UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Propiedades Genéricas de Medidas Invariantes para Difeomorfismos Axioma A de Smale

PRESENTADO POR:

Bach. Eder Raul HUACCACHI HUAMANI

ASESOR:

Dr. Alexander Paul CONDORI HUAMAN

Tesis para optar el título profesional de:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

AYACUCHO-PERÚ

2023

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mi familia,
quienes estuvieron a mi lado en todo momento.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la oportunidad de concluir esta etapa de mi vida y ser el guía de mis pasos.

A mis padres Lucy y Raúl, que siempre estuvieron a mi lado, les agradezco por todo el amor, apoyo y comprensión.

A mi asesor Dr. Alexander Paul Condori Huaman, por la disponibilidad en la orientación de este trabajo, por las correcciones, la paciencia y la atención dados a lo largo de la realización de la tesis.

A los docentes de la Escuela Profesional de Ciencia Físico Matemáticas, los cuales impartieron su conocimiento hacia mi persona.

A los compañeros de promoción, por su amistad, por los momentos que compartimos en nuestra formación durante los años de estudio.

A PROCIENCIA (Programa Nacional de Investigación Científica y Estudios Avanzados) por el apoyo financiero concedido durante el periodo de realización de la presente tesis mediante el Proyecto N° 040-2021-FONDECYT.

A todas las personas que de alguna forma contribuyeron en la elaboración del presente trabajo.

Resumen

El objetivo de este trabajo es describir el espacio de medidas invariantes para difeomorfismos Axioma A, destacando algunos subconjuntos, que de un punto de vista topológico, son grandes en este espacio. Más específicamente, sea $T : X \to X$ un difeomorfismo Axioma A y C-denso sobre una variedad compacta sin frontera X, entonces el subconjunto de medidas con soporte en órbitas periódicas es denso en el conjunto de medidas T-invariantes. Usando este resultado, tenemos, que el conjunto de medidas no atómicas, el conjunto de medidas abiertas en todos los conjuntos abiertos de X y el conjunto de medidas ergódicas, son subconjuntos residuales en el espacio de medidas T-invariantes. Además, mostramos que el conjunto de medidas fuertemente mezclantes es de primera categoría en el espacio de medidas T-invariantes, y finalmente se prueba que el conjunto de medidas que poseen entropía métrica cero, contiene un conjunto residual en el espacio de medidas T-invariantes.

Palabras clave: Difeomorfismos Axioma A, medidas T-invariantes, medidas con soporte en órbitas periódicas, medida no atómica, medidas fuertemente mezclantes, entropía.

Abstract

The goal of this work is to describe the space of invariant measures for Axiom A diffeomorphisms, standing out some subsets, which from a topological point of view, are large in this space. More specifically, let $T : X \to X$ be an Axiom A diffeomorphism and C-dense over a compact manifold without boundary X, then the subset of measures supported on periodic orbits is dense on the set of measures T-invariants. Using this result, we have that the set of non-atomic measures, the set of open measures in all open sets of X and the set of ergodic measures, are residual subsets in the space of T-invariant measures. In addition, we show that the set of strongly mixing measures is first class in the space of T-invariant measures, and finally it is proved that the set of measures that have zero metric entropy contains a residual set in the space of measures T-invariants.

Keywords: Axiom A diffeomorphisms, T-invariant measures, measures with support in periodic orbits, non-atomic measure, strongly mixing measures, entropy.

Índice general

Índice de figuras

I. Introducción

Dado un sistema dinámico, esto es, un par (X, T) donde X es un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una aplicación continua, nos gustaría saber, por ejemplo, desde un punto de vista topológico, que condiciones debe satisfacer el sistema para que ciertos puntos sean abundantes en el espacio X respecto a la acción de T. En el año 1967, Steven Smale definió una nueva clase de sistemas dinámicos, que ya habían sido bastante estudiados y cuya dinámica se entendía relativamente bien, a los cuales él denominó *difeomorfismos Axioma A* (el conjunto no errante Ω es hiperbólico y $\overline{Per(T)} = \Omega$). Poco tiempo después, en la década de 1970, Rufus Bowen identificó y formalizó una propiedad que tienen los difeomorfismos axioma A, al cual denominó *especificación*.

El concepto de especificación fue definido inicialmente por Bowen en [2], a través, del estudio de difeomorfismos transitivos que satisfacen el Axioma A. Bowen mostró, que para homeomorfismos cuyo conjunto inestable de cualquier punto periódico es denso en el espacio, es posible aproximar tramos finitos de órbita (en cantidad también finita) por una órbita periódica.

De manera más precisa, dado el homeomorfismo $T : X \to X$ sobre un espacio métrico compacto (X, d), decimos que T es C-denso si el conjunto inestable de $p \in X$ es denso en X, es decir, $\overline{W^u(p)} = X$ para todo $p \in X$. En este sentido Bowen mostró:

Teorema 0.1 (Bowen, 1971). *Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo C-denso y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $m(\varepsilon) > 0$ tal que, dados $x_1, \ldots, x_k \in X$, $\gamma = \{I_1, \ldots, I_k\}$ donde $I_j = [a_j, b_j]$, satisfaciendo $a_j - b_{j-1} \geq m(\varepsilon)$ para cada $j = 2, \ldots, k$ y $p \geq m(\varepsilon) + b_k - a_1$, existe un punto periódico $x \in X$ de periodo p tal que,*

$$d(T^k(x), T^k(y)) < \varepsilon\,,\ \forall\, k \in I_j\,, \forall\, j = 1, \ldots, k.$$

Así, diremos que la aplicación continua $T : X \to X$ de un espacio métrico compacto X satisface la propiedad de especificación, si satisface el teorema anterior.

En el presente trabajo, describiremos topológicamente el espacio de medidas invariantes para difeomorfismos Axioma A, destacando algunos subconjuntos, que desde un punto de vista topológico, son grandes en este espacio. Siguiendo lo hecho por Sigmund en [11], dado un difeomorfismo Axioma A y C-denso $T : X \to X$ sobre una variedad compacta sin frontera X, el conjunto de medidas con soporte en órbitas periódicas, denotado por $\mathcal{M}_p$, es un conjunto denso en el espacio de todas las medidas invariantes por T, denotado por $\mathcal{M}_T$; el conjunto de medidas no atómicas, denotado por $\mathcal{M}_n$, es residual en $\mathcal{M}_T$; el conjunto de medidas positivas en todos los conjuntos abiertos, denotado por $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, es residual en $\mathcal{M}_T$; el conjunto de medidas ergódicas, denotado por $\mathcal{M}_e$, es residual en $\mathcal{M}_T$; el conjunto de medidas fuertemente mezclantes, denotado por $\mathcal{M}_s$, es de primera categoría en $\mathcal{M}_T$ y finalmente el conjunto de medidas invariantes que poseen entropía métrica cero, denotado por $\mathcal{M}_z$, contiene un conjunto residual en $\mathcal{M}_T$. En resumen, detallar la demostración del siguiente teorema:

Teorema 0.2. *Sea $T : X \to X$, un difeomorfismos Axioma A y C-denso sobre una variedad compacta sin frontera X. Denotamos por $\mathcal{M}_T$ el espacio de medidas de probabilidad T-invariantes y sean los subconjuntos $\mathcal{M}_p$, $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{M}_e$, $\mathcal{M}_s$, $\mathcal{M}_z$, definidos anteriormente, tenemos que*

(1) *$\mathcal{M}_p$ es denso en $\mathcal{M}_T$;*

(2) *$\mathcal{M}_n$ es residual en $\mathcal{M}_T$;*

(3) *$\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ es residual en $\mathcal{M}_T$;*

(4) *$\mathcal{M}_e$ es residual en $\mathcal{M}_T$;*

(5) *$\mathcal{M}_s$ es de primera categoría en $\mathcal{M}_T$;*

(6) *$\mathcal{M}_z$ contiene un subconjunto residual en $\mathcal{M}_T$.*

El texto fue pensado de tal forma, que progresivamente lleguemos a los resultados deseados y posee la siguiente estructura:

En el capítulo 1, presentaremos algunos resultados básicos de Teoría de Medida e Integración, Análisis Funcional y Topología para mejorar la comprensión a lo largo de los siguientes capítulos.

En el capítulo 2, se dan conceptos y resultados importantes de los Sistemas Dinámicos, como difeomorfismos Axioma A, la propiedad de especificación y el concepto de entropía de una partición, junto con algunos teoremas clásicos.

A lo largo del capítulo 3, hacemos el estudio del espacio de medidas de probabilidad invariantes y de las medidas de probabilidad T-invariantes. Además, damos una revisión de recurrencia y enunciamos el Teorema Ergódico de Birkhoff.

Finalmente en el capítulo 4, siguiendo lo hecho por Sigmund en [11], establecemos la caracterización topológica del espacio de medidas invariantes teniendo en cuenta que nuestro difeomorfismo satisface el Axioma A de Smale y también tiene la propiedad de especificación, en otras palabras, demostraremos con detalles el Teorema (0.2).

II. Marco Teórico

Dinámica Hiperbólica

La teoría hiperbólica desarrollada por Smale [13], es el primer intento de dar una visión global de casi todos los sistemas dinámicos. Sea M una variedad compacta sin frontera y $f : M \to M$ un *difeomorfismo*, esto significa que f es un homeomorfismo tal que f y f^{-1} son de clase C^1. Dado $\Lambda \subset M$ un subconjunto invariante por f, esto es, $f(\Lambda) = \Lambda$. Decimos que Λ es *hiperbólico* para f, si para cada $x \in \Lambda$, el espacio tangente T_xM se descompone en una suma directa continua,

$$T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

donde E^s y E^u son invariantes por la derivada Df de f, en el siguiente sentido

$$Df_x E^s(x) = E^s(f(x)) \text{ y } Df_x E^u(x) = E^u(f(x)), \forall\, x \in \Lambda,$$

tal que, existe una métrica Riemanniana y constantes $C \geq 1$, $0 < \lambda < 1$ que cumplen las siguientes estimaciones uniformes:

$$\|Df_x^n(v)\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall\, x \in \Lambda, v \in E^s(x), n \geq 0,$$

$$\left\|Df_x^{-n}(v)\right\| \leq C\lambda^n \|v\|, \forall\, x \in \Lambda, v \in E^u(x), n \geq 0.$$

En particular, Si Λ es una sola órbita, se llamará órbita hiperbólica. La noción de conjunto hiperbólico fue introducido por Smale (1967) basado en el trabajo de Anosov (1967). Este es un concepto fundamental para los sistemas dinámicos modernos.

Otra definición importante en el presente trabajo, que básicamente es un tipo de recurrencia más débil, es la llamada propiedad no errante. Un punto $x \in M$ es llamado *no errante* bajo f, si para cualquier vecindad V de x en M, existe $n \geq 1$ tal que $f^n(V) \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, para cualquier vecindad V de x en M, existe alguna órbita de x que se encuentra en V por lo menos dos veces. El conjunto de puntos no errantes de f es llamado el *conjunto no errante* de f y es denotado por $\Omega(f)$.

El conjunto no errante de $\Omega = \Omega(f)$ es cerrado e invariante, tomando esto, Smale propuso la siguiente condición en Ω : Un difeomorfismo $f : M \to M$ se dice que satisface el *Axioma A*, si Ω es hiperbólico y $\Omega = \overline{Per(f)}$, esto es, el conjunto de puntos periódicos de f es denso en Ω.

Una característica llamativa derivada de la definición Axioma A es el siguiente teorema dado por Smale (1967).

Teorema 0.3 (Teorema de Descomposición Espectral)**.** *Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo que satisface el Axioma A. Entonces el conjunto no errante de f se descompone de manera única, esto es,*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k,$$

donde los Ω_i son subconjuntos disjuntos, cerrados, invariantes y transitivos.

Los conjuntos Ω_i son denominados conjuntos básicos, donde la transitividad significa que existen órbitas densas en cada Ω_i, y en cada Ω_i todas las órbitas periódicas tienen variedades estables que poseen la misma dimensión. Por tanto, para el estudio de medidas invariantes por difeomorfismos que satisfacen el Axioma A, es suficiente estudiar medidas invariantes en los conjuntos básicos. A lo largo del presente trabajo, representaremos como (X, T) al sistema dinámico $(\Omega_i, f|_{\Omega_i})$, donde T es un automorfismo que preserva medida y supondremos que X es infinito.

Un concepto importante en este trabajo es la propiedad de especificación, la cual fue introducida por Rufus Bowen en [2] en el año 1969. Esta noción lleva a un resultado muy importante acerca de la abundancia de órbitas periódicas en un conjunto hiperbólico, la cual es llamada el Teorema de Especificación de Bowen. Este resultado es una herramienta de gran utilidad para estudiar tanto la estructura topológica de los conjuntos hiperbólicos como las propiedades estadísticas de las órbitas dentro de dichos conjuntos. Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico compacto X, el homeomorfismo T posee la propiedad de *especificación*, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero $M = M(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_k \in X$ y para cada j con $2 \leq j \leq k$ sea cualquier sucesión de enteros

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_k \leq b_k,$$

tal que $a_j - b_{j-1} \geq M$ y un entero p con $p \geq M + (b_k - a_1)$, existe un punto $x \in X$ con $T^p(x) = x$ tal que

$$d(T^i(x), T^i(x_j)) < \varepsilon$$

para $a_j \leq i \leq b_j$ y $1 \leq j \leq k$. Esta definición es dada a partir del siguiente Teorema

Teorema 0.4 (Teorema de Especificación de Bowen). *Supongamos que $T : X \to X$ es C-densa y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $M(\varepsilon)$ tal que, siempre que (γ, P) sea una especificación $M(\varepsilon)$-alejada y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d \geq M(\varepsilon) + L(\gamma)$, existe un punto periódico de periodo d, que pertenece a $U(\gamma, P, \varepsilon)$.*

Medidas Invariantes

Sea X un espacio métrico compacto. Una *medida* en X es una función no negativa μ definida en la σ-álgebra de X que satisface $\mu(\emptyset) = 0$ y

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

para toda familia numerable $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos medibles disjuntos dos a dos. Decimos que μ es una probabilidad si $\mu(X) = 1$. Una medida μ se dice *invariante* por la transformación T, si para todo conjunto medible $E \subset X$ tenemos

$$\mu(E) = \mu\left(T^{-1}(E)\right).$$

Se garantiza la existencia de medidas invariantes para una clase muy amplia de transformaciones, mediante el siguiente teorema

Teorema 0.5 (Existencia de medidas invariantes). *Sea $T : X \to X$ una transformación continua en un espacio métrico compacto. Entonces existe por lo menos una medida de probabilidad en X que es invariante por T.*

El punto principal para la demostración de este teorema, es considerar una cierta topología en el conjunto $\mathcal{M}$ de las medidas de probabilidad en X, que es llamada topología débil-*. Para definir la topología débil-* necesitamos lo siguiente: Sean $\mu \in \mathcal{M}$, un conjunto $\Phi = \{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ de funciones continuas limitadas $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ y un número $\varepsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, \Phi, \varepsilon) = \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1 : \left| \int \phi_i \, d\nu - \int \phi_i \, d\mu \right| < \varepsilon, \, \forall \, i \right\}.$$

Donde se puede observar que la intersección de dos conjuntos cualquiera de esta forma contiene algún conjunto de esta forma. Así podemos asegurar que la familia $\{V(\mu, \Phi, \varepsilon) \, : \, \Phi, \varepsilon\}$ se pude tomar como base de vecindades de cada $\mu \in \mathcal{M}$. La *topología débil-** es la topología definida por estas bases de vecindades. En otras palabras, los abiertos de la topología débil-* son los conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ tal que para todo elemento $\mu \in \mathcal{A}$ existe algún $V(\mu, \Phi, \varepsilon)$ contenido en $\mathcal{A}$. Denotaremos por $\mathcal{M}_T$ al espacio de medidas de probabilidad T-invariantes, provisto de la topología débil-*.

A continuación mencionaremos subconjuntos de medidas invariantes de $\mathcal{M}$ de las cuales se hace énfasis en este trabajo. Si x es un punto periódico de X con periodo mínimo k (esto es $f^k(x) = x$), entonces la medida μ_x que tiene masa $1/k$ en los puntos $x, T(x), \ldots, T^{k-1}(x)$, es

$$\mu_x = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{T^i(x)}$$

donde $\delta_{T^i(x)}$ es la medida de Dirac en el punto $T^i(x)$; la medida $\mu_x \in \mathcal{M}_T$ es llamada *medida soportada en una órbita periódica*. Al conjunto de todas estas medidas la denotamos como $\mathcal{M}_p$. Una medida $\mu \in \mathcal{M}_T$ es llamado *no atómica*, si para todo $x \in X$, tenemos $\mu(\{x\}) = 0$. Denotaremos por $\mathcal{M}_n$ al conjunto de medidas no atómicas y por $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ al conjunto de medidas que son positivas en todos los conjuntos abiertos en X. $\mathcal{M}_e$ denotará el conjunto de medidas ergódicas en X (ν es ergódico si sólo conjuntos medibles A con $T^{-1}(A) = A$ satisfacen $\nu(A) = 0$ o $\nu(A) = 1$). $\mathcal{M}_s$ es el conjunto de medidas fuertemente mezclantes (esto es, ν es fuertemente mezclante si para cualquier $A, B \subset X$, tenemos $\lim_{n\to\infty} \nu(A \cap T^{-n}(B)) = \nu(A)\nu(B)$). Denotamos por $\mathcal{M}_z$ al conjunto de medidas T-invariantes que poseen entropía métrica cero.

Propiedades Genéricas

Cuando nos preguntamos, como es que varias propiedades de sistemas dinámicos cambian con variaciones en el sistema, asumimos naturalmente alguna topología en el espacio de los sistemas en consideración. Lo más deseable es tener una propiedad que no cambia (por lo menos localmente) cuando el sistema es ligeramente perturbado.

Podemos pensar en conjuntos abiertos densos como conjuntos grandes, entonces diremos que una propiedad es *típica* o *genérica* si es válida para un conjunto de elementos, el cual es una intersección numerable de conjuntos abiertos densos, o sea, decir si esa propiedad se cumple sobre la *mayor parte* de los elementos. Formalmente nos referimos al conocido Teorema de Baire:

Teorema 0.6 (Teorema de Categoría de Baire)**.** *Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico completo. Toda intersección numerable de conjuntos abiertos densos es denso.*

Dado el conjunto $A \subset \mathcal{M}$, decimos que A es un conjunto G_δ, si A es una intersección contable de conjuntos abiertos. Diremos que un conjunto es *genérico* o *residual* si contiene un conjunto G_δ denso. Si una propiedad es genérica, decimos que un elemento genérico del espacio tiene esa propiedad.

A partir de todas estas consideraciones, daremos el detalle de la demostración del Teorema (0.2). Los trabajos y textos principales que dan base a este trabajo son los siguientes:

- Sigmund, K. (1970). *Generic properties of invariant measures for Axiom A - diffeomorphisms*. Inventiones mathematicae, 11(2), 99-109. Este artículo es el más importante para nuestro estudio. En este trabajo se hace una caracterización topológica del espacio de medidas invariantes para difeomorfismos Axioma A.

- Bowen, R. (1971). *Periodic points and measures for Axiom A-diffeomorphisms* . Trans. Amer. Math. Soc, 154. En este artículo es introducido una propiedad de los difeomorfismos Axioma A, la cual es la especificación. Aquí se encuentran el Teorema de Descomposición C-densa y el Teorema de Especificación de Bowen.

- Walters, P. (2000). *An introduction to ergodic theory* (Vol. 79). Springer Science & Business Media. Usamos este libro como guía para el estudio detallado del espacio de medidas de probabilidad y también del espacio de medidas de probabilidad T-invariantes. Además, este libro proporciona varias de las definiciones elementales sobre Entropía y Teoría Ergódica, las cuales son tratados en el capítulo 4.

- Oxtoby, J. C. (1963). *On two theorems of Parthasarathy and Kakutani concerning the shift transformation*. Ergodic Theory, 203, 215. En este trabajo, Oxtoby muestra que el subconjunto de medidas ergodicas, denotado por $\mathcal{M}_e$, es un conjunto G_δ, en el espacio de medidas T-invariantes $\mathcal{M}_T$.

III. Material y Métodos

Diseño metodológico

Tipo de investigación

La presente investigación es de tipo cuantitativo, explicativo, no experimental. Y la metodología usada es de tipo inductiva-deductiva, de tal forma de ser lo más exhaustivo posible en cada prueba.

Nivel de investigación

Descriptivo.

Diseño de investigación

No experimental.

Población y muestra

No consigna.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Diseño	Técnica	Instrumentos
No experimental.	Sistematización bibliográfica.	Artículos científicos, libros y tesis.

Técnicas de procesamiento y análisis de datos

Por la naturaleza del presente trabajo, no consigna.

Materiales

- Humanos: Tesista, asesor y jurados.
- Materiales y equipos:
  - Recursos: libros, papel bond, lapiceros, memoria usb, materiales de escritorio.
  - Equipos: laptop, tablet y celular.
- Locales: sala de estudios de la universidad y encuentros por videollamadas.

IV. Resultados y Discusión

CAPÍTULO 1

Elementos de Teoría de Medida e Integración, Análisis y Topología

En este capítulo, recordaremos resultado básicos de Teoría de medida e Integración, Topología y del Análisis Funcional, los cuales serán de mucha importancia a lo largo del presente trabajo. Tomaremos como referencia el libro de Folland [4] junto con el libro de Viana y Oliveira [14].

1.1. Teoría de Medida e Integración

Comenzaremos por introducir y estudiar las nociones de σ-álgebra de subconjuntos, el cual conducirá a los conceptos de espacio medible, medida, funciones medibles, medida de Lebesgue y mostraremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Un *álgebra* de conjuntos de X es una colección no vacía $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que cumplen las siguientes propiedades

(a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(b) si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(c) si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Observación. Por la propiedad asociativa, tenemos que, la unión e intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{A}$ aún pertenecen a $\mathcal{A}$. Además de eso, dados $A, B \in \mathcal{A}$, sabemos que $A \cap B = X \setminus [(X \setminus A) \cup (X \setminus B)] \in \mathcal{A}$ y $A \setminus B = A \cap (X \setminus B) \in \mathcal{A}$.

Definición 1.2. Sea X un conjunto no vacío. Una *σ-álgebra* de subconjuntos de X es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X que satisfacen

(a) $X \in \mathcal{B}$,

(b) si $A \in \mathcal{B}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{B}$,

(c) si $A_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

Observación. Dado $\mathcal{B}$ una σ-álgebra, $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones numerables. En efecto, dado $A_n \in \mathcal{B}$ para todo $n \geq 1$, entonces por (b) y (c) tenemos $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n) \in \mathcal{B}$. Luego, por (b) obtenemos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \right) \in \mathcal{B}.$$

Definición 1.3. El par $(X, \mathcal{B})$ es llamado *espacio medible* donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de X. Los elementos de $\mathcal{B}$ serán llamados *conjuntos medibles* del espacio.

