j}^p \right] + \\
&- \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{\star,i,j}^{\star}}} \left[\left(g^{(12)} u_{(\xi)} h \right)_{i,j+1}^p - \left(g^{(12)} u_{(\xi)} h \right)_{i,j}^p \right]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

En forma similar a como se plantea la ecuación 3.13, se obtiene de las ecuaciones dinámicas en las direcciones normales a los ejes curvilíneos las variables siguientes $u_{(\xi)i,j}^c$ y $v_{(\eta)i,j}^c$

$$u_{(\xi)i,j}^c = u_{(\xi)i,j}^p - \Delta t (ACXIC + GHXIC + SFXIC)_{i,j}^p \tag{3.30}$$

donde

$$(ACXIC + GHXIC + SFXIC)_{i,j}^p = (ACXIC)_{i,j}^p + (GHXIC)_{i,j}^p + (SFXIC)_{i,j}^p \tag{3.31}$$

Aceleración convectiva $(ACXIC)_{i,j}^p$:

$$DUXI = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)$$

$$DUETA = \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{y_{\eta}}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} - \frac{y_{\xi}}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)$$

Discretizando, usando diferencias finitas hacia adelante

$$DUXI = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i+1,j}^p - \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^p - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i+1,j}^p + \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^p \quad (3.32a)$$

$$DUETA = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j+1}^p - \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^p - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j+1}^p + \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^p \quad (3.32b)$$

De manera similar, se obtienen las derivadas parciales del componente rectangular v con respecto a las coordenadas curvilíneas (ecuación 2.104b):

$$DVXI = - \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i+1,j}^p + \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^p + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i+1,j}^p - \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^p \quad (3.32c)$$

$$DVETA = - \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j+1}^p + \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^p + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j+1}^p - \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g_{11}}} v_{(\eta)} \right)_{i,j}^p \quad (3.32d)$$

Con base en las expresiones 3.16 y la regla de la cadena, ecuaciones 2.90, se obtienen las expresiones para calcular las derivadas de los componentes rectangulares con respecto a las coordenadas rectangulares:

$$DUX = \frac{\partial u}{\partial X} = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUXI - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUETA \quad (3.33a)$$

$$DUY = \frac{\partial u}{\partial Y} = \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUXI + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DUETA \quad (3.33b)$$

$$DVX = \frac{\partial v}{\partial X} = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVXI - \left(\frac{y_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVETA \quad (3.33c)$$

$$DVY = \frac{\partial v}{\partial Y} = \left(-\frac{x_\eta}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVXI + \left(\frac{x_\xi}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} DVETA \quad (3.33d)$$

Ahora, con base en las expresiones 3.17 y 2.95, los componentes rectangulares de la aceleración convectiva se obtienen como

$$ACX = u_{i,j}^p DUX + v_{i,j}^p DUY \quad (3.34a)$$

$$ACY = u_{i,j}^p DVX + v_{i,j}^p DVY \quad (3.34b)$$

Finalmente, el componente de la aceleración convectiva en la dirección normal al eje ξ constante se obtiene como (ecuación 2.97)

$$(ACXIP)_{i,j}^p = \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} x_\xi \right)_{i,j} ACX + \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} y_\xi \right)_{i,j} ACY \quad (3.35)$$

Gradiente hidráulico $(GHXIP)_{i,j}^p$

El término del gradiente hidráulico es

$$GHXIP = g \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial H}{\partial \xi} = g \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} (H_{i+1,j}^p - H_{i,j}^p) \quad (3.36)$$

Resistencia al flujo $(SFXIP)_{i,j}^p$

El término que toma en cuenta la resistencia al flujo es

$$SF = \frac{g}{C^2} \frac{u_{(\xi)}}{h} |V| = \frac{g}{C_{i,j}^2} \left(\frac{u_{(\xi)}}{h} \right)_{i,j}^p |V_{i,j}^p| \quad (3.37)$$

donde

$$|V_{i,j}^p| = \sqrt{(u_{i,j}^p)^2 + (v_{i,j}^p)^2} = \sqrt{(u_{(\xi)i,j}^p)^2 + 2g_{i,j}^{(1,2)} u_{(\xi)i,j}^p v_{(\eta)i,j}^p + (v_{(\eta)i,j}^p)^2}$$

De manera similar se discretiza la ecuación dinámica en la dirección normal al eje curvilíneo η constante, ecuación 2.122, para obtener la variable corregida $v_{(\eta)i,j}^c$

La expresión 3.46 se puede escribir como sigue:

$$ALETAC + ACETAC + GHETAC + SFETAC = 0 \quad (3.38)$$

donde

$$v_{(\eta)i,j}^c = v_{(\eta)i,j}^p - \Delta t (ACETAC + GHETAC + SFETAC)_{i,j}^p \quad (3.39)$$

de donde

$$(ACXIC + GHETAC + SFETAC)_{i,j}^p = (ACETAC)_{i,j}^p + (GHETAC)_{i,j}^p + (SFETAC)_{i,j}^p$$

Aceleración local $(ALETAC)_{i,j}^p$:

$$ALETAC = \frac{\partial v_{(\eta)}}{\partial t} = \frac{v_{(\eta)i,j}^c - v_{(\eta)i,j}^p}{\Delta t} \quad (3.40)$$

Aceleración convectiva $(ACETAC)_{i,j}^p$:

Con base a las derivadas parciales de las componentes rectangulares de la velocidad con respecto a las coordenadas curvilíneas calculados en el párrafo anterior y la expresión 3.4b, el componente de la aceleración convectiva en la dirección normal al eje curvilíneo η constante se obtiene como:

$$ACETAC = \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} x_\eta \right)_{i,j} ACX + \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} y_\eta \right)_{i,j} ACY \quad (3.41)$$

Gradiente hidráulico $(GHETAC)_{i,j}^p$:

El término del gradiente hidráulico es

$$GHETAC = g \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} \frac{\partial H}{\partial \eta} = g \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g^*}} \right)_{i,j} (H_{i+1,j}^p - H_{i,j}^p) \quad (3.42)$$

Resistencia al flujo $(SFETAC)_{i,j}^p$:

El término que toma en cuenta la resistencia al flujo es

$$SFETAC = \frac{g}{C^2} \frac{v_{(\eta)}}{h} |V| = \frac{g}{C_{i,j}^2} \left(\frac{v_{(\eta)}}{h} \right)_{i,j}^p |V_{i,j}^p| \quad (3.43)$$

donde

$$|V_{i,j}^p| = \sqrt{(u_{i,j}^p)^2 + (v_{i,j}^p)^2} = \sqrt{(u_{(\xi) i,j}^p)^2 + 2g_{i,j}^{(1,2)} u_{(\xi) i,j}^p v_{(\eta) i,j}^p + (v_{(\eta) i,j}^p)^2}$$

3.2.2.3 Condiciones de frontera

Las expresiones anteriores no se aplican en celdas cuyos lados coinciden con las fronteras que definen la zona en estudio, ya que se carece de valores para el cálculo de las derivadas parciales con el esquema de MacCormack. Para resolver las celdas en cuestión es necesario identificar el tipo de frontera que se tiene. En general, existen dos tipos de frontera que son cerradas (paredes) o abiertas. A continuación, se discuten las expresiones correspondientes para celdas cuyos lados forman parte de una frontera.

Frontera cerrada (pared)

La modelación numérica del flujo bidimensional horizontal requiere la definición adecuada de las condiciones de frontera dadas en las paredes. Existen varios procedimientos para modelar el efecto de una pared en el campo de velocidades; éstos se discuten a continuación.

Una metodología se basa en utilizar la ley universal de distribución de velocidades de Prandtl y von-Kármán, llamada también ley logarítmica o de pared, para obtener la velocidad del flujo muy cerca de la misma. Dado que esta ley es válida para condiciones de flujo uniforme, no se recomienda su empleo en la modelación numérica de flujos con zonas de recirculación o de estancamiento; véase, por ejemplo, Rodi (1980).

Otro procedimiento consiste en aceptar que la velocidad en la pared es nula; sin embargo, se ha hecho notar que para modelar numéricamente la variación de la velocidad en la dirección normal a la pared, se necesita que la malla de cálculo sea demasiado densa en esa zona, lo cual no es recomendable debido al notable incremento en los requerimientos de memoria de máquina y tiempo de proceso de cálculo; por tanto, este método no es práctico.

En este trabajo, se utiliza un procedimiento que ha sido aplicado por Chaudhry (1993) y Yulistiyanto (1998), entre otros. Este método se basa en aceptar las hipótesis de que tanto la variación de la velocidad tangencial a la pared, en el sentido normal a la misma, como la velocidad normal a la pared son nulas. Sea el caso de una celda, donde uno de sus lados forma parte de la frontera que confina la superficie libre del agua, como se muestra en la figura 3.4. Con base en estas hipótesis, se supone que en la frontera hay una imagen de la celda, la cual está definida por puntos ficticios en la pared sólida, como se muestra en la figura 3.4. En la figura se observa que los componentes de la velocidad paralelos a la pared son idénticos y los perpendiculares a la misma tienen signo opuesto. De esta manera, las derivadas parciales en la dirección normal a la pared se expresan como

$$\left(\frac{\partial P u_{(\xi)}^k}{\partial \eta} \right)_{i,j} = 0; \quad \left(\frac{\partial P v_{(\eta)}^k}{\partial \eta} \right)_{i,j} = 2 P_{i,j} v_{(\eta) i,j}^k \quad (3.44)$$

donde $P_{i,j}$ es un parámetro métrico o el producto de algunos de ellos en la celda i,j .

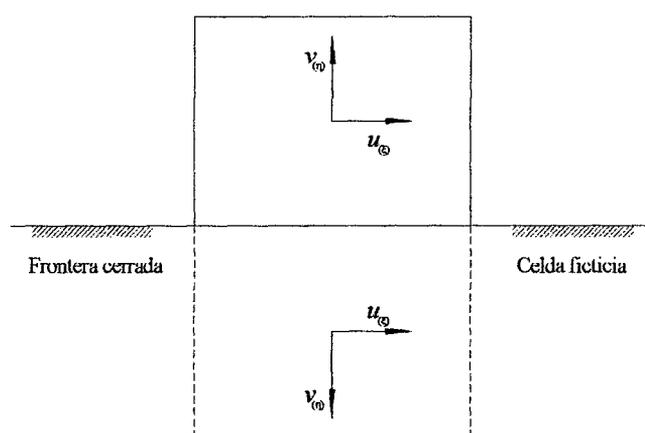


Figura 3.4 Celda con frontera cerrada

Fuente: M. Berezowsky, Modelación del flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México 2004.

Esta es la manera como se modelan las fronteras cerradas en el modelo numérico que se desarrolla en este trabajo; además de su sencillez, se considera que representa en forma adecuada el efecto de una frontera cerrada en el flujo, como se observa, por ejemplo, en Chaudhry (1993) y Yulistiyanto (1998).

Frontera abierta con nivel de agua conocido

En cuanto a la modelación de una frontera donde se conoce la variación de la superficie libre del agua en el tiempo y se desea conocer el caudal, se propone calcular el componente de la velocidad en la dirección normal al eje curvilíneo ξ constante, con base en el componente de la ecuación dinámica en la misma dirección, y suponer que el otro componente de la velocidad es nulo, como se muestra en la figura 3.5 (Rahman y Chaudhry, 1995). Con base en esta hipótesis, algunos términos de la ecuación dinámica se cancelan; así, el término convectivo se calcula con las expresiones 3.16 a 3.18 pero las derivadas con respecto a las coordenadas curvilíneas se simplifican como sigue:

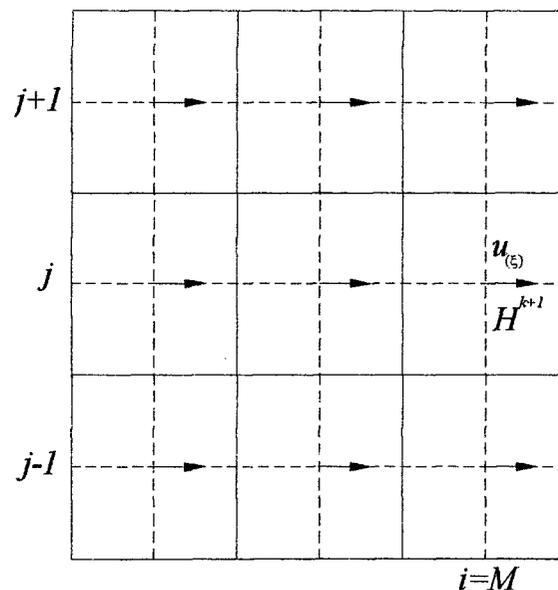


Figura 3.5 Celda i, j con frontera de nivel H^{k+1} conocido

Fuente: M. Berezowsky, Modelación del flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México 2004.

$$DUXI = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k - \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i-1,j}^k$$

$$DUETA = \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k - \left(\frac{y_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j-1}^k$$

$$DVXI = - \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i-1,j}^k$$

$$DVETA = - \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j}^k + \left(\frac{x_\eta}{\sqrt{g_{22}}} u_{(\xi)} \right)_{i,j-1}^k$$

Se hace notar que este método se debe aplicar en secciones donde se cumpla que el flujo es prácticamente paralelo al eje ξ , para que de esta manera se satisfaga la hipótesis de que el componente de la velocidad en el sentido transversal al flujo principal sea nulo.

Frontera abierta con flujo conocido

Cuando el gasto de ingreso Q^{k+1} es conocido en una frontera como la mostrada en la figura 3.6 se supone que el flujo en la frontera es normal a la misma, como se indica a continuación.

La cota de la superficie libre del agua se obtiene al aplicar la ecuación de continuidad, donde se supone que el componente $v_{(\eta)}$ es nulo, de esta manera,

para la celda mostrada en la figura 3.6 se tiene la expresión siguiente:

$$H_{i,j}^{k+1} = H_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\sqrt{g_{*i,j}}} \left[\left(u_{(\xi)} h \right)_{i+1,j}^p - Q^{k+1} \right]$$

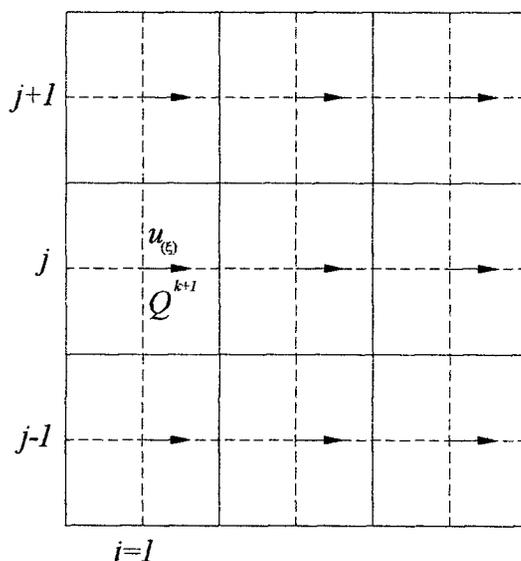


Figura 3.6 Celda i, j con frontera de gasto Q^{k+1} conocido

Fuente: M. Berezowsky, Modelación del flujo bidimensional horizontal con coordenadas curvilíneas generales. UNAM - México 2004.

La solución del campo de velocidades de un flujo permanente se obtiene cuando los valores de las velocidades y niveles de agua convergen en un cierto valor. Puesto que lo que se obtiene son los componentes covariantes físicos del vector velocidad, para conocer los componentes rectangulares correspondientes se utilizan las expresiones 2.90.

3.2.2.4 Filtro numérico y condición de estabilidad

Cualquier esquema de diferencias finitas, como el de MacCormack aquí empleado, puede tener problemas de estabilidad debido a la posible propagación de términos correspondientes a los altos componentes de Fourier (Abbott, 1979), generados por la aproximación numérica. Para lograr la estabilidad del modelo numérico es común aplicar un filtro (Borthwick y Akponasa, 1997). En el modelo desarrollado en este trabajo, se aplica el filtro propuesto por Abbott (1979), el cual se ha adaptado para el flujo bidimensional, y consiste en modificar cada una de las variables dependientes en función de los valores vecinos de la misma variable como

$$R_f = f_{i-1,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j+1}$$

$$f_{i,j}^f = (1 - 4\alpha) f_{i,j} + \alpha R_f$$

donde $f_{i,j}$ es la variable que se va a filtrar, a un factor de peso ($0 \leq \alpha \leq 0.25$) y $f_{i,j}^f$ es la variable filtrada. Durante la modelación numérica, la frecuencia con que se aplica el proceso de filtrado es del orden de diez veces el paso de tiempo, es decir, cada $10\Delta t$. Puesto que el filtro numérico se obtiene con base en el promedio ponderado de las variables de las celdas vecinas, al aplicar la expresión 3.18 a celdas que definen las fronteras, el promedio se hace únicamente con los valores de las celdas vecinas.

Debido a que el esquema que se usa en este trabajo es explícito, el paso de tiempo debe cumplir con la restricción de Courant. En Yulistiyanto (1997) se demuestra con algunas simplificaciones que el esquema de MacCormack es estable cuando se cumple en todos los puntos de la malla la condición siguiente

$$\Delta t < C_n \frac{1}{\frac{u + C_L}{\sqrt{g_{11}}} + \frac{v + C_L}{\sqrt{g_{22}}}}$$

donde,

C_n es el número de Courant, que debe ser menor a la unidad, y $C_L = \sqrt{gh}$.

4. CAPITULO IV. DESARROLLO DEL MODELO NUMÉRICO

4.1 Introducción

En un tramo curvo de un canal se dan algunas particularidades en el flujo, entre el interior y exterior de una curva se desarrolla una sobreelevación del nivel de agua por causa de la fuerza centrífuga. El valor de esta sobreelevación puede obtenerse con bastante precisión mediante la solución de la ecuación que gobiernan el flujo ecuaciones de Navier Stokes o para este caso en particular la solución de la ecuación bidimensionales de flujo ecuaciones de Saint Venant. En el presente capítulo se desarrollara el programa de cálculo Bend Flow 2D, programa implementado con el modelo numérico estudiado a partir del esquema de MacCormack en diferencias finitas en coordenadas polares.

4.2 Descripción del programa

El presente modelo se ha desarrollado en base al programa Matlab (abreviatura de Matrix Laboratory "laboratorio de matrices") de uso difundido en nuestro medio que es una herramienta de software matemático que ofrece un desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M).

El programa denominado Bend Flow 2D, se inicia con el ingreso de datos geométricos e hidrodinámicos. Los datos geométricos están referidos a las

dimensiones del canal, ancho de solera, radio y longitud de curva; representados en puntos de control que se alimentan al programa mediante coordenadas UTM, así mismo a los intervalos de espacios en ambas direcciones del flujo a fin de que el programa pueda enmallar el tramo en estudio. Los datos hidrodinámicos están referidos a las condiciones de contorno en los extremos del canal y condiciones iniciales: aguas arriba se tiene como condición de contorno el caudal de ingreso, aguas abajo un tirante de salida; las condiciones iniciales están referidas a los niveles de agua que se tiene al inicio del flujo. El programa calcula estas condiciones y las asigna a cada punto dentro de la malla de cálculo.

Este proceso se lleva a cabo dentro de una GUI (también conocidas como interfaces gráficas de usuario o interfaces de usuario), en combinación con el lenguaje de programación propio de Matlab.

Los resultados de los tirantes son mostrados en forma de gráficos en bandas de colores, así mismo se pueden mostrar en una matriz de resultados para cada paso de tiempo.

