

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**“EL TEOREMA DE POINCARÉ – BENDIXSON EN EL
PLANO Y LA ESFERA”**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS/ MENCIÓN EN MATEMÁTICAS, PRESENTADO POR LA BACHILLER:

SARA PEÑA HUAMANÍ

ASESORA: Mg. Martha Nina Escalante

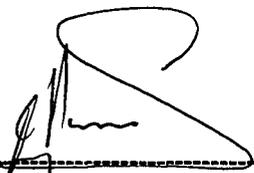
Ayacucho – Perú

Octubre- 2016

“EL TEOREMA DE POINCARÉ – BENDIXSON EN EL PLANO Y LA ESFERA”

RECOMENDADO: 27 DE NOVIEMBRE DEL 2016

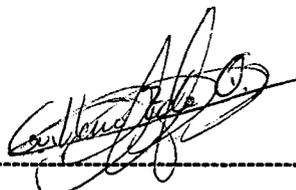
APROBADO: 25 DE ENERO DEL 2017



MSc. Ing. Carlos A. PRADO PRADO
PRESIDENTE



MSc. Daúl A. PAIVA YANAYACO
MIEMBRO



Lic. Guillermo J. ZELA QUISPE
MIEMBRO

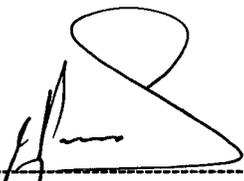


Lic. Víctor A. COAQUIRA CÁRDENAS
MIEMBRO

Según el acuerdo constatado en el Acta, levantada el 25 de enero del 2017, en la sustentación de tesis presentado por la Bachiller en Ciencias Físico Matemáticas Srta. Sara PEÑA HUAMANÍ, con la tesis titulada, "EL TEOREMA DE POINCARÉ – BENDIXSON EN EL PLANO Y LA ESFERA", fue calificada con la nota de DIECISÉIS (16) por lo que se da respectiva APROBACIÓN.

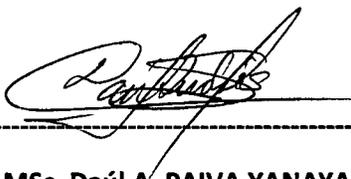
RECOMENDADO: 27 DE NOVIEMBRE DEL 2016

APROBADO: 25 DE ENERO DEL 2017



MSc. Ing. Carlos A. PRADO PRADO

PRESIDENTE



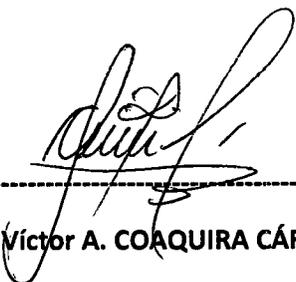
MSc. Daúl A. PAIVA YANAYACO

MIEMBRO



Lic. Guillermo J. ZELA QUISPE

MIEMBRO



Lic. Víctor A. COAQUIRA CÁRDENAS

MIEMBRO

**A mis hermanos, en especial a mis padres
Nemecia y Juan de Dios.**

AGRADECIMIENTOS

A mi Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga por mi formación profesional.

A mis padres por su apoyo incondicional, cariño y enseñanzas que me impartieron.

A mis hermanos en especial a (Milagros y Flora) por los buenos momentos vividos y estar siempre pendientes de mí.

A mi asesora Mg. Martha Nina Escalante, por la orientación en este trabajo.

A mis profesores, Guillermo Zela, Daúl Yanaco, Juan Valverde, Víctor Cuaquira, por todo lo aprendido de ellos, por las enseñanzas y consejos brindados.

A mi profesor Enrique Hábiles, por sus consejos asertivos, por su apoyo, por su confianza, por haberme encaminado en el bello mundo de la matemática.

A mis amigos en especial a mi novio (Carlos), que me acompañaron durante mi permanencia en la UNSCH, por lo buenos momentos vividos.

A Dios por haberme dejado concluir con este trabajo.

Índice general

Introducción	ii
1. Campos Vectoriales sobre \mathbb{R}^n	1
1.1. Sistemas no Lineales	1
1.2. Conjuntos Límites y Órbitas Periódicas	7
2. Campo Vectorial sobre Superficies	30
2.1. Campo vectorial	30
2.2. Conjuntos Límites	34
3. Teorema de Poincaré - Bendixson en el plano \mathbb{R}^2	38
3.1. Teorema del Flujo Tubular	38
3.2. Preparación para la demostración del Teorema de Poincaré - Bendixson	42
3.3. Demostración del Teorema de Poincaré- Bendixson en \mathbb{R}^2	48
3.4. Consecuencias y Aplicaciones	50
4. Teorema de Poincaré - Bendixson en la esfera \mathbb{S}^2	59
4.1. Preparación para la demostración del teorema de Poincaré - Bendixson	59
4.2. Demostración del Teorema de Poincaré - Bendixson en \mathbb{S}^2	63
4.3. Consecuencias y Aplicaciones	64
Conclusiones	68
Apéndice	69

4.4. Lema de Zorn	69
Bibliografía	71

Introducción

Henri Poincaré (1854-1912) es uno de los matemáticos más importantes y es considerado el padre de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Uno de los trabajos más importantes publicado por Poincaré es “Memoire sur les courbes defines par une equation differentielle” en el año 1881. En este trabajo se sentaron las bases de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.[6]

La teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciables ordinarias se basa en la descripción global del comportamiento de las soluciones y el efecto de pequeñas perturbaciones de las condiciones iniciales. Otro aspecto de la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones, también estudiado por Poincaré, consistió en describir el comportamiento asintótico de las soluciones y la estructura de sus conjuntos límites sin necesidad de encontrar la solución explícita [1] .

La teoría de Poincaré-Bendixson, nace de un teorema enunciado inicialmente por Poincaré, posteriormente versionado por Bendixson. Finalmente, la intuición de Poincaré y el rigor de Bendixson conformaron un teorema generalizado con una demostración rigurosa que hoy en día conocemos como el Teorema de Poincaré - Bendixson. Este resultado en el plano afirma que si tenemos un campo f de clase C^1 definida sobre un abierto $E \subset \mathbb{R}^2$ con una órbita definida para todo $t \geq 0$ contenida en un conjunto compacto $K \subset E$ y que ω - límite de p posee a lo más un número finito de puntos singulares de f , donde $p \in E$ es un punto regular del campo f , entonces ω límite de p (que describe topológicamente el comportamiento a largo plazo de la solución) tiene una de las siguientes formas alternativas: es un punto de equilibrio, una órbita periódica o un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos

de equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$. Este resultado puede ser generalizada sobre algunas superficies bidimensionales tal como la esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

En este trabajo se analiza en detalle la demostración del teorema de Poincaré - Bendixson para campos vectoriales en el plano y en la esfera, luego se presenta algunas consecuencias y ejemplos.

Este resultado es sumamente importante en la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, porque localiza en una determinada región la existencia de órbitas periódicas, ayudando de manera implícita a conocer el comportamiento cualitativo de la ecuación diferencial en estudio. Además, es importante por sus aplicaciones en la física, biología y matemáticas.

El esquema de desarrollo de este trabajo es como sigue: El **capítulo uno** se presenta de manera breve e ilustrativa los conceptos básicos de campos vectoriales continuos sobre \mathbb{R}^n . Luego, se analiza las demostraciones de las propiedades fundamentales de los conjuntos límites y órbitas periódicas acompañados con ejemplos para su mejor comprensión. El **capítulo dos** presenta la definición de un campo vectorial sobre una superficie en \mathbb{R}^3 , el teorema de existencia y unicidad. Luego, se analizará la topología de los conjuntos límites, con sus respectivas demostraciones. El **capítulo tres** está dedicado al análisis de la demostración del Teorema de Poincaré-Bendixson en el plano, pero antes se presenta el teorema de flujo tubular para campos vectoriales en \mathbb{R}^2 . Finalmente se presentarán algunas consecuencias inmediatas y ejemplos.

El **capítulo cuatro** centra su estudio en el análisis de la demostración del Teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera unitaria, pero antes se presenta una versión semejante al teorema del flujo tubular para campos vectoriales sobre la esfera. Finalmente se presentarán algunas consecuencias inmediatas y ejemplos.

Por otro lado se incluye un apéndice del tema denominado Lema de Zorn.

Capítulo 1

Campos Vectoriales sobre \mathbb{R}^n

En este capítulo se presentarán algunos conceptos y resultados básicos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias para campos vectoriales continuos sobre \mathbb{R}^n . Luego, analizaremos la topología de los conjuntos límites, órbitas periódicas con sus respectivas demostraciones. Estos conjuntos son la base del teorema de Poincaré - Bendixson.

1.1. Sistemas no Lineales

Sea E un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n . Un campo vectorial en E es una aplicación continua $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Al campo vectorial f asociamos la ecuación diferencial ordinaria (EDO) autónoma

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (1.1)$$

Cuando $n > 1$, la ecuación (1.1) representa un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas.

Definición 1.1. *La aplicación $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida sobre el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es una solución de la EDO (1.1) o una curva integral para el campo vectorial f si,*

- i) u es diferenciable sobre I ,
- ii) $u(t) \in E, \forall t \in I$,

ii) $u'(t) = f(u(t)), \forall t \in I.$

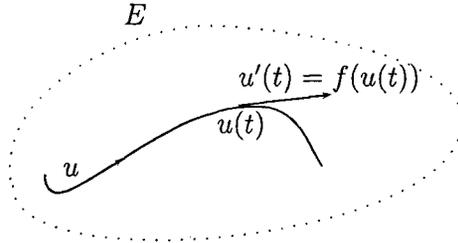


Figura 1.1: Interpretación geométrica de una solución o curva integral.

Geoméricamente $u(I)$ es una curva contenida en E cuyo vector tangente $u'(t)$ es igual a $f(u(t))$ en el punto $u(t)$.

Ejemplo 1.1. Dado el campo vectorial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definido por $f(x) = x^2$. La función u definida por $u(t) = \frac{-1}{t+c}$ es una curva integral del campo vectorial f sobre el intervalo $I = \langle -\infty, -c \rangle$.

En efecto: Tenemos,

- i) $u(t)$ es diferenciable sobre I ,
- ii) $u(t) = \frac{-1}{t+c} \in E, \forall t \in I$
- iii) $u'(t) = \frac{1}{(t+c)^2} = f(u(t)), \forall t \in I.$

Consideremos el problema de valor inicial (PVI) o problema de Cauchy

$$\begin{aligned} x' &= f(x) \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial continuo sobre el abierto E de \mathbb{R}^n .

Definición 1.2. Sea $x_0 \in E$. Se dice que la función $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo es una solución del PVI (1.2) si,

- i) ϕ es solución de la EDO $x' = f(x)$ en I ,
- ii) $0 \in I$ y $\phi(0) = x_0$.

Definición 1.3. Dado $x_0 \in E$. Una función $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una curva integral por el punto $x_0 \in E$ para el campo vectorial continuo f en E , si

- i) ϕ es una curva integral para el campo vectorial f en I ,
- ii) $0 \in I$ y $\phi(0) = x_0$.

Es importante observar que una curva integral por un punto x_0 de un campo vectorial f es la solución del PVI (1.2) y viceversa. Con esta aclaración todos los resultados dados para campos vectoriales también son válidos para EDO.

Ejemplo 1.2. Sea el campo vectorial continuo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2$. La función ϕ definida por $\phi(t) = \frac{-1}{t-1}$ para $t \in I = \langle -\infty, 1 \rangle$ es una curva integral por el punto $x_0 = 1$ para el campo vectorial f .

En efecto: Tenemos,

- i) ϕ es una curva integral del campo vectorial f sobre el intervalo I ,
- ii) $0 \in I = \langle -\infty, 1 \rangle$ y $\phi(0) = 1$.

Por tanto, ϕ es una curva integral por el punto $x_0 = 1$ para el campo vectorial continuo f .

Se denotará por $\mathfrak{X}^1(E)$, al conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^1 sobre el abierto E de \mathbb{R}^n .

A continuación se enuncia sin demostración el Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad.

Teorema 1.1 (Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad). Sean $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y $x_0 \in E$. Entonces existe $m > 0$ tal que que el campo vectorial f tiene una única curva integral por el punto x_0 definido sobre el intervalo $[-m, m]$.

La demostración de este resultado se puede encontrar en los textos [1] y [4].

Ejemplo 1.3. Dado el campo vectorial $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^3$, donde $E = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$. Se tiene que $f \in \mathfrak{X}^1(E)$, entonces por el Teorema Fundamental de Existencia y Unicidad, el campo vectorial f tiene una única curva integral x por el punto $x_0 = 1$ definido por $x(t) = \sqrt{1-2t}$ sobre el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Definición 1.4. Se llama *curva integral maximal* del campo vectorial continuo $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ a la curva integral ϕ definida en el intervalo I denominado *intervalo maximal* de ϕ , tal que, si φ es otra curva integral de f en el intervalo J entonces $J \subset I$ y $\phi|_J = \varphi$.

Ejemplo 1.4. Sea el campo vectorial f en $E = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ definido por $f(x) = x^3$. Se tiene que la función $\varphi : J = \langle \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(t) = \sqrt{1-2t}$ es una curva integral de f ; sin embargo, la función $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(t) = \sqrt{1-2t}$, con $I = \langle -\infty, \frac{1}{2} \rangle$ es una curva integral maximal, pues $J \subset I$ y $\phi|_J = \varphi$.

Teorema 1.2 (Existencia y unicidad de curva integral maximal). *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(E)$. Entonces para cada punto $x_0 \in E$, el campo vectorial f tiene una única curva integral maximal x definida sobre su intervalo maximal I .*

Una propiedad fundamental del intervalo maximal es que este es un conjunto abierto. La demostración de este resultado se encuentra en el texto [1].