Ejemplo 1.1. Sea cualquier conjunto X, existen dos σ-álgebras de subconjuntos de X que son canónicas, esto es

- Sea la familia de todos los subconjuntos de X denotada por 2^X, entonces $\mathcal{B} = 2^X$ es una σ-álgebra.
- $\mathcal{B} = \{\emptyset, X\}$ es una σ-álgebra.

Proposición 1.1. *Sea una familia no vacía de σ-álgebras* $\{\mathcal{B}_i\}_{i \in \Lambda}$, *donde* Λ *es un conjunto arbitrario. Entonces, la intersección* $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \Lambda} \mathcal{B}_i$ *también es una σ-álgebra.*

Demostración. La intersección $\mathcal{B} = \bigcap_{i \in \Lambda} \mathcal{B}_i$ satisface las tres condiciones de la definición (1.2). Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es una σ-álgebra. □

Así, para cualquier conjunto $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, por la proposición anterior, dada una familia arbitraria de σ-álgebra que contienen $\mathcal{F}$, la intersección de esta familia es también una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$. Obteniendo la siguiente definición.

Definición 1.4. La *σ-álgebra generada* por una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X, denotada por $\sigma(\mathcal{F})$, es la menor σ-álgebra que contiene a la familia $\mathcal{F}$, esto es, la intersección de todas las σ-álgebras que contienen $\mathcal{F}$.

Ahora, si tenemos un espacio topológico (X, τ) entonces tomando $\mathcal{F} = \tau$, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.5. La *σ-álgebra de Borel* de un espacio topológico (X, τ) es la σ-álgebra $\sigma(\tau)$ generada por la topología τ, o sea, la menor σ-álgebra que contiene todos los subconjuntos abiertos. Los conjuntos medibles son llamados *Borelianos*.

Observación. Los subconjuntos cerrados de X, esto es, los complementos de subconjuntos abiertos que pertenecen a τ, también pertenecen a la σ-álgebra de Borel.

Definición 1.6. Sea un espacio de medida $(X, \mathcal{B})$. Una medida en $(X, \mathcal{B})$ es una función $\mu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ tal que satisface

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) sea la familia $\{A_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos disjuntos dos a dos en X, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Definición 1.7. La terna $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es llamada *espacio de medida*. Cuando $\mu(X) < \infty$ decimos que μ es una medida *finita* y si $\mu(X) = 1$, decimos que μ es una probabilidad. En este último caso, la terna $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es denominada un *espacio de probabilidad*.

Ejemplo 1.2. Sea un conjunto X y $\mathcal{B} = 2^X$ la σ-álgebra de todos los subconjuntos de X. Dado cualquier punto $x \in X$ consideremos la función $\delta_x : 2^X \to [0, +\infty]$ definida por

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1\,, \text{si } x \in A \\ 0\,, \text{si } x \notin A \end{cases}$$

es una medida en $(X, 2^X)$ y es conocida como *medida de Dirac* en el punto $x \in X$.

Observación. El segundo ítem de la definición (1.6) es llamada σ-aditividad. Una función $\nu : \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ es finitamente aditiva, si $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n)$, para cualquier familia finita disjunta dos a dos $\{A_n\}_{n=1}^{N}$. Si μ es σ-aditiva, entonces μ es finitamente aditiva.

Las propiedades básicas de las medidas se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea X un espacio métrico y μ una medida finita de Borel,*

(a) *(**Monotonicidad**) Sean $A, B \subset X$ conjuntos de Borel tal que $A \subset B$, entonces*

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(b) *(**Sub-aditividad**) Sea $\{A_i\}_{i=0}^{\infty} \subset X$ una familia de conjuntos de Borel, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(c) *(**Continuidad desde abajo**) Sea la familia de conjuntos de Borel $\{A_i\}_{i=0}^{\infty} \subset X$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

(d) *(**Continuidad desde arriba**) Sea la familia de conjuntos de Borel $\{A_i\}_{i=0}^{\infty} \subset X$ tal que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ y $\mu(A_1) < \infty$, entonces*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

Demostración. Ver Teorema (1.8) de [4], pp. 25-26. □

El siguiente teorema nos permitirá construir medidas a partir de funciones σ-aditivas definidas en álgebras.

Teorema 1.3 (Teorema de Extensión)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de X y sea $\nu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ una función σ-aditiva con $\nu(X) < \infty$. Entonces existe una única medida μ definida en la σ-álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{A}$, que es una extensión de ν, es decir, $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Ver Teorema (1.11) de [4], pp. 29-30. □

Medida de Lebesgue

La medida de Lebesgue normaliza la noción de volumen de subconjuntos de espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ y la definiremos de la siguiente manera. Consideremos $X = [0,1]$ y el álgebra $\mathcal{A}$ definida como la familia de todos los subconjuntos de la forma $A = I_1 \cup \cdots \cup I_N$, donde $I_1, \ldots, I_N$ son intervalos disjuntos dos a dos. Sea la función $m_0 : \mathcal{A} \to [0,1]$ definida por

$$m_0(I_1 \cup \cdots \cup I_N) = |I_1| + \cdots + |I_N|.$$

Donde $|I_j|$ denota el tamaño de cada intervalo I_j. Tal función es σ-aditiva y $m_0(X) = 1$. Observamos que todo conjunto abierto de la recta puede ser escrito como la unión numerable de intervalos abiertos dos a dos disjuntos, entonces la σ-álgebra $\mathcal{B}$ generada por $\mathcal{A}$ coincide con a σ-álgebra de Borel de X. Luego, por el Teorema de Extensión (1.3), obtenemos una única medida de probabilidad m en $(X, \mathcal{B})$ que extiende m_0. La medida m es llamada *medida de Lebesgue* en $[0,1]$.

Ejemplo 1.3. Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de números racionales, como $\mathbb{Q}$ es numerable y un punto tiene medida nula, entonces $m(\mathbb{Q}) = 0$. Además, si fijamos una familia de números racionales $\{r_n\}_{n\geq 1}$ en $[0,1]$ y dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $U = \bigcup_n I_n$, donde

$$I_n = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \cap (0,1),$$

es abierto y denso en $[0,1]$ pues $\mathbb{Q} \cap (0,1) \subset U$ ($\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$). Además, $m(U) \leq \sum_n \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon$. El complemento de $K = [0,1] \setminus U$ es cerrado, raro (o sea, su clausura tiene interior vacío) y $m(K) \geq 1 - \varepsilon$.

Definición 1.8. Sea la medida μ, el *soporte* de la medida μ denotado por $supp(\mu)$, es el conjunto formado por los puntos $x \in X$ tal que $\mu(V) > 0$ para toda vecindad V de x.

Observación. El soporte de la medida μ es un conjunto cerrado. Además, $supp(\mu)$ es f-invariante en el siguiente sentido, $f(supp(\mu)) \subset supp(\mu)$.

Funciones Medibles

A continuación, daremos la definición de funciones medibles, las cuales tienen un papel importante en la Teoría de la Medida, equivalente al de las funciones continuas en la Topología. La idea de función medible es que la función preserva la familia de subconjuntos medibles, del mismo modo que la continuidad significa que la familia de subconjuntos abiertos es preservado por la función.

Definición 1.9. Sean los espacios medibles $(X, \mathcal{B})$ e $(Y, \mathcal{C})$, una función $f : X \to Y$ es llamada *medible*, si $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Observación. En general el conjunto de todos los $C \in \mathcal{C}$, tal que $f^{-1}(C) \in \mathcal{B}$ es un σ-álgebra.

Ejemplo 1.4. Sea un conjunto $A \subset X$, definimos la función *característica* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ de A, por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\,, \text{si } x \in A \\ 0\,, \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Esta función es medible si y solamente si A es un conjunto medible.

Luego tenemos las siguientes propiedades para funciones medibles.

Proposición 1.4. *Sean $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ funciones medibles y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces las siguientes funciones son medibles*

$$(af + bg)(x) = af(x) + bg(x) \;\; y \;\; (f.g)(x) = f(x).g(x).$$

Si $\{f_n : X \to [-\infty, +\infty]\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles, entonces las siguientes funciones también son medibles

$$S(x) = \sup\{f_n(x) : n \geq 1\} \;\; e \;\; I(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\},$$

$$f^*(x) = \limsup_n f_n(x) \;\; y \;\; f_*(x) = \liminf_n f_n(x).$$

En particular, si $f(x) = \lim_n f_n(x)$ existe, entonces f es medible.

Demostración. Ver Proposiciones (2.6) y (2.7) de [4], pp. 45. □

Las combinaciones lineales de funciones características forman una clase importante de funciones medibles. Así, tenemos.

Definición 1.10. Una función $s : X \to \mathbb{R}$ es llamada *función simple*, si existen constantes $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$ y conjuntos medibles disjuntos dos a dos $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{B}$ tal que

$$s = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{A_j}.$$

El siguiente resultado afirma que toda función medible es limite de alguna sucesión de funciones simples.

Proposición 1.5. *Sea $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una función medible, entonces existe una sucesión $(s_n)_{n\geq 1}$ de funciones simples tal que $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_n s_n(x) = f(x)$ para cada $x \in X$. Si f es limitada, la sucesión puede ser escogida tal que la convergencia sea uniforme. Si f no es negativa podemos tomar $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.*

Demostración. Ver Teorema (2.10) de [4], pp. 47. □

1.2. Integración en Espacios de Medida

En esta sección definiremos la integral de Lebesgue de una función en relación a una medida, que generaliza la noción de integral de Riemann. Consideremos el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definición 1.11. Sea $s = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \chi_{A_j}$ una función simple, entonces la *integral* de f en relación a la medida μ es dada por

$$\int s \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \mu(A_j).$$

Definición 1.12. Sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible no negativa, una sucesión no decreciente de funciones simples $s_1 \leq s_2 \leq \ldots$, tal que $\lim_n s_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, entonces la *integral de Lebesgue* de f es

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int s_n \, d\mu.$$

Para extender la definición de integral para cualquier función medible, observamos que, dada una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ siempre podemos escribir

$$f = f^+ - f^-,$$

donde

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \text{ y } f^-(x) = \text{mín}\{-f(x), 0\}.$$

Definición 1.13. Dado una función medible $f : X \to [-\infty, +\infty]$, entonces la *integral de Lebesgue* de f es dada por

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

donde por lo menos una de las integrales del lado derecho es finita.

Definición 1.14. La función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es *integrable*, si f es medible y su integral es un número real. Denotaremos el conjunto de funciones integrables por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ó $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Definición 1.15. Dada la función medible $f : X \to [-\infty, +\infty]$ y un conjunto medible A, definimos la *integral* de f sobre A por

$$\int_A f\, d\mu = \int f \chi_A\, d\mu,$$

donde χ_A es la función característica del conjunto A.

Ejemplo 1.5. Sean $x_1, \ldots, x_m \in X$ y $r_1, \ldots, r_m > 0$ tales que $r_1 + \cdots + r_m = 1$, consideremos la medida de probabilidad μ en 2^X, la cual esta definida por

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} r_i \delta_{x_i}.$$

En otras palabras, para todo subconjunto A de X, se tiene $\mu(A) = \sum_{x_i \in A} r_i$, entonces dada cualquier función $f : X \to [-\infty, +\infty]$, tenemos que,

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} r_i f(x_i).$$

Definición 1.16. Dado el espacio de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$, decimos que una propiedad es válida en *μ-casi todo punto*, si es verdadera en todo X, excepto en un conjunto de medida nula (esto es, un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(B) = 0$).

Ejemplo 1.6. Una sucesión de funciones $(f_n)_{n \geq 1}$ converge para una función f en μ-casi todo punto, si existe un conjunto medible N con $\mu(N) = 0$ tal que $\text{lím}_n f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X \setminus N$.

Ahora, mencionaremos los resultados más importantes para el estudio de convergencia de funciones sobre el signo de integral.

Teorema 1.6 (Convergencia Monótona)**.** *Sea $f_n : X \to [-\infty, +\infty]$, una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas y sea $f : X \to [-\infty, +\infty]$ una función definida por $f(x) = \lim_n f_n(x)$, entonces*

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f(x) \, d\mu.$$

Demostración. Ver Teorema (2.14) de [4], pp. 50. □

Teorema 1.7 (Lema de Fatou)**.** *Sea $f_n : X \to [0, +\infty]$, una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces la función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ definida por $f(x) = \liminf_n f_n(x)$ es integrable y cumple lo siguiente*

$$\int \liminf_n f_n(x) \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Demostración. Ver Lema (2.18) de [4], pp. 52. □

El siguiente resultado garantiza, que podemos tomar el límite sobre el signo de la integral siempre que la sucesión de funciones es acotada por alguna función integrable.

Teorema 1.8 (Convergencia Dominada)**.** *Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles y supongamos que existe una función integrable g tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$, para μ-casi todo punto $x \in X$. También supongamos que la sucesión $(f_n)_{n \geq 1}$ converge en μ-casi todo punto para una función $f : X \to \mathbb{R}$. Entonces f es integrable y*

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Demostración. Ver Teorema (2.24) de [4], pp. 54-55. □

A continuación, introduciremos el concepto de la derivada de Radon-Nicodym junto con el teorema de descomposición de Lebesgue, para ello comenzamos definiendo lo siguiente

Definición 1.17. Sean μ y ν dos medidas en un espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Decimos que ν es *absolutamente continua* en relación a μ, denotado por $\nu \ll \mu$, si todo conjunto medible B tal que $\mu(B) = 0$ también satisface $\nu(B) = 0$.

Teorema 1.9 (Radón-Nikodym)**.** *Se μ y ν son medidas finitas tales que $\nu \ll \mu$, entonces existe una función medible $\rho : X \to [0, +\infty]$ tal que $\nu = \rho\mu$, o sea, tal que, para toda función medible limitada $\phi : X \to \mathbb{R}$ tenemos*

$$\int \phi \, d\nu = \int \phi\rho \, d\mu.$$

En particular, $\nu(B) = \int_B \rho \, d\mu$ para todo conjunto medible $B \subset X$. Además, ρ es esencialmente única, esto significa, que dos funciones que satisfacen la ecuación anterior son iguales en μ-casi todo punto.

Demostración. Ver Teorema (3.8) del capítulo 3 de [4], pp. 90. □

Definición 1.18. La función medible ρ es llamada *densidad* o *derivada de Radón-Nikodym* de ν relativo a μ y escribimos

$$\rho = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

Definición 1.19. Sean μ y ν dos medidas en un espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Decimos que μ y ν son *mutuamente singulares*, denotado por $\mu \perp \nu$, si existen conjuntos medibles disjuntos A y B tales que $A \cup B = X$ con $\mu(A) = 0$ y $\nu(B) = 0$.

Teorema 1.10 (Teorema de Descomposición de Lebesgue)**.** *Sean μ y ν dos medidas finitas en $(X, \mathcal{B})$. Entonces existe $p \in [0, 1]$ y medidas finitas μ_1, μ_2 en $(X, \mathcal{B})$ tal que $\mu = p\mu_1 + (1 - p)\mu_2$, $\mu_1 \ll \nu$ y $\mu_2 \perp \nu$. El número p y las medidas μ_1 y μ_2 están determinadas de forma única.*

Demostración. Ver Teorema (3.8) y Proposición (3.9) del Capítulo 3 en [4], pp. 90-91. □

1.3. Topología General

Comenzaremos enunciando definiciones y resultados importantes de la Topología General. En esta sección usaremos como referencia los libros de Elon Lima [5], Willard [17] y Folland [4]. Empezaremos considerando conjuntos provistos de una distancia, a los que se les denomina espacios métricos. Luego, estudiaremos espacios topológicos y dentro de estos espacios definiremos los conjuntos de primera categoría y conjuntos residuales.

Espacios Métricos

Definición 1.20. Una *métrica* en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, \infty)$, que asocia a cada par de puntos $x, y \in X$ un número real $d(x, y)$, llamada *distancia* del punto x al punto y, tal que:

(a) $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$;

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Un *espacio métrico* es un par (X, d) formado por un conjunto X y una métrica d. Siempre que no exista riesgo de confusión escribiremos únicamente X para denotar al espacio métrico, dejando sobreentendida la métrica d.

Ejemplo 1.7. Sea $X = \mathbb{R}$, definimos la métrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$ por $d(x, y) = |x - y|$. Esta es la métrica usual o euclidiana, llamada valor absoluto. El espacio métrico $\mathbb{R}$ se denomina recta real.

Definición 1.21. Sean X un espacio métrico, un número real $r > 0$ y un punto $a \in X$, tenemos:

(a) La *bola abierta* de centro a y radio r es el conjunto, denotado por $B_r(a)$ ó $B(a, r)$, de todos los puntos de X cuya distancia al punto a es menor a r, esto es,

$$B_r(a) = \{x \in X : d(x, a) < r\}.$$

(b) La *bola cerrada* de centro a y radio r es el conjunto, denotado por $\overline{B}_r(a)$ ó $\overline{B}(a, r)$, de todos los puntos de X cuya distancia al punto a es menor o igual a r, esto es,

$$\overline{B}_r(a) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}.$$

(c) La *esfera* de centro a y radio r es el conjunto, denotado por $S_r(a)$, de todos los puntos de X cuya distancia al punto a es igual a r, esto es,

$$S_r(a) = \{x \in X : d(x, a) = r\}.$$

Definición 1.22. Sea el espacio métrico X, una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a un punto x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N(\varepsilon)$, tenemos $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. La convergencia será denotada por $x_n \to x_0$ ó $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Definición 1.23. Sea el espacio métrico X, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X se denomina *sucesión de Cauchy*, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > N$, implica $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Observación. Toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. De hecho, sea la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a x, esto es $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$, implica $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomemos $m, n > N$ tenemos

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Luego, la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Definición 1.24. Un espacio métrico X es llamado *completo*, si toda sucesión de Cauchy en X es convergente, en algún elemento del espacio.

Ejemplo 1.8. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ es completo. En particular el conjunto de los número reales, con la métrica usual $(x, y) = |x - y|$, es un espacio métrico completo.

Ahora, pasamos a exponer la definición de espacios métricos compactos

Definición 1.25. Un espacio métrico X se llama *totalmente limitado*, si para todo $\varepsilon > 0$, obtenemos, una descomposición $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, como una unión de un número finito de subconjuntos, cada uno de los cuales tiene diámetro menor que ε (donde $diam(A_i) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A_i\}$ para cada i).

Observación. Un espacio métrico X es totalmente limitado, si y solo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un número finito de bolas abiertas de radio ε que cubren X. De hecho, todo conjunto de diámetro menor que ε está contenido en una bola de radio ε (y con centro en cualquier punto del conjunto).

Proposición 1.11. *Sea el espacio métrico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *X es compacto;*

(b) *toda sucesión en X posee una subsucesión convergente;*

(c) *X es completo y totalmente limitado.*

Demostración. Ver Proposición (7) del Capítulo 8 en [6], pp. 233-234. □

Proposición 1.12. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Ver Corolario (2) del Capítulo 8 en [6], pp. 222. □

Espacios Topológicos

Definición 1.26. Sea X un conjunto no vacío. Una *topología* en X es una familia τ de subconjuntos de X tal que

(a) $\emptyset, X \in \tau;$

(b) Si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \tau$, entonces $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha \in \tau;$

(c) Si $U_1, \ldots, U_n \in \tau$, entonces $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \tau.$

Si τ es una topología, entonces el par (X, τ) es llamado un *espacio topológico*. Nos referiremos al espacio topológico X cuando no exista ninguna confusión acerca de τ. Los elementos de τ son llamados *conjuntos abiertos*, y sus complementos se denominan *conjuntos cerrados*.

Ejemplo 1.9. Dado un conjunto X y sea la topología $\tau = \{\emptyset, X\}$, el par (X, τ) es llamado espacio topológico trivial. Por otro lado, dada la topología $\tau = 2^X$ (conjunto de todos los subconjuntos de X), este par (X, τ) es denominado espacio topológico discreto.

Definición 1.27. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, el *interior* de A en X es el conjunto

$$A^\circ = Int(A) = \bigcup \{G \subset X : G \text{ es abierto y } G \subset A\}.$$

Sea $B \subset X$, la *clausura* de B en X es el conjunto

$$\bar{B} = Cl(B) = \bigcap \{K \subset X : K \text{ es cerrado y } K \subset B\}.$$

Observamos que, A° es el conjunto abierto más grande contenido en A y $\bar{B}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene B. Tenemos $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ y $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$. Además, la diferencia $\overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap \overline{A^c}$ es llamado la *frontera* de A y es denotado por ∂A.

Definición 1.28. Sea X un espacio topológico y $A \subset X$, si $\overline{A} = X$, A es llamado conjunto *denso* en X. Por otro lado, si tenemos $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, A es llamado conjunto *denso en ninguna parte* (o conjunto raro).

Definición 1.29. Sea $x \in X$, una *vecindad* de x es un conjunto $A \subset X$ tal que $x \in A^\circ$. Un punto $x \in X$ es llamado *punto de acumulación* de A si $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, para cualquier vecindad U de x.

Definición 1.30. Sea X un espacio topológico, un conjunto $E \subset X$ es de *primera categoría* (o *magro*) de acuerdo a Baire, si E es una unión contable de conjuntos densos en ninguna parte. E es un conjunto de *segunda categoría* (no magro), si E no es la unión contable de conjuntos densos en ninguna parte.

A continuación, será exhibido el Teorema de Categoría de Baire en su versión para espacios métricos completos

Teorema 1.13 (Teorema de Baire). *Sea X un espacio métrico completo, entonces:*

(a) *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de X, entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es denso en X.*

(b) *X no es una unión contable de conjuntos densos en ninguna parte.*

Demostración. Ver Teorema (5.9) del Capítulo 5 en [4], pp. 161. □

Definición 1.31. Sea X un espacio métrico y $B \subset X$. El subconjunto B se denomina *residual* ó *genérica* (a veces llamado típica), si el complemento $X \setminus B$ es de primera categoría, es decir, el conjunto B es la intersección contable de conjuntos densos abiertos.

A partir del Teorema (1.13), definimos lo siguiente

Definición 1.32. Sea X un espacio métrico completo. X se denomina *espacio de Baire*, si toda sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos y densos en X, es tal que la intersección contable, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, es densa en X.

Observación. Todo espacio métrico compacto es un espacio de Baire.

Definición 1.33. Sea X un espacio métrico y $A \subset X$ no vacío. A es llamado un *conjunto* G_δ en X, si existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos abiertos en X tal que $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Ejemplo 1.10. El conjunto de números irracionales, es decir $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$. Podemos escribir $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ como intersección contable de conjuntos abiertos de la forma $\{r\}^c$, es decir, el complemento del número racional r, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

El siguiente resultado establece una caracterización muy importante de los conjuntos residuales.