4.3 Desarrollo del programa en Matlab

El programa de simulación del flujo bidimensional, ha sido desarrollado a partir del esquema de diferencias finitas de MacCormack implementado en el programa Matlab, cuyo lenguaje de programación tiene la propiedad de ejecutar acciones mediante objetos gráficos (gui) tales como: etiquetas, cuadros de texto, botones de comando, lista desplegables, así como instrucciones específicas programables que facilitan el manejo.

A continuación se desarrolla el listado de códigos empleados en el programa.

```
function Calcular
global A R CXm CYm CZm M N Cz Qk Hs Ho Vo Uo Ts DT g alfa tt NN H
U V
```

```

%Valores iniciales para k=1(t=0)
H(1,1:M,1:N)=Ho;
U(1,1:M,1:N)=Uo;
V(1,1:M,1:N)=Vo;
HP(1:M,1:N)=0;
UP(1:M,1:N)=0;
VP(1:M,1:N)=0;
HC(1:M,1:N)=0;
UC(1:M,1:N)=0;
VC(1:M,1:N)=0;
contador=1;
NN=1;
tt(1)=0;
while Ts > tt(NN)
    NN=NN+1;
    tt(NN)=(NN-1)*DT;
end
for k=2:NN
    %Predictor (Diferencia hacia atrás)
    for i=2:M
        for j=2:N
            HP(i,j)=H(k-1,i,j)+(DT/R(i,j))*(U(k-1,i,j)*H(k-
1,i,j)-U(k-1,i-1,j)*H(k-1,i-1,j))+(DT/R(i,j))*(V(k-1,i,j)*H(k-
1,i,j)*R(i,j)-V(k-1,i,j-1)*H(k-1,i,j-1)*R(i,j-1));
            DUXI=sin(A(i,j)*pi/180)*U(k-1,i,j)-sin(A(i-
1,j)*pi/180)*U(k-1,i-1,j)-cos(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j)+cos(A(i-
1,j)*pi/180)*V(k-1,i-1,j);
            DUETA=sin(A(i,j)*pi/180)*U(k-1,i,j)-sin(A(i,j-
1)*pi/180)*U(k-1,i,j-1)-cos(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j)+cos(A(i,j-
1)*pi/180)*V(k-1,i,j-1);
            DVXI=-cos(A(i,j)*pi/180)*U(k-1,i,j)+cos(A(i-
1,j)*pi/180)*U(k-1,i-1,j)-sin(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j)+sin(A(i-
1,j)*pi/180)*V(k-1,i-1,j);
            DVETA=-cos(A(i,j)*pi/180)*U(k-1,i,j)+cos(A(i,j-
1)*pi/180)*U(k-1,i,j-1)-sin(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j)+sin(A(i,j-
1)*pi/180)*V(k-1,i,j-1);
            GHXIP=-g*1/R(i,j)*(H(k-1,i,j)-H(k-1,i-1,j));
            SFXIP=(g/Cz^2)*(U(k-1,i,j)/H(k-1,i,j))*((U(k-
1,i,j))^2+(V(k-1,i,j))^2)^0.5;
            DUX=-
sin(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DUXI+cos(A(i,j)*pi/180)*DUETA;
            DUY=cos(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DUXI+sin(A(i,j)*pi/180)*DUETA;
            DVX=-
sin(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DVXI+cos(A(i,j)*pi/180)*DVETA;
            DVY=cos(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DVXI+sin(A(i,j)*pi/180)*DVETA;
            ACX=(sin(A(i,j)*pi/180)*U(k-1,i,j)-
cos(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j))*DUX+(-cos(A(i,j)*pi/180)*U(k-
1,i,j)-sin(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j))*DUY;
            ACY=(sin(A(i,j)*pi/180)*U(k-1,i,j)-
cos(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j))*DVX+(-cos(A(i,j)*pi/180)*U(k-
1,i,j)-sin(A(i,j)*pi/180)*V(k-1,i,j))*DGY;
            ACXIP=sin(A(i,j)*pi/180)*ACX-
cos(A(i,j)*pi/180)*ACY;
            UP(i,j)=U(k-1,i,j)-DT*(ACXIP+GHXIP+SFXIP);
            ACETAP=-cos(A(i,j)*pi/180)*ACX-
sin(A(i,j)*pi/180)*ACY;
            GHETAP=-g*(H(k-1,i,j)-H(k-1,i,j-1));

```

```

                SFETAP=(g/Cz^2)*(V(k-1,i,j)/H(k-1,i,j))*((U(k-
1,i,j))^2+(V(k-1,i,j))^2)^0.5;
                VP(i,j)=V(k-1,i,j)-DT*(ACETAP+GHETAP+SFETAP);
        end
    end
    for i=2:M
        HP(i,1)=HP(i,2);
        UP(i,1)=UP(i,2);
        VP(i,1)=-VP(i,2);
    end
    %Corrector (Diferencia hacia adelante)
    for i=2:M-1
        for j=1:N-1
            HC(i,j)=HP(i,j)+(DT/R(i,j))*(UP(i+1,j)*HP(i+1,j)-
UP(i,j+1)*HP(i,j+1))+(DT/R(i,j))*(VP(i,j+1)*HP(i,j)*R(i,j+1)-
VP(i,j)*HP(i,j)*R(i,j));
            DUXI=sin(A(i,j+1)*pi/180)*UP(i+1,j)-
sin(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
cos(A(i+1,j)*pi/180)*VP(i+1,j)+cos(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j);
            DUETA=sin(A(i,j+1)*pi/180)*UP(i,j+1)-
sin(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
cos(A(i,j+1)*pi/180)*VP(i,j+1)+cos(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j);
            DVXI=-
cos(A(i+1,j)*pi/180)*UP(i+1,j)+cos(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
sin(A(i+1,j)*pi/180)*VP(i+1,j)+sin(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j);
            DVETA=-
cos(A(i,j+1)*pi/180)*UP(i,j+1)+cos(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
sin(A(i,j+1)*pi/180)*VP(i,j+1)+sin(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j);
            GHXIC=-g*1/R(i,j)*(HP(i+1,j)-HP(i,j));

            SFXIC=(g/Cz^2)*(UP(i,j)/HP(i,j))*((UP(i,j))^2+(VP(i,j))^2)^0.5;
            DUX=-
sin(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DUXI+cos(A(i,j)*pi/180)*DUETA;

            DUY=cos(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DUXI+sin(A(i,j)*pi/180)*DUETA;
            DVX=-
sin(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DVXI+cos(A(i,j)*pi/180)*DVETA;

            DVY=cos(A(i,j)*pi/180)/R(i,j)*DVXI+sin(A(i,j)*pi/180)*DVETA;
            ACX=(sin(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
cos(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j))*DUX+(-cos(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
sin(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j))*DUY;
            ACY=(sin(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
cos(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j))*DVX+(-cos(A(i,j)*pi/180)*UP(i,j)-
sin(A(i,j)*pi/180)*VP(i,j))*DVY;
            ACXIC=sin(A(i,j)*pi/180)*ACX-
cos(A(i,j)*pi/180)*ACY;
            UC(i,j)=UP(i,j)-DT*(ACXIC+GHXIC+SFXIC);
            ACETAC=-cos(A(i,j)*pi/180)*ACX-
sin(A(i,j)*pi/180)*ACY;
            GHETAC=-g*(HP(i+1,j)-HP(i,j));

            SFETAC=(g/Cz^2)*(VP(i,j)/HP(i,j))*((UP(i,j))^2+(VP(i,j))^2)^0.5;
            VC(i,j)=VP(i,j)-DT*(ACETAC+GHETAC+SFETAC);
        end
    end
    for i=2:M-1
        HC(i,N)=HC(i,N-1);
        UC(i,N)=UC(i,N-1);
    end

```

```

        VC(i,N)=-VC(i,N-1);
    end
    %Valores ponderados
    for i=2:M-1
        for j=1:N
            H(k,i,j)=0.5*(H(k-1,i,j)+HC(i,j));
            U(k,i,j)=0.5*(U(k-1,i,j)+UC(i,j));
            V(k,i,j)=0.5*(V(k-1,i,j)+VC(i,j));
        end
    end
    %Frontera abierta con flujo conocido
    for j=1:N
        H(k,1,j)=H(k-1,1,j)-(DT/R(1,j))*(U(k-1,2,j)*H(k-
1,2,j)-Qk);
        V(k,1,j)=0;
    end
    for j=1:N-1
        DUXI=sin(A(2,j)*pi/180)*U(k-1,2,j)-
sin(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j);
        DUETA=sin(A(1,j+1)*pi/180)*U(k-1,1,j+1)-
sin(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j);
        DVXI=-cos(A(2,j)*pi/180)*U(k-
1,2,j)+cos(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j);
        DVETA=-cos(A(1,j+1)*pi/180)*U(k-
1,1,j+1)+cos(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j);
        GHXIC=-g*1/R(1,j)*(H(k-1,2,j)-H(k-1,1,j));
        SFXIC=(g/Cz^2)*((U(k-1,1,j))^2/H(k-1,1,j));
        DUX=-
sin(A(1,j)*pi/180)/R(1,j)*DUXI+cos(A(1,j)*pi/180)*DUETA;
        DUY=cos(A(1,j)*pi/180)/R(1,j)*DUXI+sin(A(1,j)*pi/180)*DUETA;
        DVX=-
sin(A(1,j)*pi/180)/R(1,j)*DVXI+cos(A(1,j)*pi/180)*DVETA;
        DVY=cos(A(1,j)*pi/180)/R(1,j)*DVXI+sin(A(1,j)*pi/180)*DVETA;
        ACX=sin(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j)*DUX-
cos(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j)*DUY;
        ACY=sin(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j)*DVX-
cos(A(1,j)*pi/180)*U(k-1,1,j)*DVY;
        ACXIC=sin(A(1,j)*pi/180)*ACX-cos(A(1,j)*pi/180)*ACY;
        U(k,1,j)=U(k-1,1,j)-DT*(ACXIC+GHXIC+SFXIC);
    end
    U(k,1,N)=U(k,1,N-1);
    %Frontera abierta con nivel de agua conocido
    for j=1:N
        H(k,M,j)=Hs;
        V(k,M,j)=0;
    end
    for j=2:N
        DUXI=sin(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)-sin(A(M-
1,j)*pi/180)*U(k-1,M-1,j);
        DUETA=sin(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)-sin(A(M,j-
1)*pi/180)*U(k-1,M,j-1);
        DVXI=-cos(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)+cos(A(M-
1,j)*pi/180)*U(k-1,M-1,j);
        DVETA=-cos(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)+cos(A(M,j-
1)*pi/180)*U(k-1,M,j-1);
        GHXIP=-g*1/R(M,j)*(H(k-1,M,j)-H(k-1,M-1,j));
        SFXIP=(g/Cz^2)*((U(k-1,M,j))^2/H(k-1,M,j));
    end

```

```

        DUX=-
sin(A(M,j)*pi/180)/R(M,j)*DUXI+cos(A(M,j)*pi/180)*DUETA;
DUY=cos(A(M,j)*pi/180)/R(M,j)*DUXI+sin(A(M,j)*pi/180)*DUETA;
        DVX=-
sin(A(M,j)*pi/180)/R(M,j)*DVXI+cos(A(M,j)*pi/180)*DVETA;
DVI=cos(A(M,j)*pi/180)/R(M,j)*DVXI+sin(A(M,j)*pi/180)*DVETA;
        ACX=sin(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)*DUX-
cos(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)*DUY;
        ACY=sin(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)*DVX-
cos(A(M,j)*pi/180)*U(k-1,M,j)*DVI;
        ACXIP=sin(A(M,j)*pi/180)*ACX-cos(A(M,j)*pi/180)*ACY;
        U(k,M,j)=U(k-1,M,j)-DT*(ACXIP+GHXIP+SFXIP);
    end
    U(k,M,1)=U(k,M,2);
    %Filtro Numérico
    if k==10*contador
        for i=2:M-1
            for j=2:N-1
                Rf1=H(k,i-1,j)+H(k,i+1,j)+H(k,i,j-
1)+H(k,i,j+1);
                H(k,i,j)=(1-4*alfa)*H(k,i,j)+alfa*Rf1;
                Rf2=U(k,i-1,j)+U(k,i+1,j)+U(k,i,j-
1)+U(k,i,j+1);
                U(k,i,j)=(1-4*alfa)*U(k,i,j)+alfa*Rf2;
                Rf3=V(k,i-1,j)+V(k,i+1,j)+V(k,i,j-
1)+V(k,i,j+1);
                V(k,i,j)=(1-4*alfa)*V(k,i,j)+alfa*Rf3;
            end
        end
        contador=contador+1;
    end
end
CZm=zeros(M,N);
k=NN;
for i=1:M
    for j=1:N
        CZm(i,j)=H(k,i,j);
    end
end.

```

4.4 Proceso de cálculo de un tramo curvo de canal

A continuación se describe el procedimiento de uso del programa, para ello es necesario contar con los datos geométricos e hidrodinámicos del tramo curvo de canal, los datos geométricos del canal deberán ser expresados por puntos en coordenadas UTM según se detallan en la Tabla 4.1, en concordancia al esquema de la Figura 4.2.

Tabla 4-1 Datos geométricos del tramo curvo en coordenadas UTM.

Nº PUNTO	X	Y
1	5.605065	4.802798
2	10.631374	4.658384
3	5.070406	5.647866
4	11.213671	5.471359

Los datos hidrodinámicos son las condiciones de contorno e iniciales aguas arriba y aguas abajo del canal, tales como caudal de ingreso, tirante de salida y niveles de agua al inicio del flujo respectivamente.

Como primer paso se realiza el ingreso al archivo del programa Matlab denominado "Bend Flow 2D". Se ejecuta el programa y mostrara una ventana de inicio como el de la siguiente figura 4.1.

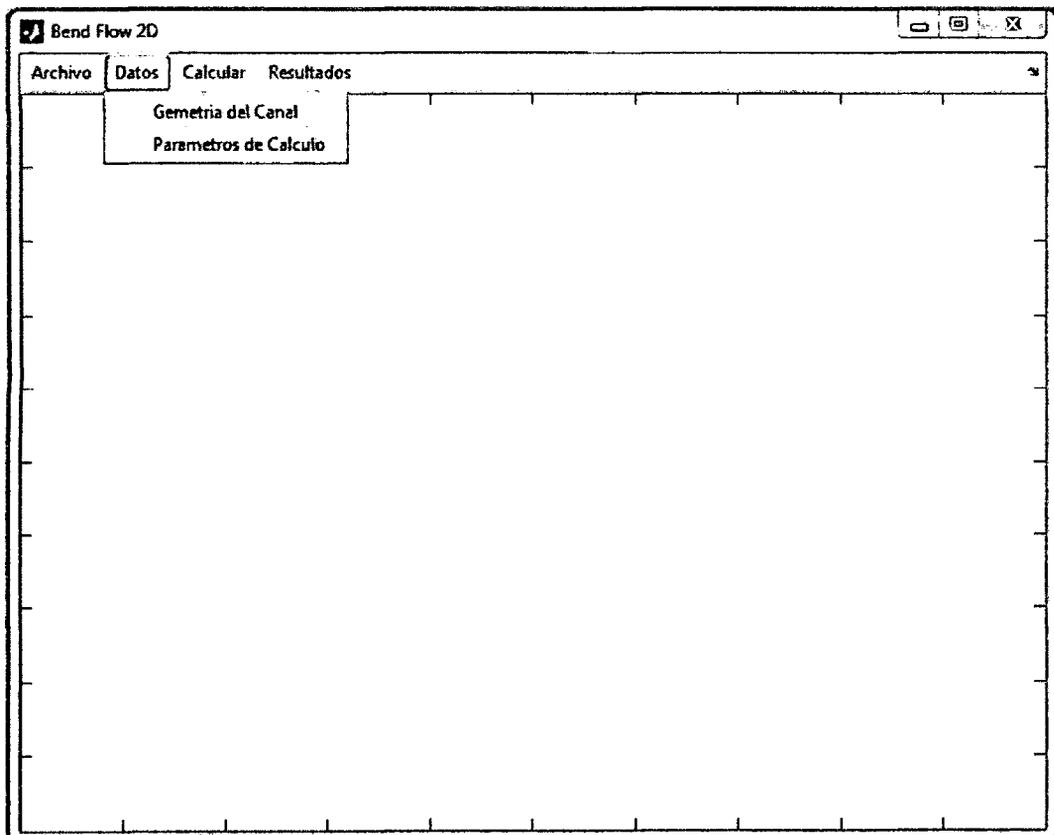


Figura 4.1 Ventana principal del programa

En esta ventana se muestran las opciones principales del programa tales como: geometría del canal y parámetros de cálculo.

Como siguiente paso se realiza el ingreso de datos geométricos desde la opción Geometría del canal, en donde se puede ingresar mediante coordenadas los puntos de control de la curva y el número de celdas o divisiones en ambas direcciones para la generación de la malla, según se aprecia en la figura 4.2.

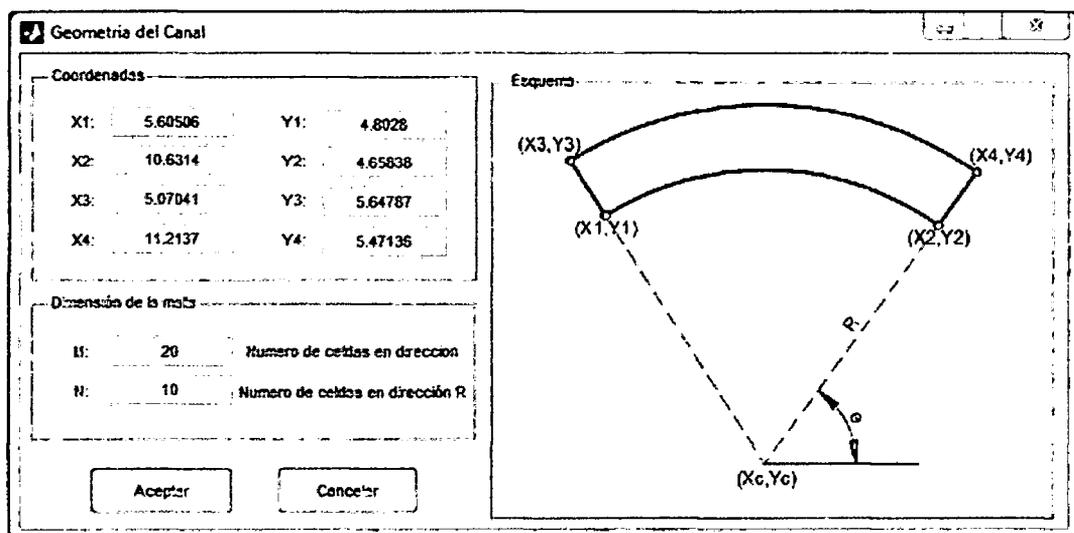


Figura 4.2 Ingreso de geometría del canal y enmallado.

Una vez ingresado los datos en los diferentes campos, se procede a ingresar los datos de parámetros de cálculo, para lo cual se presiona Parámetros de Calculo en esta opción se deberá ingresar los datos hidrodinámicos de condiciones de contorno y condiciones iniciales de las variables independientes como son caudal

de ingreso, velocidades y tirantes, las unidades empleadas son: para caudal $\frac{m^3}{seg}$

tirantes m , velocidades $\frac{m}{seg}$. Así mismo se deberá ingresar los datos del tiempo

total de simulación en seg , y el incremento del mismo para cada paso de cálculo, estos datos deberán cumplir con la restricción de Courant según lo explicado en

el capítulo anterior. En la Figura 4.3 se muestra la ventana en la cual se tendrá que ingresar estos datos.