Sea $\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times E / t \in I(x_0)\}$, donde $I(x_0)$ denota el intervalo maximal de la curva integral maximal por el punto x_0 de un campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$. A medida que cambiemos el punto x_0 , la curva integral maximal dependerá de x_0 , entonces para indicar la dependencia de la curva integral $\phi(t)$ con respecto de x_0 , escribimos

$$\phi(t) = \phi(t, x_0).$$

Esto nos permite definir lo siguiente.

Definición 1.5. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(E)$. El flujo asociado a este campo vectorial es la aplicación $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por*

$$\phi(t, x_0) = \phi_{x_0}(t).$$

Si se fija x_0 , $\phi_{x_0}(t)$ representa la curva integral maximal por el punto x_0 del campo vectorial f .

A continuación se enuncia algunas propiedades fundamentales de flujo, cuya demostración puede ser encontrada en el libro [1].

Teorema 1.3. Sea $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y ϕ su flujo definida sobre el conjunto Ω . Entonces

- i) $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times E$ es abierto.
- ii) $\phi(0, x) = x, \forall x \in E$.
- iii) Si $t \in I(x_0)$ y $s \in I(\phi_t(x_0))$ entonces $s + t \in I(x_0)$ y $\phi(s + t, x_0) = \phi(s, \phi(t, x_0))$.
- iv) Para t fijo, la aplicación $\phi_t : E \rightarrow E$ es un difeomorfismo de clase C^1 sobre E .

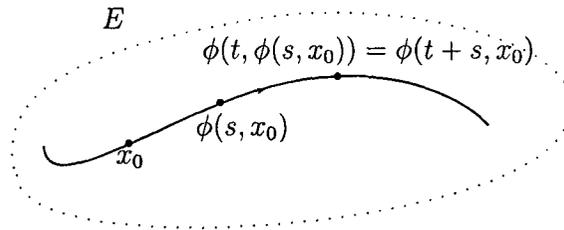


Figura 1.2: Interpretación geométrica de la propiedad iii).

Ejemplo 1.5. Sea el campo vectorial lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definido por $f(x) = Ax$, donde $A \in M_n(\mathbb{R})$. Entonces la curva integral por el punto x_0 está definida por $\phi_{x_0}(t) = e^{tA}x_0$ para $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, el flujo del campo vectorial f está definida por $\phi(t, x) = e^{tA}x$, para $(t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^{n+1}$.

Ejemplo 1.6. Sea el campo vectorial f en $E = \mathbb{R} - \{0\}$ definido por $f(x) = 1/x^2$. La curva integral maximal por el punto x_0 está denificada por $\phi_{x_0}(t) = \sqrt[3]{3t + x_0^3}$. Entonces el flujo del campo vectorial f está definido por $\phi(t, x) = \sqrt[3]{3t + x^3}$ para $(t, x) \in \Omega = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x > 0; t > \frac{-x^3}{3} \right\} \cup \left\{ (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x < 0; t < \frac{-x^3}{3} \right\}$.

Definición 1.6. Un punto $x_0 \in E$ se llama punto de equilibrio o punto singular de un campo vectorial f si $f(x_0) = 0$; punto regular de f si $f(x_0) \neq 0$.

Ejemplo 1.7. Sea el campo vectorial f en \mathbb{R}^2 definido por $f(x, y) = (x^2, 2 - y)$. Este campo vectorial tiene como único punto de equilibrio a $(0, 2)$, y los otros puntos de $\mathbb{R}^2 - \{(0, 2)\}$ son puntos regulares.

Observación 1.1. Si x_0 es un punto de equilibrio del campo vectorial f , entonces $\phi(t, x_0) = x_0, \forall t \in \mathbb{R}$.

A continuación se definen los conjuntos invariantes.

Definición 1.7. Sean $f \in \mathcal{X}^1(E)$ y ϕ su flujo.

- (i) El conjunto $S \subset E$ es llamado **invariante** con respecto al flujo ϕ si y sólo si $\phi_t(S) \subset S, \forall t \in \mathbb{R}$.
- (ii) El conjunto $S \subset E$ es llamado **invariante positivo** con respecto al flujo ϕ si y sólo si $\phi_t(S) \subset S, \forall t \geq 0$.
- (iii) El conjunto $S \subset E$ es llamado **invariante negativo** con respecto al flujo ϕ si y sólo si $\phi_t(S) \subset S, \forall t \leq 0$.

Ejemplo 1.8. Sea el campo vectorial f definido $f(x) = (-x_1, 2x_2 + x_1^2)$, con $x = (x_1, x_2)$. Entonces el conjunto

$$S = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \frac{-x_1^2}{4} \right\}$$

es invariante respecto al flujo ϕ de f .

En efecto: El flujo asociado al campo vectorial f está dado por

$$\phi(t, c_1, c_2) = \left(c_1 e^{-t}, c_2 e^{2t} + \frac{c_1^2}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right), \text{ donde } t \in \mathbb{R}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Probemos que el conjunto S es invariante respecto al flujo ϕ . Si $y \in \phi_t(S)$ entonces existe $x \in S$ tal que $\phi(t, x) = y$. Como $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$, tenemos

$$\phi(t, x_1, x_2) = \left(x_1 e^{-t}, x_2 e^{2t} + \frac{x_1^2}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right) = (y_1, y_2).$$

Entonces

$$y_1 = x_1 e^{-t}, \tag{1.3}$$

$$y_2 = x_2 e^{2t} + \frac{x_1^2}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \tag{1.4}$$

Como $x \in S$ entonces $x_2 = \frac{-x_1^2}{4}$. Reemplazando en la ecuación (1.3) tenemos que $y_2 = \frac{-y_1^2}{4}$, de donde $y \in S$. Así $\phi_t(S) \subset S, \forall t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, el conjunto S es invariante con respecto al flujo ϕ .

1.2. Conjuntos Límites y Órbitas Periódicas

En esta sección se analizará las propiedades de los conjuntos límites y órbitas periódicas, los cuales nos servirán para demostrar el teorema de Poincaré - Bendixson sobre \mathbb{R}^2 .

Definición 1.8. Sean $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y ϕ su flujo. Supongamos que $I(x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle$.

i) La órbita o trayectoria por el punto $x_0 \in E$ para el campo vectorial f es el conjunto

$$\Gamma_{x_0} = \{x \in E; x = \phi(t, x_0), t \in I(x_0)\}.$$

ii) La semi-órbita positiva por el punto $x_0 \in E$ para el campo vectorial f es el conjunto

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x \in E; x = \phi(t, x_0), 0 \leq t < \beta\}.$$

iii) La semi-órbita negativa por el punto $x_0 \in E$ para el campo vectorial f es el conjunto

$$\Gamma_{x_0}^- = \{x \in E; x = \phi(t, x_0), \alpha < t \leq 0\}.$$

Cualquier órbita se expresa como $\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-$.

Proposición 1.1. Sean $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y ϕ su flujo. Si $q \in \Gamma_p$ entonces $\Gamma_p = \Gamma_q$.

Prueba. Si $q \in \Gamma_p$ entonces existe $t_0 \in I(p)$ tal que $\phi(t_0, p) = q$. Probemos que $\Gamma_p \subset \Gamma_q$. Sea $r \in \Gamma_p$, entonces existe $t_1 \in I(p)$ tal que $\phi(t_1, p) = r$. Por propiedad de flujo tenemos

$$\phi(t_1 - t_0, q) = \phi(t_1 - t_0, \phi(t_0, p)) = \phi(t_1 - t_0 + t_0, p) = \phi(t_1, p) = r,$$

de donde $r = \phi(t_1 - t_0, q)$ entonces $r \in \Gamma_q$. Recíprocamente probemos que $\Gamma_q \subset \Gamma_p$. Sea $r \in \Gamma_q$, entonces existe $t_2 \in I(q)$ tal que $\phi(t_2, q) = r$. Por propiedad de flujo tenemos

$$\phi(t_0 + t_2, p) = \phi(t_0, \phi(t_2, q)) = \phi(t_0, q) = r,$$

de donde $r = \phi(t_0 + t_2, p)$. Así $r \in \Gamma_p$. Por lo tanto $\Gamma_p = \Gamma_q$. \square

Veamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.9. Sea el campo vectorial f definido por $f(x) = (-x_1, 2x_2 + x_1^2)$ con $x = (x_1, x_2)$. Halle la órbita del campo vectorial f por el punto $x_0 = (1, 0)$.

Solución: El flujo del campo vectorial f está definido por

$$\phi(t, x_1, x_2) = \left(x_1 e^{-t}, x_2 e^{2t} + \frac{x_1^2}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right).$$

Evaluando en $x_0 = (1, 0)$, tenemos

$$\phi(t, 1, 0) = \left(e^{-t}, \frac{1}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right),$$

por lo que, la órbita por el punto $(1, 0)$ es:

$$\Gamma_{(1,0)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x = \left(e^{-t}, \frac{1}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right), t \in \mathbb{R} \right\},$$

y la semi-órbita positiva, respectivamente la semi-órbita negativa por el punto $x_0 = (1, 0)$ es dado por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{(1,0)}^+ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x = \left(e^{-t}, \frac{1}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right), t \geq 0 \right\}, \\ \Gamma_{(1,0)}^- &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x = \left(e^{-t}, \frac{1}{4} (e^{2t} - e^{-2t}) \right), t \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

A continuación se define el conjunto ω -límite y α -límite de un punto p .

Definición 1.9. Sean $f \in \mathcal{X}^1(E)$, ϕ su flujo y $p \in E$. Supongamos que $I(p) = \langle a, b \rangle$.

Para $b = +\infty$ se define el conjunto ω -límite de p como el conjunto

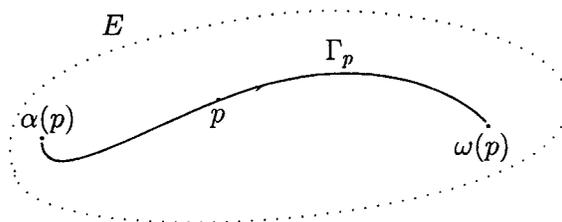
$$\omega(p) = \{ q \in E / \exists (t_n) \text{ con } t_n \rightarrow +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q \}.$$

Análogamente, para $a = -\infty$ se define el conjunto α -límite de p

$$\alpha(p) = \{ q \in E / \exists (t_n) \text{ con } t_n \rightarrow -\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q \}.$$

El conjunto α -límite respectivamente el ω -límite de un punto p puede ser interpretado geoméricamente como el conjunto de puntos en donde nace respectivamente muere la órbita Γ_p .

El siguiente resultado relaciona el conjunto $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ cuando p es un punto de equilibrio.


 Figura 1.3: Interpretación geométrica del conjunto $\omega(p)$ y $\alpha(p)$

Proposición 1.2. Sean $f \in \mathcal{X}^1(E)$ y ϕ su flujo. Si p es un punto de equilibrio del campo vectorial f entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$.

Prueba. Probemos que $\omega(p) = \{p\}$. Sea $a \in \omega(p)$ entonces por la definición del conjunto ω -límite existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = a.$$

Por hipótesis, si p es un punto de equilibrio, entonces la aplicación $\phi_p : \mathbb{R} \rightarrow E$ definida por $\phi_p(t) = \phi(t, p) = p$ es una curva integral maximal por el punto p de f . Entonces $\phi(t_n, p) = p$, para todo n , de donde se concluye que $a = p$, es decir, $a \in \{p\}$. Por tanto, $\omega(p) \subset \{p\}$.

Ahora, se probará la otra inclusión, sea $a \in \{p\}$ entonces $a = p$. Consideremos la sucesión (t_n) donde $t_n = n$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = p = a.$$

de donde se concluye que $a \in \omega(p)$, por lo que, $\{p\} \subset \omega(p)$. Por lo tanto, se tiene que $\omega(p) = \{p\}$. De forma análoga, se demuestra que $\alpha(p) = \{p\}$. \square

tal que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q,$$

Por otro lado, tenemos que $\phi(t_n, p) = \phi(x_1 e^{-t_n}, 0)$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = (0, 0) = q.$$

Así, tenemos que $q \in \{(0, 0)\}$. Por tanto, $\omega(p) \subset \{(0, 0)\}$. Recíprocamente, ahora probemos que $\{(0, 0)\} \subset \omega(p)$. Consideremos la sucesión $t_n = n$, con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

Entonces $\phi(t_n, p) = \phi(n, p) = (x_1 e^{-n}, 0)$, de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = (0, 0).$$

Así tenemos, que $(0, 0) \in \omega(p)$, por tanto, $\{(0, 0)\} \subset \omega(p)$.

Ahora, probemos que $\alpha(p) = \emptyset$. Supongamos que $\alpha(p) \neq \emptyset$, entonces existe $q \in \alpha(p)$.

Por definición existe (t_n) con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Tenemos que $\phi(t_n, p) = (x_1 e^{-t_n}, 0)$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1 e^{-t_n}, 0) = q.$$

Esto es un absurdo, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 e^{-t_n} = +\infty.$$

Así, tenemos que $\alpha(p) = \emptyset$.

iii) Supongamos que $p = (0, x_2)$, $x_2 \neq 0$. Consideremos $\omega(p) \neq \emptyset$, entonces existe $q \in \omega(p)$. Por definición, existe (t_n) con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Como $\phi(t_n, p) = \phi(0, x_2 e^{t_n})$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(0, x_2 e^{t_n}) = q,$$

lo cual, es un absurdo, pues

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_2 e^{t_n} = +\infty.$$

Así, tenemos que $\omega(p) = \emptyset$.

Ahora probemos que $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$. Sea $q \in \alpha(p)$, por definición existe (t_n) con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Como $\phi(t_n, p) = (0, x_2 e^{t_n})$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = (0, 0) = q.$$

Así, tenemos que $\alpha(p) \subset \{(0, 0)\}$.

Recíprocamente, probemos que $\{(0, 0)\} \subset \alpha(p)$. Consideremos la sucesión, $t_n = -n$.