Proposición 1.14. *Sean X un espacio de Baire y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. A es residual en X, si y sólo si, existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos y densos en X, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset A$ y es un conjunto denso en X (esto es, A contiene un conjunto G_δ denso en X).*

Demostración. De hecho,
($\Rightarrow$) Supongamos que A es un conjunto residual, entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos densos en ninguna parte tal que $A_n \subset X$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $X \setminus A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Sabemos, que si A_n es denso en ninguna parte, luego $\overline{A}_n$ es denso en ninguna parte para cada $n \in \mathbb{N}$. Por definición, tenemos, $Int(\overline{A}_n) = \emptyset$, lo que es equivalente a decir, que $\overline{(X \setminus \overline{A}_n)} = X$, en otras palabras, el conjunto $B_n = X \setminus \overline{A}_n$ es abierto y denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus \overline{A}_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus A_n) = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A.$$

Como B_n es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces por el Teorema de Baire (1.13), la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es densa. Así, A contiene un conjunto G_δ denso en X.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe una sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos y densos en X, tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset A$, por el Teorema de Baire, la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ es densa en X. Notemos

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset A \Rightarrow X \setminus A \subset X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus B_n). \tag{1.1}$$

Desde que B_n es abierto para todo $n \in \mathbb{N}$, observamos

$$B_n = X \setminus (X \setminus B_n) = X \setminus (\overline{X \setminus B_n}).$$

Luego, $X \setminus (\overline{X \setminus B_n})$ es denso en X, o equivalentemente, $Int(\overline{X \setminus B_n}) = \emptyset$, o sea, $X \setminus B_n$ es denso en ninguna parte para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus B_n)$ es un conjunto de primera categoría. Por tanto, por la expresión (1.1), $X \setminus A$ es un conjunto de primera categoría. Así, A es un conjunto residual en X. □

Observación. En todo espacio de Baire, la intersección contable de conjuntos residuales es un conjunto residual. En efecto, se sigue del hecho que la unión contable de conjuntos de primera categoría es un conjunto de primera categoría.

CAPÍTULO 2

Sistemas Dinámicos y Entropía

Este capítulo tiene por objeto enunciar los conceptos y resultados principales de los sistemas dinámicos que serán necesarios para el desarrollo del presente trabajo. La demostración de la mayoría de estos resultados será omitida por no ser parte de nuestro objetivo. Este capítulo se basa en el libro de Brin y Stuck [3], el artículo de Bowen [2], y el libro de Walters [15].

2.1. Nociones Básicas de Dinámica

A lo largo de esta sección el par (X, d) denota un espacio métrico, salvo se indique lo contrario.

Definición 2.1. Un *Sistema Dinámico* es un par (X, T), donde $T : X \to X$ es una aplicación continua y esta función T es conocida como *dinámica* del espacio X.

Los iterados de dicha aplicación pueden ser definidas por recurrencia de la siguiente forma: $T^0 = Id_X$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ como la composición de n-veces la aplicación con ella misma, esto es, $T^n = T \circ \cdots \circ T$, de esta forma tenemos $T^{m+n} = T^m \circ T^n$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Así, definimos

Definición 2.2. La *semi órbita positiva* de un punto $x \in X$ está definida como $Orb_T^+(x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$. Si la aplicación es invertible, definimos la *semi órbita negativa* de $x \in X$ como $Orb_T^-(x) = \{T^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$, y la *órbita* de x sobre T es

$$Orb_T(x) = Orb_T^+(x) \cup Orb_T^-(x).$$

Si T es invertible, definimos recursivamente la n-ésima iterada negativa de T por $T^{-n} = T^{-1} \circ \cdots \circ T^{-1}$. Luego, tenemos, $T^{m-n} = T^m \circ T^{-n}$.

Definición 2.3. Sea la aplicación $T : X \to X$, el punto $x \in X$ es llamado *punto fijo* para T, si $T(x) = x$. El punto $x \in X$ se denomina *punto periódico* para T, si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) = x$. La órbita de un punto periódico es llamada *órbita periódica*.

Observación. En la definición de punto periódico, el número $n \in \mathbb{N}$ es el menor natural tal que $T^n(x) = x$, o sea, si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, entonces $T^k(x) \neq x$. Denotamos por $Per(T)$ al conjunto de puntos periódicos de T.

Definición 2.4. Sea la aplicación $T : X \to X$ y U un subconjunto de X, decimos que U es *invariante para el futuro* respecto a T, si $T(U) = U$. El subconjunto U será llamado *invariante para el pasado* respecto a T si $T^{-1}(U) = U$. Si T es invertible decimos que U es invariante respecto a T (o T-invariante).

Definición 2.5. Sea la aplicación $T : X \to X$, el punto $x \in X$ es llamado *punto no errante*, si para cada vecindad U de x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(U) \cap U \neq \emptyset$. El conjunto de puntos no errantes de T se denota por $\Omega(T)$ y es llamado *conjunto no errante*.

Proposición 2.1. *Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo (esto es, una aplicación continua con inversa continua). Entonces $\Omega(T)$ es cerrado y T-invariante.*

Demostración. En efecto, sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Omega(T)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in M$. Luego, dado cualquier vecindad U de x existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Desde que $x_n \in U$, entonces existen bolas abiertas $V_n \subset U$ tal que $x_n \in V_n$ para cada $n \geq N$. Así, dado $n \geq N$, como $x_n \in \Omega(T)$, tenemos que, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^r(V_n) \cap V_n \neq \emptyset,$$

esto implica que $T^r(U) \cap U \neq \emptyset$. Por tanto, $x \in \Omega(T)$. Por otro lado dado $y \in T(\Omega(T))$, entonces existe $x \in \Omega(T)$ tal que $y = T(x)$. Sea U una vecindad de y, desde que T es continua, tenemos que, $T^{-1}(V)$ es una vecindad de x, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(T^{-1}(V)) \cap T^{-1}(V) \neq \emptyset$, esto implica

$$T^n(U) \cap U = T(T^n(T^{-1}(V)) \cap T^{-1}(V)) \neq \emptyset,$$

esto es, $y \in \Omega(T)$. Así, $T(\Omega(T)) \subset \Omega(T)$. Recíprocamente, desde que T es un homeomorfismo, tenemos, $T^{-1}(\Omega(T)) \subset \Omega(T)$, esto implica

$$\Omega(T) \subset T^{-1}(\Omega(T)) \subset T(\Omega).$$

Por tanto, $T^{-1}(\Omega(T)) = \Omega(T)$. $\square$

A continuación, definimos los conjuntos estable e inestable del punto $x \in X$, los cuales nos permitirá comprender la dinámica de las orbitas futuras y pasadas de aquellos puntos, que en cierta forma, acompañan la orbita de x.

Definición 2.6. Consideremos el espacio métrico compacto (X, d) y $T : X \to X$ un homeomorfismo. Dado cualquier punto $x \in X$, no necesariamente periódico, la *variedad estable e inestable* de x con respecto a T son los conjuntos

$$W^s(x,T) = W^s(x) = \left\{ y \in X : \lim_{n\to\infty} d(T^n(x), T^n(y)) = 0 \right\},$$
$$W^u(x,T) = W^u(x) = \left\{ y \in X : \lim_{n\to\infty} d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) = 0 \right\}.$$

Observación. Los conjuntos estable e inestable en cualquier punto del espacio, resultan ser conjuntos invariantes en el siguiente sentido $T(W^s(x,T)) = W^s(T(x),T)$ para cada $x \in X$. Análogamente para el conjunto inestable.

Consideremos una variedad compacta y sin frontera M y $f : M \to M$ un difeomorfismo (esto es, f es un homeomorfismo tal que f y f^{-1} son de clase C^1). Si tenemos un punto fijo hiperbólico (o sea, dado un punto fijo $p \in M$, el módulo de los autovalores de la transformación Df_p son distintos de 1), entonces podemos encontrar una descomposición de T_pM en dos subespacios complementarios (uno generado por los autovalores menores que 1 y el otro generado por los autovalores mayores a 1), que son invariantes por Df_p. Además, existe una contracción y una expansión en esos espacios, tal como observamos en la siguiente definición

Definición 2.7. Un conjunto invariante $\Lambda \subset M$ es llamado *hiperbólico*, si para cada $x \in \Lambda$, el espacio tangente T_xM admite una descomposición en una suma directa

$$T_xM = E^s(x) \oplus E^u(x),$$

invariante (como familia) en el siguiente sentido

$$Df(E^s(x)) = E^s(f(x))\,,\, Df(E^u(x)) = E^u(f(x)),$$

tal que existen constantes $C \geq 1$ y $0 < \lambda < 0$, que satisfacen lo siguiente

$$|Df^n(x)(v)| \leq C\lambda^n |v|\,,\, \forall\, x \in \Lambda\,, v \in E^s(x)\,, n \geq 0,$$

$$|Df^{-n}(x)(v)| \leq C\lambda^n |v|\,,\, \forall\, x \in \Lambda\,, v \in E^u(x)\,, n \geq 0.$$

Ejemplo 2.1. La Herradura de Smale es un conjunto hiperbólico, este ejemplo puede ser encontrado en el Libro de Michael Brin [3], página 15.

Observación. La noción de conjunto hiperbólico fue introducido por Smale en 1967, basado en los trabajos de Anosov (1967), este es un concepto fundamental de los sistemas dinámicos modernos.

Definición 2.8. El difeomorfismo $f : M \to M$ es un difeomorfismo *Axioma A*, si $\Omega(f)$ es hiperbólico y $\Omega(f) = \overline{Per(f)}$.

Ejemplo 2.2. El mapa de Herradura de Smale, es un difeomorfismo Axioma A, con infinitos puntos periódicos. Este ejemplo es muy conocido y puede ser encontrado en el libro de Michael Brin [3].

Una característica importante, derivada de la definición anterior, será un tipo de *finitud* que será descrita en el siguiente teorema demostrado por Steven Smale en [13].

Teorema 2.2 (Descomposición Espectral de Difeomorfismos)**.** *Sea el difeomorfismo $f : M \to M$ que satisface el Axioma A. Entonces existe una única descomposición de $\Omega(f)$ en una unión finita de subconjuntos (o piezas), disjuntos, cerrados y f-invariantes en M, esto es,*

$$\Omega(f) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$$

tal que $f|_{\Omega_i}$ es topológicamente transitivo para cada $i = 1, \ldots, k$. Cada Ω_i es un conjunto básico de f.

Demostración. Ver Teorema (5.2) en [16] pp. 141-143. □

Observación. A partir de este teorema, observamos que toda medida f-invariante puede ser escrita como una combinación de medidas soportadas en conjuntos básicos. Esto nos permite analizar el difeomorfismo f a partir de las restricciones $f|_{\Omega_i}$, para cada $i = 1, \ldots, k$.

Del teorema anterior podemos resaltar el siguiente concepto

Definición 2.9. Sea $f : M \to M$ un difeomorfismo. Diremos que $\Omega \subset M$ es una *pieza básica* para f, si Ω es compacto, f-invariante y la restricción $f|_{\Omega}$ es transitivo (esto es, existe $x \in M$ tal que $\overline{Orb_f^+(x)} = M$).

2.2. Propiedad de Especificación

El concepto de especificación fue introducido por Bowen en [2]. En este artículo, se estudia la distribución de puntos periódicos para difeomorfismos Axioma A y se demuestra que para homeomorfismos cuyo conjunto inestable de cualquier punto periódico es denso en el espacio, es posible aproximar tramos finitos de órbita por una órbita periódica, a la cual él llamo especificación.

Definición 2.10. La transformación $T : X \to X$ es llamada *C-denso*, si el conjunto $W^u(p)$ es denso en X para cualquier punto periódico $p \in X$.

Definición 2.11. Los difeomorfismos Axioma A, son transformaciones C-densas, además cumplen con la propiedad de especificación que veremos a continuación.

A partir del Teorema de Descomposición Espectral (2.2), Bowen obtuvo el siguiente resultado

Teorema 2.3 (Teorema de Descomposición C-densa)**.** *Sea $T : X \to X$ un difeomorfismo Axioma A sobre la variedad compacta X. Entonces el conjunto básico Ω_i para T puede ser escrito como $\Omega_i = \Omega_{i_1} \cup \cdots \cup \Omega_{i_m}$, donde los conjuntos Ω_{i_j} son conjuntos disjuntos cerrados en X para cada $j = 1, \ldots, m$, tal que $T(\Omega_{i_k}) = \Omega_{i_{k+1}}$, $(\Omega_{i_{m+1}} = \Omega_{i_1})$ y $T_i^m : \Omega_{i_j} \to \Omega_{i_j}$ es C-denso para cada $j = 1, \ldots, m$.*

Demostración. Ver figura (2.1), la demostración está en [2] Teorema (2.7). □

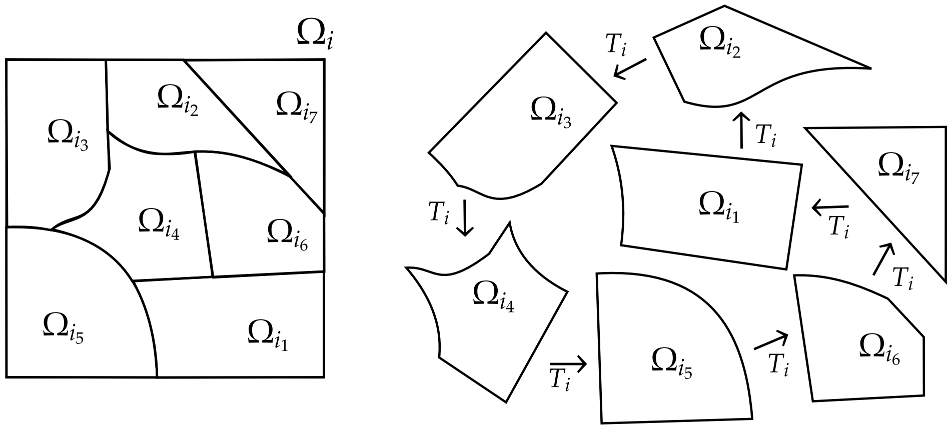

Figura 2.1: Descomposición C-densa de un conjunto básico.

Así, podemos dar el concepto de especificación dado por Bowen en [2], junto con el resultado que obtuvo para transformaciones C-densas.

Definición 2.12. Una *especificación* es un par (γ, P), donde $\gamma = \{I_1, \ldots, I_m\}$ (I_k es un conjunto de números naturales consecutivos llamado *cadena*) y la aplicación $P : \bigcup_{j=1}^{m} I_j \to X$ tal que $T^{t_2 - t_1}(P(t_1)) = P(t_2)$, para $t_1, t_2 \in I_j$.

Dada una especificación (γ, P) y dado $\delta > 0$ definimos el conjunto

$$U(\gamma, \delta, P) = \left\{ x \in X : d(T^t(x), P(t)) < \delta \,, \forall\, t \in \bigcup_{j=1}^{m} I_j \right\},$$

denotaremos por $I_j = [a_j, b_j]$, consideramos $b_{j-1} < a_j$ para cada $j = 2, \ldots, m$, decimos que (γ, P) está G-alejada, si $G \leq \text{mín}\{|a_j - b_{j-1}| \,:\, 2 \leq j \leq n\}$ y la longitud de γ está definida por $L(\gamma) = b_n - a_1$. Denotaremos por $Per_k U(\gamma, P, \delta)$ al conjunto de puntos periódicos de periodo k que pertenecen a $U(\gamma, P, \delta)$.

Observación. Podemos apreciar que $P(I_j)$ es parte de alguna órbita T en X (no necesariamente la misma para diferentes j).

A partir de estas definiciones Bowen demostró el siguiente resultado.

Teorema 2.4 (Teorema de Especificación de Bowen)**.** *Supongamos que $T : X \to X$ es C-densa y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un $M(\varepsilon)$ tal que, siempre que (γ, P) sea una especificación $M(\varepsilon)$-alejada y $k \in \mathbb{Z}$ tal que $d \geq M(\varepsilon) + L(\gamma)$, existe un punto periódico de periodo d pertenece a $U(\gamma, P, \varepsilon)$.*

Demostración. La prueba está en [2]. $\square$

La propiedad de especificación, definida anteriormente, es en pocas palabras una relación (asociación) entre intervalos de números naturales y tramos de órbitas de T. El conjunto $U(\gamma, P, \varepsilon)$ representa el conjunto de los puntos cuyas órbitas están ε-próximos de las órbitas asociadas por la especificación. El teorema de especificación garantiza que si T es C-denso, entonces esta aproximación es realizada por puntos periódicos.

Desde que $T : X \to X$ es continua en un espacio métrico compacto (X, d), tenemos que T satisface la propiedad de especificación, si para cualquier tramo de la órbita ocurre el fenómeno descrito anteriormente, esto es, existe un punto periódico tal que su órbita se aproxima a las órbitas dadas inicialmente. De manera más precisa tenemos la siguiente formulación, realizada por Ruelle y Bowen, como se muestra en [12].

Definición 2.13. Sea $T : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico compacto. El homeomorfismo T posee la propiedad de *especificación*, si para todo $\varepsilon > 0$, existe un entero $M = M(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquier sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_k \in X$ y para cada j con $2 \leq j \leq k$ sea cualquier sucesión de enteros

$$a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_k \leq b_k,$$

tal que $a_j - b_{j-1} \geq M$ y un entero p con $p \geq M + (b_k - a_1)$, existe un punto $x \in X$ con $T^p(x) = x$ tal que

$$d(T^i(x), T^i(x_j)) < \varepsilon,$$

para $a_j \leq i \leq b_j$ y $1 \leq j \leq k$.

Ejemplo 2.3. Sea $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de sucesiones de elementos en $\{0, 1\}$. El *shift* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ descarta el primer elemento de una sucesión y desplaza los elementos restantes de un lugar a otro, o sea

$$\sigma((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Observemos que esta aplicación posee la propiedad de especificación. Definimos la distancia $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to [0, \infty)$ en Σ_2 por

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta(x_i, y_i)}{2^i},$$

donde $\delta(k,l) = 1$ si $k \neq l$ y $\delta(k,l) = 0$ si $k = l$. Decimos que dos puntos $x, y \in \Sigma_2$ están ε-próximos esto es $d(x,y) < \varepsilon$, si y solamente si, existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para cada $0 \leq i \leq N(\varepsilon)$. Sean $y \in \sum_2$, los enteros a, b con $a \leq b$ y $\varepsilon > 0$. Denotemos por $M(\varepsilon) \geq a + N(\varepsilon)$, donde $N(\varepsilon)$ fue definido anteriormente. Consideremos $p \geq M(\varepsilon) + (b - a)$, encontramos un punto $x \in \Sigma_2$ que satisface la definición (2.13). Para $i = 1, \ldots, a-1$ sea cada x_i arbitrario. Luego, consideramos $x_i = y_i$ para $i = a, \ldots, b, b + N(\varepsilon)$ y también para $i = b + N(\varepsilon) + 1, \ldots, p$ consideremos x_i arbitrario. Ahora, denotemos por $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} x &= (\tilde{x}, \tilde{x}, \ldots, \tilde{x}) \\ &= (x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_1, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

Observamos que x tiene periodo p, además, se cumple con la propiedad

$$d(\sigma^i(x), \sigma^i(y)) < \varepsilon, \text{ con } a \leq i \leq b.$$

Observación. Análogamente, obtenemos, que el shift unilateral y el shift bilateral de k símbolos, tienen la propiedad de especificación para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

2.3. Entropía de una Partición

En 1958, Kolmogorov introdujo el concepto de entropía en la teoría ergódica y ha sido uno de los invariantes más importantes hasta ahora. La noción de entropía fue mejorada ligeramente por Sinaí en 1959.

Definición 2.14. Una *partición* $\mathcal{P}$ del espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ es una familia finita (o contable) de elementos de $\mathcal{B}$ con medida no nula, tales que

(a) $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ para todo $i \neq j$ donde $P_i, P_j \in \mathcal{P}$.

(b) $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = X$, o equivalentemente, $\mu\left(\left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P\right) \setminus X\right) = 0$.

Observación. Por la definición anterior, toda partición está formada por conjuntos medibles, pues los elementos de la partición provienen del σ-álgebra $\mathcal{B}$.

Definición 2.15. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ particiones de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, decimos que $\mathcal{Q}$ es un *refinamiento* (o es más fina) de $\mathcal{P}$, lo que denotaremos por $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$, si todo elemento de $\mathcal{Q}$ está contenido en algún elemento de $\mathcal{P}$. Esto implica que todo elemento de $\mathcal{P}$ es unión de elementos de $\mathcal{Q}$.

Sea $T : X \to X$ una aplicación que preserva medida. Si $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ es una partición, entonces $T^{-m}\mathcal{P}$ denota la partición $\{T^{-m}(P_1), \dots, T^{-m}(P_n)\}$.

Definición 2.16. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ particiones del espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$. La *suma* de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ es la partición

$$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathcal{P} \text{ y } Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Más generalmente, dada cualquier familia contable de particiones $\{\mathcal{P}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, definimos

$$\bigvee_n \mathcal{P}_n = \left\{ \bigcap_n P_n : P_n \in \mathcal{P}_n \text{ para todo } n \right\}.$$

Definición 2.17. Sean una aplicación medible $T : X \to X$ y una partición $\mathcal{P}$, definimos la *partición suma n-iterada de $\mathcal{P}$ relativa a T* como

$$\mathcal{P}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P} = \mathcal{P} \vee \cdots \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}.$$

Observación. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones finitas en $(X, \mathcal{B}, \mu)$, dado $n \geq 0$ y T una aplicación que preserva medida, entonces T^{-n} preserva operaciones teóricas ya definidas, esto es,

(a) $T^{-n}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = T^{-n}\mathcal{P} \vee T^{-n}\mathcal{Q}$;

(b) si $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$, entonces $T^{-n}\mathcal{P} \leq T^{-n}\mathcal{Q}$.

Definición 2.18. Sea $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ una partición finita del espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$. La *entropía de la partición $\mathcal{P}$* es el número

$$H_\mu(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{k} \mu(P_i) \log \mu(P_i).$$

Observación. Aquí denotamos por log al logaritmo natural y $0 \log 0 = 0$. Consideramos la partición finita $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, como los posibles resultados de un experimento aleatorio, donde la probabilidad de que obtengamos el resultado P_i sea $\mu(P_i)$. Este experimento se asocia al número $H(\mathcal{P})$ que describe la cantidad de incertidumbre sobre el resultado del experimento, en otras palabras, $H(\mathcal{P})$ medirá la incertidumbre removida (o las informaciones obtenidas) después de realizar el experimento representado por $\mathcal{P}$.

Proposición 2.5. *Sea $\mathcal{P}$ una partición finita de $(X, \mathcal{B}, \mu)$, tenemos*

(a) *Si $\mathcal{P} = \{\emptyset, X\}$, entonces $H_\mu(\mathcal{P}) = 0$.*

(b) *Si $\mathcal{P} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ con $\mu(A_i) = \frac{1}{k}$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces $H_\mu(\mathcal{P}) = \log k$.*

(c) *Si $T : X \to X$ es una aplicación que preserva medida, entonces $H_\mu(T^{-1}\mathcal{P}) = H_\mu(\mathcal{P})$.*

Demostración. Sigue fácilmente de la definición de entropía de una partición (2.18). □

Teorema 2.6. *Sea la función $\phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(0) = 0$ y $\phi(x) = -x \log x$, si $x \neq 0$, es estrictamente convexa, esto es,*

$$\phi(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\phi(x) + \beta\phi(y)$$

si $x, y \in [0, \infty)$, $\alpha, \beta \geq 0$ y $\alpha + \beta = 1$. Obtenemos la igualdad cuando $x = y$ ó $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$. Por inducción, tenemos,

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi(x_i)$$

si $x_i \in [0, \infty)$, $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$. Obtenemos la igualdad cuando $x_i = x_j$ para cualquier $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ tales que α_i, α_j son no nulos.