Condiciones de Contorno	
Q:	0.0123 Caudal de ingreso al canal (m ³ /s)
Hs:	0.029 Nivel de agua a la salida del canal (m)

Condiciones Iniciales	
Ho:	0.042 Nivel de Agua inicial
Vo:	0 Velocidad inicial en direccion "V"
Uo:	0 Velocidad inicial en direccion "R"

Parametros de tiempo	
Ts:	100 Tiempo máximo de simulación (seg)
t:	0.0042 Incremento de tiempo (seg)

Aceptar Cancelar

Figura 4.3 Ingreso de parámetros hidrodinámicos de cálculo.

Concluido con la carga de datos, se deberá presionar la opción **Calcular**, con la cual el programa realizara el procesamiento correspondiente, una vez el programa concluya con el procesamiento emitirá un mensaje de "Cálculos terminados" según se aprecia en la Figura 4.4.

Ahora el programa nos permitirá acceder a la ventana de resultados de tirantes, estos podrán ser visualizados mediante representación gráfica a nivel de banda de colores o atreves de una matriz numérica de M por N celdas, permitiendo elegir para cada paso de tiempo, según se puede apreciar en la Figura 4.5, Figura 4.6 y Figura 4.7.

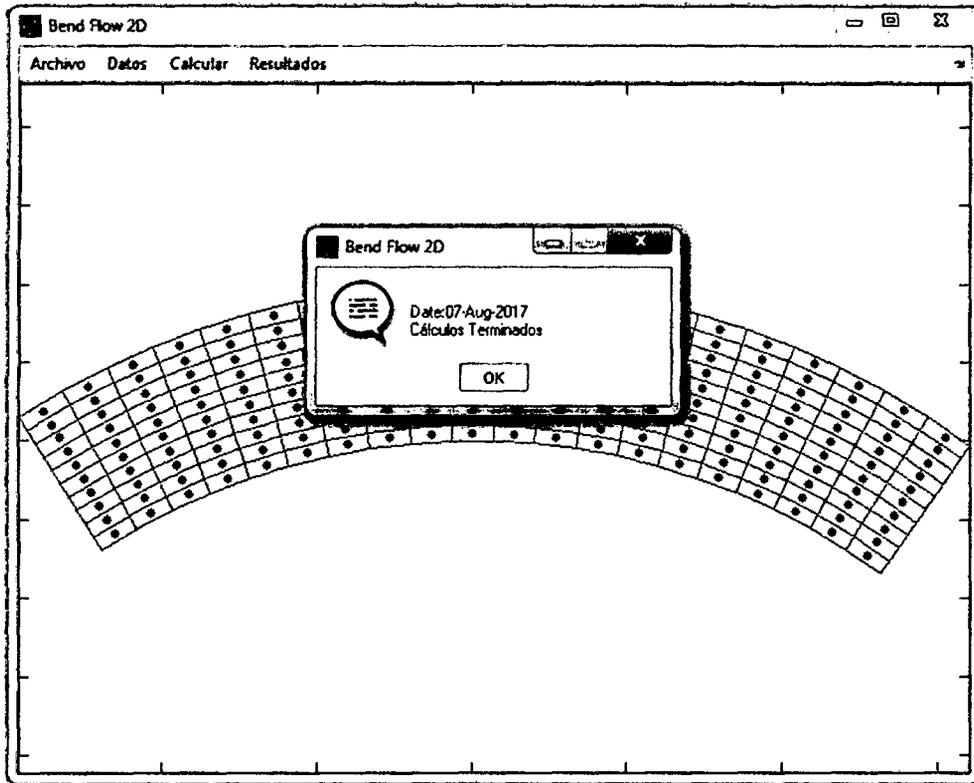


Figura 4.4 Ventana de procesamiento culminado.

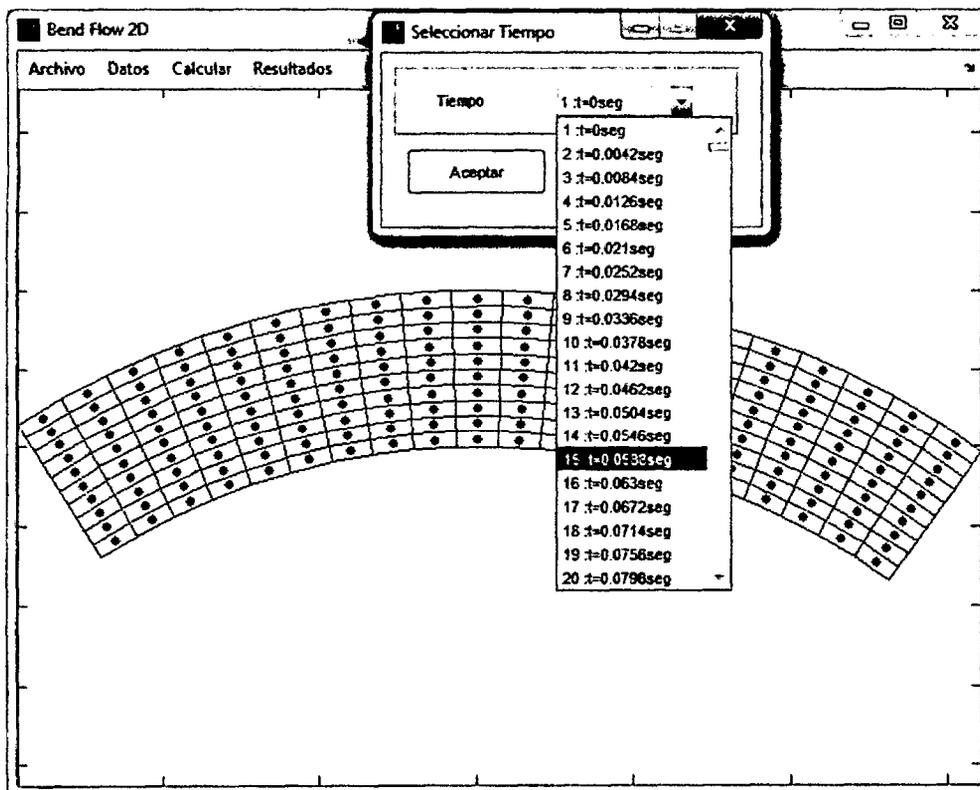


Figura 4.5 Ventana de resultados desplegable para cada paso de tiempo.

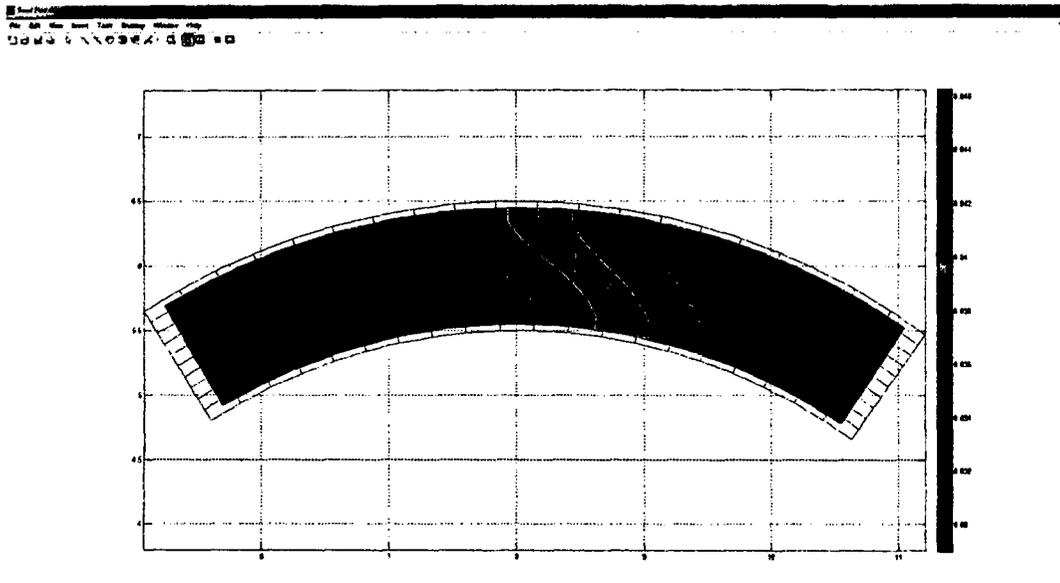


Figura 4.6 Grafico de resultados en banda de colores.

Seleccionar Tiempo												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.0480	0.0470	0.0480	0.0450	0.0440	0.0430	0.0419	0.0409	0.0380	0.0368	0.0377	0.0366
2	0.0480	0.0470	0.0460	0.0450	0.0440	0.0430	0.0419	0.0409	0.0380	0.0368	0.0377	0.0366
3	0.0480	0.0471	0.0461	0.0451	0.0441	0.0432	0.0422	0.0411	0.0401	0.0391	0.0380	0.0369
4	0.0480	0.0471	0.0463	0.0453	0.0444	0.0435	0.0425	0.0415	0.0405	0.0394	0.0384	0.0372
5	0.0480	0.0472	0.0464	0.0456	0.0447	0.0438	0.0429	0.0419	0.0409	0.0399	0.0388	0.0377
6	0.0480	0.0473	0.0466	0.0458	0.0450	0.0442	0.0433	0.0424	0.0414	0.0403	0.0393	0.0382
7	0.0480	0.0474	0.0468	0.0461	0.0453	0.0445	0.0437	0.0428	0.0418	0.0408	0.0397	0.0386
8	0.0480	0.0475	0.0469	0.0463	0.0456	0.0448	0.0440	0.0431	0.0422	0.0412	0.0401	0.0390
9	0.0480	0.0475	0.0470	0.0464	0.0457	0.0450	0.0442	0.0433	0.0424	0.0414	0.0403	0.0392
10	0.0480	0.0475	0.0470	0.0464	0.0457	0.0450	0.0442	0.0433	0.0424	0.0414	0.0403	0.0392

Elevación Mínima (m) 0.029 Elevación Máxima (m) 0.048

Figura 4.7 Matriz de resultados de M x N celdas.

Los resultados obtenidos de tirantes a lo largo del tramo curvo serán comparados a través del programa Iber 2.04, el cual se describe en el siguiente capítulo.

5. CAPITULO V. COMPARACION DE RESULTADOS

5.1 Introducción

Sobre el modelo expuesto en el capítulo anterior, es necesario hacer una comparación referente a la capacidad que tienen para modelar la situación del flujo presentada, desde un punto de vista de convergencia, exactitud y esfuerzo de cálculo empleado, de modo que nos permita determinar cuál de ellos es el más aplicable de la solución para el caso propuesto.

En tal sentido, es necesario recurrir a un modelo de cálculo conocido que nos sirva como patrón de comparación y nos permita determinar cuál de los modelos desarrollados es el que mejor representa el problema propuesto.

De tratarse de flujo bidimensional usaremos el programa Iber en su versión 2.04.

5.2 Patrón de comparación

5.2.1 Modelo Iber

Iber es un modelo matemático bidimensional para la simulación de flujos en ríos, desarrollado en colaboración por el Grupo de Ingeniería del Agua y del Medio Ambiente, GEAMA (Universidad de A Coruña, UDC), Mat+i (Grupo de Ingeniería

Matemática, USC) y el Instituto FLUMEN (Universitat Politècnica de Catalunya, UPC, y Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE). El modelo Iber surge como respuesta al interés mostrado por el Centro de Estudios Hidrográficos del CEDEX en disponer de una herramienta que facilite la aplicación de la legislación sectorial vigente en materia de aguas, especialmente en los requerimientos derivados de la Directiva Marco del Agua, la Instrucción de Planificación Hidrológica, la Directiva de Inundaciones o el Plan Nacional de Calidad de las Aguas.

La versión Iber utilizada en este proyecto es la versión 2.04 última versión disponible en la página web www.iberaula.es. Esta versión consta de un módulo hidrodinámico que permite la simulación bidimensional de cauces y, en consecuencia, posibilita la definición de zonas inundables, la delimitación de vías de intenso desagüe o en general la zonificación del Dominio Público Hidráulico. También consta de un segundo módulo de turbulencia y un tercer módulo de transporte de sedimentos para la cuantificación de la evolución de la carga sólida, tanto por arrastre de fondo como en suspensión.

En el módulo hidrodinámico se resuelven las ecuaciones de las aguas someras promediadas en profundidad bidimensionales. Al incorporar diversos modelos de turbulencia tipo Boussinesq se permite el cálculo de las tensiones tangenciales turbulentas que intervienen tanto en el cálculo de la hidrodinámica como en el de transporte en suspensión. Iber dispone de varios modelos de turbulencia para aguas someras, permitiendo seleccionar el más adecuado para cada caso de estudio teniendo en cuenta la complejidad del flujo y del modelo. Además, con el módulo de transporte de sedimentos se resuelven las ecuaciones de transporte por carga de fondo y por carga en suspensión. Teniendo en cuenta ambos modos de transporte se puede evaluar la cota de fondo debida a sedimentación y erosión

mediante la ecuación de Exner. Sin embargo, en la versión actual solo se pueden considerar granulometrías uniformes. En versiones posteriores se incorporaran formulaciones específicas para mezclas de sedimento.

Futuras versiones de Iber incorporaran nuevos módulos de cálculo como la definición de caudales ecológicos con métodos microbiológicos, la estimación de transporte de sustancias reactivas, la evaluación del transporte de sólidos con mezclas granulométricas, o la formación de brechas en presas. Es por tanto un modelo vivo, abierto a nuevas mejoras y adaptaciones.

El modelo Iber se complementa con otras acciones a su alrededor, que incluyen actividades de formación en modelización numérica bidimensional, distribución de casos prácticos, foro de consultas y asistencias técnicas. Todo esto configura lo denominando como Aula Iber

En las siguientes secciones se explican las opciones que el código Iber permite utilizar y son las que se han seguido para el modelado.

5.2.2 Pre – Proceso

Para poder realizar un cálculo con Iber, se deben realizar los siguientes pasos:

- Crear o importar una geometría.
- Asignar una serie de parámetros de entrada (rugosidad del fondo, modelo de turbulencia, etc.).
- Asignar condiciones de contorno e iniciales.
- Asignar opciones generales de cálculo (tiempo de cálculo, parámetros del esquema numérico, activación de módulos adicionales).
- Construir una malla de cálculo.
- Lanzar el cálculo.

Las condiciones de contorno e iniciales, así como la mayor parte de parámetros de entrada se pueden asignar tanto sobre la geometría, como sobre la malla. La diferencia reside en que las condiciones asignadas sobre la geometría se traspasan a la malla al crearla, mientras que las condiciones asignadas sobre la malla se pierden al remallar. Para generar una malla se debe tener una geometría formada por superficies.

5.2.2.1 Construcción de la geometría

Para importar una geometría es necesario en primer lugar guardar el proyecto con un nombre. El proyecto se guarda en el ordenador como una carpeta con el nombre del proyecto y extensión .gid.

Iber dispone de una interfaz en la cual se puede crear una geometría desde el inicio, dibujando puntos directamente, o entrando coordenadas, líneas y superficies. Por otro lado, desde el menú "Archivo>Importar" se pueden importar distintos formatos estándar (dxf, shapefile, entre otros). Esta opción se puede ver en la figura 5.1.

Asimismo, a través del menú "Herramientas_Iber" se pueden importar modelos digitales del terreno en formato ASCII de Arc/Info.

Para la construcción de la geometría se dispone de los datos geométricos en formatos dwg, y en coordenadas UTM de los puntos que conforman el tramo curvo para un radio de 5 metros. Dicho plano se muestra en la figura 5.2.

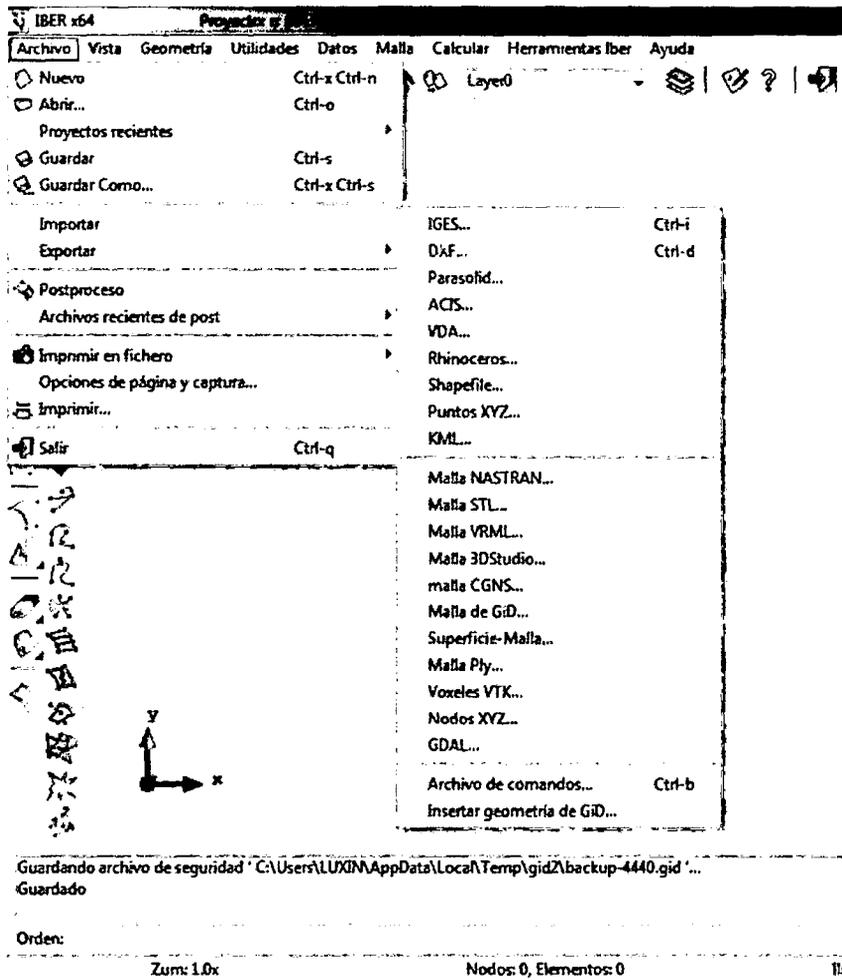


Figura 5.1 Opciones de Iber para importar geometrías con distintos formatos.

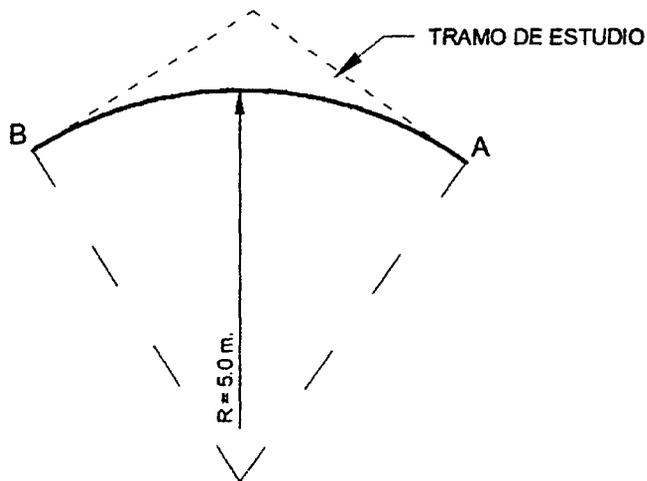


Figura 5.2 Plano 2D del dominio considerado

No obstante, el mallador de Iber basado en GID, necesita conocer la geometría del canal en planta para construir la malla y, además, los módulos de cálculo precisan conocer la cota de fondo. Por tanto, con esta información requerida podemos finalmente disponer de una representación 3D del canal. De modo que se decidió implementar la geometría en Iber introduciendo directamente las coordenadas de los puntos. Según se muestra en la figura 5.3.