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

y como $\phi(t_n, p) = \phi(-n, p) = (0, x_2 e^{-n})$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = (0, 0).$$

Así, $(0, 0) \in \alpha(p)$. Por lo tanto $\{(0, 0)\} \subset \alpha(p)$. Luego tenemos que $\alpha(p) = \{(0, 0)\}$.

iv) Supongamos que $\omega(p) \neq \emptyset$, entonces existe $q \in \omega(p)$. Por definición, existe (t_n) con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = q,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 e^{-t_n}, x_2 e^{t_n}) = q,$$

lo cual, es un absurdo pues

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_2 e^{t_n} = +\infty$$

Así, tenemos que $\omega(p) = \emptyset$.

Ahora, probemos que $\alpha(p) = \emptyset$. Para esto, supongamos que $\alpha(p) \neq \emptyset$, entonces existe $q \in \alpha(p)$. Por definición, existe (t_n) con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_1 e^{-t_n}, x_2 e^{t_n}) = q,$$

lo cual es un absurdo, pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1 e^{-t_n} = +\infty.$$

Así, tenemos que $\alpha(p) = \emptyset$.

El siguiente resultado establece que dos puntos cualesquiera de una misma órbita tienen el mismo conjunto α -límite y ω -límite.

Proposición 1.3. *Sea $f \in \mathcal{X}^1(E)$. Si $q \in \Gamma_p$, entonces $\omega(q) = \omega(p)$ y $\alpha(q) = \alpha(p)$.*

Prueba. Consideremos la órbita por el punto p , $\Gamma_p = \{\phi(t, p) : t \in I(p)\}$, donde ϕ es el flujo del campo vectorial f . Por hipótesis, tenemos que $q \in \Gamma_p$, entonces existe $t_0 \in I(p)$ tal que $\phi(t_0, p) = q$. Además, por propiedad de flujo, tenemos $\phi(-t_0, q) = p$ de donde $-t_0 \in I(q)$.

Probemos que $\omega(q) = \omega(p)$. Sea $s \in \omega(q)$ arbitrario. Entonces, existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, q) = s.$$

Consideremos la sucesión $t'_n = t_0 + t_n$ en \mathbb{R} , entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty$$

y por propiedad de flujo tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_0 + t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, \phi(t_0, p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, q) = s,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = s,$$

entonces $s \in \omega(p)$. Por consiguiente $\omega(q) \subset \omega(p)$.

Por otro lado, sea $r \in \omega(p)$, entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = r.$$

Consideremos la sucesión (t'_n) con $t'_n = t_n - t_0$ en \mathbb{R} , entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty$$

y por propiedad de flujo tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n - t_0, q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, \phi(-t_0, q)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = r$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, q) = r,$$

entonces $r \in \omega(q)$, por consiguiente $\omega(p) \subset \omega(q)$.

Ahora, probaremos que $\alpha(q) = \alpha(p)$. Sea $s \in \alpha(q)$ cualesquiera. Entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, q) = s.$$

Consideremos la sucesión (t'_n) en \mathbb{R} , dada por $t'_n = t_0 + t_n$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = -\infty$$

y por propiedad de flujo tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_0 + t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, \phi(t_0, p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, q) = s,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = s,$$

entonces $s \in \alpha(p)$, por consiguiente $\alpha(q) \subset \alpha(p)$.

Recíprocamente, probemos $\alpha(p) \subset \alpha(q)$. Sea $s \in \alpha(p)$ entonces por la definición del conjunto α -límite de p , tenemos que existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = s.$$

Consideremos la sucesión (t'_n) definida por $t'_n = t_n - t_0$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = -\infty$$

y por propiedad de flujo tenemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n - t_0, q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, \phi(-t_0, q)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = s,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, q) = s,$$

entonces $s \in \alpha(q)$. Así $\alpha(p) \subset \alpha(q)$. Por lo tanto $\alpha(p) = \alpha(q)$ □

A continuación se definen los subconjuntos más relevantes del espacio de fase de un campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y posteriormente estas nos servirán para construir la demostración del teorema de Poincaré-Bendixson.

Definición 1.10. *Un ciclo u órbita periódica Γ de un campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ es una órbita cerrada, la cual no se reduce en un punto de equilibrio. Es decir, existe $\tau > 0$, tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,*

$$\phi(t + \tau, x_0) = \phi(t, x_0). \quad (1.5)$$

El menor valor de τ que satisface (1.5), se llama el periodo de la órbita periódica Γ . Además,

- i) *Una órbita periódica Γ de f es estable si $\forall \epsilon > 0$, existe una vecindad U de Γ tal que $\forall x \in U$ y $t \geq 0$ se tiene, $d(\phi(t, x), \Gamma) < \epsilon$.*
- ii) *Una órbita periódica Γ de f es inestable si Γ no es estable; es decir, si existe $\epsilon > 0$ tal que para toda vecindad U de Γ , existe $x \in U$ y existe $t \geq 0$ tal que $d(\phi(t, x), \Gamma) \geq \epsilon$.*
- iii) *Una órbita periódica Γ de f es asintóticamente estable, si es estable y existe una vecindad U de Γ tal que $\forall x \in U$ se tiene,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), \Gamma) = 0.$$

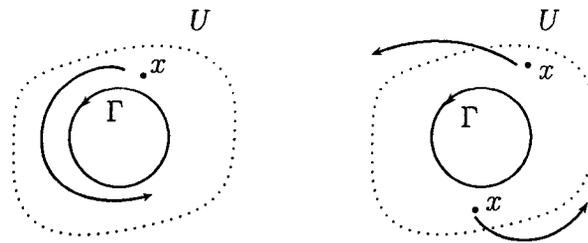


Figura 1.5: Izquierdo; Γ órbita periódica estable; Derecho: Γ órbita periódica inestable.

Ejemplo 1.11. Sea el campo vectorial f definido por

$$f(x) = (y + x(1 - x^2 - y^2), -x + y(1 - x^2 - y^2)).$$

Entonces f tiene una órbita periódica.

En efecto: Usando coordenadas polares tenemos:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right).\end{aligned}$$

Entonces, $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$.

Derivando r con respecto de t , tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}(x \cdot x' + y \cdot y') \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}(x \cdot (y + x(1 - x^2 - y^2)) + y(-x + y(1 - x^2 - y^2))) \\ &= \frac{1}{r}(x \cdot (y + x(1 - r^2)) + y(-x + y(1 - r^2))) \\ &= r(1 - r^2).\end{aligned}$$

Ahora, derivemos θ con respecto de t ,

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{(y/x)'}{1 + (y/x)^2} \\ &= \frac{y'x - yx'}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2}(x \cdot (-x + y(1 - x^2 - y^2)) - y(y + x(1 - x^2 - y^2))) \\ &= \frac{1}{r^2}(x \cdot (-x + y(1 - r^2)) - y(y + x(1 - r^2))) \\ &= -1.\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene el siguiente sistema en coordenadas polares

$$\begin{aligned}r' &= r \cdot (1 - r^2) \\ \theta' &= -1.\end{aligned}$$

Mediante el método de separación de variables, tenemos la solución general del sistema de la siguiente forma

$$\begin{aligned}r(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}} \\ \theta(t) &= -t + t_0.\end{aligned}$$

Luego, la curva integral del campo vectorial $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ es tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos(-t + t_0)}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}} \\ y(t) &= \frac{\sin(-t + t_0)}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}}. \end{aligned}$$

Si nos enfocamos en la solución del sistema en coordenadas polares, podemos observar los siguientes casos en función de la constante k :

a) Si $k = 0$, entonces $r(t) = 1$, $\theta(t) = -t + t_0$, de donde

$$x(t) = \cos(-t + t_0), \quad y(t) = \sin(-t + t_0).$$

Por tanto, la órbita que tenemos en este caso es

$$\Gamma = \{(\cos(-t + t_0), \sin(-t + t_0)) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Esta órbita es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y gira en sentido horario.

b) Si $k < 0$, entonces $r(t) < 1$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1.$$

Este resultado nos indica que las órbitas son espirales y se acercan a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por el interior.

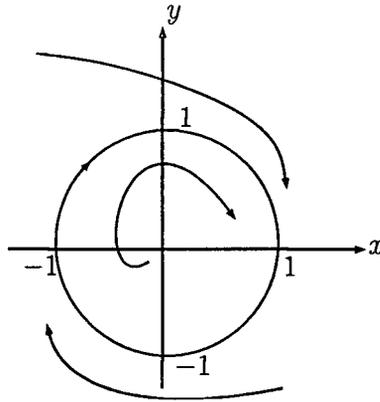
c) Si $k > 0$, entonces $r(t) > 1$ y

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 1.$$

Este resultado nos dice que las órbitas son espirales y se aproximan a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por el exterior.

Luego, el campo vectorial f tiene una órbita periódica y es asintóticamente estable. Veamos la figura (1.6).

A continuación se demuestra un resultado en el cual se determina los conjuntos ω y α límite de un punto p que se encuentra sobre una órbita periódica.

Figura 1.6: Retrato de fase del campo vectorial f .

Proposición 1.4. Si Γ_p es una órbita periódica del campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$, entonces

$$\alpha(p) = \omega(p) = \Gamma_p.$$

Prueba. Consideremos la órbita periódica dada por

$$\Gamma_p = \{\phi(t, p) : 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Se probará que $\omega(p) = \Gamma_p$. Sea $s \in \omega(p)$ entonces por la definición del conjunto ω -límite existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = s.$$

Como cada $\phi(t_n, p) \in \Gamma_p$ entonces por ser la órbita Γ_p un conjunto cerrado, se concluye que $s \in \Gamma_p$, por consiguiente $\omega(p) \subseteq \Gamma_p$.

Ahora, se probará la otra inclusión. Sea $s \in \Gamma_p$ entonces existe $t_0 \in [0, \tau]$ tal que $\phi(t_0, p) = s$. Consideremos la sucesión (t_n) definida por $t_n = t_0 + n\tau$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_0 + n\tau, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_0, p) = s.$$

Por tanto, $s \in \omega(p)$, de donde $\Gamma_p \subseteq \omega(p)$. Combinando este resultado con lo anterior tenemos que $\Gamma_p = \omega(p)$.

De manera análoga, se probará que $\alpha(p) = \Gamma_p$. Sea $q \in \alpha(p)$ entonces por la definición del conjunto α -límite, existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Como cada $\phi(t_n, p) \in \Gamma_p$, entonces por ser la órbita Γ_p un conjunto cerrado se concluye que $q \in \Gamma_p$. Así $\alpha(p) \subseteq \Gamma_p$. Recíprocamente se probará que $\Gamma_p \subseteq \alpha(p)$. Sea $q \in \Gamma_p$, entonces existe $t' \in [0, \tau]$ tal que $\phi(t', p) = q$, para $n \in \mathbb{N}$, consideremos la sucesión (t_n) definida por $t_n = t' - n\tau$ en \mathbb{R} , entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t' - n\tau, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t', p) = q,$$

de donde $q \in \alpha(p)$, entonces $\Gamma_p \subseteq \alpha(p)$. Por consiguiente tenemos que $\alpha(p) = \Gamma_p$.

En conclusión se tiene que $\alpha(p) = \omega(p) = \Gamma_p$. \square

En lugar de $\omega(p)$ denotemos por $\omega(f, p)$, para indicar el campo vectorial f .

Observación 1.2. Sea $f \in \mathfrak{X}^1(E)$. Si ϕ es el flujo del campo vectorial f y φ es el flujo del campo vectorial $-f$, entonces

$$\varphi(t, p) = \phi(-t, p).$$

Además,

$$\omega(f, p) = \alpha(-f, p) \text{ y } \alpha(f, p) = \omega(-f, p).$$

En efecto: Sea α una curv definida por $\alpha(t) = \phi(-t, p)$. Derivando con respecto a t ,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \phi'(-t, p)(-1) \\ &= -\phi'(-t, p) \\ &= -f(\phi(-t, p)) \\ &= -f(\alpha(t)).\end{aligned}$$

Entonces se tiene que $\alpha(t) = -f(\alpha(t))$ y $\alpha(0) = p$. Esto significa que α es una curva integral por el punto p del campo vectorial $-f$ y como φ es su flujo, la curva $\alpha(t) = \varphi(t, p)$, entonces $\varphi(t, p) = \phi(-t, p)$.

Ahora probemos que $\omega(f, p) = \alpha(-f, p)$. Sea $s \in \omega(f, p)$, entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = s.$$

Definamos la sucesión (s_n) dada por $s_n = -t_n$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n) = -\infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(s_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(-s_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = s,$$

de donde concluimos que $s \in \alpha(-f, p)$. Luego, tenemos que $\omega(f, p) \subset \alpha(-f, p)$.

Recíprocamente, probemos que $\alpha(-f, p) \subset \omega(f, p)$. Sea $s \in \alpha(-f, p)$, entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) = s.$$

Definamos la sucesión (s_n) por $s_n = -t_n$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n) = +\infty$.

De $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) = s$ y $\varphi(t, p) = \phi(-t, p)$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(s_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(-t_n, p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) = s,$$

de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(s_n, p) = s,$$

entonces $s \in \omega(f, p)$. Luego, tenemos que $\alpha(-f, p) \subset \omega(f, p)$.

Por lo tanto, $\omega(f, p) = \alpha(-f, p)$. \square

De la observación, solamente nos restringiremos el estudio de las propiedades topológicas de los conjuntos ω -límite, pues las propiedades de los conjuntos α -límite son similares.

El siguiente teorema proporciona las principales propiedades topológicas del conjunto ω -límite de p .

Teorema 1.4. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y $\Gamma_p^+ = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ la semi-órbita positiva que pasa por el punto $p \in E$. Si Γ_p^+ esta contenida en un subconjunto compacto $K \subset E$, entonces*

- i) $\omega(p) \neq \emptyset$.
- ii) $\omega(p)$ es compacto.
- iii) $\omega(p)$ es conexo.
- iv) El conjunto $\omega(p)$ es invariante con respecto al flujo ϕ de f

Prueba.

i) Consideremos la sucesión (t_n) dada por $t_n = n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Gamma_p^+$ y como $\Gamma_p^+ \subset K$ entonces la sucesión $\{\phi(t_n, p)\} \subset K$. Como K es compacto, entonces esta sucesión posee una subsucesión $\{\phi(t_{k_n}, p)\}$ convergente en K , digamos $q \in K$.