Demostración. Ver Teorema (4.2) del Capítulo 4 en [15], pp. 79. □

Corolário. *Si $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ es una partición, entonces $H_\mu(\mathcal{P}) \leq \log k$. Además, $H_\mu(\mathcal{P}) = \log k$ si, y sólo si, $\mu(P_i) = \frac{1}{k}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.*

Demostración. Tomemos $\alpha_i = \frac{1}{k}$ y $x_i = \mu(P_i)$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, de la Definición (2.18) y el Teorema anterior tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} H_\mu(\mathcal{P}) &= -\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu(P_i) \log \mu(P_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{k}\right) (\mu(P_i) \log \mu(P_i)) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi(x_i) \leq -\phi\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i\right) \\
&= -\phi\left(\alpha_i \sum_{i=1}^{k} x_i\right) = -\phi\left(\frac{1}{k}\right) \\
&= -\frac{1}{k} \log\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \log k.
\end{aligned}$$

Por tanto, $H_\mu(\mathcal{P}) \leq \log k$. La segunda parte del corolario es inmediata. □

Definición 2.19. Sean $T : X \to X$ una aplicación que preserva medida en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$ y $\mathcal{P}$ una partición, definimos la *entropía de T relativa a la partición* $\mathcal{P}$ como

$$h_\mu(\mathcal{P}, T) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\mathcal{P}\right).$$

Definición 2.20. Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva medida en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$, definimos

$$h_\mu(T) = \sup\{h_\mu(\mathcal{P}, T) : \mathcal{P} \text{ partición finita de } (X, \mathcal{B}, \mu)\},$$

donde h_μ es llamada *entropía métrica de T* o *entropía de Kolmogorov-Sinai*.

Ahora presentaremos uno de los resultados más importantes que nos ayudará en el cálculo de entropía de aplicaciones. Consideremos $T : X \to X$ una transformación que preserva medida en $(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Definición 2.21. Decimos que una partición $\mathcal{P}$ con entropía finita es *generador con respecto* a T (o es T-generador), si la σ-álgebra es generada por la unión de los iterados $\bigvee_{j=-n}^{n} T^j\mathcal{P}$, para todo $n \geq 1$.

Teorema 2.7 (Kolmogorov-Sinai)**.** *Sea $\mathcal{P}$ una partición finita con $H_\mu(\mathcal{P}) < \infty$. Si $\mathcal{P}$ es generador con respecto a T, entonces $h_\mu(T) = h_\mu(\mathcal{P}, T)$.*

Demostración. Ver la Sección 4 del Capitulo 4 en [7], pp. 219-220. □

Ejemplo 2.4. La entropía de un desplazamiento de Bernoulli. Sea T un desplazamiento a la izquierda en el conjunto $X = \{0, 1, \ldots, k-1\}^{\mathbb{N}}$, dotado de una σ-álgebra C generada por los conjuntos de cilindros, y la medida de producto μ, dando el símbolo i a la probabilidad p_i, donde

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1} = 1$$

y nuestro objetivo es calcular $h_\mu(T)$. Para ello necesitamos encontrar la partición $\mathcal{P}$ que genere el σ-álgebra C, bajo la acción de T. La elección natural es lo que se conoce como partición de *tiempo-cero* $\mathcal{P} = \{A_0, \ldots, A_{k-1}\}$, donde

$$A_i = \{x \in X : x_1 = i\} \ , \ 0 \leq i \leq k-1.$$

Observe que para todo $m \geq 0$,

$$T^{-m}A_i = \{x \in X : x_{m+1} = i\} \ , \ 0 \leq i \leq k-1$$

y

$$\bigcap_{j=0}^{m-1} T^{-j}A_{i_j} = \{x \in X : x_{j+1} = i_j \, , 0 \leq j \leq m-1\}.$$

En otras palabras, $\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{P}$ es precisamente la colección de conjuntos de cilindros de longitud m y estos por definición generan C. Por tanto, $\mathcal{P}$ es una partición generadora, de modo que

$$h_\mu(T) = h_\mu(\mathcal{P}, T) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{m-1} T^{-i}\mathcal{P} \right).$$

Como μ es una medida producto, las particiones $\mathcal{P}, T^{-1}\mathcal{P}, \ldots, T^{-(m-1)}\mathcal{P}$ son todas independientes, pues cada partición especifica a una coordenada diferente. Así,

$$\begin{aligned} H_\mu(\mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee \cdots \vee T^{-(m-1)}\mathcal{P}) &= H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(T^{-1}\mathcal{P}) + \cdots + H_\mu(T^{-(m-1)}\mathcal{P}) \\ &= mH_\mu(\mathcal{P}) \\ &= -m \sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$h_\mu(T) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}(-m) \sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i = -\sum_{i=0}^{k-1} p_i \log p_i.$$

CAPÍTULO 3

Transformaciones Continuas y Teoremas Ergódicos

En este capítulo damos un estudio detallado del espacio de medidas de probabilidades T-invariantes, denotada por $\mathcal{M}_T$ y dotada con la topología débil-*, analizando y mostrando sus principales propiedades para su posterior uso en el capitulo 4. También presentaremos algunos de los resultados más importantes de la teoría ergódica, como con el Teorema de Recurrencia de Poincaré y el Teorema de Birkhoff. El contenido de este capítulo está basado, en su mayoría, en los capítulos 1 y 6 del libro de Peter Walters [15].

3.1. Medidas en Espacios Métricos

Consideremos el espacio métrico X provisto de la σ-álgebra $\mathcal{B}(X)$ de los subconjuntos de Borel de X. Denotamos por $\mathcal{M}$ al conjunto de medidas de probabilidades de Borel en X, esto es, $\mathcal{M}$ es la colección de medidas de probabilidad definidas en el espacio medible $(X, \mathcal{B}(X))$. El siguiente teorema nos ayudará a mostrar que cada elemento de $\mathcal{M}$ es determinado por la forma de como ese elemento integra funciones continuas.

Teorema 3.1. *Una medida de probabilidad de Borel m en un espacio métrico X es regular, si para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe un abierto U_ε y un conjunto cerrado C_ε tal que $C_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ y $m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$.*

Demostración. Necesitamos mostrar que cada conjunto cerrado es un conjunto G_δ. Denotamos por $\mathcal{R}$ la colección de todos los conjuntos tales que la condición de regularidad es satisfecha, mostremos que $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra. De hecho, observamos que $X \in \mathcal{R}$, basta considerar $U_\varepsilon = C_\varepsilon = X$, para cada $\varepsilon > 0$. Ahora, sea $A \in \mathcal{R}$, mostremos que $X \setminus A \in \mathcal{R}$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$, existe un abierto U_ε y un cerrado C_ε tal que $C_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ y $m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$, luego $(X \setminus U_\varepsilon) \subseteq (X \setminus A) \subseteq (X \setminus C_\varepsilon)$, donde $(X \setminus U_\varepsilon)$ es cerrado y $(X \setminus C_\varepsilon)$ es abierto, además,

$$m((X \setminus C_\varepsilon) \setminus (X \setminus U_\varepsilon)) = m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Luego $X \setminus A \in \mathcal{R}$. Ahora, mostremos que $\mathcal{R}$ es cerrado bajo uniones contables. Sean $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{R}$ y denotemos $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Dado $\varepsilon > 0$ y para cada $A_i \in \mathcal{R}$ con $i \geq 1$ tenemos que existen abiertos $U_{\varepsilon,i}$ y cerrados $C_{\varepsilon,i}$ tal que $C_{\varepsilon,i} \subseteq A \subseteq U_{\varepsilon,i}$ y

$$m(U_{\varepsilon,i} \setminus C_{\varepsilon,i}) < \frac{\varepsilon}{3^i}.$$

Sean el conjunto abierto $U_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_{\varepsilon,i}$ y $\tilde{C}_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\varepsilon,i}$ y desde que m es una medida, tenemos que

$$m(\tilde{C}_\varepsilon) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{\varepsilon,i}\right) = \lim_{r\to\infty} m\left(\bigcup_{i=1}^{r} C_{\varepsilon,i}\right).$$

Luego existe un entero $k \geq 1$, tal que

$$m\left(\tilde{C}_\varepsilon \setminus \bigcup_{i=1}^{k} C_{\varepsilon,i}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Definamos el conjunto cerrado $C_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k} C_{\varepsilon,i}$. Observamos

$$C_\varepsilon \subseteq \tilde{C}_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon,$$

también

$$\begin{aligned} m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) &= m(U_\varepsilon \setminus \tilde{C}_\varepsilon) + m(\tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} m(U_{\varepsilon,i} \setminus C_{\varepsilon,i}) + m(\tilde{C}_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) \\ &< \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^i} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$, lo que prueba que $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra. Para completar la demostración mostraremos que $\mathcal{R}$ contiene todos los subconjuntos cerrados de X. Sea C cerrado y dado $\varepsilon > 0$, para cada $n \geq 1$ definamos el conjunto abierto $U_n = \{x \in X : d(C,x) < \frac{1}{n}\}$. Observamos $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots \supseteq U_n \supseteq \ldots$ y también $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = C$. Como m es una medida de probabilidad, tenemos

$$m(C) = m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \lim_{i\to\infty} m\left(U_i\right).$$

Luego existe un entero $k \geq 1$, tal que $m(U_i \setminus C) < \varepsilon$. Sean $C_\varepsilon = C$ y $U_\varepsilon = U_i$, entonces $C_\varepsilon \subseteq C \subseteq U_\varepsilon$, donde U_ε es abierto y C_ε es cerrado, luego $C \in \mathcal{R}$. Por lo tanto, $\mathcal{R}$ contiene todos los subconjuntos cerrados de X. □

Corolário. *Para una medida de probabilidad de Borel m en un espacio métrico X, para todo $B \in \mathcal{B}(X)$, tenemos*

$$m(B) = \sup\{m(C) : C \text{ es cerrado y } C \subseteq B\} \text{ y}$$
$$m(B) = \inf\{m(U) : U \text{ es abierto y } U \supseteq B\}.$$

Demostración. Sea $B \in \mathcal{B}(X)$ y definamos los conjuntos

$$P = \{m(C) : C \text{ es cerrado y } C \subseteq B\} \text{ y}$$
$$Q = \{m(U) : U \text{ es abierto y } U \supseteq B\}.$$

Por el Teorema (3.1), para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un abierto U_ε y un cerrado C_ε tal que $C_\varepsilon \subseteq B \subseteq U_\varepsilon$ y $m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$, entonces $P \neq \emptyset$ y $Q \neq \emptyset$. Además, P es limitado superiormente y Q limitado inferiormente, entonces P y Q poseen supremo e ínfimo respectivamente. Desde que $B \setminus C_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$, tenemos $m(B \setminus C_\varepsilon) \leq m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$, lo que implica $m(B) - m(C_\varepsilon) < \varepsilon$. En consecuencia, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un conjunto cerrado C_ε tal que $C_\varepsilon \subseteq B$ y $m(B) - \varepsilon < m(C_\varepsilon) \leq m(B)$, lo que significa $m(B) = \sup Z$. Por otro lado, de manera análoga sabemos que $U_\varepsilon \setminus B \subseteq U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon$. Luego, tenemos $m(U_\varepsilon \setminus B) \leq m(U_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$, implica $m(U_\varepsilon) - m(B) < \varepsilon$. En resumen, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un abierto U_ε tal que $B \subseteq U_\varepsilon$ y $m(B) \leq m(U_\varepsilon) < m(B) + \varepsilon$. Por tanto, $m(B) = \inf Q$. □

El siguiente resultado nos dice toda medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}$ es determinado por la forma como integra funciones.

Teorema 3.2. *Sean μ, m dos medidas de probabilidad de Borel en el espacio métrico X. Si $\int_X f\,d\mu = \int_X f\,dm$, para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$, entonces $m = \mu$.*

Demostración. Por el Corolario anterior, basta mostrar $m(C) = \mu(C)$, para todo subconjunto cerrado C de X. En efecto, dado un subconjunto cerrado C y dado $\varepsilon > 0$, por la regularidad de la medida m, esto debido al Teorema (3.1), existe un abierto U_ε tal que $C \subseteq C \subseteq U_\varepsilon$ y $m(U_\varepsilon \setminus C) < \varepsilon$. Ahora, definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si} \quad x \notin U_\varepsilon \\ \dfrac{d(x, X \setminus U_\varepsilon)}{d(x, X \setminus U_\varepsilon) + d(x, C)} & \text{, si} \quad x \in U_\varepsilon. \end{cases}$$

Observamos, si $x \in U_\varepsilon$, entonces $x \in X \setminus U_\varepsilon = \overline{X \setminus U_\varepsilon}$, luego $d(x, X \setminus U_\varepsilon) \neq 0$. Así, f está bien definida. Además, f es continua con $f = 0$ cuando $x \in X \setminus U_\varepsilon$, $f = 1$ para $x \in C$ y $0 \leq f(x) \leq 1$, para todo $x \in X$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mu(C) = \int \chi_C\,d\mu \leq \int f\,d\mu = \int f\,dm &= \int_{U_\varepsilon} f\,dm + \int_{X \setminus U_\varepsilon} f\,dm \\ &= \int_{U_\varepsilon} f\,dm \leq \int_{U_\varepsilon} 1\,dm = m(U_\varepsilon) \\ &= m(U_\varepsilon \setminus C) + m(C) \\ &< \varepsilon + m(C). \end{aligned}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ es arbitrario obtenemos $\mu(C) \leq m(C)$. Repetimos el mismo procedimiento para tener $m(C) \leq \mu(C)$. Por lo tanto, $m(C) = \mu(C)$ para todo cerrado $C \subseteq X$, en consecuencia también para todos los subconjuntos de Borel. Luego, el teorema queda probado. □

Sea X un espacio métrico compacto dotado de una σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$. Sea el conjunto $C(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es continuo}\}$ que denota el espacio de funciones continuas de valores reales definidas en X. Definamos la norma uniforme de $f \in C(X, \mathbb{R})$ por $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, el espacio $C(X, \mathbb{R})$ provisto de esta norma es un espacio de Banach. Una característica importante de este espacio es que ella es separable, es decir, $C(X, \mathbb{R})$ contiene un subconjunto numerable denso. Por tanto, tenemos una sucesión $\{f_n \in C(X, \mathbb{R})\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modo que para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$ y todo $\varepsilon > 0$, existe $n \geq 1$ tal que $\|f - f_n\| < \varepsilon$.

Definición 3.1. La topología débil-* en $\mathcal{M}$ es la menor topología que hace que cada una de las aplicaciones $\mu \mapsto \int f \, d\mu$ sean continuos, para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$. Una base es dada por la colección de conjuntos de la forma

$$V_\mu(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) = \left\{\nu \in M(X) : \left|\int f_i \, d\nu - \int f_i \, d\mu\right| < \varepsilon \,,\, 1 \leq i \leq k\right\} \tag{3.1}$$

donde $\mu \in \mathcal{M}$, $K \geq 1$, $f_i \in C(X, \mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$.

Observación. La intersección de dos conjuntos de la forma 3.1 contiene algún conjunto de la misma forma. Así, la familia de abiertos $\{V_\mu(\Phi; \varepsilon) : \Phi, \varepsilon\}$, donde $\Phi = \{f_1, \ldots, f_k\}$, puede ser tomada como base de vecindades para cada $\mu \in \mathcal{M}$. En efecto, dado $\mu \in \mathcal{M}$, desde que $\mathcal{M}$ es compacto, tenemos que,

$$\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{f_1,\ldots,f_k\,;\,\varepsilon\,;\,\nu} \{V_\nu(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)\}$$

eso implica que existe algún $V_\nu(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)$ tal que $\mu \in V_\nu(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon)$. Además, observamos que, si $\mu \in V_{\nu_1}(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon_1) \cap V_{\nu_2}(g_1, \ldots, g_m; \varepsilon_2)$, entonces el conjunto

$$V_\mu\left(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m; \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\right)$$

es abierto, tal que

$$\mu \in V_\mu\left(f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m; \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}\right) \subseteq V_{\nu_1}(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon_1) \cap V_{\nu_2}(g_1, \ldots, g_m; \varepsilon_2).$$

Observación. Observamos que la topología definida en $\mathcal{M}$, dad por la definición (3.1), no depende de la métrica usada en X.

Teorema 3.3. *Sea X un espacio métrico compacto, entonces el espacio $\mathcal{M}$ es metrizable en la topología débil-*. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto denso de $C(X, \mathbb{R})$, entonces la función $d_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$d_{\mathcal{M}}(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\int f_n \, d\mu - \int f_n \, d\nu\right|}{2^n \|f_n\|}$$

es una métrica en $\mathcal{M}$ que genera la topología débil-.*

Demostración. Dividiremos la prueba en dos pasos:

Primer paso: *$d_{\mathcal{M}}$ es una métrica en $\mathcal{M}$.* De hecho, dadas las medidas de probabilidad de Borel $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$. Si $\mu_1 \neq \mu_2$, entonces por el Teorema (3.2) $d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) > 0$. Si $\mu_1 = \mu_2$, entonces $|\int f_n\, d\mu_1 - \int f_n\, d\mu_2| = 0$, para todo $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ donde $n \in \mathbb{N}$, implica $d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) = 0$. Recíprocamente, si $d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) = 0$, entonces $\int f_n\, d\mu_1 = \int f_n\, d\mu_2$, para cada $f_n \in C(X, \mathbb{R})$ con $n \in \mathbb{N}$, luego por el Teorema (3.2), tenemos $\mu_1 = \mu_2$. Es claro que $d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) = d_{\mathcal{M}}(\mu_2, \mu_1)$ para todo $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$. Por último, sean las medidas $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{M}$, entonces

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_3) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\int f_n\, d\mu_1 - \int f_n\, d\mu_3\right|}{2^n \|f_n\|} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\int f_n\, d\mu_1 - \int f_n\, d\mu_2\right|}{2^n \|f_n\|} + \frac{\left|\int f_n\, d\mu_2 - \int f_n\, d\mu_3\right|}{2^n \|f_n\|} \\ &= d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) + d_{\mathcal{M}}(\mu_2, \mu_3). \end{aligned}$$

Por tanto, $d_{\mathcal{M}}$ es una métrica en $\mathcal{M}$.

Segundo Paso: *$\mathcal{M}$ es metrizable en la topología débil-*.* Consideremos el espacio métrico $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la aplicación $\mu \mapsto \int f_n\, d\mu$ es continua en $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$. En efecto, para cada $i \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\frac{\left|\int f_i\, d\mu_1 - \int f_i\, d\mu_2\right|}{2^i \|f_i\|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left|\int f_n\, d\mu_1 - \int f_n\, d\mu_2\right|}{2^n \|f_n\|},$$

implica

$$\left|\int f_i\, d\mu_1 - \int f_i\, d\mu_2\right| \leq 2^i \|f_i\| d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2).$$

Luego para $\varepsilon > 0$ dado, tenemos $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2^i 3\|f_i\|}$, tal que para cualquier $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$ con $d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) < \delta$, tenemos

$$\left|\int f_i\, d\mu_1 - \int f_i\, d\mu_2\right| \leq 2^i \|f_i\| d_{\mathcal{M}}(\mu_1, \mu_2) < 2^i \|f_i\| \delta < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.2}$$

Lo que significa, que la aplicación $\mu \mapsto \int f_n\, d\mu$ es uniformemente continua para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular esta aplicación es continua para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que la aplicación $\mu \mapsto \int f\, d\mu$ es continua en $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$, para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$. De hecho, desde que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es denso en $C(X, \mathbb{R})$ entonces dado $f \in C(X)$ y para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in X$, luego para toda medida $\mu_1 \in \mathcal{M}$, tenemos

$$\left|\int f_{n_0}\, d\mu_1 - \int f\, d\mu_1\right| \leq \int |f_{n_0} - f|\, d\mu_1 < \varepsilon \mu_1(X) = \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.3}$$

Usando (3.2) y (3.3), tenemos

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu_1-\int f\,d\mu_2\right| &\leq \left|\int f\,d\mu_1-\int f_{n_0}\,d\mu_1\right|+\left|\int f_{n_0}\,d\mu_1-\int f_{n_0}\,d\mu_2\right|+\\ &\quad+\left|\int f_{n_0}\,d\mu_2-\int f\,d\mu_2\right|\\ &<\left|\int f\,d\mu_1-\int f_{n_0}\,d\mu_1\right|+\left|\int f_{n_0}\,d\mu_2-\int f\,d\mu_2\right|+\varepsilon\\ &<\varepsilon.\end{aligned}$$

Así la aplicación $\mu\mapsto\int f\,d\mu$ es continua en $(\mathcal{M},d_{\mathcal{M}})$, para toda función continua $f:X\to\mathbb{R}$. En resumen, tenemos, para cada $\mu_1\in\mathcal{M}$, encontramos un $\delta>0$ tal que

$$\{\mu_2\in\mathcal{M}:d_{\mathcal{M}}(\mu_1,\mu_2)<\delta\}\subseteq V_{\mu_1}(f_1,\dots,f_k;\varepsilon)$$

para cada $k\geq 1$, $f_1,\dots,f_k\in C(X,\mathbb{R})$ y $\varepsilon>0$, esto significa (por la definición (3.1)) que todo conjunto abierto en la topología débil-* es abierto en el espacio métrico $(\mathcal{M},d_{\mathcal{M}})$. Mostremos el recíproco. Sean $\mu\in\mathcal{M}$, $\varepsilon>0$ y dado $N>0$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$. Para $\nu\in V_\mu(f_1,\dots,f_N;\varepsilon)$ escojamos $\delta=\frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{2}{2^n\|f_n\|}\right)^{-1}$ tal que para todo $1\leq n\leq N$ tenemos

$$\left|\int f_n\,d\nu-\int f_n\,d\mu\right|<\delta\Rightarrow\sum_{n=1}^{N}\frac{\left|\int f_n\,d\nu-\int f_n\,d\mu\right|}{2^n\|f_n\|}<\frac{\varepsilon}{2}$$

sabiendo que,

$$\left|\int f_n\,d\nu-\int f_n\,d\mu\right|\leq\int|f_n|\,d\nu+\int|f_n|\,d\mu=\|f\|\nu(X)+\|f\|\mu(X)\leq 2\|f\|$$

para cada $n\geq N+1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\int f_n\,d\nu-\int f_n\,d\mu\right|}{2^n\|f_n\|}&\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{\left|\int f_n\,d\nu-\int f_n\,d\mu\right|}{2^n\|f_n\|}+\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{2^n}\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

entonces $d_{\mathcal{M}}(\nu,\mu)<\varepsilon$. Por tanto,

$$V_\mu(f_1,\dots,f_N;\varepsilon)\subseteq\{\nu\in\mathcal{M}:d_{\mathcal{M}}(\nu,\mu)<\varepsilon\}.$$

En otras palabras, toda bola abierta en el espacio métrico $\mathcal{M}$ es un conjunto abierto en la topología débil-*. Por tanto, la métrica $d_{\mathcal{M}}$ genera la topología débil-*. □

Esto nos permite definir una estructura métrica en $\mathcal{M}$ de la siguiente manera.