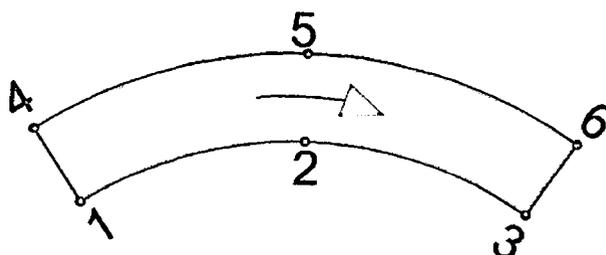


Figura 5.3 Esquema de coordenadas

Las coordenadas de los puntos a introducir al programa se detallan en la tabla 5.1, el tramo de canal de radio 5 m. considera un ancho de 1.00 m. con un longitud de curva de 5.98 m.

Tabla 5-1 Coordenadas UTM de puntos del canal.

Nº PUNTO	ESTE	NORTE	COTA
1	5.605065	4.802798	0.00
2	8.140265	5.498138	0.00
3	10.631374	4.658384	0.00
4	5.070406	5.647866	0.00
5	8.168994	6.497725	0.00

Conocidas las coordenadas de todos los puntos, se puede implementar la geometría curva en Iber, en este caso con la opción "Crear arco" según se aprecia en la figura 5.4. Una vez se han introducido, se convierte a geometría formada por superficies. Este paso es necesario para proceder después a la construcción del mallado. Este proceso se realiza utilizando la opción "Crear superficie NURBS" en el menú de pre-proceso de Iber. El resultado se muestra en la figura 5.5.

Se deben asignar a todo el dominio. Se puede escoger entre:

- Asignar a un tirante, que se define como la distancia vertical del punto más bajo del canal a la superficie libre del agua.
- Asignar una cota de agua, que se define como la elevación de agua en un punto con respecto a un punto de referencia.

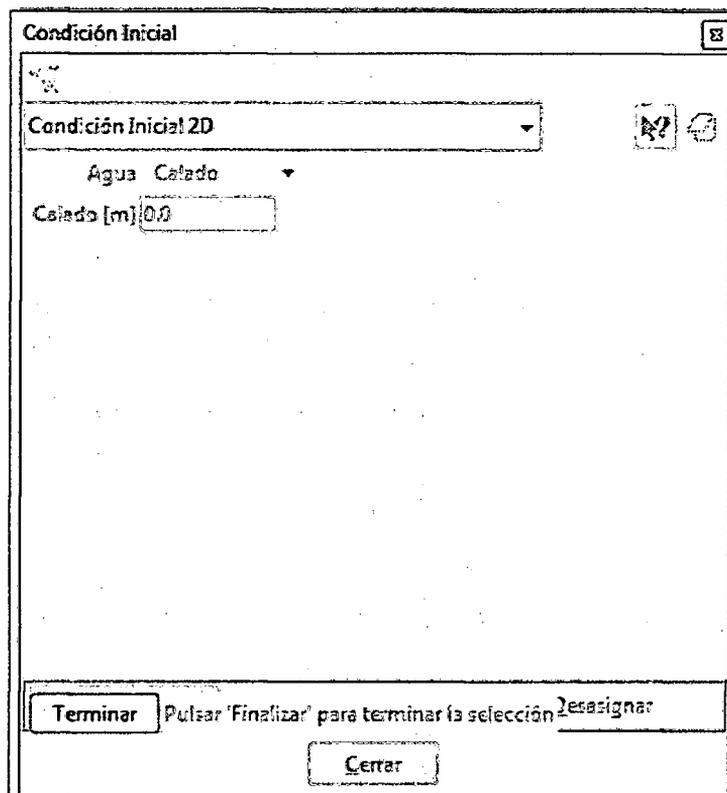


Figura 5.6 Asignación de las condiciones iniciales hidrodinámicas en Iber.

- **Condiciones de contorno**

En un problema bidimensional es necesario distinguir entre dos tipos de contorno: cerrados y abiertos. Los contornos cerrados, también llamados contornos tipo pared, son impermeables y por tanto no permiten el paso de fluido a través de ellos. La presencia del contorno tipo pared genera una fuerza de rozamiento lateral en el fluido, de manera similar a la fricción ejercida por el rozamiento del fondo. Se pueden imponer las siguientes condiciones de contorno tipo pared:

- Condición de deslizamiento libre (tensión tangencial nula) que equivale a despreciar la tensión de rozamiento generada por los contornos tipo pared sobre el fluido. Generalmente en ingeniería hidráulica la superficie de contacto con los contornos laterales es mucho menor que la superficie de contacto con el fondo debido a la separación entre escalas horizontal y vertical, por lo que la fuerza de rozamiento en los contornos de pared se puede despreciar. En este caso se impondría este tipo de condición.
- Condición de fricción de pared (funciones de pared). Esta condición es la apropiada en aquellos problemas en los que la dimensión horizontal y vertical son similares, ya que la fuerza de rozamiento puede tener cierta importancia en el desarrollo del flujo. Por lo general la influencia suele ser pequeña.
- En los contornos abiertos se pueden imponer diferentes tipos de condiciones de contorno. Para que las ecuaciones de aguas someras bidimensionales estén bien planteadas desde el punto de vista matemático, el número de condiciones a imponer en los contornos abiertos depende de si se trata de un contorno de entrada o de salida de flujo, así como del tipo de régimen en el contorno (rápido/lento):

a) Condición de contorno de entrada.

Para entrada de fluido es necesario imponer tres condiciones de contorno si el régimen es supercrítico, una para cada una de las tres ecuaciones de Saint Venant, mientras que si se produce régimen subcrítico es suficiente con imponer dos condiciones.

Existe la posibilidad de asignar un caudal total, un caudal específico o una cota de agua. En cada caso se exigirán los parámetros necesarios en función de si el régimen es subcrítico, crítico o supercrítico.

b) Condición de contorno de salida.

En este caso sólo se deben especificar parámetros adicionales si el régimen es subcrítico, en cuyo caso es posible utilizar una condición tipo vertedero, una condición de nivel dado (cota o calado) o una curva de gasto. Si el régimen es supercrítico o crítico no es necesario asignar parámetros adicionales.

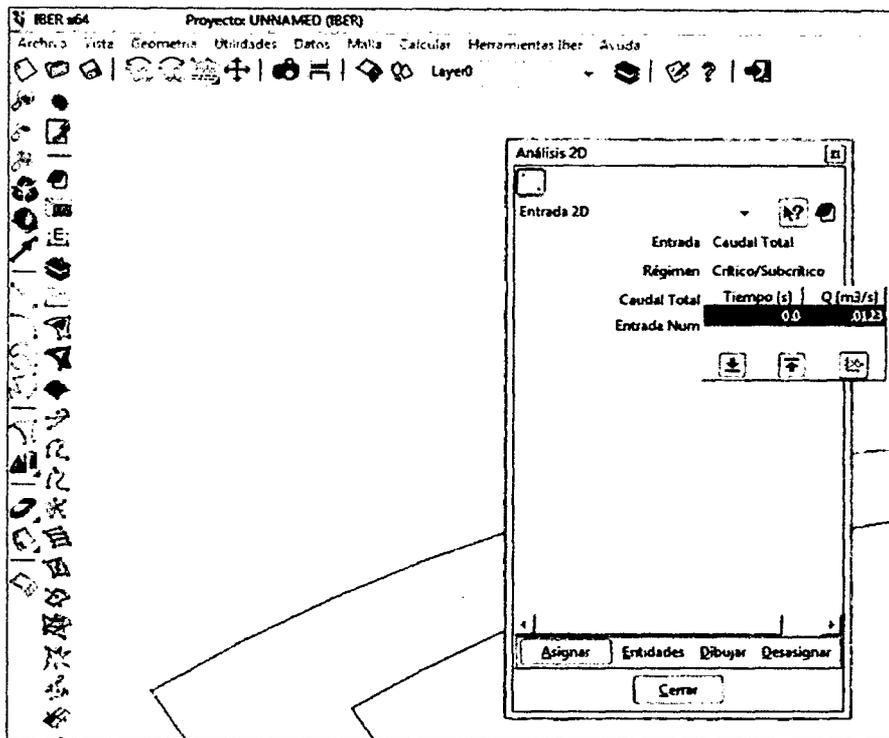


Figura 5.7 Asignación de las condiciones de contorno de entrada en Iber.

5.2.2.3 Rugosidad

La rugosidad se asigna a través de un coeficiente de Manning que se puede definir según usos de suelo. En el menú "Rugosidad > Usos del suelo" se abre la posibilidad de escoger un uso de suelo y asignarlo a las superficies que formen la geometría o a los elementos de la malla. Existen unos valores predeterminados asignados a cada uso del suelo, pero estos pueden cambiarse y además también se pueden añadir o eliminar usos del suelo.

Para la realización de este proyecto el uso del suelo escogido es "hormigón" y el valor de Manning asignado al problema es 0.018.

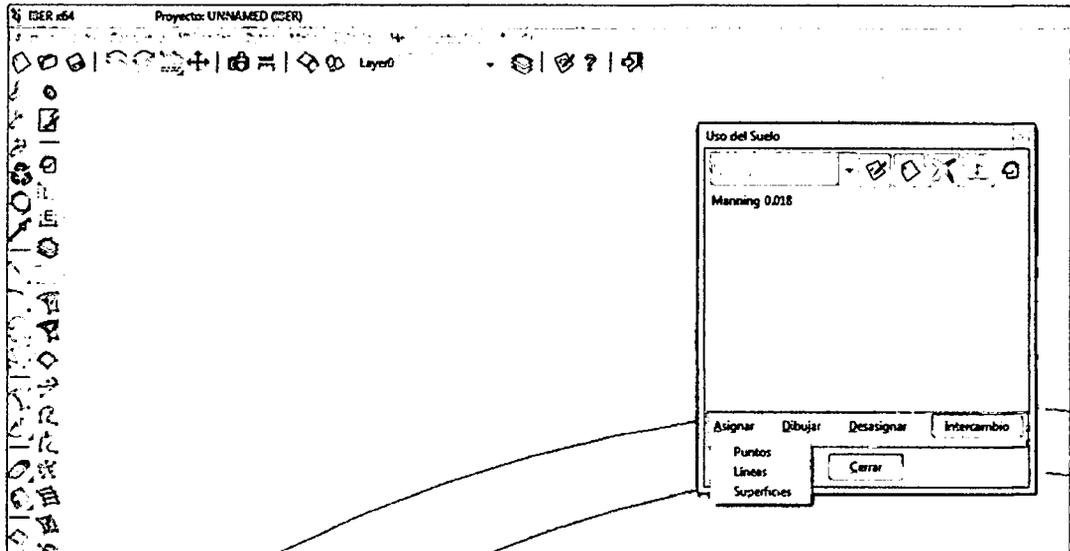


Figura 5.8 Asignación de la rugosidad en Iber.

5.2.2.4 Construcción del mallado

La calidad de la malla de cálculo es un elemento fundamental para obtener buenos resultados. Iber dispone de multitud de maneras de conseguir una buena malla de cálculo, y en función de las características del problema un tipo de malla será mejor que otro. Iber puede trabajar tanto con elementos triangulares como con cuadriláteros, o con mallas mixtas de triángulos y cuadriláteros. Las mallas de cálculo pueden ser a su vez regulares o irregulares, así como estructuradas o no estructuradas.

Las características de la malla se asignan con los siguientes menús:

- El menú "Utilidades > Preferencias > Malla" fija las opciones generales de mallado tal como se aprecia en la figura 5.9.
- Con el menú "Malla" se fijan las propiedades de la malla asignadas a la geometría.

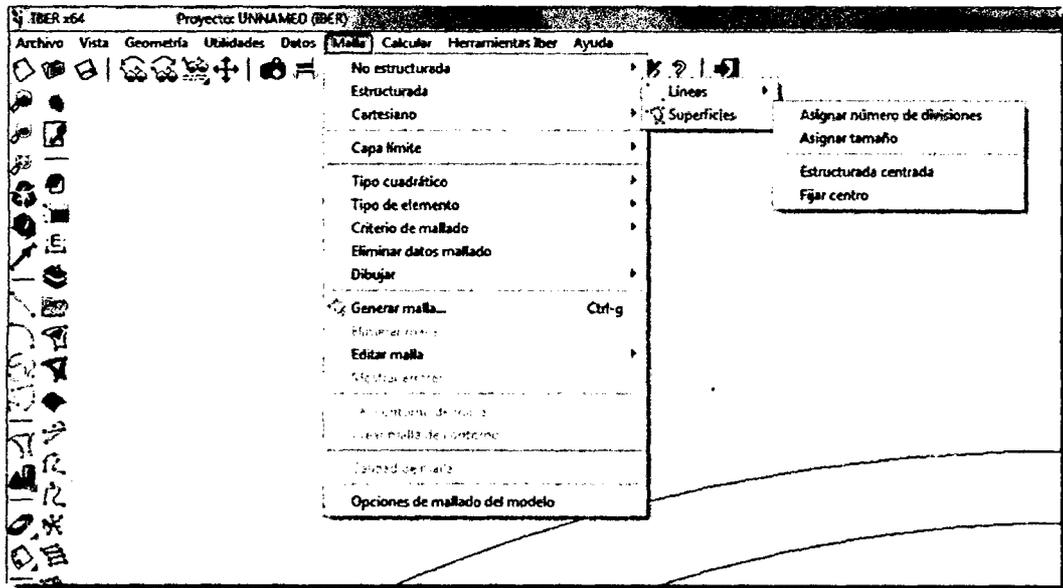


Figura 5.9 Propiedades de la malla.

Iber guarda las opciones de mado de la última sesión. Si se quiere remallar un modelo con las mismas opciones para crear la malla, éstas se pueden recuperar con el menú "Malla > opciones de mado del modelo", así como en el momento de generar la malla (menú "Malla > Generar malla"), marcando la casilla "Obtener parámetros de mado del modelo".

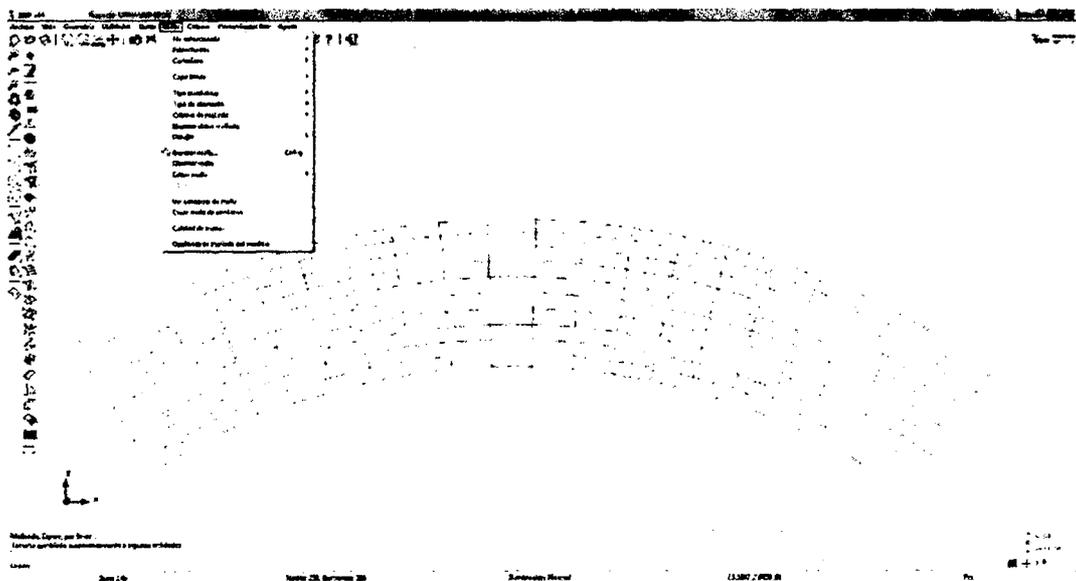


Figura 5.10 Mallado estructurado del tramo curvo.

5.2.2.5 Datos del problema

A través del menú “Datos > Datos del problema” se accede a los parámetros del cálculo. Dentro de este menú se encuentra:

a) Parámetros de tiempo.

Simulación: Con el botón Nueva/Continuar se puede escoger entre lanzar una simulación nueva o continuar con una que ya se ha ejecutado hasta un cierto instante.

Incremento de tiempo máximo: Iber ajusta automáticamente el incremento de cálculo para satisfacer la condición de Courant. Adicionalmente es posible fijar un incremento de tiempo de cálculo máximo.

Instante inicial: Valor del instante de tiempo de inicio del cálculo.

Tiempo máximo de simulación: Valor del instante de tiempo final del cálculo.

Intervalo de resultados: Fija el incremento de tiempo entre instantes de escritura de resultados.

b) General

Con esta pestaña se fijan algunos parámetros de cálculo y del esquema numérico.

c) Resultados

Iber sólo crea archivos de resultados para los resultados seleccionados. Aquellos resultados no seleccionados no se podrán obtener si no se ejecuta de nuevo el cálculo.

5.2.2.6 Ejecución de cálculo

Una vez fijados los datos del problema ya se puede lanzar el cálculo. Para ejecutar la simulación se ha de acceder al menú Calcular. A través de dicho menú es

posible lanzar directamente el cálculo, “*Calcular > Calcular*”, o acceder a la ventana de cálculo, “*Calcular > Ventana de cálculo*”. Esta segunda opción permite tener un mejor control del proceso de cálculo o acceder al archivo que muestra el estado del proceso, botón Ver salida, mientras el cálculo se está ejecutando, tal como se aprecia en la figura 5.11.

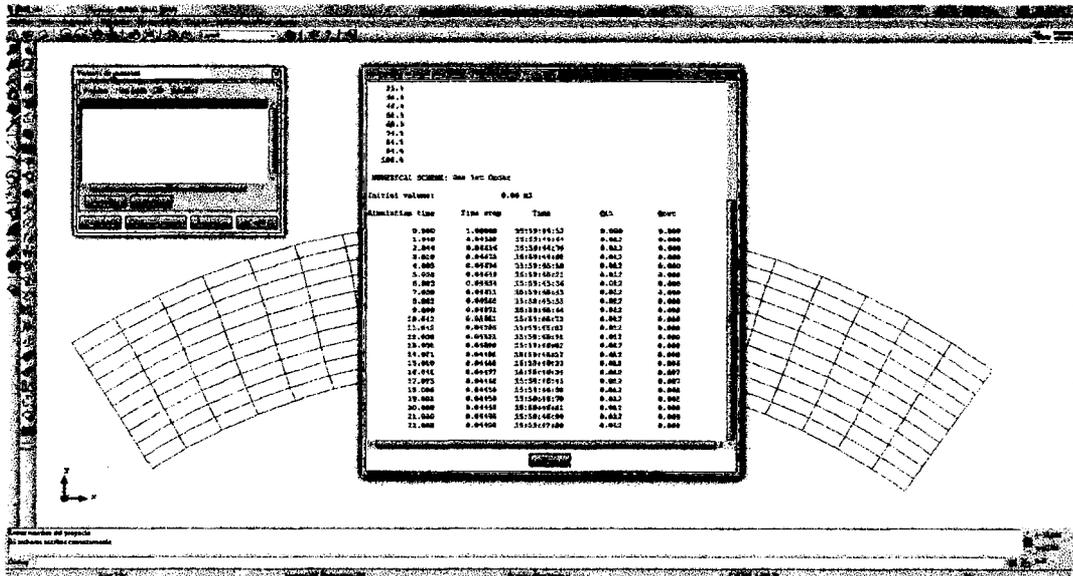


Figura 5.11 Ejecución de cálculo con Iber.