Por tanto, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{k_n} = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_{k_n}, p) = q$$

Entonces $q \in \omega(p)$. Así el conjunto $\omega(p) \neq \emptyset$.

ii) Primero probemos que el conjunto $\omega(p)$ es un subconjunto cerrado en E . Sea (q_n) una sucesión de puntos en $\omega(p)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = q \in E.$$

Probemos que $q \in \omega(p)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, desde que $q_n \in \omega(p)$, existe una sucesión $(t_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ con

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k^n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(t_k^n, p) = q_n.$$

Construiremos una sucesión (t_n) en $[0, \infty)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

En efecto. Sea $n \in \mathbb{N}$. De

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_k^n = +\infty$$

para $n > 0$ existe un $k'_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k'_n \Rightarrow t_k^n > n.$$

De

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(t_k^n, p) = q_n$$

para $\frac{1}{n} > 0$ existe $k''_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k > k''_n \Rightarrow |\phi(t_k^n, p) - q_n| < \frac{1}{n}.$$

Consideremos $k_n = \max\{k'_n, k''_n\} + 1$. Entonces $k_n > k'_n$ y $k_n > k''_n$. Por tanto,

$$t_{k_n}^n > n \quad \text{y} \quad |\phi(t_{k_n}^n, p) - q_n| < \frac{1}{n}.$$

Denotemos por simplicidad, $t_n = t_{k_n}^n > n$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $\{t_n\}$ está contenida en $[0, \infty)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \quad \text{y} \quad |\phi(t_n, p) - q_n| < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego, por la desigualdad triangular

$$|\phi(t_n, p) - q| = |\phi(t_n, p) - q_n + q_n - q| \leq |\phi(t_n, p) - q_n| + |q_n - q| \leq \frac{1}{n} + |q_n - q|$$

entonces,

$$0 \leq |\phi(t_n, p) - q| \leq \frac{1}{n} + |q_n - q|. \quad (1.6)$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n - q| = 0$. Tomando límite en la desigualdad (1.6) y por el teorema de Sandwich, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\phi(t_n, p) - q| = 0,$$

el cual quiere decir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Por tanto, existe una sucesión $\{t_n\}$ en $[0, \infty)$ con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Por la definición del conjunto ω -límite, tenemos que $q \in \omega(p)$.

Ahora, probemos que $\omega(p)$ es acotado, para esto probemos que $\omega(p) \subset K$. Sea $q \in \omega(p)$, elemento cualesquiera. Por la definición del conjunto $\omega(p)$, existe una sucesión $\{t_n\}$ en $[0, \infty)$ con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Como $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Gamma_p^+$ y por hipótesis tenemos que $\Gamma_p^+ \subset K$, entonces $\{\phi(t_n, p)\} \subset K$. Como K compacto, esta es cerrado y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, p) = q$$

entonces $q \in K$ y puesto que q es un elemento cualesquiera de $\omega(p)$, tenemos que $\omega(p) \subset K$. \square

iii) Por absurdo. Supongamos que $\omega(p)$ no es conexo, entonces $\omega(p)$ admite una escisión no trivial, es decir, existen $A, B \subseteq \omega(p)$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ tales que $\omega(p) = A \cup B$, donde $A \cap B = \emptyset$, A, B son cerrados en $\omega(p)$.

Como $A \neq \emptyset$, sea $a \in A$ y como $A \subseteq \omega(p)$, entonces $a \in \omega(p)$. Por la definición del conjunto $\omega(p)$ tenemos que existe una sucesión (t'_n) en $[0, +\infty)$ con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = a.$$

Si $B \neq \emptyset$, sea $b \in B \subseteq \omega(p)$ entonces $b \in \omega(p)$, por la definición del conjunto $\omega(p)$ existe una sucesión $\{t''_n\}$ en $[0, +\infty)$ con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t''_n = \infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t''_n, p) = b.$$

Consideremos $d = \text{dist}(A; B) = \inf\{|a - b| : a \in A, b \in B\}$, la distancia entre los conjuntos cerrados A y B de $\omega(p)$. El valor d es positivo porque A y B son cerrados y disjuntos.

Construimos la sucesión $\{t_n\}$ en $[0, \infty)$ de la siguiente manera

$$t_1 = t'_1, t_2 = t''_1, t_3 = t'_2, t_4 = t''_2, \dots$$

Generalizando tenemos:

$$t_{2k-1} = t'_k \text{ y } t_{2k} = t''_k, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Por tanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = a$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_{2n-1}, p) = a$. Por definición de límite, para $\frac{d}{2} > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow |\phi(t_{2n-1}, p) - a| < \frac{d}{2}.$$

Análogamente, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t''_n, p) = b$, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_{2n}, p) = b$. Luego, para $\frac{d}{3} > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_2 \Rightarrow |\phi(t_{2n}, p) - b| < \frac{d}{3}.$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Entonces

$$n > n_0 \Rightarrow |\phi(t_{2n-1}, p) - a| < \frac{d}{2} \text{ y } |\phi(t_{2n}, p) - b| < \frac{d}{3}.$$

Por tanto,

$$\text{dist}(\phi(t_{2n-1}, p); A) = \inf\{|\phi(t_{2n-1}, p) - x| : x \in A\} \leq |\phi(t_{2n-1}, p) - a| < \frac{d}{2}.$$

Entonces

$$\text{dist}(\phi(t_{2n-1}, p); A) < \frac{d}{2}, \quad \forall n > n_0.$$

Sea $r' \in A$, entonces tenemos

$$d \leq |r' - b| = |r' - \phi(t_{2n}, p) + \phi(t_{2n}, p) - b| \leq |r' - \phi(t_{2n}, p)| + |\phi(t_{2n}, p) - b| < |r' - \phi(t_{2n}, p)| + \frac{d}{3}$$

para $n > n_0$. Por la propiedad transitiva tenemos

$$d \leq |r' - \phi(t_{2n}, p)| + \frac{d}{3},$$

para $n > n_0$. Entonces

$$|r' - \phi(t_{2n}, p)| \geq \frac{2d}{3}, \quad \forall r' \in A, \forall n > n_0.$$

Como el conjunto $\{|\phi(t_{2n}, p) - r'| : r' \in A\}$ es no vacío para $n > n_0$ y acotado inferiormente por $\frac{2d}{3}$, entonces por la propiedad del ínfimo se tiene que existe

$$\inf\{|\phi(t_{2n}, p) - r'| : r' \in A\},$$

de donde

$$\text{dist}(\phi(t_{2n}, p); A) \geq \frac{2d}{3} > \frac{d}{2},$$

luego

$$\text{dist}(\phi(t_{2n}, p); A) > \frac{d}{2}, \quad \forall n > n_0.$$

Consideremos la función $h : [t_{2n-1}, t_{2n}] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(t) = \text{dist}(\phi(t, x_0); A)$. La función $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \text{dist}(x; A)$ es continua, esto se debe a la continuidad de la función distancia. Luego, $h(t) = g \circ \phi_t$ es continua.

De $\text{dist}(\phi(t_{2n-1}, p); A) < \frac{d}{2}$ y $\text{dist}(\phi(t_{2n}, p); A) > \frac{d}{2}$, tenemos

$$h(t_{2n-1}) = \text{dist}(\phi(t_{2n-1}, p); A) < \frac{d}{2} \quad \text{y} \quad h(t_{2n}) = \text{dist}(\phi(t_{2n}, p); A) > \frac{d}{2},$$

entonces

$$h(t_{2n-1}) < \frac{d}{2} \quad \text{y} \quad h(t_{2n}) > \frac{d}{2}.$$

Dado que h es continua, por el teorema del valor intermedio existe $t_n^* \in (t_{2n-1}, t_{2n})$ tal que $h(t_n^*) = \frac{d}{2}$, entonces por la definición de h tenemos que

$$\text{dist}(\phi(t_n^*, p); A) = \frac{d}{2}.$$

Como $\{\phi(t_n^*, p)\} \subseteq K$ y K es compacto, tenemos que existe una subsucesión $\{\phi(t_{k_n}^*, p)\}$ que converge en K , escribamos así

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_{k_n}^*, p) = q \in K,$$

entonces $q \in \omega(p)$. Como $\omega(p) = A \cup B$ entonces $q \in A$ o $q \in B$.

De $q \in A$, por la propiedad de distancia tenemos $\text{dist}(q, A) = 0$. Entonces

$$\text{dist}(q; A) = \text{dist}\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_{k_n}^*, p); A\right)$$

por la continuidad de la función distancia, tenemos que

$$\text{dist}(q; A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{dist}(\phi(t_{k_n}^*, p); A)$$

de donde

$$\text{dist}(q; A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(t_{k_n}^*) = \frac{d}{2}.$$

Entonces tenemos $\text{dist}(q; A) = 0 = \frac{d}{2}$, el cual es falso, pues $d > 0$. Ahora si $q \in B$, entonces

$$d = \text{dist}(A; B) \leq \text{dist}(q; A) = \frac{d}{2}$$

de donde $d < \frac{d}{2}$, el cual también es falso. Por lo tanto, $\omega(p)$ es conexo.

iv) Sea $t_0 \in \mathbb{R}$ cualesquiera. Probemos que $\phi_{t_0}(\omega(p)) \subset \omega(p)$. Sea $q \in \phi_{t_0}(\omega(p))$.

Entonces existe $q_1 \in \omega(p)$ tal que $\phi(t_0, q_1) = q$. De $q_1 \in \omega(p)$ se implica que existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q_1$$

luego de $\phi(t_0, q_1) = q$ tenemos

$$\phi(t_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p)) = q$$

Como ϕ es continua entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_0, \phi(t_n, p)) = q$$

Por propiedad del flujo ϕ se implica que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_0 + t_n, p) = q.$$

Tomemos $s_n = t_0 + t_n, \forall n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(s_n, p) = q$$

lo que implica que $q \in \omega(p)$. Entonces $\phi_{t_0}(\omega(p)) \subseteq \omega(p)$. Por consiguiente de la definición de conjunto invariante se prueba que el conjunto ω -límite de p es invariante respecto al flujo ϕ . \square

Este teorema es de gran importancia en el análisis de las propiedades topológicas del campo vectorial f . Por un lado este teorema es importante en la demostración del teorema de Poincaré - Bendixson en el plano \mathbb{R}^2 .

En el siguiente ejemplo se muestra que efectivamente los conjuntos límites gozan de las propiedades demostradas en el teorema anterior.

Ejemplo 1.12. Sea el campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x) = \left(-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2) \right), \text{ con } x = (x, y).$$

De un ejemplo anterior, tenemos que la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 1$ es una órbita periódica asintóticamente estable. Veamos la figura

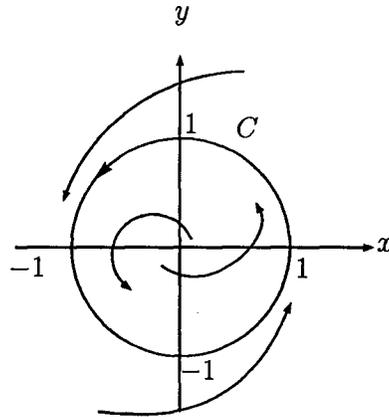


Figura 1.7: Retrato de fase del campo vectorial f .

Entonces tenemos,

- Si $p \notin C$, entonces $\omega(p) = C$.
- Si $p \in C$, entonces $\omega(p) = C$.

En ambos casos, tenemos que $\omega(p)$ es no vacío, compacto y conexo.

Corolario 1.1. *Bajo las mismas hipótesis del teorema 1.4, si $q \in \omega(p)$ entonces $\omega(q) \subset \omega(p)$.*

Prueba. Sea $r \in \omega(q)$ cualesquiera. Entonces existe una sucesión (t_n) tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, q) = r.$$

Si $q \in \omega(p)$ y $\omega(p)$ es invariante por el flujo de f , entonces $\Gamma_q \subset \omega(p)$. Por tanto, $\{\phi(t_n, q)\} \subset \omega(p)$ y como $\omega(p)$ es compacto se obtiene que $r \in \omega(p)$. \square

Capítulo 2

Campo Vectorial sobre Superficies

Este capítulo está dedicado al estudio cualitativo de los campos vectoriales sobre una superficie M contenida en el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 . Luego, se analizará la demostración de los conjuntos límites acompañados de ejemplos.

A lo largo de este capítulo, TM_p denota el espacio tangente de la superficie M en el punto p y TM el fibrado tangente de M .

2.1. Campo vectorial

Definición 2.1. *Un campo vectorial sobre una superficie M es una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que a cada punto $p \in M$ se le asigna el vector $f(p) \in TM_p$.*

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial en M . Definamos la aplicación $\sigma : M \rightarrow TM$ por $\sigma(p) = (p, f(p))$. Tenemos que $\pi \circ \sigma = Id : M \rightarrow M$, donde π es la proyección natural de TM sobre M . La aplicación σ se le denomina *sección* en TM .

Una relación importante que se observa entre el campo f y la sección σ es, si f es continua (de clase C^1) entonces σ también es continua (de clase C^1) y recíprocamente.

Se denotará por $C^1(M)$ al conjunto de campos vectoriales de clase C^1 sobre la superficie M .