Definición 3.2. Decimos que una sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}$ *converge con la topología débil-** a una medida $\mu \in \mathcal{M}$, si para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f\, d\mu_n = \int_X f\, d\mu.$$

El siguiente resultado nos proporciona propiedades equivalentes sobre la convergencia de una sucesión de medidas en $\mathcal{M}$.

Proposición 3.4. *Las siguientes propiedades para una sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}$, son equivalentes*

(1). $\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{M}}(\mu_n,\mu) = 0$.

(2). $\lim_{n\to\infty} \int f_i\, d\mu_n = \int f_i\, d\mu$, *para todo* $i \geq 1$.

(3). $\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n = \int f\, d\mu$, *para todo* $f \in C(X,\mathbb{R})$.

Demostración. En efecto:
$(1) \Rightarrow (2)$. Dado $i \geq 1$, tenemos

$$\left| \int f_i\, d\mu_n - \int f_i\, d\mu \right| \leq 2^i \|f_i\| d_{\mathcal{M}}(\mu_n,\mu)$$

tomando limite a ambos lados de la desigualdad y por (1), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int f_i\, d\mu_n - \int f_i\, d\mu \right| = 0,$$

lo que significa $\int f_i\, d\mu_n = \int f_i\, d\mu$, para todo $i \geq 1$.
$(2) \Rightarrow (3)$. Dado $\varepsilon > 0$, entonces por (2), tenemos que, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, implica

$$\left| \int f_i\, d\mu_n - \int f_i\, d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $i \geq 1$. Como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto denso en $C(X)$, entonces dado $f \in C(X)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_{n_0} - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego para cualquier medida μ, tenemos

$$\left| \int f_{n_0}\, d\mu - \int f\, d\mu \right| \leq \int |f_{n_0} - f|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{3}\mu(X) = \frac{\varepsilon}{3}$$

por la desigualdad triangular, tenemos para cada $n \geq N$

$$\begin{aligned}\left|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\mu\right| &\leq \left|\int f\,d\mu_n - \int f_{n_0}\,d\mu_n\right| + \left|\int f_{n_0}\,d\mu_n - \int f_{n_0}\,d\mu\right| + \\ &+ \left|\int f_{n_0}\,d\mu - \int f\,d\mu\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \int f\,d\mu_n = \int f\,d\mu$, para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Dado $\varepsilon > 0$, como la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ es convergente, existe un natural $i_0 > 0$ tal que $\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4}$. Podemos escribir

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(\mu_n,\mu) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\left|\int f_i\,d\mu_n - \int f_i\,d\mu\right|}{2^i\|f_i\|} \\ &= \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i}\left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right| + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right|.\end{aligned}$$

Observamos, que para todo $i \geq 1$

$$\begin{aligned}\left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right| &\leq \left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n\right| + \left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right| \\ &\leq \int \frac{|f_i|}{\|f_i\|}\,d\mu_n + \int \frac{|f_i|}{\|f_i\|}\,d\mu \\ &\leq \mu_n(X) + \mu(X) = 2.\end{aligned}$$

Por lo hecho anteriormente, observamos

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right| \leq \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{2}{2^i} < \frac{2\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

De (3), tenemos que, $\lim_{n\to\infty} \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n = \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu$, para cada $1 \leq i \leq i_0$. Luego para todo i, existe un N_i tal que

$$\left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $n \geq N_i$. Tomando $n_0 = \max\{N_1,\ldots,N_{i_0}\}$, entonces para todo $n \geq n_0$, tenemos

$$\left|\int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|}\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.5}$$

para todo $1 \leq i \leq i_0$. Luego, usando (3.4) y (3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{M}}(\mu_n, \mu) &= \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \left| \int \frac{f_i}{\|f_i\|} \, d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|} \, d\mu \right| + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \left| \int \frac{f_i}{\|f_i\|} \, d\mu_n - \int \frac{f_i}{\|f_i\|} \, d\mu \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{i_0} \frac{1}{2^i} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{n \to \infty} d_{\mathcal{M}}(\mu_n \mu) = 0$. □

El siguiente teorema produce varias definiciones equivalentes útiles de la topología débil-*.

Teorema 3.5. *Sean $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \mu \in \mathcal{M}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(1). $\mu_n \to \mu$ *en la topología débil-*.*

(2). $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$, *para cada subconjunto cerrado F de X.*

(3). $\liminf_n \mu_n(U) \geq \mu(U)$, *para cada subconjunto abierto U de X.*

(4). $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$, *para todo conjunto de Borel A en X con $\mu(\partial A) = 0$.*

Demostración. La demostración está en el Capítulo 2 de [10], pp. 40-42. □

Teorema 3.6 (Teorema de Representación de Riesz para Espacios Métricos Compactos)**.** *Sea X un espacio métrico compacto y $J : C(X, \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ un mapa linear continuo tal que J es un operador positivo (es decir, si $f \geq 1$, entonces $J(f) \geq 1$) y $J(1) = 1$. Entonces existe una medida $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $J(f) = \int_X f \, d\mu$.*

Demostración. La demostración está en el Capítulo 7 de [4], pp. 212-215. □

Enunciamos un resultado que garantiza la compacidad del espacio de medidas de probabilidad $\mathcal{M}$ desde que X es un espacio compacto. Para demostrar el siguiente teorema usaremos el teorema de representación de Riesz, enunciado anteriormente.

Teorema 3.7. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces $\mathcal{M}$ es compacto en la topología débil-*.*

Demostración. Denotamos $\mu(f) = \int f\, d\mu$. Sea la sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, un subconjunto contable denso en $C(X, \mathbb{R})$. Dada la sucesión de medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}$, mostremos que ella admite una subsucesión convergente. En efecto, dada la sucesión de números reales $\{\mu_n(f_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$, sabemos que $|\mu_n(f_1)| \leq \|f_1\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, en otras palabras, $\{\mu_n(f_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión limitada de números reales, entonces posee una subsucesión convergente, a la cual denotaremos por $\{\mu_n^{(1)}(f_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Aplicamos la sucesión de medidas $\{\mu_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ a f_2, luego consideremos la sucesión $\{\mu_n^{(1)}(f_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, esta sucesión también es limitada. Por tanto, tenemos una subsucesión convergente $\{\mu_n^{(2)}(f_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Observamos que la sucesión $\{\mu_n^{(2)}(f_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente. De esta forma, para cada $i \in \mathbb{N}$ obtenemos una subsucesión $\{\mu_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\{\mu_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mu_n^{(i-1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \cdots \subseteq \{\mu_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

y tal que $\{\mu_n^{(i)}(f_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, para cada $1 \leq j \leq i$. Consideremos la sucesión diagonal $\{\mu_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como para $n \geq i$, tenemos que $\{\mu_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{\mu_n^{(i)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $\{\mu_n^{(n)}(f_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, para todo $i \geq 1$. Ahora, podemos usar el hecho de que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es denso para mostrar que $\{\mu_n^{(n)}(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para cada $f \in C(X, \mathbb{R})$. De hecho, para todo $\varepsilon > 0$, podemos escoger f_i tal que $\|f - f_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Desde que $\{\mu_n^{(n)}(f_i)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, implica

$$\left|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Luego para $n, m \geq N$, tenemos

$$\begin{aligned}
\left|\mu_n^{(n)}(f) - \mu_m^{(m)}(f)\right| &\leq \left|\mu_n^{(n)}(f) - \mu_n^{(n)}(f_i)\right| + \left|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)\right| + \\
&\quad + \left|\mu_m^{(m)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f)\right| \\
&\leq \left|\int f\, d\mu_n^{(n)} - \int f_i\, d\mu_n^{(n)}\right| + \left|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)\right| + \\
&\quad + \left|\int f_i\, d\mu_m^{(m)} - \int f\, d\mu_m^{(m)}\right| \\
&\leq \|f - f_i\| + \left|\mu_n^{(n)}(f_i) - \mu_m^{(m)}(f_i)\right| + \|f_i - f\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

implica que la sucesión $\{\mu_n^{(n)}(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$. Luego, para cada $f \in C(X,\mathbb{R})$ definamos

$$\omega(f) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^{(n)}(f).$$

Observamos que ω es lineal, de hecho para todo $f_1, f_2 \in C(X,\mathbb{R})$ y cada $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}\omega(c_1f_1 + c_2f_2) &= \lim_{n\to\infty} \mu_n^{(n)}(c_1f_1 + c_2f_2) = \lim_{n\to\infty} \int (c_1f_1 + c_2f_2)\, d\mu_n^{(n)} \\ &= c_1 \lim_{n\to\infty} \int f_1\, d\mu_n^{(n)} + c_2 \lim_{n\to\infty} \int f_2\, d\mu_n^{(n)} \\ &= c_1\omega(f_1) + c_2\omega(f_2).\end{aligned}$$

Observamos que, ω es limitada, pues para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$, tenemos

$$|\omega(f)| = \left|\lim_{n\to\infty} \mu_n^{(n)}(f)\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n^{(n)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\int f\, d\mu_n^{(n)}\right| \leq \|f\|.$$

Dado $f \geq 0$ con $f \in C(X,\mathbb{R})$, observamos $\omega(f) \geq 0$, luego ω es positiva. Por otro lado, tenemos

$$\omega(\mathbf{1}) = \lim_{n\to\infty} \int 1\, d\mu_n^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \int 1\, d\mu_n^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mu_n^{(n)}(X) = 1.$$

Luego, por el Teorema de Representación de Riesz (3.6), existe una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{M}$ tal que $\omega(f) = \int f\, d\mu$, para cada $f \in C(X,\mathbb{R})$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int f\, d\mu_n^{(n)} = \omega(f) = \int f\, d\mu,$$

para todo $f \in C(X,\mathbb{R})$, luego por la Proposición (3.4), la subsucesión $\{\mu_n^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a μ con la topología débil-* en $\mathcal{M}$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, el espacio $\mathcal{M}$ es compacto. □

Observación. Por lo visto en la Sección (1.3) del Capítulo 1, podemos concluir que el espacio métrico compacto $\mathcal{M}$ es un espacio de Baire.

3.2. Existencia de Medidas Invariantes

Sea la transformación continua $T : X \to X$ en un espacio métrico compacto X. En esta sección mostraremos que siempre existe una medida $\mu \in \mathcal{M}$ invariante bajo T. El conjunto $\{E \in \mathcal{B}(X) : T^{-1}(E) \in \mathcal{B}(X)\}$, que contiene los conjuntos abiertos, es una σ-álgebra por la continuidad de T, luego $T^{-1}(\mathcal{B}(X)) \subseteq \mathcal{B}(X)$, o sea, T es medible. Así, para cada medida $\mu \in M(X)$ definimos la siguiente aplicación $T_* : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ por $(T_*\mu)(E) = \mu(T^{-1}(E))$, donde $E \in \mathcal{B}(X)$. Para cada $\mu \in \mathcal{M}$, tenemos que, $T_*\mu$ es una medida, que es llamada *medida imagen* de μ por la transformación T. Necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 3.8. *$\int f \, d(\mu \circ T^{-1}) = \int f \circ T \, d\mu$, para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$.*

Demostración. Sea f una función característica de un conjunto $E \in \mathcal{B}(X)$. Sabemos por definición que $T_*\mu(E) = \mu(T^{-1}(E))$. Usando la definición de función característica, observamos que, $\chi_{T^{-1}(E)}(x) = \chi_E \circ T(x)$, para cada $x \in X$, luego

$$\int \chi_E \, d(\mu \circ T^{-1}) = \mu(T^{-1}(E)) = \int \chi_{T^{-1}(E)} \, d\mu = \int \chi_E \circ T \, d\mu.$$

Ahora, supongamos que f es una función simple, o sea, $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ donde $a_i \in \mathbb{R}$ y $E_i \in \mathcal{B}(X)$ para cada $1 \leq i \leq n$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\int f \, d(\mu \circ T^{-1}) &= \int \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \, d(\mu \circ T^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{E_i} \, d(\mu \circ T^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \int \chi_{E_i} \circ T \, d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \right) \circ T \, d\mu \\
&= \int f \circ T \, d\mu.
\end{aligned}$$

Si $f : X \to [0, \infty)$ es medible, entonces por la Proposición (1.5), existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones simples positivas tal que $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \cdots \leq f$ y $\varphi_n \to f$ cuando $n \to \infty$. Luego, por el Teorema de la Convergencia Monótona (1.6),

$$\begin{aligned}
\int f \, d(\mu \circ T^{-1}) &= \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \, d(\mu \circ T^{-1}) = \lim_{n \to \infty} \int \varphi_n \circ T \, d\mu \\
&= \int \left(\lim_{n \to \infty} \varphi_n \right) \circ T \, d\mu \\
&= \int f \circ T \, d\mu.
\end{aligned}$$

Finalmente, si la función es continua $f : X \to \mathbb{R}$, entonces podemos expresar de la forma $f = f^+ - f^-$ donde $f^+, f^- \geq 0$. Luego, aplicando el caso anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}\int f\,d(\mu\circ T^{-1}) &= \int \left(f^{+}-f^{-}\right)\,d(\mu\circ T^{-1}) = \int f^{+}\,d(\mu\circ T^{-1}) - \int f^{-}\,d(\mu\circ T^{-1})\\ &= \int f^{+}\circ T\,d\mu - \int f^{-}\circ T\,d\mu = \int (f^{+}-f^{-})\circ T\,d\mu\\ &= \int f\circ T\,d\mu.\end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

Teorema 3.9. *La aplicación $T_*:\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ es continua y afín.*

Demostración. Sea $f\in C(X,\mathbb{R})$, por el Lema (3.8), tenemos $\int f\,d(\mu\circ T^{-1}) = \int f\circ T\,d\mu$. Dada $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a una medida μ en $\mathcal{M}$. Por la Proposición (3.4), tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int f\,d(\mu_n\circ T^{-1}) = \lim_{n\to\infty}\int f\circ T\,d\mu_n = \int f\circ T\,d\mu = \int f\,d(\mu\circ T^{-1}).$$

Por la Proposición (3.4), tenemos que, $\mu_n\circ T$ converge a $\mu\circ T$ en la topología débil-*, en otras palabras, $T_*\mu_n$ converge a $T_*\mu$ en la topología débil-*. Por lo tanto, la aplicación T_* es continua.

Ahora, mostremos que T_* es afín. De hecho, dados $p\in[0,1]$ y $\mu,\nu\in M(X)$, tenemos

$$\begin{aligned}T_*(p\mu+(1-p)\nu)(E) &= (p\mu+(1-p)\nu)(T^{-1}(E))\\ &= p\mu(T^{-1}(E)) + (1-p)\nu(T^{-1}(E))\\ &= p(T_*\mu)(E) + (1-p)(T_*\nu)(E)\\ &= \left(p(T_*\mu)+(1-p)(T_*\nu)\right)(E),\end{aligned}$$

para todo $E\in\mathcal{B}(X)$. Por lo tanto, la aplicación T_* es afín. □

Este trabajo se enfocará en el estudio de medidas invariantes. Dado el espacio métrico compacto X y la transformación continua $T:X\to X$, definamos el conjunto $\mathcal{M}_T=\{\mu\in\mathcal{M}:T_*\mu=\mu\}$, es decir, el conjunto $\mathcal{M}_T$ está formado por todas las medidas $\mu\in\mathcal{M}$ que son invariantes por la transformación T.

Teorema 3.10. *Si $T:X\to X$ es una transformación continua y $\mu\in\mathcal{M}$, entonces $\mu\in\mathcal{M}_T$, si y sólo si, $\int f\circ T\,d\mu=\int f\,d\mu$, para todo $f\in C(X,\mathbb{R})$.*

Demostración. En efecto,
($\Rightarrow$). Supongamos que $\mu \in \mathcal{M}_T$, luego $\mu = T_*\mu = \mu \circ T^{-1}$. Por el Lema (3.8),

$$\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d(\mu \circ T^{-1}) = \int f \, d\mu,$$

para todo $f \in C(X, \mathbb{R})$.
($\Leftarrow$). Recíprocamente, dado $f \in C(X, \mathbb{R})$, tenemos $\int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu$. Usando el Lema (3.8), obtenemos

$$\int f \, d(\mu \circ T^{-1}) = \int f \circ T \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Luego por el Teorema (3.2), tenemos $\mu \circ T^{-1} = \mu$, esto es, $\mu \in \mathcal{M}_T$. □

Desde que $T_* : X \to X$ es una transformación continua en un subconjunto compacto convexo, mostraremos que $\mathcal{M}_T$ no es vacío. El siguiente resultado nos da un método para construir elementos de $\mathcal{M}_T$.

Teorema 3.11. *Sea $T : X \to X$ continua y $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathcal{M}$. Definamos una nueva sucesión $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}$ por $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} T_*^i \nu_n$. Entonces cualquier punto limite débil-* μ de $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un elemento de $\mathcal{M}_T$.*

Demostración. De la compacidad de $\mathcal{M}$, la sucesión $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee una subsucesión $\{\mu_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\mu \in \mathcal{M}$ en la topología débil-*. Dado $f \in C(X, \mathbb{R})$, por la Proposición (3.4),

$$\lim_{k \to \infty} \int f \, d\mu_{n_k} = \int f \, d\mu.$$

Como T es continua, entonces $f \circ T : X \to \mathbb{R}$ también es continua, luego

$$\lim_{k \to \infty} \int f \circ T \, d\mu_{n_k} = \int f \circ T \, d\mu.$$

Haciendo uso de el Lema (3.8), tenemos

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu_{n_k} &= \int f \, d\left(\frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} T_*^i \nu_{n_k} \right) = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \int f \, d(T_*^i \nu_{n_k}) \\ &= \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \int f \circ T^i \, d(\nu_{n_k}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

De manera análoga obtenemos

$$\int f \circ T \, d\mu_{n_k} = \frac{1}{n_k} \sum_{i=0}^{n_k-1} \int f \circ T^{i+1} \, d(\nu_{n_k}). \tag{3.7}$$

Aplicando dos veces las ecuaciones (3.6) y (3.7),

$$\begin{aligned}
\left|\int f\circ T\,d\mu - \int f\,d\mu\right| &= \left|\lim_{k\to\infty}\int f\circ T\,d\mu_{n_k} - \lim_{k\to\infty}\int f\,d\mu_{n_k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\int f\circ T^{i+1}\,d\nu_{n_k} - \frac{1}{n_k}\sum_{i=0}^{n_k-1}\int f\circ T^{i}\,d\nu_{n_k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{n_k}\int\sum_{i=0}^{n_k-1}(f\circ T^{i+1} - f\circ T^{i})(x)\,d\nu_{n_k}(x)\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{n_k}\int(f\circ T^{n_k} - f)\,d\nu_{n_k}\right| \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\int|f\circ T^{n_k} - f|\,d\nu_{n_k} \\
&\leq \lim_{k\to\infty}\frac{2\|f\|}{n_k} = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\int f\circ T\,d\mu = \int f\,d\mu$, para cualquier función continua $f : X \to \mathbb{R}$. Luego por el Teorema (3.10), $\mu \in \mathcal{M}_T$. □

Corolário (Teorema de Krylov-Bogolyubov). *Si $T : X \to X$ es una transformación continua de un espacio métrico compacto X, entonces $\mathcal{M}_T$ es no vacío.*

Demostración. Podemos escoger cualquier sucesión $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el Teorema (3.11), en particular, dado $x \in X$ sea $\nu_n = \delta_x$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observamos que la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ esta dado por $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\delta_{T^i(x)}$. Del teorema anterior, cualquier punto límite de una subsucesión convergente de $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un elemento de $\mathcal{M}_T$. Por tanto, $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$. □

Presentaremos una caracterización de los elementos de $\mathcal{M}_T$.

Teorema 3.12. *Si X es un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ es una transformación continua, entonces se cumple lo siguiente*

(a) *$\mathcal{M}_T$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{M}$.*

(b) *$\mathcal{M}_T$ es convexo.*

(c) *μ es un punto extremo de $\mathcal{M}_T$ (esto es, μ no puede ser escrito de forma no trivial como una combinación convexa de elementos de $\mathcal{M}_T$), si y sólo si, T es una transformación ergódica que preserva la medida μ.*

(d) Si $\mu, \nu \in \mathcal{M}_T$ son ambos ergódicos y $\mu \neq \nu$ entonces ellas son mutuamente singulares.

Demostración. En efecto,

(a) Sea la sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_T$ que converge a una medida $\mu \in \mathcal{M}$. De la Proposición (3.4), el Lema (3.8) y usando el Teorema (3.10), tenemos para toda función $f \in C(X, \mathbb{R})$,

$$\int f \circ T \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f \circ T \, d\mu_n = \lim_{n\to\infty} \int f \, d\mu_n = \int f \, d\mu.$$

Por tanto, por el Teorema (3.10), $\mu \in \mathcal{M}_T$. Así, $\mathcal{M}_T$ es un subconjunto compacto de $\mathcal{M}$.

(b) Sean $\mu, \nu \in \mathcal{M}_T$, dado $t \in [0, 1]$ y cada $E \in \mathcal{B}(X)$, tenemos

$$\begin{aligned}
(t\nu + (1-t)\mu)\,(T^{-1}(A)) &= t\nu(T^{-1}(A)) + (1-t)\mu(T^{-1}(A)) \\
&= t\nu(A) + (1-t)\mu(A) \\
&= (t\nu + (1-t)\mu)(A).
\end{aligned}$$

Luego $t\nu + (1-t)\mu \in \mathcal{M}_T$. Por tanto, $\mathcal{M}_T$ es convexo.