5.2.3 Post – Proceso

Una vez finalizado el cálculo se puede acceder al post- proceso para visualizar y analizar los resultados. El cambio entre las interfaces de pre – proceso y post - proceso se realiza mediante el menú “*Archivo > postproceso*” y “*Archivo > preproceso*”.

La interfaz de post-proceso de Iber, figura 5.12, es muy amigable y dispone de multitud de opciones para visualizar y analizar los resultados, personalizar los colores, las leyendas, mostrar etiquetas de valores, etc.

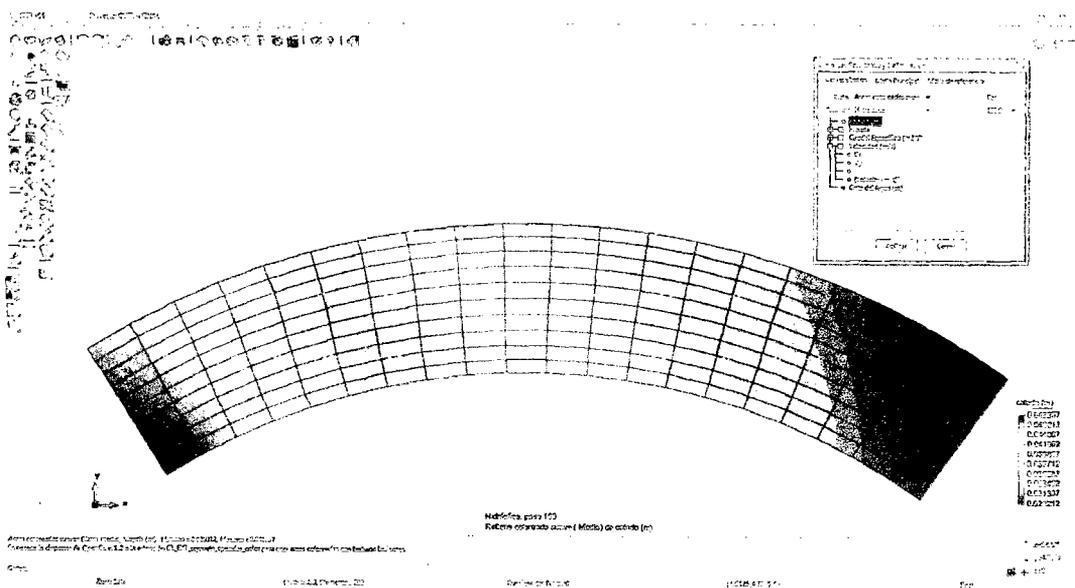


Figura 5.12 Interfaz de Iber para el Post-proceso, Menú para análisis de resultados.

Dentro del menú "Ventana > Ver resultados", figura 5.12, se accede a un menú que permite visualizar los resultados de distintas maneras. Dentro del submenú se pueden representar las variables calculadas durante la simulación eligiendo en el desplegable "Vista" la forma en la que se quieren representar los datos: Mostrar vectores, áreas coloreadas suaves, mostrar máximo y mínimo, superficie de resultado, etc. Además, dentro del mismo submenú se permite elegir entre el tipo de análisis que se desea realizar: Hidráulica, topografía, sedimentos o mapas de máximo y mínimo. También permite representar los valores en el instante que el usuario elija siempre y cuando se hayan registrado los datos para dicho instante. La opción de registrar los resultados también recae sobre el usuario y debe ser definida con anterioridad.

A veces también puede resultar interesante representar la evolución de una determinada variable en tiempo para comprobar si se ha alcanzado el estado estacionario o testear si se producen inestabilidades numéricas en la solución. Esta opción se encuentra dentro del menú "Ventana > Ver gráficos", figura 5.13.

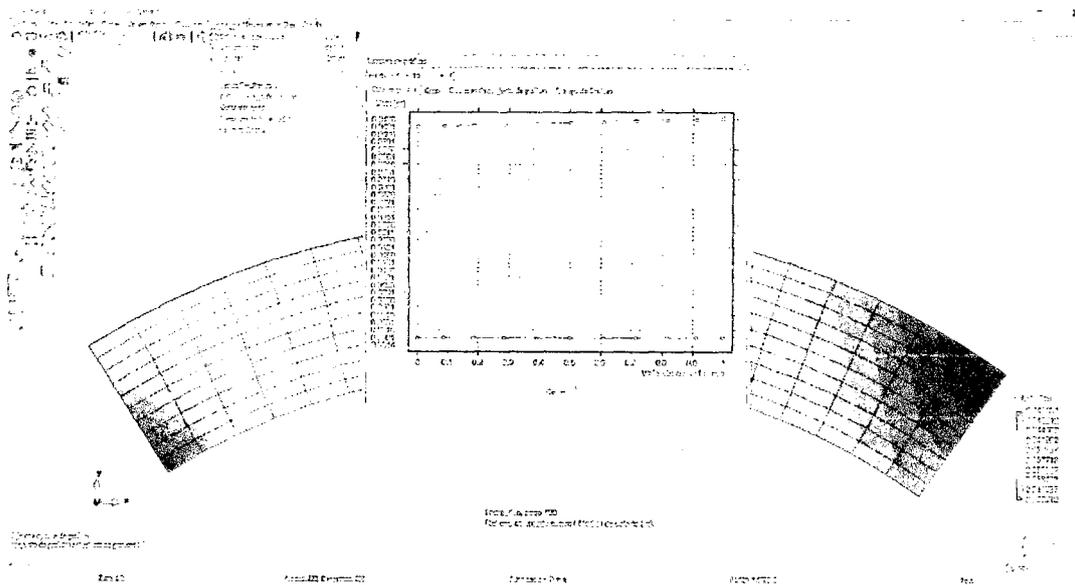


Figura 5.13 Menú para representación de gráficos.

5.3 Comparación y Verificación de Resultados

Los resultados obtenidos con cada esquema, se han comparado para determinar las variaciones que puedan existir durante la simulación del flujo. Para ello se han graficado los resultados de tirantes a los largo del tramo curvo obtenidos con el modelo de las diferencias finitas, esquema de MacCormack, y los del Iber los cuales se muestran en la figura 5.14.

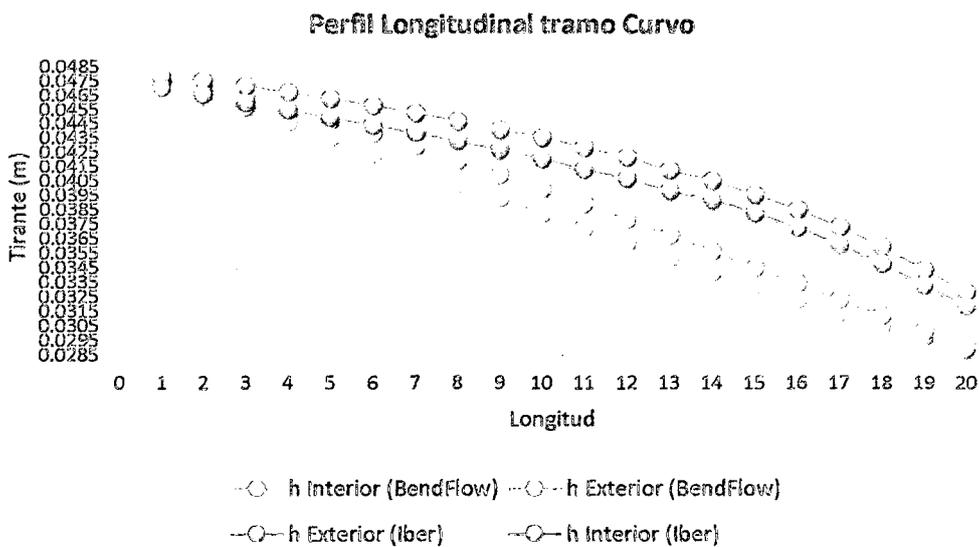


Figura 5.14 Menú para representación de gráficos.

Al realizar la comparación respectiva de los resultados obtenidos y detallados en la figura 5.14, encontramos que existen diferencias un tanto alejados entre el esquema empleado y el Iber. Esto se debe posiblemente al carácter general con que Iber realiza los cálculos y a lo pequeño del dominio escogido, así mismo el de controlar las condiciones de contorno abiertos.

Los resultados correspondientes al esquema presentado, describen de mejor forma el comportamiento del flujo, se puede apreciar claramente como los tirantes van creciendo y decreciendo de manera progresiva al ingreso y salida de la curva respectivamente, como así también se puede notar el efecto sobreelevación presentado en el interior y exterior de la curva.

6. CAPITULO VI. MODELADO DEL TRAMO CURVO DEL CANAL EN ESTUDIO

6.1 Introducción

La importancia de modelar un fenómeno hidráulico radica en tener un conocimiento más amplio y la posibilidad de predecir y controlar dichos eventos con más exactitud. En el presente capítulo se realiza la simulación del flujo de un tramo curvo del canal de irrigación de Suytucchocha, a través del programa Iber.

6.2 Identificación del canal en estudio

6.2.1 Ubicación

El tramo de canal elegido para desarrollar el presente trabajo es de construcción reciente y se encuentra localizado en la Provincia de Andahuaylas. Este tramo forma parte del sistema que consiste en la captación a través de una bocatoma diseñado para captar un caudal máximo de $1.50 \frac{m^3}{seg}$; un canal principal de

26.370 km; tres canales laterales y obras de arte.

Geográficamente, el Proyecto está ubicado entre las siguientes coordenadas:

Altitud : 3,100 m.s.n.m. - 3,860 m.s.n.m

Latitud : 13°35'00"
Longitud : 73°20'00"
Temperatura : 10.8° - 15.4° C (media mensual)

Políticamente el Proyecto se encuentra ubicado en:

Región : Apurímac
Departamento : Apurímac
Provincia : Andahuaylas
Distrito : Andahuaylas
Localidad : Santa Rosa, Huaraccopata, Checche, Sacclaya, Ccacce, Muñahuaycco, Ñahuinpuquio, Cumanaylla, Huancabamba, Huinchos, Succaraylla, Anccaraylla, Pataccocha, Ccollpa, Pampansa, Tapaya, Huamanilla, Tablina, Ccollo, Campanayocc.

El canal en estudio comprende un tramo de 95.519 m. del canal principal. Inicia en la progresiva 3 + 697.526 y termina en la progresiva 3 + 793.045 de acuerdo al plano anexo.

6.2.2 Características geométricas e hidráulicas

El tramo en estudio es un canal prismático de sección trapezoidal, de concreto

simple de $f'c = 175 \frac{kg}{cm^2}$.

Ha sido construido en un inicio para un caudal de $1.50 \frac{m^3}{seg}$, que luego fue

modificado a $1.30 \frac{m^3}{seg}$ tiene las características geométricas e hidráulicas

mostradas de acuerdo a la siguiente figura 6.1 las cuales corresponden a su capacidad máxima de diseño:

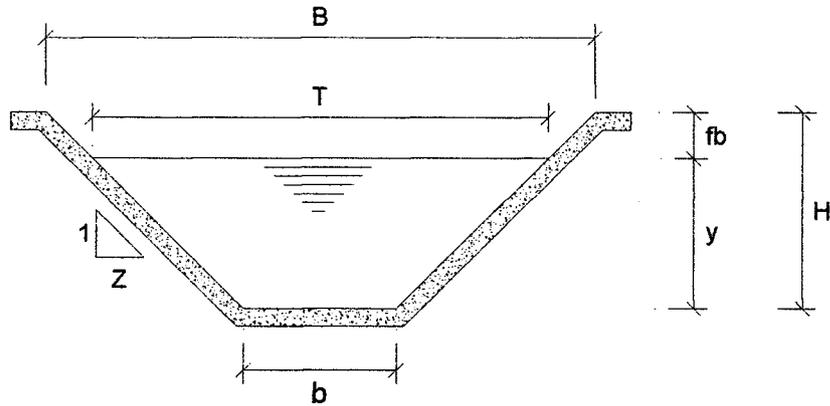


Figura 6.1 Sección transversal del canal

Características geométricas e hidráulicas del canal principal

Altura (H)	:	1.000 m
Base menor (b)	:	0.850 m
Base mayor (B)	:	2.350 m
Talud lateral (Z)	:	0.750 m
Borde libre (fb)	:	0.214 m
Pendiente del fondo (S)	:	0.001 $\frac{m}{m}$
Coefficiente de Manning (n)	:	0.015
Tirante máximo (y)	:	0.786 m
Área mojada (A)	:	1.131 m ²
Perímetro mojado (P)	:	2.815 m
Radio hidráulico (R)	:	0.402 m
Ancho superficial (T)	:	2.029 m
Profundidad hidráulica (D)	:	0.558 m
Número de Froude (F)	:	0.491 (<i>flujo subcrítico</i>)

Elementos de curva

Principio de una curva (PC)	:	3 + 731.626
Punto de inflexión (PI)	:	3 + 739.114
Punto de tangente (PT)	:	3 + 742.051
Radio de la curva (RC)	:	5.627 m
Angulo de deflexión (β)	:	73° 50' 40"
Longitud de curva (LC)	:	10.426 m
External (E)	:	3.740 m

Estos datos han sido obtenidos de la oficina de obras y estudios (DOE) del Proyecto Especial Sierra Centro Sur (PESCS) plasmados en el expediente técnico matriz del proyecto. Los datos geométricos han sido comprobados con las mediciones in situ. Algunos datos hidráulicos como el coeficiente de Manning se determinaran con la simulación de caudales en el tramo de estudio mencionado.

6.2.3 Recolección y análisis de datos

6.2.3.1 Materiales y equipo empleado

El equipo empleado para realizar las mediciones correspondientes en el presente trabajo es el siguiente:

- 1 Estación total
- 1 Nivel de ingeniero
- 1 Wincha de 30 m
- 2 Flexómetro de 5 m
- 2 Cronómetros
- 2 Radios de intercomunicación portátil

6.2.3.2 Plan de medición

La secuencia empleada en se ha realizado en base a lo descrito en la tesis de análisis de flujo no permanente en canales abiertos presentado por Yuri R. León, cuyas etapas se detallan a continuación:

1. Ubicación del tramo en estudio y colocación de progresivas. Nivelación del fondo del canal y determinación de la pendiente. Medición en planta de todas las características geométricas. Los datos obtenidos son los indicados en el párrafo 6.2.2. Cabe mencionar que se ha encontrado en el canal material sedimentario tanto en el fondo como en los lados, situación que puede variar la rugosidad del canal.
2. Medición de la compuerta reguladora de caudal ubicada en el inicio del tramo en estudio, esta compuerta es de fierro fundido y posee un sistema de izamiento manual. Tiene las siguientes dimensiones: 1.10 m. de ancho por 1.20 m. de alto. Para regular el caudal se ha tenido que operar el brazo giratorio a un ritmo uniforme con la finalidad de obtener el caudal requerido.
3. Colocación de una regla limnimétrica en la progresiva 3+379.14 en el tramo central de la curva. En este caso se ha colocado una regla estadimétrica a ambos extremos del canal.
4. Ajuste de los cronómetros ubicados en la compuerta y en la parte central de la curva.
5. Generación de un caudal, con el accionar del sistema de izamiento de la compuerta reguladora, previamente se ha cerrado esta compuerta hasta que el agua llene en canal adyacente hasta una altura de 0.70 m. esta altura se puede considerar constante para el instante que duraran las mediciones y porqué se permite el ingreso de un caudal. La posición de la compuerta se muestra en la figura 6.2.

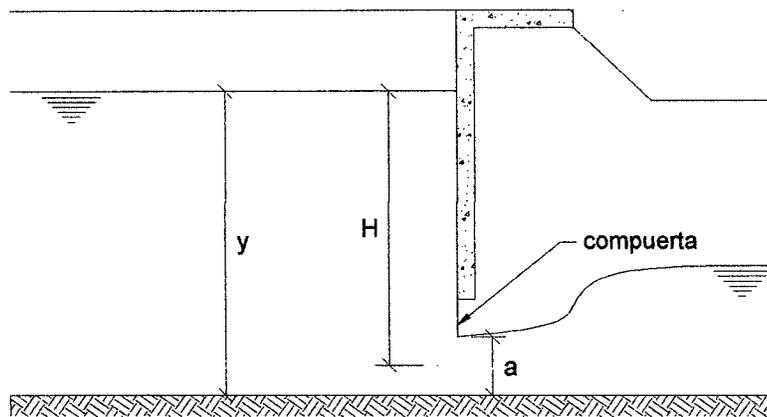


Figura 6.2 Descarga a través de un orificio

6. Manteniendo la altura de agua constante, se ha abierto la compuerta hasta obtener una altura determinada con la finalidad de ingresar un caudal constante a una hora señalada y con ayuda de los intercomunicadores, se ha iniciado las mediciones de los tirantes en ambos extremos de la curva del canal. Se repitió este procedimiento y los valores de tirantes obtenidos se detallan en la siguiente tabla 6.1. La medición de la abertura se ha realizado en la espiga de la compuerta y las alturas obtenidas en ambos extremos de la curva son distancias perpendiculares respecto al fondo del canal.

Tabla 6-1 Tirantes en ambos extremos de la curva en función a la abertura de la compuerta.

a (m)	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200
h' Exterior (m)	0.165	0.240	0.280	0.300	0.330
h' Interior (m)	0.160	0.220	0.270	0.290	0.320

Estos tirantes son distancias inclinadas paralelas a los lados del canal.

6.3 Análisis de datos obtenidos

6.3.1 Caudales de ingreso

Para determinar la magnitud de los caudales ingresados a través de la compuerta se tomara en cuenta la fórmula de la descarga por un orificio, según el esquema mostrado en la figura 6.2. La descarga a través de la compuerta se obtiene con la siguiente ecuación:

$$Q = C L a \sqrt{2 g H} \quad (6.1)$$

Donde:

Q : Descarga por la compuerta (m³/seg).

C : Coeficiente de descarga (0.60).

L : Ancho de la compuerta (m).

a : Abertura vertical de la compuerta (m).

g : Gravedad (9.81 m/seg²).

y : Profundidad del agua antes de la compuerta (m).

H : Profundidad hasta el centro de la abertura (m).

$$H = y - \frac{a}{2} \quad (6.2)$$

En nuestro caso se tiene que:

$$L = 1.15 \text{ m.}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación 6.1 se obtiene los caudales para cada abertura de la compuerta, estos resultados se muestran en la tabla 6.2.

Tabla 6-2 Caudales de Ingreso por la compuerta.

a (m)	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200
Q (m3/Seg)	0.047	0.087	0.115	0.127	0.153

6.3.2 Tirantes medidos en el centro de la curva

Las alturas medidas son distancias inclinadas paralelas a la pendiente de los lados del canal, para determinar la magnitud de las alturas de agua (h) se corregirán los valores de la tabla 6.1 mediante la siguiente relación:

$$h = \frac{h'}{\sqrt{1+Z^2}} \quad (6.3)$$

Donde:

h : Altura de agua (vertical).

h' : Altura de agua (inclinada).

Z : Talud de los lados del canal.

Al aplicar esta relación se obtienen las alturas de agua vertical (Tirantes), para cada caudal de ingreso, tabla 6.3.

Tabla 6-3 Tirantes en ambos extremos de la curva en función al caudal.