Definición 2.2. *Sea f un campo vectorial en M . Una curva integral de f que pasa por el punto $p \in M$ es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$ definida sobre un intervalo*

abierto I conteniendo 0 , tal que

- i) $\alpha(0) = p$
- ii) $\alpha'(t) = f(\alpha(t))$, para todo $t \in I$

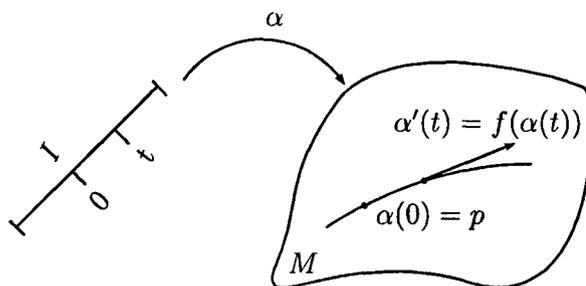


Figura 2.1: Imagen de una curva integral.

El siguiente resultado permite extender los teoremas locales sobre la existencia y unicidad de curvas integrales de campos vectoriales sobre abiertos de un espacio euclidiano a campos vectoriales sobre superficies.

Proposición 2.1. Sean M una superficie y $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 . Si $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una carta local de M , entonces la aplicación $h : \psi(E) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(q) = d\psi(p) \cdot g(p)$, $p = \psi^{-1}(q)$ es un campo de clase C^1 sobre el abierto $\psi(E) \subset \mathbb{R}^2$.

Prueba. Si $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una carta local de M , entonces es un difeomorfismo de clase C^∞ sobre su imagen. Sea $q \in \psi(E)$ un elemento cualesquiera. Entonces $p = \psi^{-1}(q) \in M$ y como g es un campo vectorial en M , se tiene que $g(p) \in TM_p$. Luego, desde que $d\psi(p) : TM_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ entonces $d\psi(p) \cdot g(p) \in \mathbb{R}^2$. Por consiguiente, h es un campo vectorial en el abierto $\psi(E)$ de \mathbb{R}^2 .

Ahora probemos que h es de clase C^1 . Sea $\sigma : M \rightarrow TM$ una sección en TM definida por $\sigma(p) = (p, g(p))$. Esta sección es de clase C^1 , pues g es de clase C^1 .

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\sigma} & TM \\
 \psi^{-1} \uparrow & & \downarrow d\psi \\
 N & \xrightarrow{d\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}} & TN
 \end{array}$$

Del diagrama anterior, para $q \in \psi(E)$ se tiene,

$$\begin{aligned}
 (d\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1})(q) &= (d\psi \circ \sigma)(\psi^{-1}(q)) \\
 &= (d\psi \circ \sigma)(p), \quad p = \psi^{-1}(q) \\
 &= d\psi(p, g(p)) \\
 &= (\psi(p), d\psi(p) \cdot g(p)) \\
 &= (q, h(q)).
 \end{aligned}$$

Como ψ es de clase C^∞ implica que ψ^{-1} y $d\psi$ es de clase C^∞ . Luego, $d\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ es de clase C^1 . Por consiguiente, h es un campo vectorial de clase C^1 . \square

Observación 2.1. Considerando la proposición anterior, si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva integral del campo vectorial g , entonces $\psi \circ \alpha : I \rightarrow N$ es una curva integral del campo vectorial h .

En efecto:

- $(\psi \circ \alpha)(0) = \psi(\alpha(0)) = \psi(p) = q$. Así, $(\psi \circ \alpha)(0) = q$.
- $(\psi \circ \alpha)'(t) = d\psi(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = d\psi(\alpha(t)) \cdot g(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. Así, $\psi \circ \alpha$ es una curva integral del campo vectorial h .

Teorema 2.1 (Existencia y Unicidad). Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en M y $p \in M$. Entonces existe una única curva integral de f , $\alpha : I \rightarrow M$ que pasa por p ; es decir, si $\beta : J \rightarrow M$ es otra curva integral de f que pasa por p , entonces $\alpha(t) = \beta(t)$, para todo $t \in I \cap J$.

Prueba. Existencia. Sea $\psi : E \rightarrow \psi(E) \subset \mathbb{R}^2$ una carta local alrededor de p en M . Por la proposición 2.1, se tiene que la aplicación $h : \psi(E) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(q) = d\psi(p) \cdot g(p)$, $p = \psi^{-1}(q)$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre el abierto $\psi(E)$ de \mathbb{R}^2 . Luego, por el teorema de existencia y unicidad para campos vectoriales sobre

abiertos de un espacio euclidiano existe una única curva integral de h , $\lambda : I \rightarrow \psi(E)$ con $\lambda(0) = q$. Entonces, $\alpha = \psi^{-1} \circ \lambda : I \rightarrow E \subset M$ es una curva integral de f con $\alpha(0) = p$.

Unicidad. Sea $\beta : J \rightarrow M$ otra curva integral de f con $\beta(0) = p$. Suponga que $\beta(J) \subset E$ y $\alpha(I) \subset E$ lo que implica que $\psi \circ \beta : J \rightarrow \psi(E)$ y $\psi \circ \alpha : I \rightarrow \psi(E)$ son curvas integrales de h que pasan por $q = \psi(p) (\psi^{-1}(q) = p)$. Por la unicidad de la curva integral h , se tiene que $(\psi \circ \beta)(t) = (\psi \circ \alpha)(t)$, para todo $t \in I \cap J$. Como la carta local ψ es inyectiva, se tiene que $\beta(t) = \alpha(t)$, para todo $t \in I \cap J$. \square

La curva integral maximal de f que pasa por el punto p es aquella cuyo dominio de definición es el mayor posible. El siguiente resultado garantiza la existencia y unicidad de la curva integral maximal de f que pasa por un punto p .

Teorema 2.2. *Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en M y $p \in M$. Entonces existe una única curva integral maximal de f , $\alpha : I \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$. Es decir, existe una única curva integral de f que pasa por el punto p , $\alpha : I \rightarrow M$ con $0 \in I$ tal que, si $\beta : J \rightarrow M$ es otra curva integral de f que pasa por el punto p , entonces $J \subset I$ y $\beta(t) = \alpha(t)$ para todo $t \in J$.*

Además el intervalo I se denomina intervalo maximal de existencia y es abierto.

La demostración es análoga a la demostración para campos vectoriales sobre abiertos en espacios euclidianos. La prueba de este resultado se puede encontrar en el texto [2]

Flujo de un Campo Vectorial

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en M . Denotemos para cada punto $p \in M$ por $\alpha_p : I_p \rightarrow M$ la única curva integral maximal de f que pasa por p y I_p su intervalo maximal. Consideremos el conjunto $\Omega = \{(t, p); p \in M \text{ y } t \in I_p\} \subset \mathbb{R} \times M$.

Definición 2.3. *La aplicación $\phi : \Omega \rightarrow M$, definida por $\phi(t, p) = \alpha_p(t)$ se llama el flujo de f .*

De la definición, se observa que cuando se fija p y se varía t , el flujo ϕ es la curva integral de f que pasa por el punto p .

Proposición 2.2. Sean $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en M y $\phi : \Omega \rightarrow M$ el flujo de f . Entonces se cumple las siguientes afirmaciones

- i) $\phi(0, p) = p$, para todo $p \in M$
- ii) Sea $p \in M$. Si $s \in I_p$ y $t \in I_{\phi(s, p)}$ entonces $t + s \in I_p$ y $\phi(t + s, p) = \phi(t, \phi(s, p))$.

2.2. Conjuntos Límites

En el transcurso del trabajo se considera a M una superficie compacta, por lo que el dominio del flujo de un campo vectorial sobre la superficie M es $\mathbb{R} \times M$, es decir, todas las curvas integrales maximales del campo vectorial están definidas sobre todo \mathbb{R} . Este resultado se encuentra demostrado en el texto [2]

Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en M y $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ el flujo de f .

La *órbita o trayectoria* de f que pasa por el punto $p \in M$ es el conjunto

$$\Gamma_p = \{\phi(t, p); t \in \mathbb{R}\}.$$

Un *punto singular o de equilibrio* del campo f es un punto $p \in M$ tal que $f(p) = 0$.

Si $p \in M$ es un punto singular de f entonces $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ definida por $\alpha_p(t) = p$ es una curva integral de f que pasa por p . Así, $\Gamma_p = \{p\}$; es decir, la órbita de f que pasa por el punto p se reduce a p .

Definición 2.4. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en M y $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ el flujo de f .

- i) El conjunto ω -límite de un punto $p \in M$, $\omega(p)$, es el conjunto de los puntos $q \in M$ tales que existe una sucesión (t_n) con la propiedad

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Es decir,

$$\omega(p) = \{q \in M / \exists (t_n) \text{ con } t_n \rightarrow +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q\}.$$

ii) El conjunto α -límite de un punto $p \in M$, $\alpha(p)$, es el conjunto de los puntos $q \in M$ tales que existe una sucesión (t_n) con la propiedad

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty \text{ con } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Es decir,

$$\alpha(p) = \{q \in M / \exists (t_n) \text{ con } t_n \rightarrow -\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q\}.$$

Teorema 2.3. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 sobre la superficie compacta M y $p \in M$. Entonces

- i) $\omega(p) \neq \emptyset$
- ii) $\omega(p)$ es compacto
- iii) $\omega(p)$ es invariante por el flujo de f , es decir, $\phi_t(\omega(p)) \subset \omega(p)$, para todo $t \in \mathbb{R}$
- iv) $\omega(p)$ es conexo.

Prueba.

i) Sea la sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida por $t_n = n$. Como M es una superficie compacta y $\{\phi(t_n, p)\} \subset M$ tenemos que esta sucesión posee una subsucesión $\{\phi(t_{k_n}, p)\}$ convergente en M . supongamos que $q = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_{k_n}, p)$. De esta forma se consigue la existencia de una sucesión (t_{k_n}) tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_{k_n} = +\infty \text{ con } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_{k_n}, p) = q$$

y por la definición del conjunto ω -límite, se tiene que $q \in \omega(p)$. Así, $\omega(p) \neq \emptyset$.

ii) Ahora se probará que $\omega(p)$ es compacto. Como $\omega(p) \subset M$ y M compacto solo será suficiente probar que $\omega(p)$ es cerrado.

Para probar que el conjunto $\omega(p)$ es cerrado se sigue igual a la demostración dada en el Teorema 1.4.

iii) La prueba que $\omega(p)$ es invariante por el flujo del campo vectorial f es análogo a la demostración dada en el Teorema 1.4.

iv) Para probar la conexidad de $\omega(p)$, supongamos que no es conexo. Entonces existen conjuntos abiertos en M , A y B tales que $\omega(p) = A \cup B$, $\omega(p) \cap A \neq \emptyset$, $\omega(p) \cap B \neq \emptyset$ y $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Como la órbita del campo vectorial f por el punto p se acumula en puntos de A y B , para cada $n > 0$ existe $t_n > n$ tal que $\phi(t_n, p) \in M - (A \cup B) = K$. Como $K \subset M$ es un conjunto cerrado y por tanto compacto, entonces la sucesión $\{\phi(t_n, p)\}$ posee una subsucesión convergente en K , es decir, existe la subsucesión (t_{n_k}) de (t_n) en \mathbb{R} tal que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} t_{n_k} = +\infty \text{ y } \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(t_{n_k}, p) = q \in K.$$

Entonces por la definición del conjunto ω -límite, se tiene que $q \in \omega(p)$. Como $\omega(p) = A \cup B$, se tiene que $q \in A \cup B$, la cual es un absurdo pues $q \in K$. Por consiguiente, $\omega(p)$ es conexo. \square

Las propiedades topológicas de este teorema, también son válidas para el conjunto α -límite.

Ejemplo 2.1. Consideremos el campo vectorial $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2),$$

donde $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ es la esfera unitaria con centro en el origen de \mathbb{R}^3 .

Los puntos singulares del campo vectorial f son $p_N = (0, 0, 1)$ y $p_S = (0, 0, -1)$, denominados polo norte y polo sur. Consideremos las coordenadas esféricas para puntos en la esfera unitaria \mathbb{S}^2 .

$$x = \sin \beta_1 \cos \beta_2, \quad y = \sin \beta_1 \sin \beta_2, \quad z = \cos \beta_1$$

donde $0 \leq \beta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ y $0 \leq \beta_2 \leq 2\pi$. Para β_2 constante, la curva $\alpha : \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por

$$\alpha(\beta_1) = (\sin \beta_1 \cos \beta_2, \sin \beta_1 \sin \beta_2, \cos \beta_1),$$

tiene por imagen a los semi-meridianos de la esfera \mathbb{S}^2 en dirección de arriba abajo.

Derivando α se tiene

$$\alpha'(\beta_1) = (\cos \beta_1 \cos \beta_2, \cos \beta_1 \sin \beta_2, -\sin \beta_1).$$

Luego el campo vectorial f sobre la imagen de la curva α es dado por

$$f(\alpha(\beta_1)) = -\sin \beta_1 \alpha'(\beta_1).$$

Esto quiere decir que el campo vectorial f es tangente a los meridianos de la esfera unitaria \mathbb{S}^2 apuntando hacia arriba. Entonces las órbitas del campo vectorial f están sobre los meridianos de \mathbb{S}^2 y se aproximan a p_N cuando $t \rightarrow +\infty$ y a p_S cuando $t \rightarrow -\infty$. Así, se tiene que $\omega(p) = \{p_N\}$ y $\alpha(p) = \{p_S\}$ si $p \in \mathbb{S}^2 - \{p_N, p_S\}$.

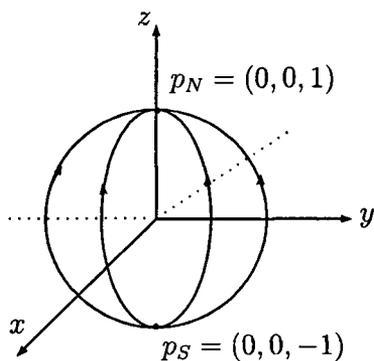


Figura 2.2: Retrato de fase del campo vectorial f .

Capítulo 3

Teorema de Poincaré - Bendixson en el plano \mathbb{R}^2

En este capítulo se enunciará de manera completa el teorema de Poincaré-Bendixson en el plano. Luego, se demostrará de forma detallada siguiendo a la demostración dada en el texto Lições de equações diferenciais ordinárias de Jorge Sotomayor.