(c) Supongamos que $\mu \in \mathcal{M}_T$ y μ no es ergodica. Entonces, existe $E \in \mathcal{B}(X)$ con $T^{-1}(E) = E$ y $0 < \mu(E) < 1$. Dado $B \in \mathcal{B}(X)$, definamos las medidas μ_1 y μ_2 por

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(B \cap E)}{\mu(E)} \;\text{ e }\; \mu_2(B) = \frac{\mu(B \cap (X \setminus E))}{\mu(X \setminus E)}.$$

Observamos que,

$$\begin{aligned}
\mu_1(T^{-1}(B)) &= \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap E)}{\mu(E)} = \frac{\mu(T^{-1}(B) \cap T^{-1}(E))}{\mu(E)} \\
&= \frac{\mu(T^{-1}(B \cap E))}{\mu(E)} = \frac{\mu(B \cap E)}{\mu(E)} \\
&= \mu_1(B).
\end{aligned}$$

Luego $\mu_1 \in \mathcal{M}_T$. De la misma forma $\mu_2 \in \mathcal{M}_T$. Además, sabemos que $\mu_1 \neq \mu_2$ pues $\mu_1(E) = 1$ y $\mu_2(E) = 0$. Para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ podemos escribir,

$$\mu(B) = \mu(E)\mu_1(B) + (1 - \mu(E))\mu_2(B).$$

Esto es, μ es una combinación convexa no trivial de elementos de $\mathcal{M}_T$. Por tanto, μ es punto extremo de $\mathcal{M}_T$. Recíprocamente, supongamos que $\mu \in \mathcal{M}_T$

es ergódica y $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$, donde $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T$ y $0 < p < 1$. Mostremos $\mu_1 = \mu_2$. Si $\mu(A) = 0$, entonces $\mu_1(A) = 0$ para $A \in \mathcal{B}(X)$, luego $\mu_1 \ll \mu$. Por tanto, por el Teorema de Radon-Nikodym (1.9), la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mu_1}{d\mu}$ existe y además $\mu_1(A) = \int_A \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu$, para todo $A \in \mathcal{B}(X)$, donde $\frac{d\mu_1}{d\mu} \geq 0$. A partir del enunciado del Teorema de Radon-Nikodym, tenemos $\mu_1 = \mu$, si y sólo si, $\frac{d\mu_1}{d\mu} = 1$ para μ-casi siempre. Demostraremos que este es realmente el caso al mostrar que los conjuntos donde, respectivamente, $\frac{d\mu_1}{d\mu} < 1$ e $\frac{d\mu_1}{d\mu} > 1$ tienen μ-medida cero. Definamos el conjunto $E = \{x \in X : \frac{d\mu_1}{d\mu}(x) < 1\}$ el cual es medible. Luego desde que $\mu_1 \in \mathcal{M}_T$, tenemos

$$\mu_1(E) = \int_E \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu = \int_{E\cap T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu + \int_{E\setminus T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu, \tag{3.8}$$

es igual a

$$\mu_1(T^{-1}(E)) = \int_{T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu = \int_{E\cap T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu + \int_{T^{-1}(E)\setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu \tag{3.9}$$

comparando los sumandos de (3.8) y (3.9), obtenemos

$$\int_{E\setminus T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu = \int_{T^{-1}(E)\setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu$$

en otras palabras

$$\mu_1(E \setminus T^{-1}(E)) = \mu_1(T^{-1}(E) \setminus E). \tag{3.10}$$

Sabemos que $\frac{d\mu_1}{d\mu} < 1$ en $E \setminus T^{-1}(E)$, y $\frac{d\mu_1}{d\mu} \geq 1$ en $T^{-1}(E) \setminus E$. Observamos

$$\begin{aligned}
\mu(T^{-1}(E) \setminus E) &= \mu(T^{-1}(E)) - \mu(T^{-1}(E) \cap E) \\
&= \mu(E) - \mu(T^{-1}(E) \cap E) \\
&= \mu(E \setminus T^{-1}(E)).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\mu(E \setminus T^{-1}(E)) = 0$. De hecho, supongamos que $\mu(E \setminus T^{-1}(E)) \neq 0$. Tenemos

$$\mu_1(E \setminus T^{-1}(E)) = \int_{E\setminus T^{-1}(E)} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu < \int_{E\setminus T^{-1}(E)} 1\, d\mu = \mu(E \setminus T^{-1}(E)) \tag{3.11}$$

y

$$\mu(T^{-1}(E) \setminus E) = \int_{T^{-1}(E)\setminus E} 1\, d\mu \leq \int_{T^{-1}(E)\setminus E} \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu = \mu_1(T^{-1}(E) \setminus E). \tag{3.12}$$

De las ecuaciones (3.11) y (3.12), tenemos $\mu_1(E \setminus T^{-1}(E)) < \mu_1(T^{-1}(E) \setminus E)$ lo cual contradice (3.10). Por tanto, $\mu(E \setminus T^{-1}(E)) = \mu(T^{-1}(E) \setminus E) = 0$. Así,

$$\mu(T^{-1}(E) \triangle E) = \mu(T^{-1}(E) \setminus E) + \mu(E \setminus T^{-1}(E)) = 0$$

lo que significa $T^{-1}(E) = E$ μ-casi siempre. Como μ es ergódica entonces para el conjunto T-invariante E, tenemos $\mu(E) = 0$ ó $\mu(E) = 1$. Podemos descartar que $\mu(E) = 1$ pues si fuese verdad, tenemos

$$1 = \mu_1(X) = \int_X \frac{d\mu_1}{d\mu}\, d\mu < \int_X 1\, d\mu = \mu(X) = 1$$

que es una contradicción. Por tanto, $\mu(E) = 0$. Definamos el conjunto $F = \{x \in X : \frac{d\mu_1}{d\mu} > 1\}$, repitiendo el mismo argumento, obtenemos que $\mu(F) = 0$. Así, tenemos

$$\mu\left(\left\{x \in X : \frac{d\mu_1}{d\mu} = 1\right\}\right) = \mu(X \setminus (E \cup F)) = \mu(X) - \mu(E) - \mu(F) = 1$$

esto es $\frac{d\mu_1}{d\mu} = 1$ para μ-casi siempre, que es equivalente a $\mu = \mu_1$. Sabemos que $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ de donde $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Por lo tanto, μ es punto extremo de $\mathcal{M}_T$.

(d) Por el Teorema de Descomposición de Lebesgue (1.10), existen únicas medidas de probabilidad μ_1, μ_2 y un único $p \in [0,1]$ tales que $\mu = p\mu_1 + (1-p)\mu_2$ donde $\mu_1 \ll \nu$ y μ_2 es mutuamente singular a ν. Desde que $\mu \in \mathcal{M}_T$ y T_* es una transformación afín, tenemos

$$\mu = T_*\mu = T_*(p\mu_1 + (1-p)\mu_2) = pT_*\mu_1 + (1-p)T_*\mu_2.$$

Además, es claro que $T_*\mu_1 \ll T_*\nu = \nu$ y $T_*\mu_2$ es mutuamente singular a $T_*\nu = \nu$. Por la unicidad de la descomposición, $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_T$. Como μ es ergódica, entonces por el ítem (c), μ es un punto extremo de $\mathcal{M}_T$. Luego $p = 0$ ó $p = 1$. Si $p = 1$, entonces $\mu = \mu_1$ y $\mu \ll \nu$, luego podemos argumentar con $\frac{d\mu}{d\nu}$ como en (c), entonces tenemos $\mu = \nu$, lo que es una contradicción. Si $p = 0$, entonces $\mu = \mu_2$. Por lo tanto, μ es mutuamente singular a ν. □

Observación. De lo hecho en la Sección 1.3 del Capítulo 1, concluimos que el espacio $\mathcal{M}_T$ es un espacio de Baire.

Visto que sobre X consideramos la dinámica dada por cierta aplicación continua $T : X \to X$ y dado que $\mathcal{B}$ es generado por los conjuntos abiertos, T es medible con respecto a $\mathcal{B}$, de esta forma damos un ejemplo que se ajusta a lo dicho anteriormente.

Ejemplo 3.1. El mapa del gato de Arnold. Sea $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ el toro bidimensional. El mapa $T : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ definido por

$$T(x,y) = (2x + y(\text{mod } 1), x + y(\text{mod } 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (\text{mod } \mathbb{Z}^2)$$

es llamado el mapa del gato de Arnold. Este mapa está definido en el toro bidimensional por la aplicación $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, entonces T puede ser expresada como

$$T\left(e^{2\pi ix}, e^{2\pi iy}\right) = \left(e^{2\pi i(2x+y)}, e^{2\pi i(x+y)}\right).$$

La métrica en el toro $\mathbb{T}^2$ es la distancia Euclidiana en arcos, es claro que T es invertible y también continua, pues es una transformación lineal. Como vale lo mismo para T^{-1}, entonces T es un homeomorfismo.

3.3. Recurrencia y Teoremas Ergódicos

Uno de los enunciados más generales de la teoría ergódica es el teorema de recurrencia de Poincaré. Fue formulado y discutido por H. Poincaré en 1890 y es uno de los primeros resultados que utiliza un enfoque teórico de la medida en el estudio de sistemas dinámicos.

Teorema 3.13 (Teorema de Recurrencia de Poincaré)**.** *Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva medida definida en un espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Sea $B \in \mathcal{B}$ tal que $\mu(B) > 0$. Entonces casi todos los puntos de B retornan para B infinitas veces bajo iteraciones positivas de T, es decir, la órbita $\{T^n(x)\}_{n\geq 1}$ retorna a B infinitas veces.*

Demostración. Definamos E como el subconjunto de B formado por todos los elementos cuyas órbitas vuelven infinitas veces a B, esto es

$$E = \{x \in B : T^n(x) \in B \text{ para infinitos } n \geq 1\}.$$

Mostremos que $\mu(B \setminus E) = 0$. En efecto, definamos el nuevo conjunto

$$F = \{x \in B : T^n(x) \notin B \text{ para todo } n \geq 1\},$$

entonces $B \setminus E = \bigcup_{k=0}^{\infty}(T^{-k}(F) \cap B)$. Así, tenemos la siguiente estimativa

$$\mu(B \setminus E) = \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(T^{-k}(F) \cap B)\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(F)\right) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(T^{-k}(F)).$$

Como T preserva medida tenemos $\mu(F) = \mu(T^{-k}(F))$ para todo $k \geq 1$, entonces sólo necesitamos probar que $\mu(F) = 0$. Supongamos que para $n > m$ tenemos $T^{-m}(F) \cap T^{-n}(F) \neq \emptyset$. En efecto, dado $y \in T^{-m}(F) \cap T^{-n}(F)$, lo que implica $T^m(y) \in F$ y $T^n(y) = T^{n-m}(T^m(y)) \in F \subset B$, esto contradice la definición de F. Así, $T^{-m}(F) \cap T^{-n}(F) = \emptyset$. Supongamos que $\mu(F) > 0$, como la familia $\{T^{-k}(F)\}_{k \geq 0}$ es disjunta, tenemos

$$1 = \mu(X) \geq \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(F)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(T^{-k}(F)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(F) = \infty.$$

Desde que los términos de la suma tienen valor constante $\mu(F)$, lo que es una contradicción. Por tanto, $\mu(F) = 0$. □

Lo siguiente es un resultado muy importante en la Teoría Ergódica que fue demostrado inicialmente por George David Birkhoff en 1931.

Teorema 3.14 (Teorema Ergódico de Birkhoff). *Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación que preserva la medida μ. Entonces para cualquier función integrable $f : X \to \mathbb{R}$, el limite*

$$f^*(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x)),$$

existe para μ-casi todo punto $x \in X$. Además, f^* es una función integrable con

$$\int f^* \, d\mu = \int f \, d\mu \quad y \quad f^* \circ T = f^*.$$

Demostración. Ver Teorema (3.2.6) en el Capítulo 3 de [14], pp. 72-74. □

El siguiente resultado es una generalización del Teorema de Birkhoff.

Teorema 3.15. *Sea X un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ una aplicación continua. Entonces existe un conjunto medible $B \subset X$ con $\mu(B) = 1$ tal que*

$$f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x)),$$

para todo $x \in B$ y toda función continua $f : X \to \mathbb{R}$.

Demostración. Ver Teorema 3.2.6 en el Capítulo 3 de [14], pp. 72-74. □

Observación. El limite $f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^i(x))$ dado en el Teorema de Birkhoff (3.14) es llamado promedio temporal de f.

Definición 3.3. Sea una transformación medible $T : X \to X$, dado un conjunto medible $B \in X$ con $\mu(B) > 0$ y $x \in X$, definamos

$$\tau_n(x, B) = \frac{1}{n}\#\{0 \leq i \leq n-1 : T^i(x) \in B\} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_B(T^i(x)).$$

Denominamos como *tiempo promedio de visita de la órbita* de x a B al límite

$$\tau(x, B) = \lim_{n\to\infty} \tau_n(x, B).$$

Como el tiempo promedio de visita es definido como un límite, es natural preguntarnos si tal limite existe o no. Vemos claramente que ese limite existe para μ-casi todo punto $x \in X$, para toda probabilidad μ. Basta aplicar el Teorema de Birkhoff (3.14) para una función medible χ_B. Además,

$$\int \tau(x, B)\, d\mu = \int \chi_B\, d\mu \ \text{ y } \ \tau(x, B) = \tau(f(x), B).$$

Podemos usar el Teorema Ergódico de Birkhoff para estudiar la frecuencia con la que aparece un dígito dado en la expansión de números reales en fracciones continuas.

Ejemplo 3.2. Para Lebesgue - casi todo $x \in [0, 1]$, la frecuencia con la que aparece el número natural k, en la expansión en fracciones continuas de x es $\frac{1}{\log 2} \log\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$. En efecto, denotemos por λ a la medida de Lebesgue. Sea $X = [0, 1]$ y $\mathcal{B}$ el σ-álgebra de Borel en el intervalo, definimos el mapa de Gauss $T : X \to X$ por

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \bmod 1 & , \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & , \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

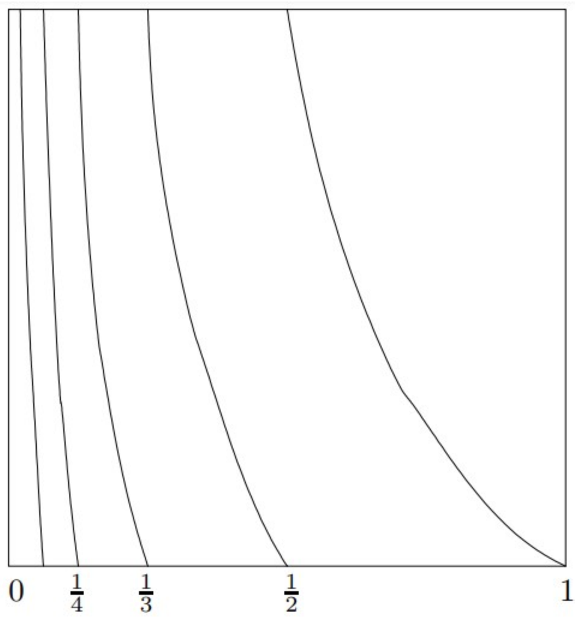

Figura 3.1: El gráfico del mapa de Gauss.

El mapa de Gauss no preserva la medida de Lebesgue, pero si la medida de Gauss μ definida por

$$\mu(B) = \frac{1}{\log 2} \int_B \frac{1}{1+x}\, dx.$$

Así, el mapa T es ergódico con respecto a μ. Las medidas λ y μ son equivalentes, es decir, poseen los mismo conjuntos de medida cero. Entonces λ-casi todo y μ-casi todo $x \in [0,1]$ es un número irracional y tiene una infinita expansión en fracciones continuas, o sea,

$$x = \cfrac{1}{x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cdots}}}$$

Por lo tanto, vemos que $T(x)$ tiene una expansión en fracciones continuas, dada por

$$T(x) = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots}}}$$

de modo que

$$\frac{1}{T(x)} = x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots}}$$

Por lo tanto, $x_1 = \lfloor 1/T(x) \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x. Más generalmente $x_n = \lfloor 1/T^n(x) \rfloor$. Fijamos $k \in \mathbb{N}$, notamos que x tiene una expansión en fracciones continuas. que comienza con el dígito k (esto es, $x_0 = k$), precisamente cuando $k = \lfloor 1/x \rfloor$. Es decir, $x_0 = k$ precisamente cuando

$$k \leq \frac{1}{x} < k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right].$$

Similarmente, considerando $x_n = k$, tenemos $T^n(x) \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Por lo tanto, para μ-casi todo $x \in [0,1]$ y sabiendo que T es ergódico, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\left\{0 \leq j \leq n-1 : x_j = k\right\} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\left\{0 \leq j \leq n-1 : T^j(x) \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \chi_{\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]}(T^j(x)) \\
&= \int \chi_{\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]} \, d\mu = \mu\left(\left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}\left[\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{\log 2}\left[\log{(k+1)^2} - \log(k+2)k\right] \\
&= \frac{1}{\log 2}\left[\log\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)\right].
\end{aligned}$$

Como μ y λ tienen los mismos conjuntos de medida cero, esto es válido para Lebesgue en casi todos los puntos.

CAPÍTULO 4

Propiedades Genéricas de Medidas Invariantes

En este capítulo, detallaremos las pruebas de los resultados obtenidos por Karl Sigmund en [11], esto es, daremos detalles de la demostración del Teorema (0.2), que da una caracterización del espacio de medidas invariantes para difeomorfismos Axioma A, donde se destacan algunos subconjuntos que, desde un punto de vista topológico, son grandes en este espacio. Para una mejor comprensión de la prueba, separamos el Teorema (0.2) en seis pequeños teoremas. Cabe destacar que no existen ejemplos explícitos de medidas que satisfacen el Teorema (0.2), es por ello que si se descubre uno de estos, puede ser considerado una tesis doctoral o un artículo importante.

En el capítulo anterior, se vio algunas propiedades del conjunto de las medidas de probabilidad en un espacio métrico compacto. Dentro de estas propiedades destacamos algunos subconjuntos que están asociados a la dinámica del espacio, el espacio de las medidas de probabilidad, medidas ergódicas, etc. Luego, considerando el caso especifico de aplicaciones que satisfacen la propiedad de especificación, se estudiará la distribución de un punto de vista topológico de ciertos subconjuntos de $\mathcal{M}_T$.

4.1. Medidas Invariantes

En esta sección, describiremos el conjunto de medidas que serán estudiadas a lo largo del presente capítulo. Sea (X, d) un espacio métrico compacto provisto de la σ-álgebra $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}$ y denotaremos por $\mathcal{M}$ al espacio de medidas de probabilidad definidas en el espacio medible $(X, \mathcal{B})$. Para ello, recordemos la definición de medida invariante.

Definición 4.1. Sea $T : X \to X$ una función medible, una medida $\mu \in \mathcal{M}$ es llamada *T-invariante* (o equivalentemente T es una transformación que preserva la medida μ), si $\mu(T^{-1}(B)) = \mu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. Denotaremos por $\mathcal{M}_T$ al conjunto de medidas de probabilidad T-invariantes.

Ejemplo 4.1 (Transformación Diádica)**.** Sea el círculo $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}$ y μ denota la medida de Lebesgue. Definamos la transformación diádica por $T(x) = 2x \pmod 1$, entonces μ es T-invariante. En efecto, denotamos por $\mathcal{A}$ al álgebra de uniones finitas de intervalos. Dado un intervalo $[a, b]$ tenemos

$$T^{-1}([a,b]) = \{x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} : T(x) \in [a,b]\} = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right]$$

como vemos en la siguiente figura.

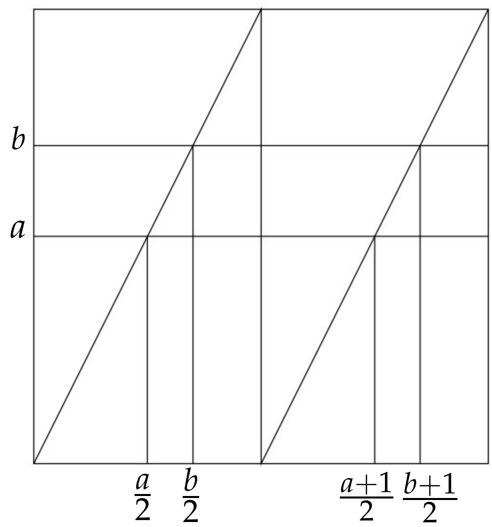

Figura 4.1: La preimagen de un intervalo bajo la transformación diádica.

Así,

$$\begin{aligned}\mu(T^{-1}([a,b])) &= \mu\left(\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]\cup\left[\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right]\right)\\ &= \frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{b+1}{2}-\frac{a+1}{2}\\ &= b-a=\mu([a,b]).\end{aligned}$$

Es decir, $\mu(T^{-1}([a,b])) = \mu([a,b])$, para cada $[a,b] \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ genera el σ-álgebra de Borel, entonces por la unicidad del Teorema de Extensión (1.3), tenemos que la medida de Lebesgue μ es T-invariante.

A continuación, daremos la definición de las medidas a ser estudiadas en la siguiente sección.

Definición 4.2. Sea la transformación medible $T : X \to X$ en el espacio $(X,\mathcal{B})$. Dado $x \in X$ un punto periódico para T de periodo p, la medida *soportada en la órbita de x* está definida por

$$\mu_x = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\delta_{T^i(x)},$$

donde $\delta_{T^i(x)}$ es el delta de Dirac en el punto $T^i(x)$. Denotaremos al conjunto de estas medidas como $\mathcal{M}_p$.

Proposición 4.1. *La medida μ_x soportada en la órbita del punto periódico x, de periodo p, es T-invariante.*

Demostración. Sea el conjunto medible $B \in \mathcal{B}$. Podemos escribir

$$\mu_x(B) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1}\delta_{T^i(x)}(B) = \frac{1}{p}\#\{0 \le i \le p-1 : T^i(x) \in B\},$$

para cada $B \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu_x(T^{-1}(B)) &= \frac{1}{p}\#\{0 \le i \le p-1 : T^i(x) \in T^{-1}(B)\}\\ &= \frac{1}{p}\#\{0 \le i \le p-1 : T^{i+1}(x) \in B\}\\ &= \frac{1}{p}\#\{1 \le i \le p : T^i(x) \in B\}.\end{aligned}$$

Como $T^p(x) = x$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\#\{1 \leq i \leq p : T^i(x) \in B\} &= \frac{1}{p}\#\{1 \leq i \leq p-1 : T^i(x) \in B\} \\
&= \mu_x(B) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{T^i(x)}(B) \\
&= \mu_x(B).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mu_x(T^{-1}(B)) = \mu_x(B)$, para todo $B \in \mathcal{B}$, esto es, μ_x es T-invariante. □

Observación. Siguiendo la notación de anterior y a partir de la Proposición dada anteriormente, tenemos $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_T$.

Definición 4.3. Sea una medida $\mu \in \mathcal{M}$. Decimos que μ es una medida *no atómica*, si $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in$ X. Denotaremos por $\mathcal{M}_n$ al conjunto de medidas no atómicas.

Observación. Decimos que $x \in X$ es un átomo para μ, si $\mu(\{x\}) > 0$. Entonces una medida no atómica es una medida sin átomos. Un ejemplo de este tipo de medidas es la medida de Lebesgue. También observamos que $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_T$.

Definición 4.4. Dado $\mu \in \mathcal{M}$. Decimos que μ es una medida *abierta*, si para todo conjunto abierto $A \subset X$, tenemos $\mu(A) > 0$. Al conjunto de todas las medidas abiertas la denotamos por $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$.

Observación. A partir de la definición anterior, observamos que, una medida abierta se comporta bien con la topología del espacio, pues desde un punto de vista topológico los conjuntos más relevantes son los abiertos. Además, claramente $\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}_T$.