Q (m3/Seg)	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200
h Exterior (m)	0.130	0.190	0.230	0.240	0.270
h Interior (m)	0.125	0.180	0.220	0.230	0.260

6.4 Modelización con Iber del tramo curvo del canal en estudio

6.4.1 Pre – Proceso

Para poder modelar el tramo curvo en estudio mostrado en la figura 6.3 con Iber, se deben realizar los siguientes pasos:

- Crear o importar una geometría.
- Asignar una serie de parámetros de entrada (rugosidad del fondo, etc.).
- Asignar condiciones de contorno e iniciales.
- Asignar opciones generales de cálculo (tiempo de cálculo, parámetros del esquema numérico, activación de módulos adicionales).
- Construir una malla de cálculo.
- Lanzar el cálculo.

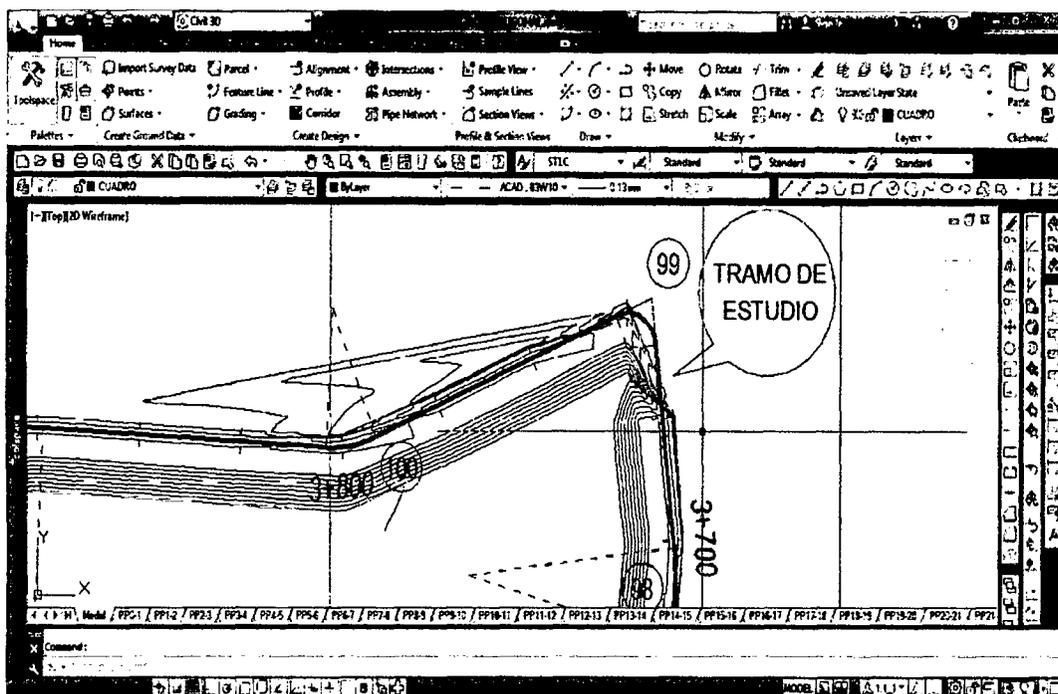


Figura 6.3 Ubicación del tramo curvo de canal en estudio

6.4.1.1 Construcción de la geometría

Para importar una geometría es necesario contar con las coordenadas del canal de las secciones de control según se puede ver en la figura 6.4. Para ello se deberán procesar primero estos puntos, en este caso se realizó haciendo uso del programa AutoCad Civil 3d, exportar el archivo en formato .DXF tal como se puede apreciar en la figura 6.5, así importarlo con facilidad en el Iber.

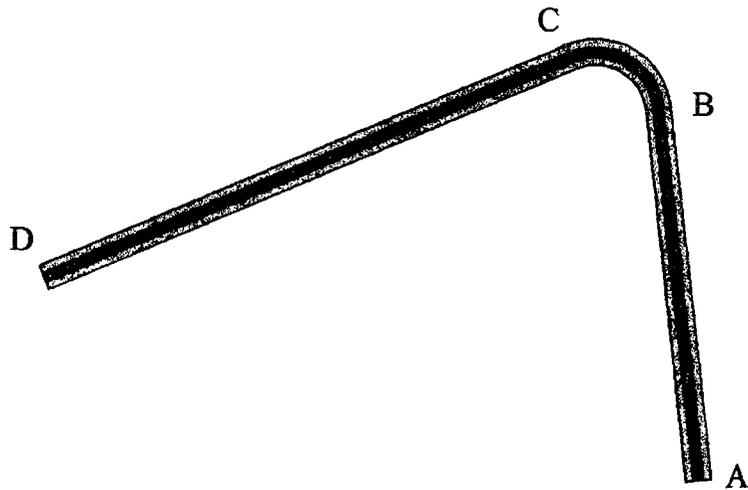


Figura 6.4 Ubicación del tramo curvo de canal en estudio

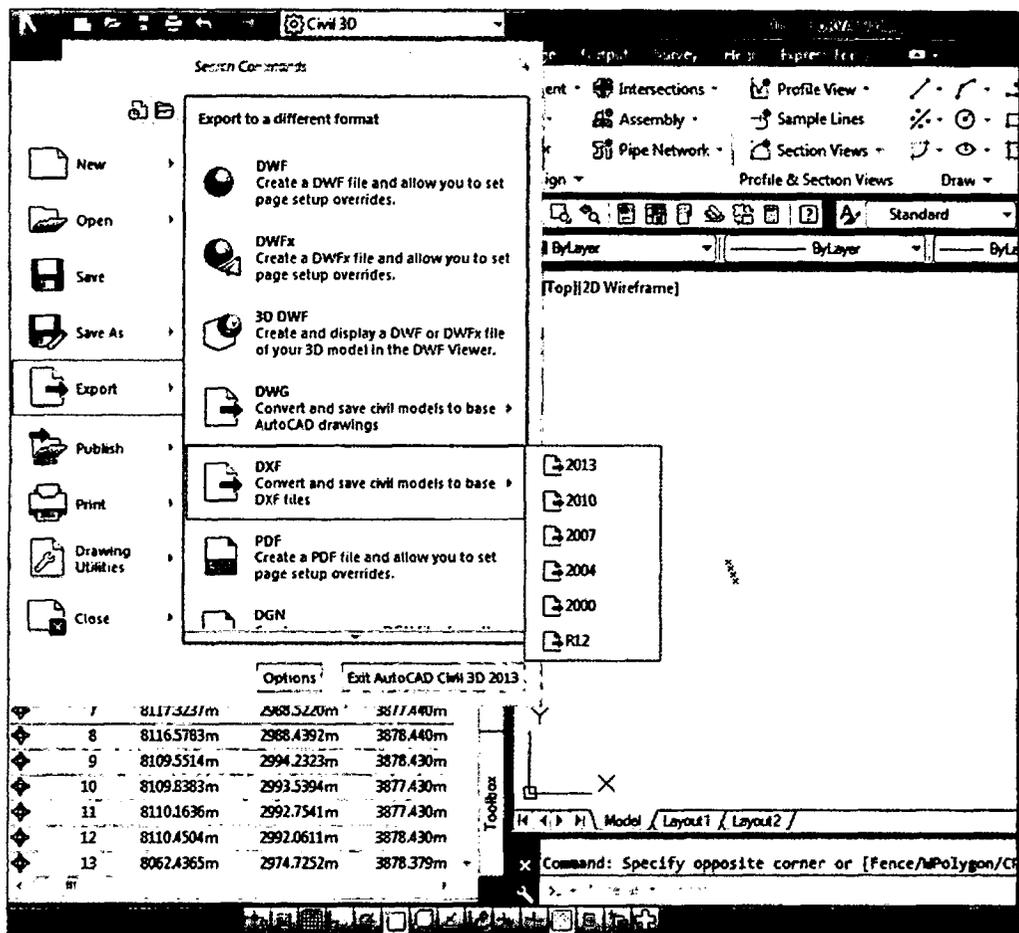


Figura 6.5 Ubicación del tramo curvo de canal en estudio

Ejecutamos el programa Iber, y antes de todo guardar el proyecto con un nombre. El proyecto se guarda en el ordenador como una carpeta con el nombre del proyecto y extensión .gid.

Desde el menú "Archivo>Importar" se pueden importar distintos formatos estándar (dxf, shapefile, entre otros). Esta opción se puede ver en la figura 6.6.

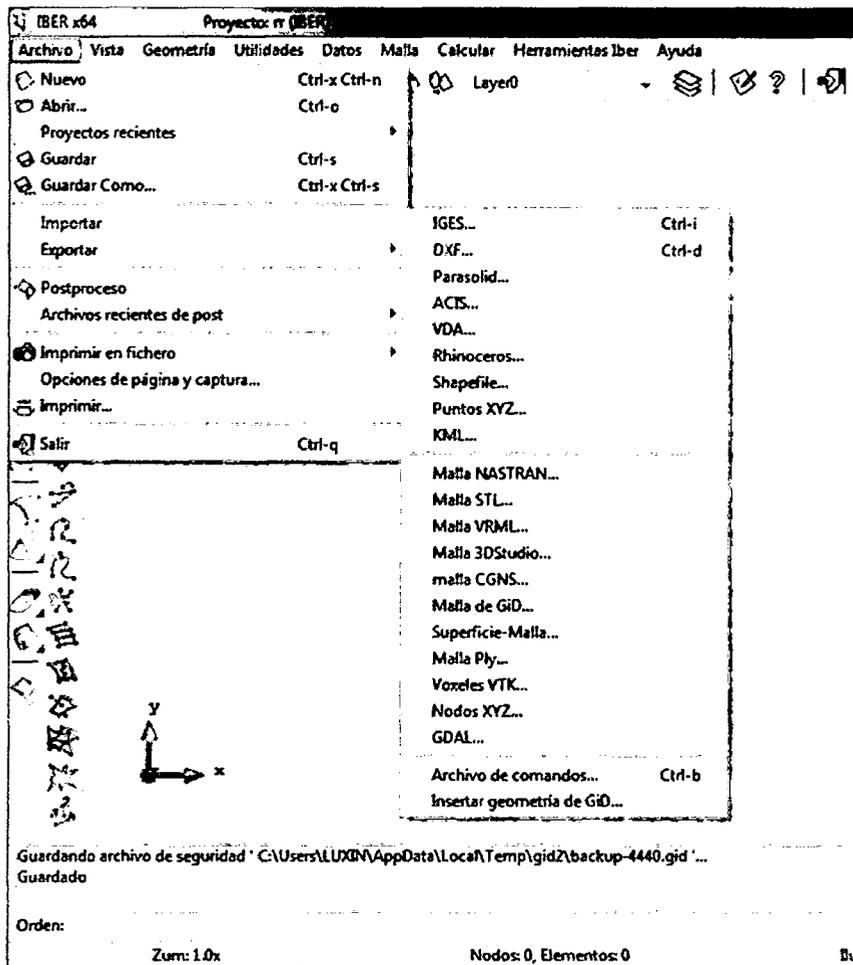


Figura 6.6 Opciones de Iber para importar geometrías en formato DXF.

Conocidas las coordenadas de todos los puntos, se puede implementar la geometría curva en Iber, en este caso con la opción "Crear arco" según se aprecia en la figura 6.9. Una vez se han introducido, se convierte a geometría formada por superficies. Este paso es necesario para proceder después a la construcción del

mallado. Este proceso se realiza utilizando la opción "Crear superficie NURBS" en el menú de pre-proceso de Iber. El resultado se muestra en la figura 6.10.

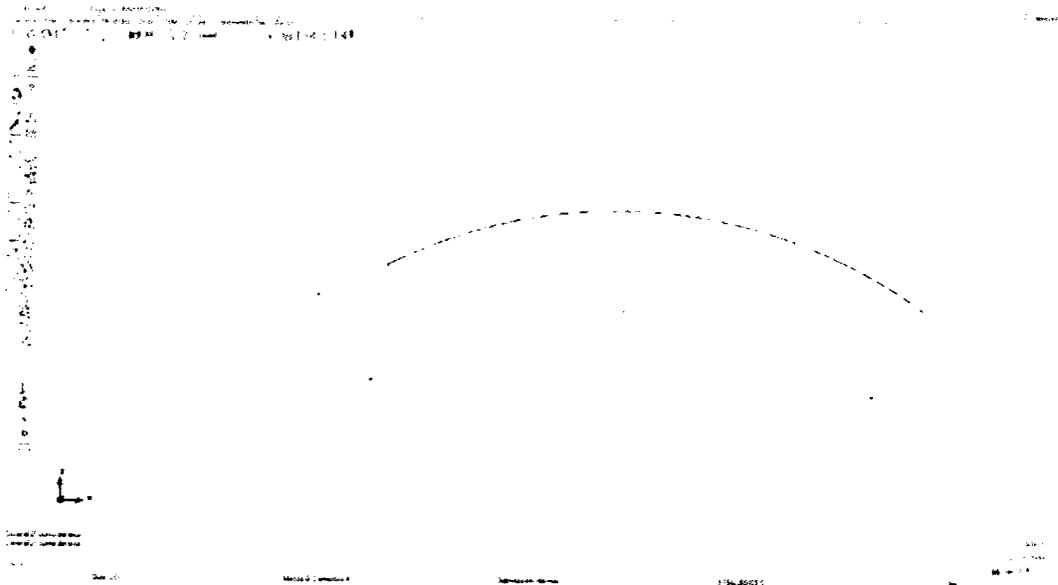


Figura 6.7 Creación de geometría a partir de puntos en Iber.

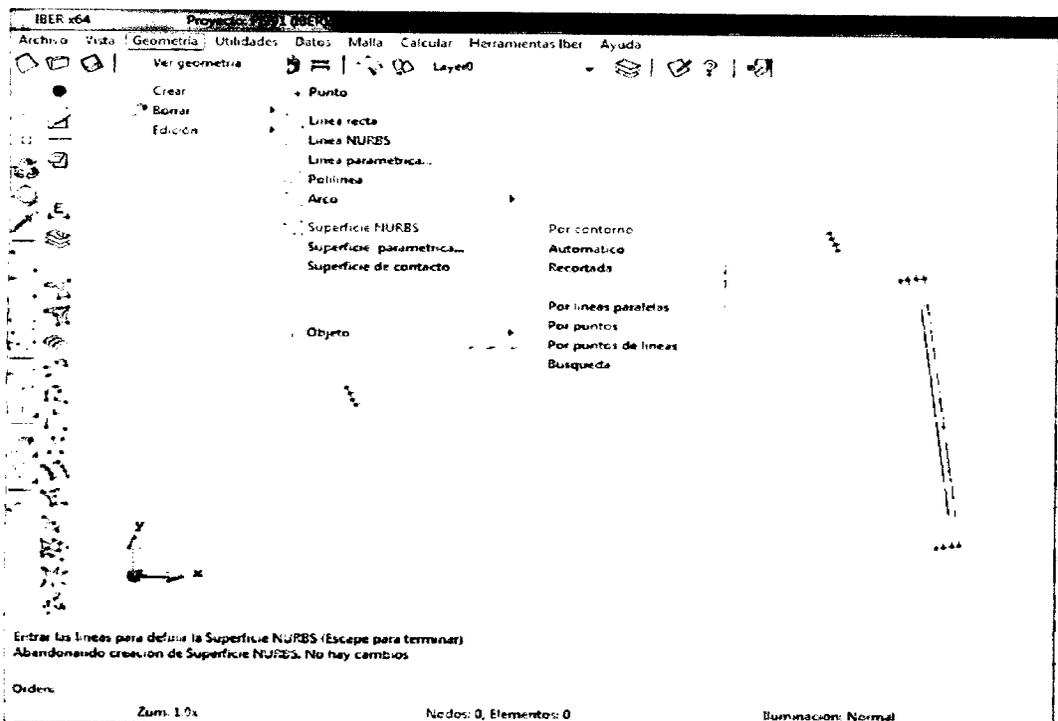


Figura 6.8 Geometría real del tramo curvo en estudio formada por superficie.

6.4.1.2 Condiciones Hidrodinámicas

Para ejecutar el módulo hidrodinámico se debe introducir las condiciones iniciales y las condiciones de contorno hidrodinámicas.

- **Condiciones iniciales**

Se deben asignar a todo el dominio, como condiciones iniciales se ha asignado un tirante igual a cero, es decir el programa iniciara con la superficie seca.

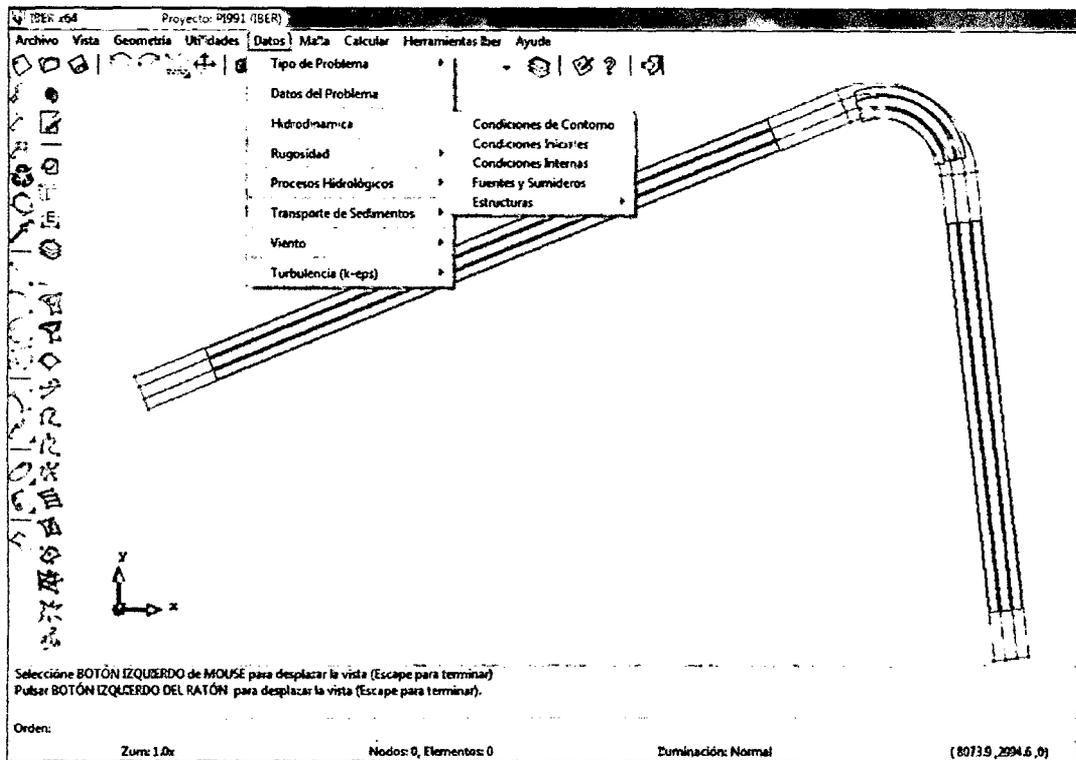


Figura 6.9 Asignación de las condiciones iniciales hidrodinámicas en Iber.

- **Condiciones de contorno**

En los contornos abiertos se pueden imponer diferentes tipos de condiciones de contorno. Para que las ecuaciones de aguas someras bidimensionales estén bien planteadas desde el punto de vista matemático, el número de condiciones a imponer en los contornos abiertos depende de si se trata de un contorno de

entrada o de salida de flujo, así como del tipo de régimen en el contorno (rápido/lento):

a) Condición de contorno de entrada.