A lo largo de este capítulo se considera el campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$, donde el abierto E es un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Además suponemos que su flujo ϕ está definido sobre $\Omega = \mathbb{R} \times E$.

3.1. Teorema del Flujo Tubular

En esta sección se enunciará el teorema del flujo tubular sin demostración. Este resultado es muy útil por que nos proporciona un conocimiento cualitativo del comportamiento geométrico de las órbitas en una vecindad de un punto regular.

Definición 3.1. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(E)$. Una curva Σ contenida en E es una sección transversal al campo vectorial f , si existen un intervalo abierto I y un homeomorfismo diferenciable, $\sigma : I \rightarrow E$, tal que, para todo $t \in I$, $\sigma'(t)$ y $f(\sigma(t))$ son vectores linealmente independientes. Cuando el homeomorfismo σ es de clase C^r , $r \geq 1$, diremos que la sección transversal Σ es de clase C^1 .*

Una curva Σ contenida en E es una sección transversal al campo vectorial f por el punto $p \in E$, si existen un intervalo abierto $I \ni 0$ y un homeomorfismo diferenciable, $\sigma : I \rightarrow E$, tal que, $\sigma(0) = p$ y para todo $t \in I$, $\sigma'(t)$ y $f(\sigma(t))$ son vectores linealmente independientes.

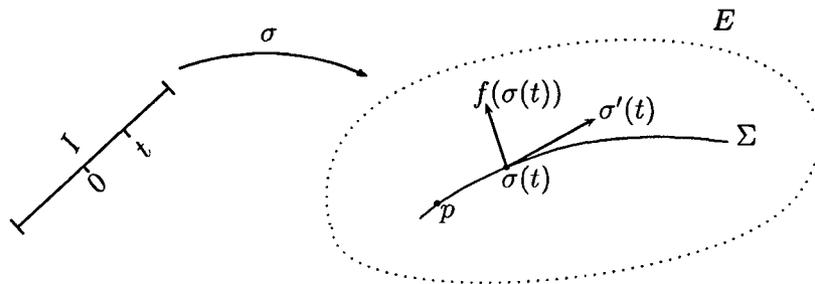


Figura 3.1: Σ es una sección transversal.

Ejemplo 3.1. Sea el campo vectorial f definido por $f(x, y) = (-x, y)$.

De acuerdo al campo de vectores (ver figura 3.2), se observa que una sección transversal al campo de vectores es cualquier segmento de línea horizontal o vertical, excepto los ejes de coordenadas.

Teorema 3.1 (Flujo Tubular). Sean $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y $p \in E$ un punto regular del campo vectorial f . Si Σ es una sección transversal de clase C^1 al campo vectorial f por el punto p , entonces existen una vecindad W_p de p en E y un difeomorfismo de clase C^1 , $h : W_p \rightarrow \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J$, donde $\epsilon > 0$ y J es un intervalo abierto en \mathbb{R} centrada en el origen 0 tal que,

a) $h(\Sigma \cap W_p) = \{0\} \times J$

b) h es una conjugación de clase C^1 entre los campos vectoriales $f|_{W_p}$ y $g : \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $g(x_1, x_2) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

La demostración de este resultado se puede encontrar en el texto [4]. A continuación se demuestra una consecuencia del Teorema de Flujo Tubular, el cual será usado más adelante.

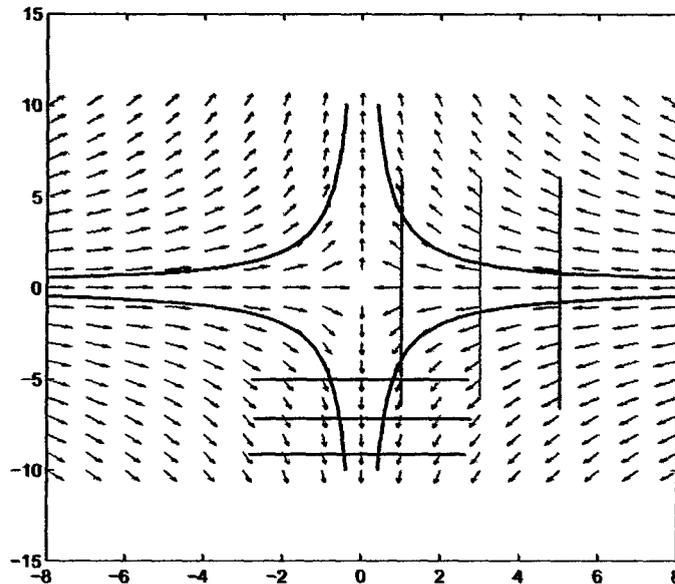


Figura 3.2: Los segmentos de línea de color verde y negro son secciones transversales al campo vectorial $f(x, y) = (-x, y)$

Corolario 3.1. Sean $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y $p \in E$ un punto regular del campo vectorial f . Si Σ es una sección transversal de clase C^1 al campo vectorial f por el punto p , entonces existen $\epsilon > 0$, W_p vecindad de p en E y $\tau : W_p \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tales que,

a) $\tau(\Sigma \cap W_p) = \{0\}$.

b) Si $q \in W_p$, entonces $\Gamma_q \cap \Sigma = \{\varphi(q, \tau(q))\}$, donde φ es el flujo del campo vectorial f .

c) Para todo $q \in W_p$, la solución φ_q está definida y es inyectiva en el intervalo $\langle -\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q) \rangle$. □

Prueba.

a) Por el Teorema del Flujo Tubular, se tiene que existen una vecindad de p , W_p en E y un difeomorfismo de clase C^1 ; esto es, $h : W_p \rightarrow \langle -c, c \rangle \times J$ donde $c > 0$, J es un intervalo abierto en \mathbb{R} centrada en el origen, tal que, $h(\Sigma \cap W_p) = \{0\} \times J$ y h es

una conjugación entre los campos vectoriales $f|_{W_p}$ y $g : \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $g(x_1, x_2) = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Supongamos que $h(q) = (-\tau(q), \eta(q))$, donde $\tau, \eta : W_p \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 . Si $q \in \Sigma \cap W_p$ entonces $h(q) = (0, \eta(q))$, de donde tanto, $\tau(q) = 0$. Por tanto, $\tau(\Sigma \cap W_p) = \{0\}$.

b) Denotemos por ϕ el flujo asociado al campo vectorial g . Entonces

$$\phi(t, x) = (t + x_1, x_2).$$

Sea $r = (r_1, r_2) \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J$. Entonces,

$$\text{I) } \Gamma_r(g) \cap (\{0\} \times J) = \{\phi(-r_1, r_2)\};$$

$$\text{II) } \phi(t, r) \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J \text{ si y sólo si } t \in \langle -\epsilon - r_1, \epsilon - r_1 \rangle.$$

Sea $q \in W_p$. Como $h(q) = (-\tau(q), \eta(q)) \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J$, entonces

$$\begin{aligned} h(\Gamma_q(f) \cap (\Sigma \cap W_p)) &= \Gamma_g(h(q)) \cap (\{0\} \times J) \\ &= \{\phi(\tau(q), h(q))\} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \Gamma_q(f) \cap (\Sigma \cap W_p) &= \{h^{-1}(\phi(\tau(q), h(q)))\} \\ &= \{\varphi(\tau(q), q)\} = \{\varphi_q(\tau(q))\}. \end{aligned}$$

c) Sea $q \in W_p$. Entonces $\varphi(t, q) \in W_p$ si y sólo si $h(\varphi(t, q)) = \phi(t, h(q)) \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J$.

Luego por la propiedad c) se tiene $\phi(t, h(q)) \in \langle -\epsilon, \epsilon \rangle \times J$ si y sólo si $t \in \langle -\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q) \rangle$.

Para la inyectividad de φ_q se considera $\varphi(t_1, q) = \varphi(t_2, q)$ de donde $h(\varphi(t_1, q)) = h(\varphi(t_2, q))$, y esto nos lleva a que $\phi(t_1, h(q)) = \phi(t_2, h(q))$. Por tanto, $(t_1 - \tau(q), \eta(q)) = (t_2 - \tau(q), \eta(q))$, de donde $t_1 = t_2$.

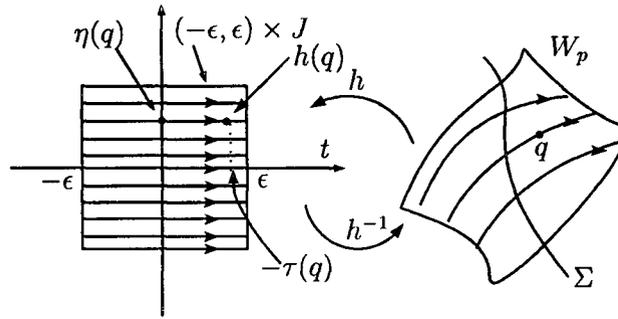


Figura 3.3: Interpretación geométrica del corolario 3.1.

3.2. Preparación para la demostración del Teorema de Poincaré - Bendixson

En esta sección se demostrará algunos resultados previos a la demostración del Teorema de Poincaré - Bendixson. Estos resultados nos servirán para la demostración del teorema mencionado. De aquí en adelante, la sección transversal a considerar serán de clase C^1 , ya que trataremos con campos vectoriales de la misma clase.

Lema 3.1. *Sea $q \in \omega(p)$ un punto regular de $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y Σ una sección transversal al campo vectorial f en q . Entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R}^+ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Prueba. Por hipótesis tenemos que $q \in \omega(p)$, entonces por la definición del conjunto ω -límite existe una sucesión (t'_n) en $[0, +\infty)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = q.$$

Por el Corolario 3.1 del Teorema del Flujo Tubular, existe una vecindad V_q de q en E y existe una función $\tau : V_q \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , tal que $\tau(V_q \cap \Sigma) = \{0\}$.

Por otro lado, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = q$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \phi(t'_n, p) \in V_q.$$

Consideremos la sucesión (t_n) definida por $t_n = t'_n + \tau(\phi(t'_n, p))$, $\forall n \geq n_0$. Veamos la siguiente figura

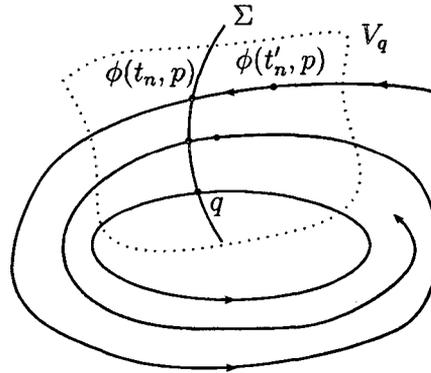


Figura 3.4: Interpretación geométrica de las sucesiones $\{\phi(t_n, p)\}$ y $\{\phi(t'_n, p)\}$.

Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = q$ y τ es una función continua, entonces

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(\phi(t'_n, p)) = \tau(q).$$

Por la definición de τ resulta que $\tau(q) = 0$, de donde

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(\phi(t'_n, p)) = 0.$$

Por tanto, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty.$$

Por propiedad de flujo y nuevamente por el Corolario 3.1,

$$\phi(t_n, p) = \phi(t'_n + \tau(\phi(t'_n, p)), p) = \phi(\tau(\phi(t'_n, p)), \phi(t'_n, p)) \in \Sigma.$$

Así, $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma$.

Finalmente, por la continuidad de ϕ

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(\tau(\phi(t'_n, p)), \phi(t'_n, p)) \\ &= \phi(\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(\phi(t'_n, p)), \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p)) \\ &= \phi(0, q) = q. \end{aligned}$$

□

Observación 3.1. Una sección transversal Σ del campo vectorial f , tiene dimensión uno, ya que estamos considerando el campo f en \mathbb{R}^2 . Como Σ es la imagen homeomórfica de un intervalo abierto de \mathbb{R} , en Σ podemos considerar un orden total ($<$) inducida

por el orden total del intervalo, por tanto, podemos hablar de sucesiones monótonas en Σ .

Lema 3.2. *Sea Σ una sección transversal al campo vectorial $f \in \mathcal{X}^1(E)$ contenida en E . Si $p \in \Sigma$ entonces $\Gamma_p^+ = \{\phi(t, p) : t \geq 0\}$ intercepta a la sección transversal Σ en una sucesión monótona $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$*

Prueba. Consideremos el conjunto $A = \{t \in \mathbb{R}^+ : \phi(t, p) \in \Sigma\}$, por el Corolario 3.1 del Teorema del Flujo Tubular se tiene que A es un conjunto discreto, por lo cual, podemos ordenar el conjunto A de la siguiente manera $A = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$.

Sea $p_1 = \phi(t_1, p)$, $p_2 = \phi(t_2, p)$, ..., $p_n = \phi(t_n, p)$. Tenemos dos alternativas.

- i) Si $p_1 = p_2$, entonces ϕ_p es una función periódica de período $t_2 - t_1 > 0$, luego Γ_p es una órbita periódica y $\Gamma_p^+ \cap \Sigma = \{p\}$, de donde $p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p$.
- ii) Si $p_1 \neq p_2$, entonces supongamos que $p_1 < p_2$. Si $p_3 \in \Sigma$ existiera, probemos que $p_2 < p_3$.

Orientemos la sección transversal Σ según la figura 3.5-(i) y observemos que debido al hecho que Σ es conexo y la continuidad del campo f , las órbitas de f cruzan la sección transversal en el mismo sentido como muestra la figura 3.5- (ii).

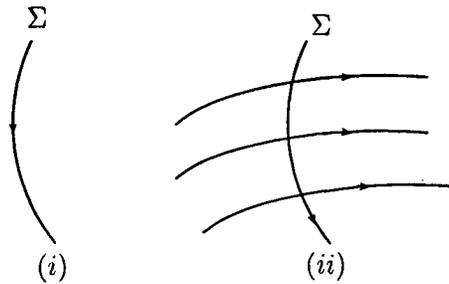


Figura 3.5: (i) Orientación de Σ , (ii) Sentido del campo vectorial sobre Σ

Sea \bigwedge la curva formada por el arco de la órbita que une los puntos p_1 y p_2 denotado por $\widehat{p_1 p_2}$, y el segmento de curva $\overline{p_2 p_1} \subset \Sigma$ (ver figura).