Definición 4.5. Sea $(X, \mathcal{B}, \mu)$ el espacio de probabilidad y $T : X \to X$ una transformación que preserva medida. Decimos que μ es una *medida ergódica* (o que T es una transformación ergódica con respecto a μ), si siempre que $B \in \mathcal{B}$ satisface $T^{-1}(B) = B$, entonces $\mu(B) = 0$ ó $\mu(B) = 1$. Denotaremos por $\mathcal{M}_e$ al conjunto de todas las medidas ergódicas.

Proposición 4.2. *Sea μ_x la medida soportada en la órbita de un punto periódico x, de periodo p. Entonces μ_x es ergódico.*

Demostración. Dado $B \in \mathcal{B}$ tal que $T^{-1}(B) = B$, luego $T^{-k}(B) = B$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned}
\mu_x(B) &= \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{T^i(x)}(B) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_x(T^{-i}(B)) \\
&= \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_x(B) \\
&= \frac{1}{p}(p\delta_x(B)) = \delta_x(B).
\end{aligned}$$

Tenemos dos casos: Si $x \in B$, entonces $\delta_x(B) = 1$, luego $\mu_x(B) = 1$. Si $x \notin B$ tenemos que $\delta_x(B) = 0$, luego $\mu_x(B) = 0$. Por lo tanto, para cualquier $B \in \mathcal{B}$, tenemos que $\mu_x(B) = 0$ ó $\mu_x(B) = 1$, lo que significa que μ_x es ergódico. ◻

Observación. A partir de la proposición anterior, tenemos $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_e \subset \mathcal{M}_T$.

Definición 4.6. Sea $T : X \to X$ la transformación que preserva medida del espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Decimos que la medida μ es *fuertemente mezclante* (o que la transformación T es fuertemente mezclante), si para todo par de conjuntos $A, B \in \mathcal{B}$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

El conjunto de todas las medidas fuertemente mezclantes es denotado por $\mathcal{M}_s$.

Observación. Las medidas fuertemente mezclantes son ergódicas, pues dado $A \in \mathcal{B}$ con $T^{-1}(A) = A$, entonces $T^{-n}(A) = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, aplicando la definición anterior a los conjuntos A y A^c, tenemos

$$\begin{aligned}
\mu(A)\mu(A^c) &= \lim_{n\to\infty} \mu(T^{-n}(A) \cap A^c) \\
&= \mu(A \cap A^c) = 0
\end{aligned}$$

Luego $\mu(A) = 0$ ó $\mu(A^c) = 0$. Observamos $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{M}_e \subset \mathcal{M}_T$.

Definición 4.7. Sea $T : X \to X$ una transformación que preserva medida en el espacio de probabilidad $(X, \mathcal{B}, \mu)$, entonces $h_\mu(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(\mathcal{P}, T)$, donde el supremo es tomado sobre todas las particiones con entropía finita, es llamado la *entropía métrica* de T. Denotamos por $\mathcal{M}_z$ al conjunto de medidas tales que $h_\mu(T) = 0$.

Proposición 4.3. *Sea μ_x una medida soportada en la órbita de un punto periódico x, de periodo p. Entonces la entropía métrica asociada a μ_x es igual a cero, es decir, $h_{\mu_x}(T) = 0$.*

Demostración. Sea $\mathcal{P}$ cualquier partición medible finita de X. Notemos que la medida invariante μ_x soportada en una órbita periódica sólo toma un número finito de valores, consecuentemente la entropía

$$H_{\mu_x}\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{P})\right)$$

también solo toma un número finito de valores, luego

$$h_{\mu_x}(\mathcal{P}, T) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_{\mu_x}\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k}(\mathcal{P})\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$h_{\mu_x}(T) = \sup_{\mathcal{P}} h_{\mu_x}(\mathcal{P}, T) = 0.$$

$\square$

Observación. De la proposición anterior, tenemos que $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_z \subset \mathcal{M}_T$.

4.2. Caracterización de Medidas Invariantes

En esta sección, se va a detallar la demostración del Teorema 0.2, donde daremos una caracterización topológica del conjunto de medidas T-invariantes $\mathcal{M}_T$. Para una mejor comprensión vamos a dividir este resultado en seis pequeños teoremas. Las demostraciones de los mismos pueden ser vistas en [11]. Destacamos que no existen ejemplos de medidas invariantes que satisfacen el Teorema 0.2, este resultado sólo garantiza la existencia de estas medidas, más no da una forma de construir los ejemplos. También podemos mencionar que si estos ejemplos son encontrados, estas pueden llegar a ser una tesis doctoral o un artículo relevante.

En lo que sigue del texto, consideramos X como una variedad compacta sin frontera y $T : X \to X$ un difeomorfismo Axioma A y C-denso, tal que satisface la propiedad de especificación. Sean los subconjuntos $\mathcal{M}_p$, $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{M}_e$, $\mathcal{M}_s$, $\mathcal{M}_z$, del espacio de medidas de probabilidad T-invariantes definidos anteriormente.

Teorema 4.4. *$\mathcal{M}_p$ es denso en $\mathcal{M}_T$.*

El siguiente lema nos permitirá mostrar el Teorema (4.4) y también otros resultados dados en esta sección. El Lema muestra que para cualquier vecindad en $\mathcal{M}_T$, siempre podemos encontrar un punto periódico cuya medida correspondiente pertenece a esta vecindad. Además, el Lema nos dice que este punto puede ser escogido en cualquier vecindad del espacio X y de periodo tan grande como queramos. Tenemos la libertad de escoger este punto tal que su órbita se aproxime a una órbita fijada en X durante una cantidad finita y arbitraria de iteraciones. La prueba de este Lema esta inspirada en lo expuesto por Oxtoby en [8].

Lema 4.5. *Supongamos que T es C-denso. Sea V una vecindad de $\mu \in \mathcal{M}_T$. Dados $\rho > 0$ y un entero positivo N_0. Entonces existe un entero $N > 0$ tal que para todo $y \in X$ y todos los enteros $p \geq N$, existe un punto $x \in X$ de periodo p tal que $\mu_x \in V$ y $d(T^k(x), T^k(y)) < \rho$ para $0 \leq k < N_0$.*

Demostración. Denotamos por $V = V_\mu(f_1, \ldots, f_r, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ y $f_1, \ldots, f_r \in C(X)$. Definamos

$$K = \max_{1 \leq l \leq r} \|f_l\|.$$

Desde que X es compacto, entonces toda función continua es uniformemente continua. Es decir las funciones $f_l : X \to \mathbb{R}$ para $l = 1, \ldots, r$ es uniformemente continua. Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que dados $y_1, y_2 \in X$ e $d(y_1, y_2) < \delta$ implica

$$|f_l(y_1) - f_l(y_2)| < \frac{\varepsilon}{4}, \tag{4.1}$$

para cada $l = 1, \ldots, r$. Tomemos $\delta < \rho$.

Como X es un espacio métrico compacto y $T : X \to X$ es una aplicación medible, entonces por el Teorema Ergódico de Birkhoff generalizado (3.15), existe un conjunto medible $Q \subset X$ con $\mu(Q) = 1$ tal que

$$f_l^*(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_l\left(T^i(x)\right),$$

existe, para cada $x \in Q$ y todo $l = 1, \dots, r$. Además,

$$\int_Q f_l^* \, d\mu = \int f_l \, d\mu. \tag{4.2}$$

Sea $Q_1, \dots, Q_s$ una partición de Q en conjuntos de Borel no vacíos tal que $f_l^*|_{Q_j}$ tiene oscilación menor que $\frac{\varepsilon}{4}$, o sea,

$$\sup \{|f_l^*(x) - f_l^*(y)| : x, y \in Q_l\} < \frac{\varepsilon}{4},$$

para cada $l = 1, \dots, r$ y $j = 1, \dots, s$. Sea $x_j \in Q_i$, usando (4.2), tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q f_l^* \, d\mu - \sum_{j=1}^{s} \mu(Q_j) f_l^*(x_j) \right| &= \left| \int f_l \, d\mu - \sum_{j=1}^{s} \mu(Q_j) f_l^*(x_j) \right| \\
&= \left| \int f_l \, d\mu - \int \sum_{j=1}^{s} f_l^*(x_j) \chi_{Q_j} \, d\mu \right| \\
&\leq \int \left| f_l^* - \sum_{j=1}^{s} f_l^*(x_j) \chi_{Q_j} \right| d\mu < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Usando la definición de limite en (4.2), para nuestro $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_1$, cada $1 \leq l \leq r$ y $1 \leq j \leq s$, tenemos

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_l(T^i(x_j)) - f_l^*(x_j) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.4}$$

Sea $N_2 \geq 1$ de tal manera que podemos escribir cada $m \geq N_2$ de la forma $m = \sum_{j=1}^{s} m_j$, tal que para todo $1 \leq j \leq s$, obtenemos

$$\left| \frac{m_j}{m} - \mu(Q_j) \right| \leq \frac{\varepsilon}{12Ks}. \tag{4.5}$$

Podemos interpretar esta ultima afirmación de la siguiente manera:

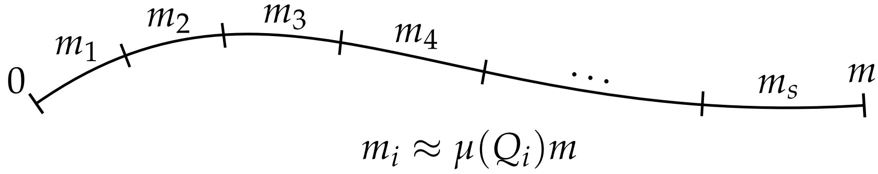

Figura 4.2: División del entero m en partes proporcionales.

Finalmente, fijamos $N_3 \geq 1$ con $N_3 \geq \max\{N_1, N_2\}$ tal que para cada $m \geq N_3$, tenemos

$$\frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{N_0 + M(\delta) + mM(\delta) + mN_3} < \frac{\varepsilon}{12K} \tag{4.6}$$

donde $M(\delta)$ es dado por el Teorema de Especificación de Bowen.

Afirmamos que $N = N_0 + N_3(N_3 + M(\delta)) + N_0 + M(\delta)$ satisface las condiciones de este Lema. En efecto, dado $p \geq N$ podemos escribir $p = m(N_3 + M(\delta)) + N_0 + M(\delta) + q$, donde $m \geq M_3$ y $0 \leq q < N_3 + M(\delta)$. Observamos

$$\begin{aligned} p - mN_3 = mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + q &< N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3 \\ \Rightarrow \frac{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + q}{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + mN_3} &< \frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + mN_3} \\ \Rightarrow \frac{p - mN_3}{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + mN_3 + q} &< \frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + mN_3} \\ \Rightarrow \frac{p - mN_3}{p} &< \frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + mN_3}. \end{aligned}$$

Usando (4.6),

$$\frac{p - mN_3}{p} < \frac{N_0 + 2M(\delta) + mM(\delta) + N_3}{mM(\delta) + N_0 + M(\delta) + mN_3} < \frac{\varepsilon}{12K}. \tag{4.7}$$

Ahora, construiremos una especificación (γ, P) como sigue: sea

$$\gamma = \left\{ I_0, I_1^1, I_2^1, \ldots, I_{m_1}^1, I_1^2, I_2^2, \ldots, I_{m_2}^2, \ldots, I_1^s, \ldots, I_{m_s}^s \right\}$$

donde $I_0 = \{0, 1, \ldots, N_0 - 1\}$ y los I_k^j son las cadenas de longitud N_3 en el lugar

$$N_0 + M(\delta) + (N_3 + M(\delta)) \left(\sum_{i=0}^{j-1} m_i + (k-1) \right).$$

Así, γ es $M(\delta)$-alejada con una longitud dada por $L(\gamma) = N_0 + m(N_3 + M(\delta))$. Sea P una aplicación que envía los elementos de I_0 sobre $y, T(y), \ldots, T^{N_0-1}(y)$ y los elementos de I_k^j sobre $x_j, T(x_j), \ldots, T^{N_3-1}(x_j)$, en ese orden.

Sabemos que $p \geq L(\gamma) + M(\delta)$, entonces por el Teorema de Especificación (2.4), existe un punto periódico x de periodo p tal que $x \in U(\gamma, \delta, P)$. Además, para cada $0 \leq k \leq N_0$, tenemos $d(T^k(x), T^k(y)) < \delta < \rho$. Por tanto, solo necesitamos probar que $\mu_x \in V$. En efecto, sea $f \in \{f_1, \ldots, f_r\}$, entonces

$$\int f \, d\mu_x = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} f(T^i(x)). \tag{4.8}$$

Escribimos $I = I_1^1 \cup I_2^1 \cup \cdots \cup I_{m_1}^1 \cup I_1^2 \cup I_2^2 \cup \cdots \cup I_{m_2}^2 \cup \cdots \cup I_1^s \cup \cdots \cup I_{m_s}^s$. Este conjunto tiene mN_3 elementos, todos contenidos en el conjunto $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Como $\|f\| \leq K$, usando (4.7),

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} f(T^i(x)) - \frac{1}{p}\sum_{i\in I} f(T^i(x))\right| &= \left|\frac{1}{p}\sum_{i\in\{0,1,\ldots,p-1\}\setminus I} f(T^i(x))\right| \\
&\leq \frac{1}{p}\sum_{i\in\{0,1,\ldots,p-1\}\setminus I} \|f\| \\
&= \frac{p-mN_3}{p}\|f\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{12} \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Por la misma razón tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{p}\sum_{i\in I} f(T^i(x)) - \frac{1}{mN_3}\sum_{i\in I} f(T^i(x))\right| &\leq \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{mN_3}\right| mN_3\|f\| \\
&= \frac{p-mN_3}{p}\|f\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{12}. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Sabiendo que i es el n-ésimo elemento de I_k^j, entonces $d(T^i(x), T^{n-1}(x_j)) < \delta$ pues $x \in U(\gamma, P, \delta)$. De la desigualdad (4.1), tenemos $|f(T^i(x)) - f(T^{n-1}(x_j))| < \frac{\varepsilon}{4}$, luego

$$\left|\frac{1}{N_3}\sum_{i\in I_k^j} f(T^i(x)) - \frac{1}{N_3}\sum_{i=0}^{N_3-1} f(T^i(x_j))\right| \leq \frac{1}{N_3}\sum_{i=0}^{N_3-1} |f(T^i(x)) - f(T^i(x_j))| < \frac{\varepsilon}{4},$$

para cada $j = 1, \ldots, s$ y todo $k = 1, \ldots, m_j$. Como $N_3 \geq N_1$, de la desigualdad (4.4) y la inecuación anterior, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{N_3}\sum_{i\in I_k^j} f(T^i(x)) - f^*(x_j)\right| &\leq \left|\frac{1}{N_3}\sum_{i\in I_k^j} f(T^i(x)) - \frac{1}{N_3}\sum_{i\in I_k^j} f(T^i(x_j))\right| + \\
&\quad + \left|\frac{1}{N_3}\sum_{i\in I_k^j} f(T^i(x_j)) - f^*(x_j)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{1}{mN_3}\sum_{i\in I} f(T^i(x)) - \sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{m}f^*(x_j)\right| &= \left|\frac{1}{mN_3}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}\sum_{i=0}^{N_3-1} f(T^i(x)) - \sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{m}f^*(x_j)\right| \\
&= \left|\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{m_j}\left(\frac{1}{N_3}\sum_{i=0}^{N_3-1} f(T^i(x)) - f^*(x_j)\right)\right| \\
&< \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{s} m_j\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Por (4.5), obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{s}\frac{m_j}{m}f^*(x_j) - \sum_{j=1}^{s}\mu(Q_j)f^*(x_j)\right| &\leq \|f^*\|\sum_{j=1}^{s}\left|\frac{m_j}{m} - \mu(Q_j)\right| \\
&\leq sK\frac{\varepsilon}{12Ks} = \frac{\varepsilon}{12}. \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Así, combinando las desigualdades (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) y (4.3), obtenemos

$$\left|\int f\,d\mu_x - \int f\,d\mu\right| < \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

para todo $f \in \{f_1, \ldots, f_r\}$. Por lo tanto, $\mu_x \in V$ y el Lema esta mostrado. □

El Lema (4.5), como se verá en los siguientes teoremas a ser mostrados, nos permitirá expresar el conjunto de medidas no atómicas y el conjunto de medidas que son positivas en todo conjunto abierto de X, como el complemento de una unión contable de cerrados con interior vacío, es decir, el complemento de un conjunto de primera categoría.

Teorema 4.6. *$\mathcal{M}_n$ es residual en $\mathcal{M}_T$.*

Demostración. Denotamos por $\mathcal{M}_n$ al conjunto de medidas no atómicas. Sabemos que una medida μ es atómica, si $\mu(\{x\}) > 0$, para algún $x \in X$, en otras palabras, existe $\tau > 0$ tal que $\mu(\{x\}) \geq \tau$ para algún $x \in X$. Definamos el conjunto de estas medidas por

$$C(\tau) = \{\mu \in \mathcal{M}_T : \mu(\{x\}) \geq \tau \text{ para algún } x \in X\}.$$

Mostremos lo siguiente

Primer paso: $C(\tau)$ *es cerrado.* Sea $\mu \in \overline{C(\tau)}$, entonces existe $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $C(\tau)$ tal que μ_n converge para una medida $\mu \in \mathcal{M}_T$ en la topología débil-*. Como $\mu_n \in C(\tau)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces dado $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in X$ tal que $\mu_n(\{x_n\}) \geq \tau$. Así, tenemos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X, pero como X es compacto existe una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X, o sea, existe $x_0 \in X$ tal que

$$\lim_k x_{n_k} = x_0.$$

Dado $r \in \mathbb{N}$, sea $\overline{B_{\frac{1}{r}}(x_0)}$ la bola cerrada de radio $\frac{1}{r}$ y centro x_0, entonces para $\varepsilon = \frac{1}{r} > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, tenemos que $|x_n - x_0| < \varepsilon$, esto es,

$$x_n \in B_{1/r}(x_0)\,, \forall\, n \geq N.$$

Luego

$$\tau \leq \mu_n(\{x_n\}) \leq \mu_n(\overline{B_{1/r}(x_0)}),\ \forall n \geq N.$$

Así, tenemos

$$\limsup_n \mu_n(\overline{B_{1/r}(x_0)}) \geq \tau,\ \text{para cada } r \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que μ_n converge débilmente a μ en la topología débil-*, luego por el Teorema (3.5), obtenemos

$$\mu(\overline{B_{1/r}(x_0)}) \geq \limsup_n \mu_n(\overline{B_{1/r}(x_0)}) \geq \tau,\ \text{para todo } r \in \mathbb{N}.$$

Observamos $\overline{B_1(x_0)} \supset \overline{B_{1/2}(x_0)} \supset \ldots$ y $\mu\left(\overline{B_1(x_0)}\right) < \infty$, entonces por la continuidad desde arriba para medidas (1.2), obtenemos

$$\begin{aligned} \mu(\{x_0\}) &= \mu\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \overline{B_{1/r}(x_0)}\right) \\ &= \lim_{r\to\infty} \overline{B_{1/r}(x_0)} \geq \tau. \end{aligned}$$

Así, $\mu(\{x_0\}) \geq \tau$ para $x_0 \in X$. Luego, $\mu \in C(\tau)$.

Segundo paso: $C(\tau)$ *es denso en ninguna parte* . Tenemos que mostrar que $(\overline{C(\tau)})^\circ = \emptyset$, o sea, el conjunto

$$\bigcup\left\{V \subset \mathcal{M}_T : V \text{ es abierto y } V \subset \overline{C(\tau)}\right\} = \emptyset.$$

Supongamos por absurdo, que existe un conjunto abierto $V \subset \overline{C(\tau)}$. Luego por el Lema (4.5), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $p \geq N$ (escogemos p primo tal que $1/p < \tau$), existe $x \in X$ de periodo p de modo que $\mu_x \in V$. Como p es primo entonces p es el mínimo periodo de x. Así, cada punto de la órbita de x tiene una medida μ_x igual a $1/p$, esto es,

$$\mu_x\left(\{T^j(x)\}\right) = \frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} \delta_{T^i(x)}\left(\{T^j(x)\}\right),\ j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Como $\frac{1}{p} < \tau$ y $\mu_x\left(\{T^j(x)\}\right) = \frac{1}{p}$,para cada $j = 0, 1, \ldots, p-1$, tenemos $\mu_x \notin C(\tau)$, lo que contradice el hecho que $\mu_x \in V$.

Así, tenemos que el conjunto $B = \bigcup_{r=1}^{\infty} C(1/r)$ es una unión de conjuntos cerrados tal que cada $C(1/r)$ es denso en ninguna parte, o sea, B es un conjunto de primera categoría en $\mathcal{M}_T$. Luego el complemento de B es residual en $\mathcal{M}_T$, desde que $\mathcal{M}_T$ es un espacio métrico. El complemento de B es ni más ni menos el conjunto de medidas no atómicas $\mathcal{M}_n$, más precisamente

$$B^c = \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} C(1/r)\right)^c = \bigcap_{r=1}^{\infty} (C(1/r))^c = \mathcal{M}_n.$$

Así, $\mathcal{M}_n$ es residual en $\mathcal{M}_T$. □

Teorema 4.7. *$\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ es residual en $\mathcal{M}_T$.*

Demostración. Denotamos por $\mathcal{M}_{\mathcal{D}} \subset \mathcal{M}_T$ al conjunto de medidas que son positivas en todos los conjuntos abiertos en X. Entonces una medida $\nu \notin \mathcal{M}_{\mathcal{D}}$, si $\nu(G) = 0$ para algún abierto $G \subset X$. Luego denotamos al conjunto de estas medidas por

$$D(G) = \{\nu \in \mathcal{M}_T : \nu(G) = 0 \text{ para algún abierto } G \subset X\}.$$

Primer paso: *$D(G)$ es cerrado.* Sea $\nu \in \overline{D(G)}$, entonces existe una sucesión $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de medidas en $D(G)$ tal que ν_n converge a una medida $\nu \in \mathcal{M}_T$ en la topología débil-*. Luego por el Teorema (3.5), dado el abierto G, tenemos

$$\nu(G) \leq \liminf_n \nu_n(G) = 0 \Rightarrow \nu(G) = 0.$$

Por tanto, $\nu \in D(G)$.

Segundo paso: *$D(G)$ es denso en ninguna parte.* Mostremos que $(\overline{D(G)})^\circ = \emptyset$, es decir,

$$\bigcup\left\{U \subset \mathcal{M}_T : U \text{ es abierto y } U \subset \overline{D(G)}\right\} = \emptyset.$$

Supongamos por absurdo, que existe un conjunto abierto $U \subset \overline{D(G)}$. Sea $y \in G$, luego como G es abierto, existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho(y) \subset G$. Aplicando el Lema (4.5) con $N_0 = 1$, existe un entero $N > 0$ tal que para todo $y \in X$ y todo entero $p' \geq N$, existe un punto $x \in X$ de periodo p', de modo que $\mu_x \in U$ y $d(x,y) < \rho$. Así, desde que $B_\rho(y) \subset G$, tenemos que $x \in G$. Luego $\mu_x(G) > 0$. Por tanto, $\mu_x \notin D(G)$, lo que es una contradicción con $\mu_x \in V$. Luego $D(G)$ es denso en ninguna parte.