Para la entrada del fluido se ha asignado un caudal total según los datos medidos en campo, se consideró como régimen del flujo subcrítico.

b) Condición de contorno de salida.

Se asignó régimen supercrítico o crítico, dado que en cuyo caso no es necesario asignar parámetros adicionales.

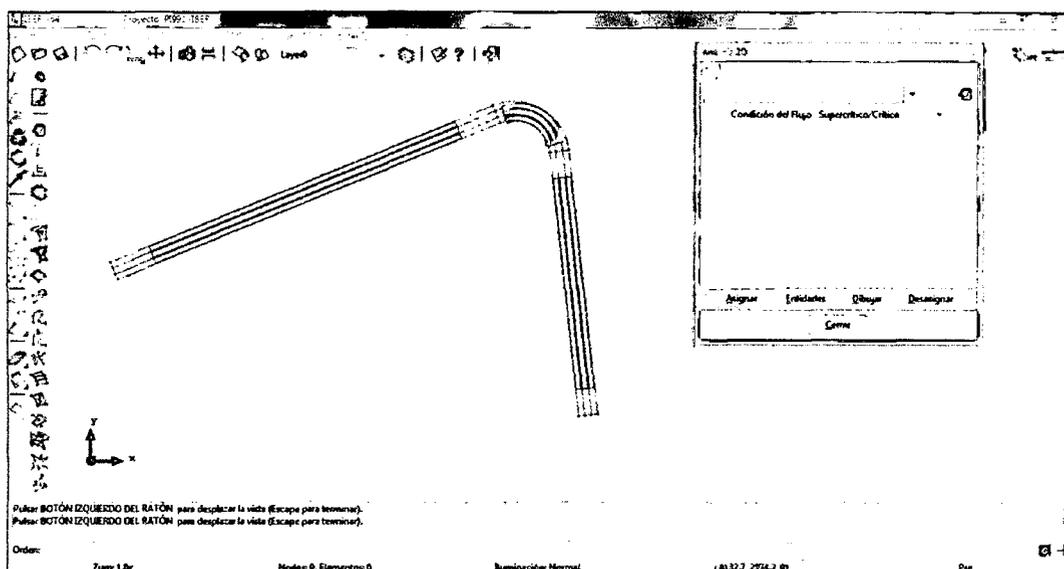


Figura 6.10 Asignación de las condiciones de contorno de entrada en Iber.

6.4.1.3 Rugosidad

La rugosidad se asigna a través de un coeficiente de Manning que se puede definir según usos de suelo. En el menú "Rugosidad > Usos del suelo" se abre la posibilidad de escoger un uso de suelo y asignarlo a las superficies que formen la geometría o a los elementos de la malla. Para la realización de este proyecto el uso del suelo escogido es "hormigón" y el valor de Manning asignado al problema es 0.015, esto según los parámetros de diseño del canal en estudio.

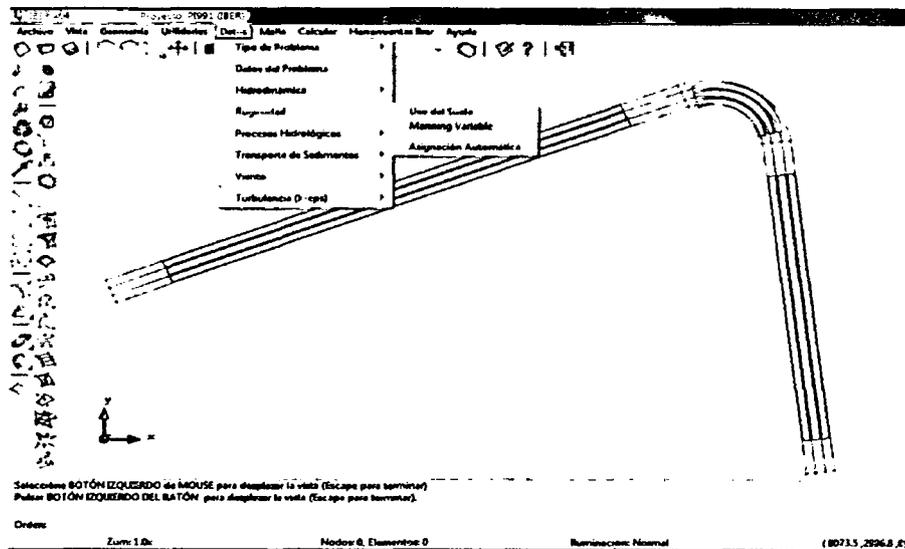


Figura 6.11 Asignación de la rugosidad en Iber.

6.4.1.4 Construcción del mallado

La calidad de la malla de cálculo es un elemento fundamental para obtener buenos resultados. Las características de la malla se asignan con los siguientes menús:

- El menú "Utilidades > Preferencias > Malla" fija las opciones generales de mallado tal como se aprecia en la figura 6.12.
- Con el menú "Malla" se fijan las propiedades de la malla asignadas a la geometría.

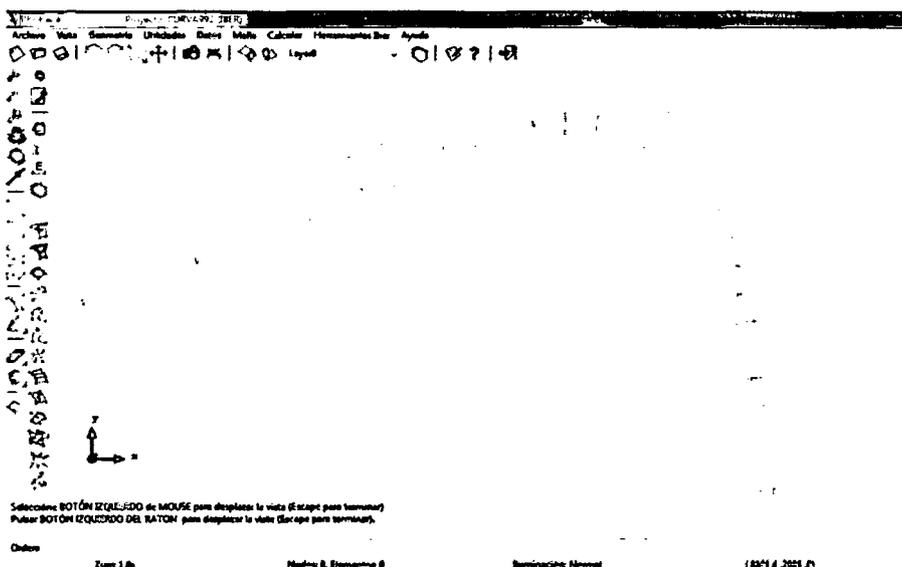


Figura 6.12 Mallado estructurado del tramo curvo.

6.4.1.5 Datos del problema

A través del menú "Datos > Datos del problema" se accede a los parámetros del cálculo, en donde se asignaron el tiempo total de simulación y su respectivo intervalo de tiempo.

Una vez fijados los datos del problema ya se puede lanzar el cálculo. Para ejecutar la simulación se ha de acceder al menú Calcular. A través de dicho menú es posible lanzar directamente el cálculo, "Calcular > Calcular", o acceder a la ventana de cálculo, "Calcular > Ventana de cálculo". Esta segunda opción permite tener un mejor control del proceso de cálculo o acceder al archivo que muestra el estado del proceso, botón Ver salida, mientras el cálculo se está ejecutando, tal como se aprecia en la figura 6.13.

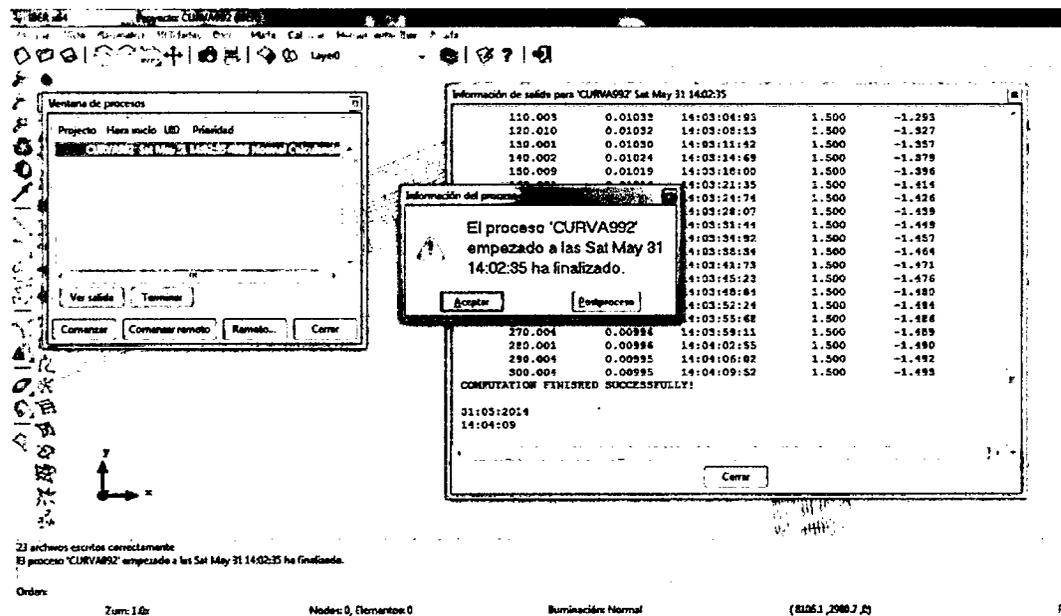


Figura 6.13 Ejecución de cálculo con Iber.

6.4.2 Post – Proceso

Una vez finalizado el cálculo se puede acceder al post- proceso para visualizar y analizar los resultados. El cambio entre las interfaces de pre – proceso y post -

proceso se realiza mediante el menú "Archivo > postproceso" y "Archivo > preproceso".

La interfaz de post-proceso de Iber, figura 6.14, es muy amigable y dispone de multitud de opciones para visualizar y analizar los resultados, personalizar los colores, las leyendas, mostrar etiquetas de valores, etc.

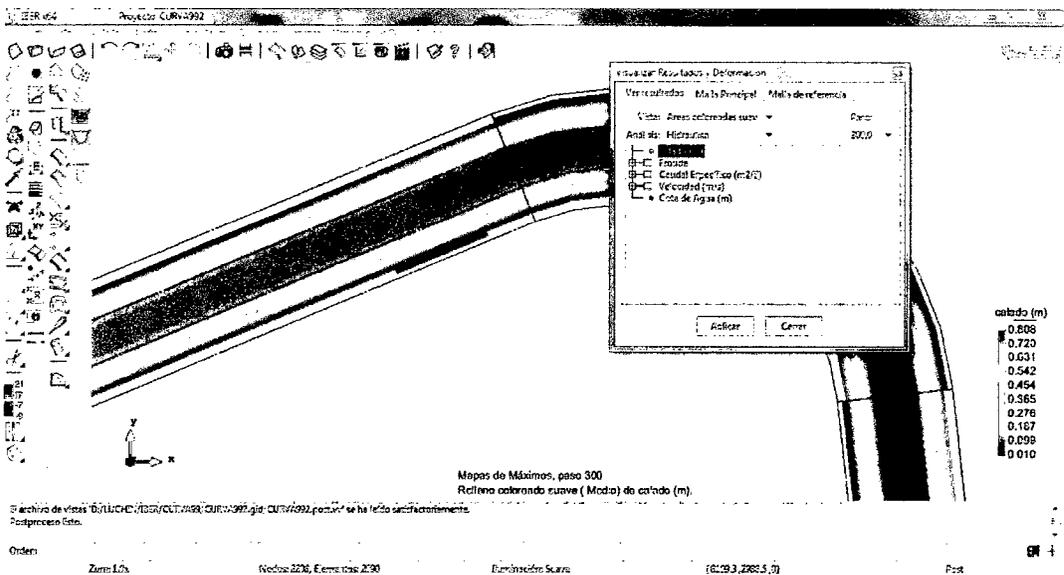


Figura 6.14 Interfaz de Iber para el Post-proceso, Menú para análisis de resultados.

Dentro del menú "Ventana > Ver resultados", figura 6.14, se accede a un menú que permite visualizar los resultados de distintas maneras. A si mismo se pueden realizar gráficos de secciones predeterminadas. Esta opción se encuentra dentro del menú "Ventana > Ver gráficos", figura 6.15.

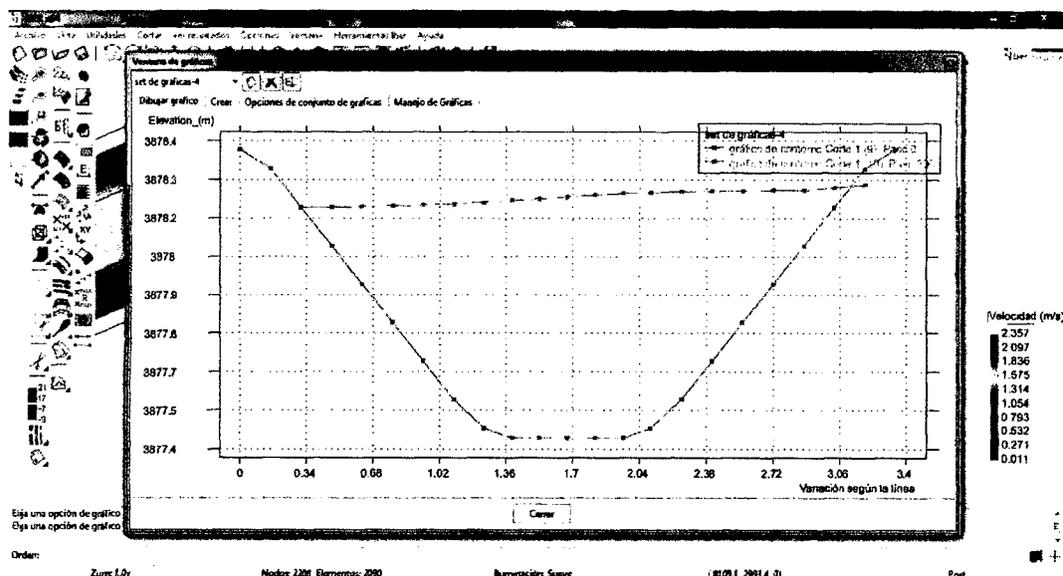


Figura 6.15 Menú para representación de gráficos.

Como es de esperarse en la figura 6.15 se puede apreciar en la sección del centro del canal en estudio en efecto de diferencia de alturas agua entre los extremos interior y exterior de la curva del canal, este efecto se denomina sobrelevación y se produce por causa de la fuerza centrífuga.

6.5 Comparación e interpretación de resultados

Realizado el modelado del tramo curvo del canal en estudio con Iber, según las consideraciones de los parámetros de diseño original, se han transitado los caudales medidos en campo para obtener los tirantes en ambos extremos de la curva a fin de compararlos con los medidos, en la tabla 6.4 se detallan estos resultados.

Tabla 6-4 Tirantes calculados a ambos extremos de la curva.

Q (m ³ /Seg)	0.040	0.080	0.120	0.160	0.200
h Exterior (m)	0.115	0.160	0.180	0.200	0.220
h Interior (m)	0.110	0.150	0.170	0.190	0.210

Estos resultados difieren con los medidos en campo, figura 6.15. Esto debido a la variación de algunos factores como la rugosidad por lo que es necesario calibrar el modelo.

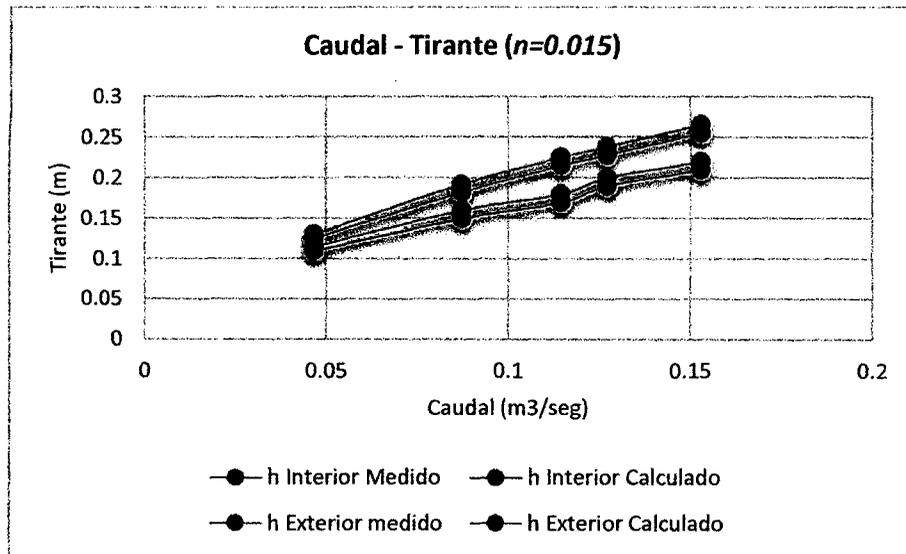


Figura 6.16 Grafico Caudal - Tirantes Medido y Calculado para $n=0.015$.

6.6 Calibración del Modelo

La calibración del modelo es el proceso de ajustar las dimensiones de elementos geométricos y los valores de coeficientes hidráulicos empíricos para que el evento del flujo simulado por el modelo reproduzca tan fielmente como sea posible el evento natural comparable (J.A Cunge). Es decir, es el ajuste de dichos factores con la finalidad de que los datos calculados coincidan con los medidos en campo.

Para ello se debe variar el coeficiente de rugosidad (n) que es un valor empírico empleados en el cálculo del caudal, Variando este valor de 0.015 a 0.019 se obtiene un ajuste casi exacto de los tirantes en el interior y exterior de la curva, como se muestra en la figura 6.17.

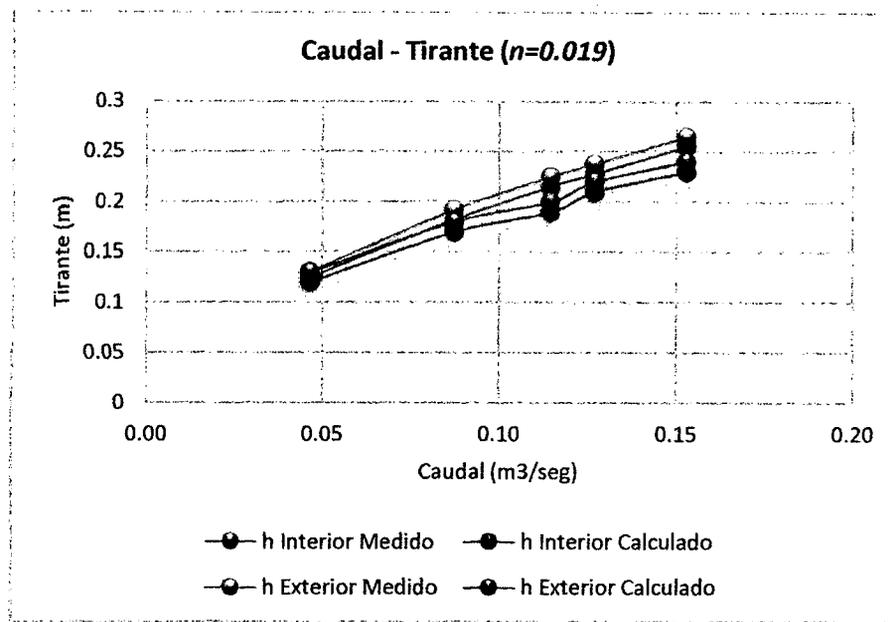


Figura 6.17 Gráfico Caudal - Tirantes Medido y Calculado para $n=0.019$.