Sea $\{G_r\}_{r=1}^\infty$ una base contable de conjuntos abiertos del conjunto métrico compacto X. Observamos que el conjunto $C = \bigcup_{r=1}^\infty D(G_r)$ es de primera categoría. Luego su complemento es un conjunto residual en $\mathcal{M}_T$. Pero el complemento no es otra cosa que $\mathcal{M}_\mathcal{D}$, el conjunto de medidas $\mu \in \mathcal{M}_T$ que son positivas en todos los conjuntos abiertos en X, en otras palabras,

$$C^c = \left(\bigcup_{r=1}^\infty D(G_r)\right)^c = \bigcap_{r=1}^\infty (D(G_r))^c = \mathcal{M}_\mathcal{D}.$$

Por tanto, $\mathcal{M}_\mathcal{D}$ es un conjunto residual en $\mathcal{M}_T$. □

El siguiente teorema muestra que las medidas ergódicas para un sistema con especificación son abundantes.

Teorema 4.8. *$\mathcal{M}_e$ es residual en $\mathcal{M}_T$.*

Demostración. Sabemos que las medidas del conjunto $\mathcal{M}_p$ son ergódicos, por el Teorema (4.4), tenemos que el conjunto $\mathcal{M}_p$ es denso en $\mathcal{M}_T$, o sea, $\overline{\mathcal{M}_p} = \mathcal{M}_T$. Sabemos que las medidas soportadas en la órbita de un punto periódico son ergódicas, es decir, $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_e$, entonces $\mathcal{M}_e$ es denso en $\mathcal{M}_T$. De hecho, como $\mathcal{M}_e \subset \mathcal{M}_T$ y $\mathcal{M}_T$ es un espacio métrico compacto, por consecuencia cerrado, tenemos

$$\overline{\mathcal{M}_e} \subset \overline{\mathcal{M}_T} = \mathcal{M}_T.$$

Recíprocamente, tenemos $\mathcal{M}_T \subset \overline{\mathcal{M}_p} \subset \overline{\mathcal{M}_e}$, entonces $\mathcal{M}_e$ es denso en $\mathcal{M}_T$. Por la Proposición (2.5) del Capítulo II de [7], tenemos, $\mathcal{M}_e$ es el conjunto de puntos extremales del espacio métrico compacto convexo $\mathcal{M}_T$. Así, $\mathcal{M}_e$ debe ser un conjunto G_δ, o sea, es una intersección contable de abiertos, como puede ser visto en [8]. Por lo tanto, $\mathcal{M}_e$ es residual. □

Teorema 4.9. *$\mathcal{M}_s$ es de primera categoría en $\mathcal{M}_T$.*

Demostración. Este Teorema a sido demostrado por Parthasarathy [9] para el caso de automorfismos shift de Bernoulli. La demostración sigue siendo válida siempre que X sea un espacio métrico compacto y $\mathcal{M}_p$ sea denso en $\mathcal{M}_e$. Por tanto el Teorema (4.4) implica el Teorema (4.9). □

El siguiente Lema, nos permitirá mostrar que $\mathcal{M}_z$ contiene un conjunto residual en $\mathcal{M}_T$.

Lema 4.10. *Sea $A \neq X$ un conjunto cerrado en X tal que $T(A) \subset A$ ó $T^{-1}(A) \subset A$. Entonces existe un conjunto residual $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}_T$ tal que $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_T$ es denso en $\mathcal{M}_T$ y $\mu(A) = 0$, se cumple para todo $\mu \in \mathcal{M}'$.*

Demostración. Denotamos el conjunto cerrado B como

$$B = \bigcap_{n\geq 0} T^n(A) \;\text{ ó }\; B = \bigcap_{n\geq 0} T^{-n}(A)$$

según tengamos el caso usaremos $T(A) \subset A$ ó $T^{-1}(A) \subset A$ y tendremos que B es invariante bajo T. Definamos el conjunto

$$\mathcal{M}_B = \{\mu \in \mathcal{M}_T : \mu(B) = 1\}$$

el cual es un conjunto cerrado en $\mathcal{M}_T$. De hecho, dado $\nu \in \overline{\mathcal{M}_B}$, entonces existe una sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_B$ tal que μ_n converge a $\nu \in \mathcal{M}_T$ en la topología débil-*. Luego usando el Teorema (3.5), tenemos

$$\begin{aligned} \nu(B) \geq \limsup_n \mu_n(B) = 1 \\ \Rightarrow \; \nu(B) \geq 1. \end{aligned}$$

Entonces $\nu \in \mathcal{M}_B$. Por otro lado, para toda medida invariante,

$$\mu \in \mathcal{M}' = \mathcal{M}_e \cap (\mathcal{M}_T \setminus \mathcal{M}_B).$$

Tenemos $\mu(B) < 1$ y como B es invariante, obtenemos $\mu(B) = 0$. Afirmamos que $\mu(A) = 0$. En efecto, supongamos que $T(A) \subset A$, luego

$$\cdots \subset T^n(A) \subset T^{n-1}(A) \subset \cdots \subset T(A) \subset A.$$

Además, como $\mu(A) < \infty$, entonces por la continuidad desde arriba para medidas (1.2), tenemos

$$\mu(B) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} T^n(A)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(T^n(A)) = 0.$$

Como μ es T-invariante, entonces $\mu(A) = \mu(T^n(A))$ para todo $n \geq 0$, luego $\mu(A) = 0$. Si $T^{-1}(A) \subset A$, mediante un proceso análogo a lo anterior, tenemos $\mu(A) = 0$, lo que muestra la afirmación.

Desde que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_e \cap (\mathcal{M}_T \setminus \mathcal{M}_B)$, por el Teorema (4.8) vemos que $\mathcal{M}'$ es un conjunto G_δ, y por el Lema (4.5), tenemos $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_p$ es denso en $\mathcal{M}_T$. Por tanto, $\mathcal{M}'$ es un conjunto residual. □

Teorema 4.11. *$\mathcal{M}_z$ contiene un conjunto residual en $\mathcal{M}_T$.*

Demostración. En [1] Rufus Bowen muestra que existe una partición de Markov para el difeomorfismo Axioma A de Smale $T : X \to X$. En otras palabras, existe una clase $\mathscr{C} = \{E_k\}_{k=0}^r$ de conjuntos cerrados en X, tal que se cumplen las siguientes propiedades:

(a) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^r E_k = X$.

(b) Para todo $k \neq l$ tenemos que $E_k \cap E_l \subset \partial E_k \cap \partial E_l$, es decir, los elementos de $\mathscr{C}$ coinciden solo en sus fronteras.

(c) Para cada sucesión bilateral $\{E_{k_i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de elementos de $\mathscr{C}$, tenemos que $\displaystyle\bigcap_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}(E_{k_i})$ es como máximo un punto.

(d) Dado cualquier índice k, podemos escribir cada ∂E_k como la unión de dos conjuntos cerrados $\partial^s E_k$ y $\partial^u E_k$, esto es $\partial E_k = \partial^s E_k \cup \partial^u E_k$, de tal forma que si $\partial^s\mathscr{C} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^r \partial^s E_k$ y $\partial^u\mathscr{C} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^r \partial^u E_k$, tenemos que

$$T(\partial^s\mathscr{C}) \subset \partial^s\mathscr{C} \quad \text{y} \quad T^{-1}(\partial^u\mathscr{C}) \subset \partial^u\mathscr{C}.$$

Entonces usando el Lema (4.10), existe un conjunto residual denotado por $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}_T$ tal que $\mathcal{M}' \cap \mathcal{M}_p$ es denso en $\mathcal{M}_T$ y para todo $\mu \in \mathcal{M}'$, tenemos

$$\mu(\partial^s \mathscr{C}) = \mu(\partial^u \mathscr{C}) = 0.$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que el conjunto $\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ es un conjunto G_δ denso en $\mathcal{M}'$. Antes de eso, observamos que el conjunto

$$\mathcal{M}' = \{\mu \in \mathcal{M}_T : \mu(A) = 0, \forall\, A \text{ cerrado e invariante }\}$$

es cerrado. En efecto, dado un conjunto cerrado e invariante A y $\mu \in \overline{\mathcal{M}'}$, entonces existe una sucesión $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_T$ tal que μ_n converge a μ en la topología débil-*, entonces para A, tenemos

$$\begin{aligned} \mu(A) &\geq \limsup_n \mu_n(A) = 0 \\ \Rightarrow \mu(A) &\geq 0. \end{aligned}$$

Luego $\mu(A) = 0$ ($A = \partial^s \mathscr{C}$ ó $A = \partial^u \mathscr{C}$), implica $\mu \in \mathcal{M}'$. Entonces $\mathcal{M}'$ es cerrado. A continuación mostremos los siguientes pasos:

Primer paso: $\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ *es denso en* $\mathcal{M}'$. Sabemos que las medidas invariantes de probabilidad μ_x que son soportadas en una órbita periódica son medidas con respecto a la cual T tiene entropía cero, es decir, $\mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_z$. Por otro lado $\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}'$ es denso en $\mathcal{M}'$, o sea, $\overline{\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}'} = \mathcal{M}'$. A partir de estas dos afirmaciones, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_p \subset \mathcal{M}_z &\Rightarrow \mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}' \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_p \cap \mathcal{M}'} \subset \overline{\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'} \\ &\Rightarrow \mathcal{M}' \subset \overline{\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, desde que $\mathcal{M}'$ es cerrado, observamos

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}' &\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'} \subset \overline{\mathcal{M}'} \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'} \subset \mathcal{M}'. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overline{\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'} = \mathcal{M}'$, es decir, $\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ es denso en $\mathcal{M}'$.

Segundo paso: *$\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{M}'$.* Para cualquier $\mu \in \mathcal{M}_T$ y toda partición μ-medible $\mathscr{C}$ de X, denotamos por $h_\mu(\mathscr{C})$, $h_\mu(\mathscr{C}, T)$ y $h_\mu(T)$, a la entropía de $\mathscr{C}$, la entropía de T con respecto a la partición $\mathscr{C}$ y la entropía métrica de T, respectivamente.

Observamos que cada $\mu \in \mathcal{M}'$, $\mathscr{C}$ es una partición μ-medible. En efecto, tenemos

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{r} E_k\right) = \mu(X) = 1.$$

Para todo $k \neq l$, obtenemos

$$\begin{aligned}\mu(E_k \cap E_l) &\leq \mu(\partial E_k \cap \partial E_l)\\ &\leq \mu(\partial^s\mathscr{C} \cup \partial^u\mathscr{C})\\ &= \mu\left(\partial^s\mathscr{C}\right) + \mu(\partial^u\mathscr{C}) = 0.\end{aligned}$$

Además, por la propiedad (c), tenemos que $\mathscr{C}$ es un generador con respecto a T (una partición α es llamada *generador* con respecto a T, si $\sigma(\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}\alpha) = \mathcal{F}$, donde $\mathcal{F}$ es el σ-álgebra en X y $\sigma(\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^{-i}\alpha)$ es la menor σ-algebra que contiene todos los elementos de las particiones de la forma $\bigvee_{i=n}^{m} T^{-i}\alpha$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}$ con $n \leq m$). Luego por el Teorema de Kolmogorov-Sinai (2.7), una medida $\mu \in \mathcal{M}'$ pertenece a el conjunto de medidas $\mathcal{M}_z$, si y solamente si, $h_u(\mathscr{C}, T) = 0$, esto es,

$$\lim_n \frac{1}{2n+1} h_\mu\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) = 0.$$

Debido a que este límite siempre existe, podemos reemplazar lím por lím sup en esta ecuación, obteniendo

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}' &= \left\{\mu \in \mathcal{M}' : \limsup_n \frac{1}{2n+1} h_\mu\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) = 0\right\}\\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty}\left\{\mu \in \mathcal{M}' : \limsup_n \frac{1}{2n+1} h_\mu\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) < \frac{1}{r}\right\}\\ &= \bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left\{\mu \in \mathcal{M}' : \frac{1}{2n+1} h_\mu\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) < \frac{1}{r}\right\}.\end{aligned}$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, basta probar que el conjunto

$$\mathscr{A}_\varepsilon = \left\{\mu \in \mathcal{M}' : h_\mu\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) \geq \varepsilon\right\}$$

es cerrado en $\mathcal{M}'$ con la topología débil-*. En efecto, dado $\mu \in \overline{\mathscr{A}_\varepsilon}$, existe una sucesión $\{\mu_m\}_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}'$ tal que μ_m converge a $\mu \in \mathcal{M}'$ en la topología débil *, luego para cada $m \in \mathbb{N}$, las medidas μ_m cumplen

$$h_{\mu_m}\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) \geq \varepsilon,$$

esto es,

$$-\sum_{k_{-n},\ldots,k_n} \mu_m\left(\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})\right) \log \mu_m\left(\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})\right) \geq \varepsilon.$$

Como $\mu \in \mathcal{M}'$, tenemos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})$ son conjuntos μ-continuos en el sentido de que las μ-medidas de sus fronteras son cero. Como μ_m converge en la topología débil-* a μ, tenemos

$$\lim_{m\to\infty} \mu_m\left(\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})\right) = \mu\left(\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})\right),$$

luego

$$-\sum_{k_{-n},\ldots,k_n} \mu\left(\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})\right) \log \mu\left(\bigcap_{i=-n}^{n} T^{-i}(E_{k_i})\right) \geq \varepsilon,$$

o sea,

$$h_{\mu}\left(\bigvee_{i=-n}^{n} T^{-i}(\mathscr{C})\right) \geq \varepsilon.$$

Entonces $\mu \in \mathscr{A}_\varepsilon$. Así, $\mathscr{A}_\varepsilon$ es cerrado en $\mathcal{M}'$. De esta manera, observamos

$$\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}' = \bigcap_{r=1}^{\infty}\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty}\left(\mathscr{A}_{\frac{1}{r}}\right)^c,$$

es decir, $\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{M}'$. Luego $\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ es un conjunto residual en $\mathcal{M}'$. Por tanto, $\mathcal{M}_z \cap \mathcal{M}'$ es un conjunto residual en $\mathcal{M}_T$. Lo que concluye la prueba. $\square$

De esta manera, al demostrar los Teoremas (4.4), (4.6), (4.7), (4.8), (4.9), (4.11) se prueba completamente el Teorema (0.2). Así, tenemos una caracterización topológica del espacio de medidas de probabilidad T-invariantes $\mathcal{M}_T$.

Conclusiones

- El Teorema (0.2) garantiza la existencia de un conjunto residual de medidas de probabilidad T-invariantes por un difeomorfismo Axioma A, de modo que, si $\mu \in \mathcal{M}_T$, entonces esta medida μ es no atómica, positiva en todo abierto en X, ergódica y posee entropía métrica igual a cero.
- Al estudiar las demostraciones dadas por Karl Sigmund en [11], observamos que la caracterización topológica que hizo del conjunto de medidas invariantes, nos da la información de cuales de los subconjuntos de $\mathcal{M}_T$ son más grandes en este espacio.
- A partir de los Teoremas (4.6), (4.7), (4.8), tenemos que los espacios $\mathcal{M}_n$, $\mathcal{M}_{\mathcal{D}}$ y $\mathcal{M}_e$ son subconjuntos *grandes* en $\mathcal{M}_T$, en un sentido topológico, en otras palabras, estos subconjuntos son residuales en $\mathcal{M}_T$.
- El Lema (4.5) demuestra que para cualquier vecindad en $\mathcal{M}_T$, siempre es posible encontrar un punto periódico cuya medida correspondiente pertenece a esta vecindad.

Recomendaciones

- Se podría investigar si el subconjunto de medidas ergódicas $\mathcal{M}_e$, para el homeomorfismo que posee la propiedad de especificación, $T : X \to X$, es conexo por caminos en el espacio de medidas de probabilidad invariante $\mathcal{M}_T$.
- Dar ejemplos de subconjuntos de medidas invariantes que cumplen con los teoremas mostrados en la Sección (4.2), considerando que los ejemplos en dinámica son difíciles de hallar y si son encontrados, estos son bastante relevantes.
- Se recomienda dar un inicio al estudio de propiedades genéricas referente a las propiedades dimensionales de las medidas.

Referencias Bibliográficas

[1] R. Bowen. Markov partitions for axiom A diffeomorphisms. *American Journal of Mathematics*, 92(3):725–747, 1970.

[2] R. Bowen. Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 154:377–397, 1971.

[3] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge university press, 2002.

[4] G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*. PAM. Wiley, 2 edition, 1999.

[5] E. L. Lima. Elementos de topologia geral, 2a edição. *Rio de Janeiro: IMPA*, 1976.

[6] E. L. Lima. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. 2014.

[7] R. Mané. *Ergodic theory and differentiable dynamics*, volume 8. Springer Science & Business Media, 2012.

[8] J. C. Oxtoby. On two theorems of parthasarathy and kakutani concerning the shift transformation. *Ergodic Theory*, 203:215, 1963.

[9] K. R. Parthasarathy. On the category of ergodic measures. *Illinois Journal of Mathematics*, 5(4):648–656, 1961.

[10] K. R. PARTHASARATHY. *Probability measures on metric spaces*. Ams Chelsea Publishing. Academic, ap edition, 1967.

[11] K. Sigmund. Generic properties of invariant measures for axiom A diffeomorphisms. *Inventiones mathematicae*, 11(2):99–109, 1970.

[12] K. Sigmund. On dynamical systems with the specification property. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 190:285–299, 1974.

[13] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.

[14] M. Viana and K. Oliveira. *Fundamentos da Teoria Ergódica*. Sociadade Brasileira de Matemática, segunda edition, 2019.

[15] P. Walters. *An introduction to ergodic theory*, volume 79 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[16] L. Wen. *Differentiable dynamical systems*, volume 173. American Mathematical Soc., 2016.

[17] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.

UNSCH FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

“Año de la unidad, la paz y el desarrollo”

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

ACTA N° 020-2023-FIMGC

En la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **RESOLUCIÓN DECANAL N° 104-2023-FIMGC-D**, siendo los veinte días del mes de febrero del 2023, a horas 12:00 pm.; se reunieron los jurados del acto de sustentación, en el Auditórium virtual google meet del Campus Universitario de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.

Siendo el Jurado de la sustentación de tesis compuesto por el presidente el **Dr. Ing. Efraín Elías PORRAS FLORES,** Jurado la **Mg. María Jacqueline ATOCHE BRAVO,** Jurado el **Dr. Nelson BERROCAL HUAMANÍ,** Jurado - Asesor el **Dr. Alexander Paul CONDORI HUAMÁN** y secretario del proceso el **Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR,** con el objetivo de recepcionar la sustentación de la tesis denominada **“PROPIEDADES GENÉRICAS DE MEDIDAS INVARIANTES PARA DIFEOMORFISMOS AXIOMA A DE SMALE”,** presentado por el/la Sr./Srta., **Eder Raúl HUACCACHI HUAMANI,** Bachiller en **Ciencias Físico Matemáticas.**

El Jurado luego de haber recepcionado la sustentación de la tesis y realizado las preguntas, el sustentante al haber dado respuesta a las preguntas, y el Jurado haber deliberado; califica con la nota aprobatoria de **18 (dieciocho).**

En fe de lo cual, se firma la presente acta, por los miembros integrantes del proceso de sustentación.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL
Dr. Efraín Elías Porras Flores
DECANO

Firmado digitalmente por Efrain Elias Porras Flores
Fecha: 2023.02.21 13:09:43 -05'00'

Dr. Ing. Efraín Elías PORRAS FLORES
Presidente

Mg. María Jacqueline ATOCHE BRAVO
Jurado

Firmado digitalmente por CONDORI HUAMAN ALEXANDER PAUL
Fecha: 2023.02.20 13:26:41 -05'00'

Dr. Alexander Paul CONDORI HUAMÁN
Jurado Asesor

Dr. Nelson BERROCAL HUAMANÍ
Jurado

Firmado digitalmente por LEZAMA CUELLAR CHRISTIAN

Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR
Secretario del Proceso

C.c.:
Bach. Eder Raúl HUACCACHI HUAMANI
Jurados (4)
Archivo

CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 022-2023-FIMGC

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 281-2022-FIMGC- UNSCH-D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

Apellidos y Nombres	:	HUACCACHI HUAMANI, EDER RAUL
Escuela Profesional	:	CIENCIAS FISICO MATEMATICAS
Título de la Tesis	:	“PROPIEDADES GENERICAS DE MEDIDAS INVARIANTES PARA DIFEOMORFISMOS AXIOMA A DE SMALE”
Evaluación de la Originalidad	:	12 % Índice de Similitud
Identificador de la entrega	:	2014269434

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 14 de febrero del 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil

Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR
Verificador de Originalidad de Trabajos de Tesis de Pregrado
Departamento Académicos de Matemática y Física

Con depósito para Sustentación y Tramites
Cc. Archivo

“PROPIEDADES GENÉRICAS DE MEDIDAS INVARIANTES PARA DIFEOMORFISMOS AXIOMA A DE SMALE”

por Eder Raul Huaccachi Huamani

“PROPIEDADES GENÉRICAS DE MEDIDAS INVARIANTES PARA DIFEOMORFISMOS AXIOMA A DE SMALE”

INFORME DE ORIGINALIDAD

12%	11%	2%	3%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	matematica.uv.cl Fuente de Internet	2%
2	cybertesis.uni.edu.pe Fuente de Internet	1%
3	www.fing.edu.uy Fuente de Internet	1%
4	repositorio.ufba.br Fuente de Internet	1%
5	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	1%
6	www.branchingnature.org Fuente de Internet	<1%
7	mate.dm.uba.ar Fuente de Internet	<1%
8	www.smm.org.mx Fuente de Internet	<1%

9	cathi.uacj.mx Fuente de Internet	<1 %
10	repositorio.uchile.cl Fuente de Internet	<1 %
11	Submitted to Universidad de Almeria Trabajo del estudiante	<1 %
12	www.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
13	Submitted to Universidad Pedagogica y Tecnologica de Colombia Trabajo del estudiante	<1 %
14	lic.mat.uson.mx Fuente de Internet	<1 %
15	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	<1 %
16	hdl.handle.net Fuente de Internet	<1 %
17	cimat.repositorioinstitucional.mx Fuente de Internet	<1 %
18	repositorio.unprg.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
19	www.math.uu.nl Fuente de Internet	<1 %

20	citeseerx.ist.psu.edu Fuente de Internet	<1 %
21	Submitted to University of New South Wales Trabajo del estudiante	<1 %
22	riunet.upv.es Fuente de Internet	<1 %
23	semana.mat.uson.mx Fuente de Internet	<1 %
24	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 30 words
Excluir bibliografía	Activo		