Según se aprecia en el gráfico las diferencias aún existen, esto puede ser por errores cometidos en la medición de los niveles o en la determinación de los caudales de ingreso, dado que estos procedimientos se ha realizado sin contar con los instrumentos adecuados para determinar el caudal circulante, cabe señalar que esto fue un problema en la realización del presente informe.

6.7 Análisis del diseño en diferentes escenarios

Se presentan tres escenarios a fin de predecir el comportamiento del flujo, dados los condicionamientos a nivel de geometría de la sección, geometría del trazo y tránsito de caudales. Es decir realizara el tránsito de diferentes caudales en la sección de diseño (Escenario 1). A su vez se realizara el tránsito del caudal de diseño por el tramo curvo del canal en estudio variando el radio de la curva (Escenario 2) así mismo variando el talud de la sección transversal (Escenario 3). De esta forma realizaremos un análisis de la implicancia de variar parámetros geométricos e hidráulicos en el diseño de tramos curvos del canal en estudio.

6.7.1 Escenario 1

Consiste en transitar caudales manteniendo el Radio de la curva de 5.627 m y la sección trapezoidal de diseño:

Altura (H)	:	1.000 m
Base menor (b)	:	0.850 m
Base mayor (B)	:	2.350 m
Talud lateral (Z)	:	0.750 m
Pendiente del fondo (S)	:	$0.001\frac{\text{m}}{\text{m}}$
Coefficiente rugosidad de Manning (n)	:	0.019

En la siguiente tabla 6.5 se detallan los resultados obtenidos del modelado realizado en el programa Iber de la sección central del tramo curvo, enseguida se presenta la representación gráfica de estos resultados.

Tabla 6-5 Tirantes calculados a ambos extremos de la curva - Escenario 1.

ESCENARIO 1							
CAUDAL (m ³ /seg)	COTA FONDO (m.s.n.m)	COTA MEDIO (m.s.n.m)	COTA INTERIOR (m.s.n.m)	COTA EXTERIOR (m.s.n.m)	TIRANTE INTERIOR (m)	TIRANTE EXTERIOR (m)	SOBRE- ELEVACION (m)
1.1	3877.440	3878.100	3878.070	3878.120	0.630	0.680	0.050
1.3	3877.440	3878.150	3878.130	3878.180	0.690	0.740	0.050
1.5	3877.440	3878.210	3878.180	3878.240	0.740	0.800	0.060
1.7	3877.440	3878.260	3878.220	3878.290	0.780	0.850	0.070
1.9	3877.440	3878.300	3878.260	3878.340	0.820	0.900	0.080

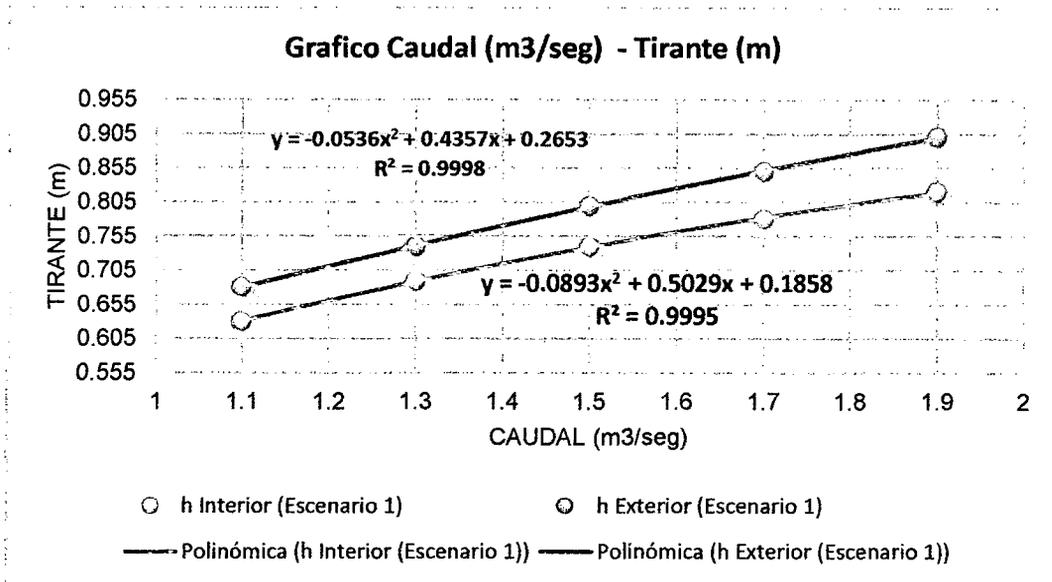


Figura 6.18 Gráfico Caudal – Tirantes, Sección central de la curva.

De la figura 6.18, podemos precisar que a medida el caudal incrementa también incrementan los tirantes en ambos extremos de la curva (sección central), a su vez se puede apreciar que la diferencia de los tirantes (sobreelevación) a ambos extremos de la curva va aumentando progresivamente, es decir a mayor caudal mayor será la sobreelevación. El efecto de sobreelevación es producido a razón de que la fuerza centrífuga genera en la parte exterior de la Curva una variación respecto al nivel medio del agua, mientras que en su parte interior aparece una depresión en el nivel del agua, en efecto entre el interior y exterior de una curva se desarrolla una sobreelevación del nivel de agua por causa de la fuerza centrífuga.

El inconveniente con estos cambios de elevación generados por las Curvas en Canales, pueden ir desde socavaciones o deposiciones excesivas en estos puntos, si hablamos de canales no revestidos, hasta perturbaciones de estructuras hidráulicas, como compuertas o vertederos, ubicadas aguas debajo de estas curvas. Igualmente no se puede perder de vista la posibilidad de desbordamiento del canal, por falta del adecuado borde libre.

6.7.2 Escenario 2

Consiste en variar el radio de la curva, manteniendo el caudal de $1.30 \frac{m^3}{seg}$ y la

sección trapezoidal de diseño:

Altura (H)	:	1.000 m
Base menor (b)	:	0.850 m
Base mayor (B)	:	2.350 m
Talud lateral (Z)	:	0.750 m
Pendiente del fondo (S)	:	$0.001 \frac{m}{m}$
Coefficiente rugosidad de Manning (n)	:	0.019

En la siguiente tabla 6.6 se detallan los resultados obtenidos del modelado realizado en Iber de la sección central del tramo curvo, con su respectiva representación gráfica.

Tabla 6-6 Tirantes calculados a ambos extremos de la curva Escenario 2.

ESCENARIO 2							
RADIO (m)	COTA FONDO (m.s.n.m)	COTA MEDIO (m.s.n.m)	COTA INTERIOR (m.s.n.m)	COTA EXTERIOR (m.s.n.m)	TIRANTE INTERIOR (m)	TIRANTE EXTERIOR (m)	SOBRE-ELEVACION (m)
3	3877.440	3878.180	3878.110	3878.210	0.670	0.770	0.100
7	3877.440	3878.150	3878.130	3878.170	0.690	0.730	0.040
11	3877.440	3878.150	3878.130	3878.160	0.690	0.720	0.030
15	3877.440	3878.150	3878.135	3878.155	0.695	0.715	0.020
19	3877.440	3878.150	3878.140	3878.150	0.700	0.710	0.010

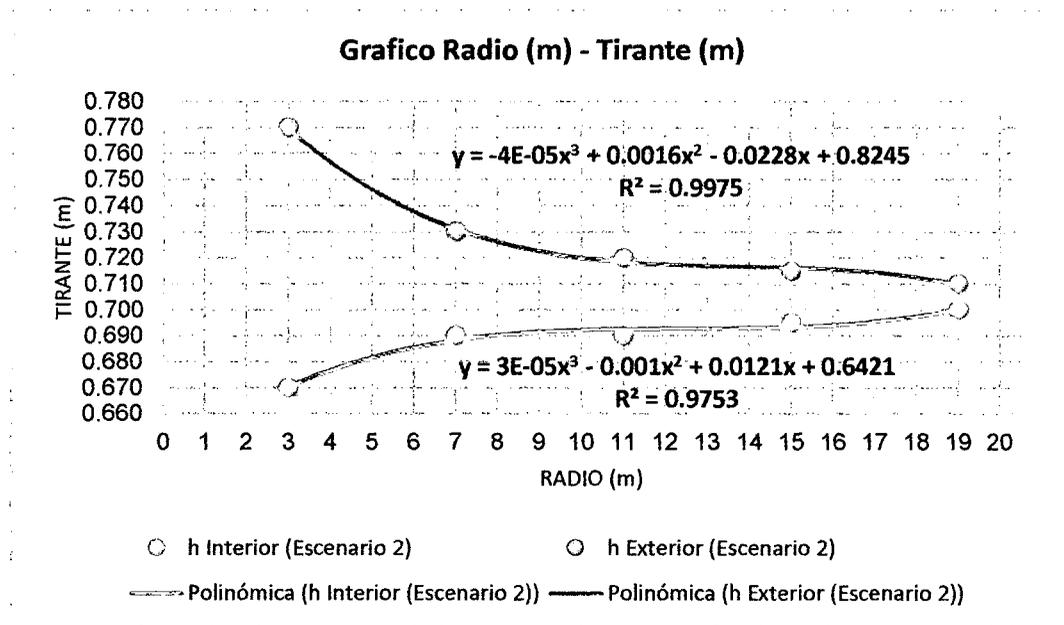


Figura 6.19 Gráfico Radio – Tirantes, Sección central de la curva.

De la figura 6.19, podemos precisar que a medida el Radio incrementa, disminuye el tirante exterior mientras que el interior incrementa, a su vez se puede apreciar que la sobreelevación a ambos extremos de la curva va disminuyendo progresivamente, es decir a mayor Radio menor será la sobreelevación.

6.7.3 Escenario 3

En este escenario variaremos el Angulo del talud del canal según se detalla en la tabla 6.7, es decir se variara la sección del canal, pero se mantendrá el caudal de

diseño de $1.30 \frac{m^3}{seg}$, el Radio de la curva de $5.627 m$. y los siguientes

parámetros:

Base menor (b)	:	$0.850 m$
Pendiente del fondo (S)	:	$0.001 \frac{m}{m}$
Coefficiente rugosidad de Manning (n)	:	0.019

En la siguiente tabla 6.7 se detallan los resultados obtenidos del modelado realizado en el programa Iber de la sección central del tramo curvo.

Tabla 6-7 Tirantes calculados a ambos extremos de la curva Escenario 3.

ESCENARIO 3							
ANGULO TALUD (°)	COTA FONDO (m.s.n.m)	COTA MEDIO (m.s.n.m)	COTA INTERIOR (m.s.n.m)	COTA EXTERIOR (m.s.n.m)	TIRANTE INTERIOR (m)	TIRANTE EXTERIOR (m)	SOBRE-ELEVACION (m)
0	3877.440	3878.370	3878.350	3878.390	0.910	0.950	0.040
15	3877.440	3878.250	3878.230	3878.280	0.790	0.840	0.050
30	3877.440	3878.190	3878.160	3878.210	0.720	0.770	0.050
45	3877.440	3878.120	3878.090	3878.140	0.650	0.700	0.050
60	3877.440	3878.040	3878.010	3878.070	0.570	0.630	0.060

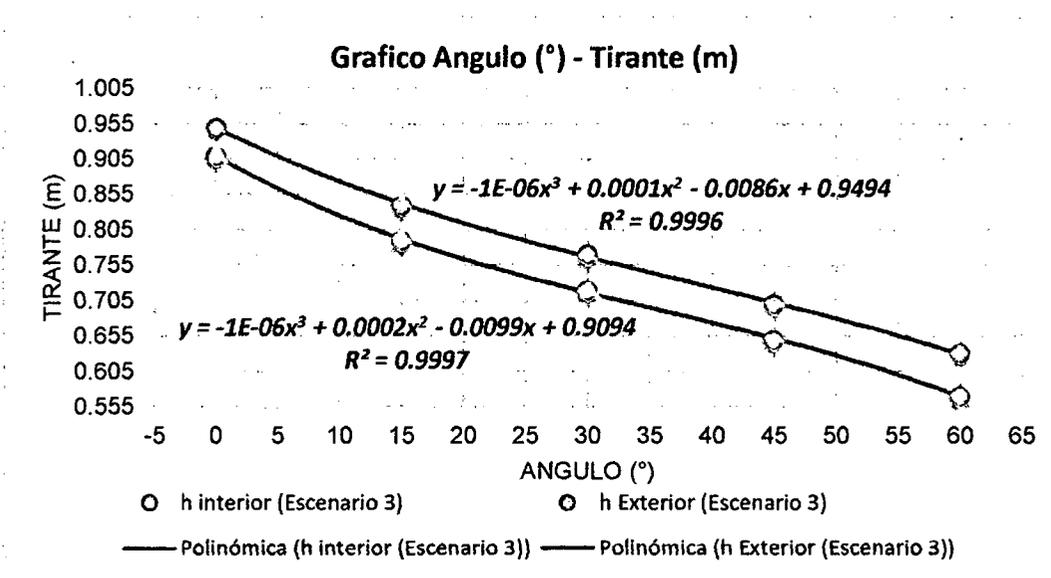


Figura 6.20 Grafico Angulo – Tirantes, Sección central de la curva.

De la figura 6.20, podemos precisar que a medida el Angulo del talud se incrementa, disminuye los tirantes en ambos extremos de la curva, a su vez se puede apreciar que la sobreelevación de ambos extremos de la curva va incrementándose progresivamente, es decir a mayor Angulo mayor será la sobreelevación.

7. CAPITULO VII. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1 Conclusiones

Se ha desarrollado un modelo numérico basado en el esquema de diferencias finitas de MacCormack de flujo bidimensional para predecir los parámetros hidráulicos y geométricos en cuerpos de agua con flujo en régimen subcrítico, cuyas fronteras pueden ser definidas por líneas curvas con orientación distintas al de los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares.

A partir del esquema es posible realizar el seguimiento del comportamiento del tirante en función del caudal, en el tramo curvo del canal abierto, posibilitando la implantación de una metodología de control aplicando técnicas de simulación y de cálculo numérico con la ayuda de ordenadores que en la actualidad son totalmente accesibles.

Se ha empleado el programa IBER como patrón de comparación para cotejar el modelo numérico propuesto. Pero al hacer la comparación respectiva se ha encontrado que el IBER nos da un resultado un tanto alejado del método presentado. Esto se debe posiblemente al carácter general de cálculo de dicho

programa, al sistema de enmallado que utiliza y a lo pequeño del domino escogido. Sin embargo, se puede considerar que el método estudiado da mejores resultados respecto al comportamiento del flujo en el tramo curvo.

7.2 Recomendaciones

Se recomienda el estudio del flujo bidimensional para el diseño de estructuras hidráulicas y de protección en tramos curvos de canales abiertos.

Con relación a las herramientas de programación se recomienda propiciar su uso e intensificarlas a fin de desarrollar aplicaciones concretas y simulaciones de eventos hidráulicos.

Con relación a la bibliografía referente al tema, esta es escasa, principalmente en idioma español. Se recomienda implementar una bibliografía básica.

Para futuras investigaciones se recomienda generalizar el modelo para utilizar en canales con diferentes tipos de geometría y que abarquen tramos compuestos.

BIBLIOGRAFIA

1. CHAUDHRY HANIF M. *Open-channel Flow*. Editorial Prentice Hall Inc. New Jersey, 1993
2. CHOW Vem Te. *Hidráulica de Canales Abiertos*. Editorial Mc Graw Hill Interamericana. Colombia, 1994
3. JIMENEZ Amado, BEREZOWSKY Moises. *Modelación de Flujo Bidimensional Horizontal con Coordenadas Curvilíneas Generales*. Editorial Instituto de Ingeniería UNAM, México DF, 2004
4. NIEVES Antonio, DOMINGUEZ Federico. *Métodos numéricos Aplicados a la Ingeniería*. Editorial CECSA, México, 1995.
5. BLADE I CASTELLET Esnest. *Modelación del flujo en lámina libre sobre cauces naturales, análisis integrado con esquemas en volúmenes finitos en una y dos dimensiones*. FLUMEN UPC, Barcelona, 2005.
6. NAUDASCHER Eduard, *Hidráulica de canales*. Editorial LIMUSA NORIEGA, México, 2002.
7. SOTELO AVILA Gilberto, *Hidráulica de canales*. Editorial Instituto de Ingeniería UNAM, México, 2002.

PANEL FOTOGRAFICO Y ANEXOS



Fotografía N°1: Tramo curvo de canal de Suytucchoa escogido para el presente informe



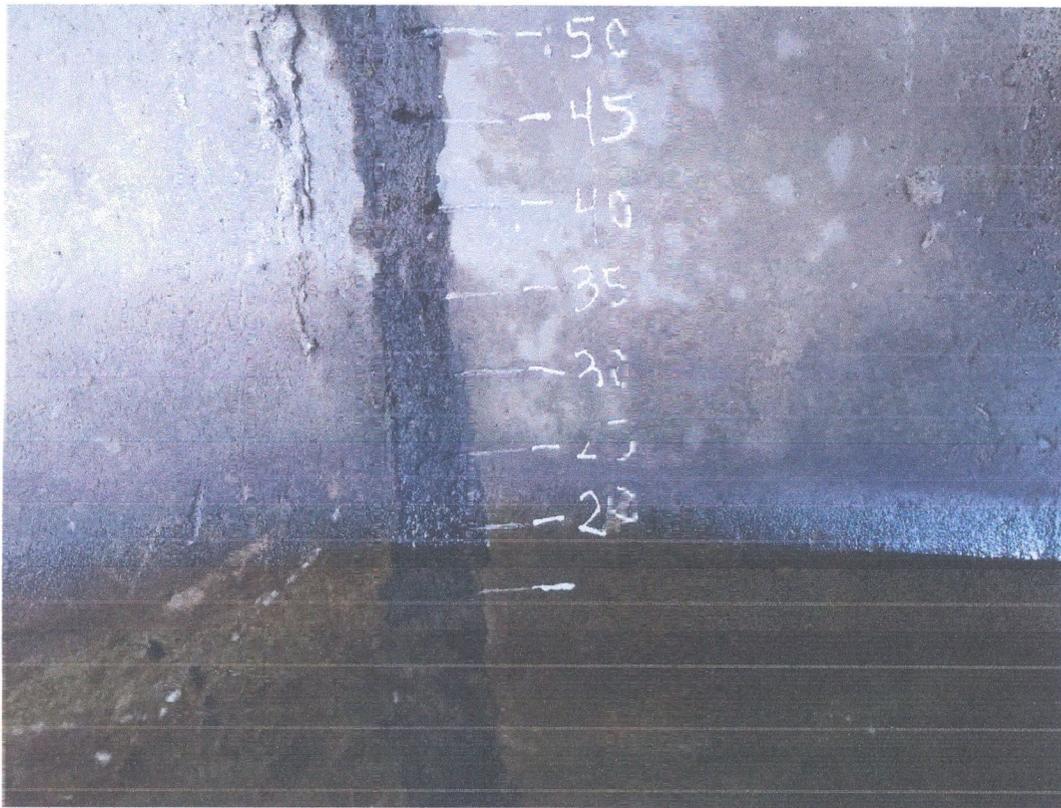
Fotografía N°2: Compuerta de regulación, donde se realizo el izaje correspondiente.



Fotografía N°3: Espiga de la Compuerta debidamente señalizado para su operación.



Fotografía N°4: Proceso de medición a ambos extremos de la curva haciendo uso de reglas estatimétricas.



Fotografía N°5: Tirante de agua en el extremo exterior de la curva.



Fotografía N°6: Tirante de agua en el extremo interior de la curva.