Como \bigwedge es una curva continua, cerrada y simple, por el Teorema de la Curva de Jordan, el conjunto $\mathbb{R}^2 - \bigwedge$ tiene dos componentes conexas una acotada (región interior

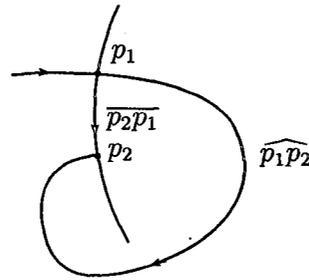


Figura 3.6: $\Lambda = \widehat{p_1 p_2} \cup \overline{p_2 p_1}$ curva continua, cerrada y simple.

R_i) y la otra no acotada (región exterior R_e) tal que $\partial R_i = \partial R_e = \Lambda$, como muestra la siguiente figura.

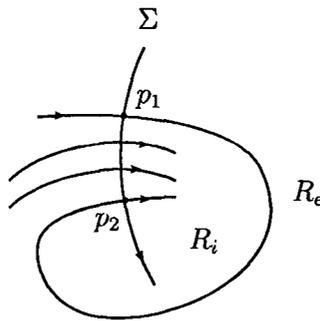


Figura 3.7: R_i región interior, R_e región exterior.

En particular, la órbita Γ_p a partir de p_2 , esto es para valores $t > t_2$, esta contenida en R_i . Esto es porque la órbita no puede interceptar el arco $\widehat{p_1 p_2}$ debido a la unicidad de las curvas integrales (ver figura 3.8). Además, no puede interceptar el segmento $\overline{p_2 p_1}$, esto porque es contraria al sentido del campo vectorial (ver figura 3.8). Por tanto, $p_2 < p_3$.

Continuando de manera análoga, obtenemos que $p_1 < p_2 < p_3 \dots < p_n \dots$. Por consiguiente, (p_n) es una secuencia monótona. \square

Lema 3.3. *Sea $p \in E$ y Σ cualquier sección transversal al campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$, entonces Σ intercepta a $\omega(p)$ a lo más en un punto.*

Prueba. Si $\Sigma \cap \omega(p) = \emptyset$ entonces no hay nada que probar. Supongamos que $\omega(p)$



Figura 3.8: Izquierda: Γ_p se autointercepta, Derecha: Γ_p cruza el segmento $\overline{p_2p_1}$.

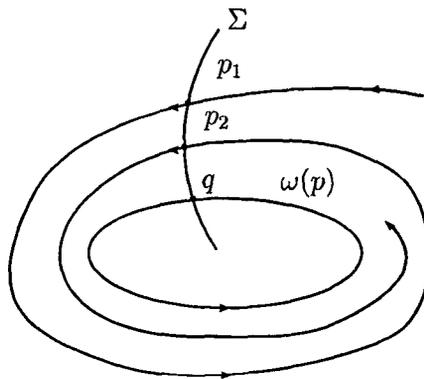


Figura 3.9: Interpretación geométrica del lema 3.3.

intercepta a Σ en dos puntos q_1 y q_2 , es decir, $\Sigma \cap \omega(p) = \{q_1, q_2\}$. Por Lema 3.1, existe una sucesión (t_n) y (s_n) tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q_1$$

y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty, \{\phi(s_n, p)\} \subset \Sigma \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(s_n, p) = q_2.$$

Por lema 3.2, tenemos que

$$\Sigma \cap \Gamma_p^+ = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots\}.$$

Como $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Gamma_p^+$ y $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma$, entonces

$$\{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma \cap \Gamma_p^+ = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots\}.$$

De forma análoga tenemos que

$$\{\phi(s_n, p)\} \subset \Sigma \cap \Gamma_p^+ = \{p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots\}.$$

Entonces la sucesión monótona (p_n) tiene dos subsucesiones convergentes, esto quiere decir que la sucesión (p_n) es convergente y el límite de esta sucesión debe ser igual tanto a q_1 como a q_2 . Por unicidad de límite, obtenemos que $q_1 = q_2$.

Por consiguiente, la sección transversal Σ intercepta a $\omega(p)$ a lo más en un punto.

□

Definición 3.2. El ω -límite de una órbita Γ del campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$, denotado por $\omega(\Gamma)$, se define como el $\omega(p)$, donde p es cualquier punto sobre Γ , es decir, $\omega(\Gamma) = \omega(p)$ para cualquier p en Γ . De forma análoga se define el α -límite de una órbita, denotado por $\alpha(\Gamma)$.

Lema 3.4. Sean $p \in E$ un punto regular del campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(E)$ y $K \subset E$ un conjunto compacto con $\Gamma_p^+ \subseteq K$. Si Γ es una órbita tal que $\Gamma \subset \omega(p)$ y $\omega(\Gamma)$ contiene por lo menos un punto regular, entonces Γ es una órbita periódica y $\omega(p) = \Gamma$.

Prueba. Supongamos que $\Gamma = \Gamma_{p'}$ para algún $p' \in \Gamma$. Por hipótesis, existe un $q \in \omega(\Gamma)$ punto regular de f . Consideremos Σ_q una sección transversal al campo vectorial f en q . Del Lema 3.1, existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R}^+ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \{\phi(t_n, p')\} \subset \Sigma_q \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p') = q.$$

Como $\{\phi(t_n, p')\} \subset \Gamma$ y por hipótesis tenemos $\Gamma \subset \omega(p)$, entonces $\{\phi(t_n, p')\} \subset \omega(p)$ y como $\{\phi(t_n, p')\} \subset \Sigma_q$, entonces $\{\phi(t_n, p')\} \subset \Sigma_q \cap \omega(p)$. Luego, por lema 3.3, tenemos que la sucesión $\{\phi(t_n, p')\}$ se reduce a un punto, denotemos por p'' este punto, es decir, $\phi(t_n, p') = p'', \forall n \in \mathbb{N}$. Así $\phi_{p'} : \mathbb{R} \rightarrow E$ es una función periódica. Por consiguiente, Γ es una órbita periódica.

Ahora probemos que $\omega(p) = \Gamma$. Desde que $\Gamma_p^+ \subset K$ y K compacto, por teorema 1.4, tenemos que $\omega(p)$ es conexo y $\omega(p) \neq \emptyset$. Como $\Gamma \subset \omega(p)$ con Γ cerrado, es suficiente probar que Γ es abierto en $\omega(p)$. Sea $\bar{p} \in \Gamma$, consideremos $V_{\bar{p}}$ la vecindad dada por el Teorema del Flujo Tubular y $\Sigma_{\bar{p}}$ la respectiva sección transversal.

Afirmación: $V_{\bar{p}} \cap \Gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$.

En efecto. Por hipótesis tenemos que $\Gamma \subseteq \omega(p)$, entonces $V_{\bar{p}} \cap \Gamma \subseteq V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Recíprocamente, probemos que $V_{\bar{p}} \cap \omega(p) \subseteq V_{\bar{p}} \cap \Gamma$. Supongamos por el absurdo que $V_{\bar{p}} \cap \Gamma$ no este contenido en $V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$. Entonces existe un $\bar{q} \in V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\bar{q} \notin \Gamma$. Como $\omega(p)$ es invariante respecto al flujo de f , entonces $\Gamma_{\bar{q}} \subseteq \omega(p)$. Luego, por el teorema del flujo tubular, existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(t_0, \bar{q}) \in \Sigma_{\bar{p}}$ y $\phi(t_0, \bar{q}) \neq \bar{p}$. Esto quiere decir que el conjunto $\Sigma_{\bar{p}}$ interseca a $\omega(p)$ en dos puntos $\{\bar{p}, \phi(t_0, \bar{q})\} \subseteq \Sigma_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, lo cual contradice el lema 3.3. Así, $V_{\bar{p}} \cap \omega(p) \subseteq V_{\bar{p}} \cap \Gamma$. Por lo tanto, $V_{\bar{p}} \cap \Gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, para $\bar{p} \in \Gamma$.

Consideremos el conjunto $V = \cup_{\bar{p} \in \Gamma} V_{\bar{p}}$. Como $V_{\bar{p}} \subseteq E$ es abierto, entonces V es abierto en E y $\Gamma \subseteq V$. Luego,

$$V \cap \omega(p) = (\cup V_{\bar{p}}) \cap \omega(p) = \cup (V_{\bar{p}} \cap \omega(p))$$

y como $V_{\bar{p}} \cap \Gamma = V_{\bar{p}} \cap \omega(p)$, tenemos que

$$V \cap \omega(p) = \cup (V_{\bar{p}} \cap \omega(p)) = \cup (V_{\bar{p}} \cap \Gamma) = (\cup V_{\bar{p}}) \cap \Gamma = V \cap \Gamma,$$

de donde $V \cap \omega(p) = V \cap \Gamma$. Ahora, como $\Gamma \subseteq V$, entonces $V \cap \Gamma = \Gamma$. Luego, $V \cap \omega(p) = V \cap \Gamma = \Gamma$. Así, $V \cap \omega(p) = \Gamma$, con $V \subseteq E$ abierto, entonces Γ es abierto en $\omega(p)$. Por consiguiente, $\omega(p) = \Gamma$ \square

3.3. Demostración del Teorema de Poincaré- Bendixson en \mathbb{R}^2

Enunciaremos el teorema en su forma completa.

Teorema 3.2 (Poincaré-Bendixson). *Supongamos que $f \in \mathcal{X}^1(E)$ posee un número finito de puntos de equilibrio en $\omega(p)$, $p \in E$ punto regular de f y supongamos que existe un compacto $K \subseteq E$ tal que $\Gamma_p^+ \subseteq K$. Entonces tenemos las siguientes posibilidades.*

a) *Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.*

b) Si $\omega(p)$ contiene puntos regulares y puntos de equilibrio, entonces $\omega(p)$ consiste de un conjunto de órbitas, cada una de las cuales tiende a uno de esos puntos de equilibrio cuando $t \rightarrow \pm\infty$.

c) Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto de equilibrio.

Prueba.

a) Sea $q \in \omega(p)$ un elemento cualesquiera. Por teorema 1.4, $\omega(p)$ es invariante por el flujo del campo vectorial f , entonces $\Gamma_q \subseteq \omega(p)$.

Por otro lado, por corolario 1.1 tenemos que $\omega(q) \subset \omega(p)$. Luego, como $\omega(\Gamma_q) = \omega(q)$ obtenemos que $\omega(\Gamma_q) \subset \omega(p)$.

Por hipótesis, $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares y como $\omega(\Gamma_q) \subset \omega(p)$, tenemos que $\omega(\Gamma_q)$ sólo contiene puntos regulares de f , así por lema 3.4, se concluye que Γ_q es una órbita periódica y $\omega(p) = \Gamma_q$. Por consiguiente, $\omega(p)$ es una órbita periódica.

b) Sea $q \in \omega(p) - \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un elemento cualesquiera, donde los p_i son puntos de equilibrio. Entonces $\Gamma_q \subset \omega(p)$ no contiene puntos de equilibrio. Por corolario 1.1, $\omega(\Gamma_q) \subset \omega(p)$.

Supongamos que $\omega(\Gamma_q)$ contiene algún punto regular de f . Del lema 3.4, tenemos que $\omega(p) = \Gamma_q$. Este resultado contradice la hipótesis, pues $\omega(p)$ contiene puntos de equilibrio. Por tanto, $\omega(\Gamma_q)$ no contiene ningún punto regular.

Por la compacidad de $\omega(p)$, tenemos que $\omega(\Gamma_q)$ es conexo y no vacío, esto significa que $\omega(\Gamma_q) \subset \omega(p)$ tendrá que ser un punto de equilibrio, osea $\omega(\Gamma_q) = \{p_j\}$, para algún $j \in \{1; 2; \dots; n\}$. Así tenemos que $\omega(p)$ es la unión de órbitas cada una de las cuales tiende a un punto de equilibrio.

c) Por hipótesis el campo vectorial f posee un número finito de puntos de equilibrio en $\omega(p)$ y como $\omega(p)$ es conexo, entonces $\omega(p) = \{q\}$, donde q es un punto de equilibrio.

□

3.4. Consecuencias y Aplicaciones

En esta sección vamos a presentar algunas consecuencias del teorema de Poincaré - Bendixson.

Teorema 3.3. Si Γ_0 es una órbita periódica de $f \in \mathcal{X}^1(E)$ tal que $\text{int}(\Gamma_0) \subset E$, entonces existe un punto de equilibrio de f contenido en $\text{int}(\Gamma_0)$.

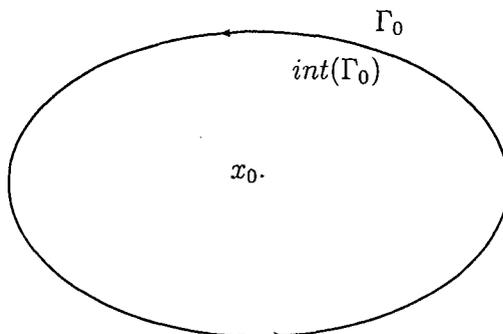


Figura 3.10: x_0 punto de equilibrio de f en $\text{int}(\Gamma_0)$.

Prueba. (Por absurdo) Supongamos que Γ_0 es una órbita periódica de f con $\text{int}(\Gamma_0) \subset E$ tal que en $\text{int}(\Gamma_0)$ no hay puntos de equilibrio de f . Consideremos el conjunto

$$S = \{\Gamma / \Gamma \text{ es una órbita periódica de } f \text{ tal que } \Gamma \subset \overline{\text{int}(\Gamma_0)}\}.$$

Como $\Gamma_0 \in S$, tenemos que $S \neq \emptyset$.

Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S$, definimos la relación de orden " \preceq " en S por:

$$\Gamma_1 \preceq \Gamma_2 \Leftrightarrow \overline{\text{int}(\Gamma_1)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_2)}.$$

Se tiene que (S, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado, esto pues cumple las siguientes condiciones:

I) Reflexiva: $\forall \Gamma_1 \in S, \Gamma_1 \preceq \Gamma_1 \Leftrightarrow \overline{\text{int}(\Gamma_1)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_1)}$.

II) Antisimetría: $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in S, \Gamma_1 \preceq \Gamma_2 \text{ y } \Gamma_2 \preceq \Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_1 = \Gamma_2$.

En efecto. Si $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \preceq \Gamma_1$, entonces

$$\overline{\text{int}(\Gamma_1)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_2)} \quad \text{e} \quad \overline{\text{int}(\Gamma_2)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_1)}$$

de donde $\overline{\text{int}(\Gamma_1)} = \overline{\text{int}(\Gamma_2)}$. De aquí, tenemos que $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

III) Transitiva: $\forall \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \in S, \Gamma_1 \preceq \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \preceq \Gamma_3 \Rightarrow \Gamma_1 \preceq \Gamma_3$.

En efecto. Si $\Gamma_1 \preceq \Gamma_2$ y $\Gamma_2 \preceq \Gamma_3$, entonces

$$\overline{\text{int}(\Gamma_1)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_2)} \quad \text{e} \quad \overline{\text{int}(\Gamma_2)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_3)},$$

de donde $\overline{\text{int}(\Gamma_1)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_3)}$ y por tanto, $\Gamma_1 \preceq \Gamma_3$.

Ahora, probemos que el conjunto parcialmente ordenado S es inductivamente ordenado, es decir, que todo subconjunto no vacío de S totalmente ordenado admite una cota superior.

Sea B un subconjunto de S totalmente ordenado. Probemos que B tiene la propiedad de intersección finita. Sea F una familia finita de elementos de B , entonces $F = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n\}$. Como cada Γ_j está en B , entonces

$$\Gamma_1 \preceq \Gamma_2 \preceq \dots \preceq \Gamma_n,$$

de donde

$$\overline{\text{int}(\Gamma_1)} \supset \overline{\text{int}(\Gamma_2)} \supset \dots \supset \overline{\text{int}(\Gamma_n)}.$$

Entonces

$$\bigcap_{j=1}^n \overline{\text{int}(\Gamma_j)} = \overline{\text{int}(\Gamma_n)} \neq \emptyset.$$

Así, B tiene la propiedad de intersección finita. Como $\overline{\text{int}(\Gamma_0)}$ es un conjunto compacto y B es una colección de conjuntos cerrados en $\overline{\text{int}(\Gamma_0)}$, de la propiedad de intersección finita, tenemos que

$$\bigcap_{\Gamma \in B} \overline{\text{int}(\Gamma)} \neq \emptyset.$$

Denotemos por $\sigma = \bigcap_{\Gamma \in B} \overline{\text{int}(\Gamma)} \neq \emptyset$. Sea $p \in \sigma$, entonces $p \in \overline{\text{int}(\Gamma)}$ para todo $\Gamma \in B$. Si $p \in \Gamma$, entonces $\omega(p) = \Gamma$ y por tanto, $\omega(p) \subset \overline{\text{int}(\Gamma)}$. Ahora, si $p \in \text{int}(\Gamma)$, entonces $\Gamma_p \subset \text{int}(\Gamma)$ y como $\omega(p) \subset \overline{\Gamma_p}$ se obtiene que $\omega(p) \subset \overline{\text{int}(\Gamma)}$. Por tanto, tenemos que $\omega(p) \subset \overline{\text{int}(\Gamma)}$ para todo $\Gamma \in B$, de donde se concluye que $\omega(p) \subset \sigma$. Ahora como $\text{int}(\Gamma)$ no contiene puntos de equilibrio de f , entonces por el Teorema de Poincaré - Bendixson, tenemos que $\omega(p)$ es un órbita periódica. Por tanto, tenemos que $\omega(p)$ es una órbita periódica tal que $\omega(p) \subset \sigma$.

Ahora probemos que $\omega(p) = \Gamma_q$ es una cota superior de B . Como $\omega(p) \subset \sigma$ tenemos que $\Gamma_q \subset \bigcap_{\Gamma \in B} \overline{\text{int}(\Gamma)}$ de donde $\Gamma_q \subset \overline{\text{int}(\Gamma)}$ para todo $\Gamma \in B$. Ahora, si $\Gamma_q \subset \overline{\text{int}(\Gamma)}$ para todo $\Gamma \in B$ entonces $\overline{\text{int}(\Gamma_q)} \subset \overline{\text{int}(\Gamma)}$, para todo $\Gamma \in B$. Por consiguiente, $\Gamma \preceq \Gamma_q$, $\forall \Gamma \in B$, lo que prueba que Γ_q es una cota superior de B .

Por tanto, el conjunto parcialmente ordenado S es inductivamente ordenado. Luego, por el lema de Zorn se obtiene que S admite elemento maximal. Sea $u \in S$ un elemento maximal de S , entonces $\Gamma \preceq u$ para todo $\Gamma \in S$.

Sea $p \in \text{int}(u)$ un punto cualesquiera. Entonces $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ están contenidas en $\overline{\text{int}(u)}$. En $\overline{\text{int}(u)}$, el campo vectorial f no tiene puntos de equilibrio, entonces por el teorema de Poincaré - Bendixson, tenemos que $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son órbitas periódicas. Por la maximalidad de u se tiene que $\omega(p) = \alpha(p) = u$, de donde $p \in u$, lo cual no es posible ya que $p \in \text{int}(u)$. Por tanto, ya sea $\omega(p)$ o $\alpha(p)$ tendrá que ser igual a u . Si suponemos que $u = \omega(p)$ entonces $\alpha(p) \subset \text{int}(u)$; esto contradice a la maximalidad de u . Por consiguiente, existe un punto de equilibrio en el $\text{int}(\Gamma_0)$. \square

Corolario 3.2. *Sea el campo vectorial $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que no tiene puntos de equilibrio entonces el campo vectorial f no tiene órbitas periódicas.*

Prueba. Supongamos que el campo vectorial f tiene una órbita periódica Γ tal que $\text{int}(\Gamma) \subset E$, entonces por el teorema 3.3 se tiene que existe un punto de equilibrio contenido en el interior de la órbita periódica $\text{int}(\Gamma)$. Este resultado contradice la hipótesis, pues el campo vectorial no tiene puntos de equilibrio. \square

En el siguiente ejemplo se muestra la aplicación de este corolario.

Ejemplo 3.2. Sea el campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, y(x + 1) + 2).$$

Se afirma que el campo vectorial f no tiene puntos de equilibrio.

Solución. Para determinar los puntos de equilibrio se debe hacer $f(x, y) = 0$, el cual es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= 0 \\ y(x + 1) + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones no tiene solución, por lo que, el campo vectorial f no tiene puntos de equilibrio. Entonces, por el corolario 3.2 se implica que el campo vectorial f no tiene órbitas periódicas. Ver la figura.

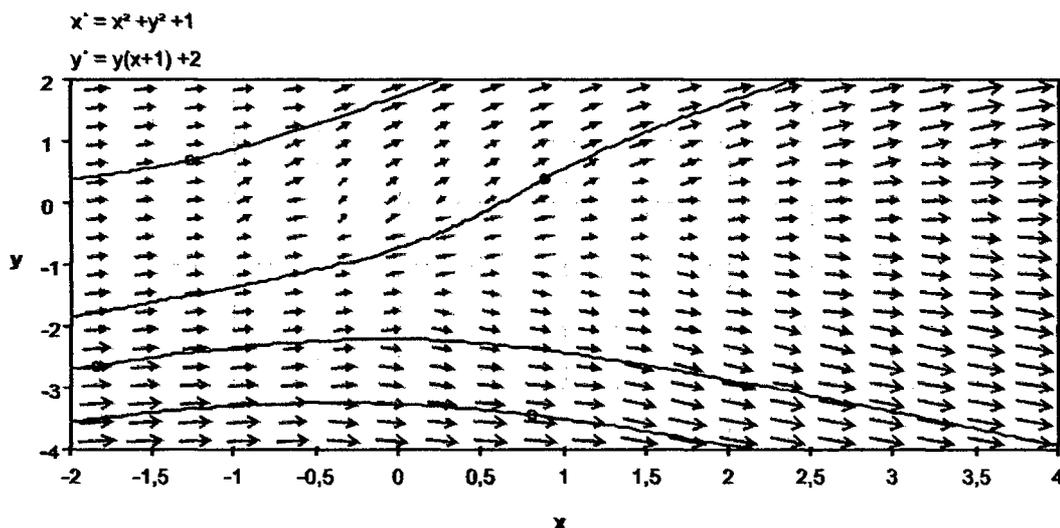


Figura 3.11: Campo vectorial de $f(x, y) = (x^2 + y^2 + 1, y(x + 1) + 2)$.

Teorema 3.4. Sea D un conjunto cerrado y acotado donde no contiene puntos de equilibrio de $f \in \mathcal{X}^1(E)$ y supóngase que D es invariante positivo con respecto al flujo de f . Entonces existe una órbita periódica contenido en D .

Prueba. Sea $p \in D$ entonces $\Gamma_p^+ = \{\phi(t, p); t \geq 0\} \subset D$, esto por la invarianza positiva del conjunto D . Afirmamos que $\omega(p) \subset D$. Sea $q \in \omega(p)$ entonces existe una sucesión (t_n) en $[0, +\infty)$ con

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$$

tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Como $\Gamma_p^+ = \{\phi(t, p); t \geq 0\} \subset D$ tenemos que $\{\phi(t_n, p)\} \subset D, \forall n \in \mathbb{N}$ y como D es cerrado se concluye que $q \in D$. Así, $\omega(p) \subset D$. Como D no contiene puntos de equilibrio, entonces $\omega(p)$ contiene puntos regulares. Luego, por el teorema de Poincaré-Bendixson, se obtiene que $\omega(p)$ es una órbita periódica. \square

Ejemplo 3.3. Sea el campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x, y) = (y, -x + y(1 - x^2 - 2y^2)).$$

Se afirma que el campo vectorial f tiene una órbita periódica.

Solución. El campo vectorial f tiene como único punto de equilibrio a $(0, 0)$. Ahora, buscaremos un conjunto invariante positivo $D \subset \mathbb{R}^2$, tal que, todos los puntos de D son puntos regulares del campo vectorial f . Para ello consideremos la función de Lyapunov.

$$V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

donde $V(0, 0) = 0$ y $V(x, y) > 0$. Luego, la derivada de la función V en dirección al campo vectorial es

$$V'(x, y) = DV(x, y) \cdot f(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2).$$

Se tiene:

- I) $V'(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2) > 0$, para $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$. En este caso, cualquier órbita por el punto $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$ sale del disco abierto $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$.
- II) $V'(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2) < 0$, para $x^2 + y^2 > 1$. Aquí, cualquier órbita por el punto $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1\}$ entra al disco cerrado $x^2 + y^2 \leq 1$.

Por tanto, el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ es invariante y compacto. Esto quiere decir que para cualquier punto que se tome en el conjunto D , la órbita por este punto permanecerá en tal conjunto.

Como el punto de equilibrio $(0, 0)$ no pertenece a D , entonces por el teorema 3.4 se tiene que existe una órbita periódica contenida en D . Veamos la figura 3.12 esbozada en Matlab.

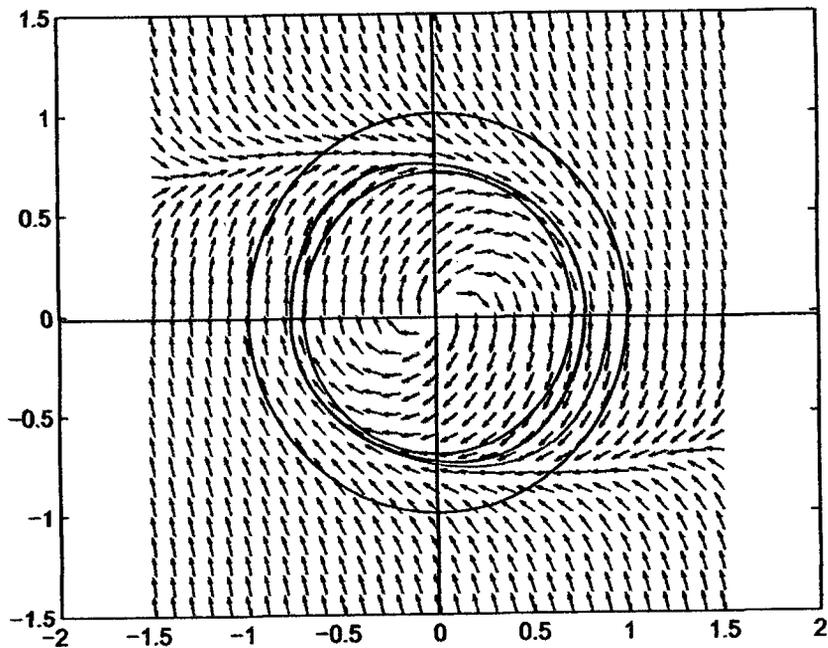


Figura 3.12: Campo vectorial de $f(x, y) = (y, -x + y(1 - x^2 - 2y^2))$.

Ejemplo 3.4. Sea el campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$f(x, y) = \left(x - y - \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)x, x + y - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)y \right).$$

Se afirma que el campo vectorial f tiene una órbita periódica.

Solución. El campo vectorial f tiene a $(0, 0)$ como único punto de equilibrio. Ahora se hallará un conjunto invariante positivo $M \subset \mathbb{R}^2$, tal que, todos los puntos de M son puntos regulares del campo vectorial f . Para ello, consideremos las coordenadas polares.

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$

donde $r > 0$ y $r \neq 0$. Se tiene

$$x' = x - y - \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2\right)x, \quad y' = x + y - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2\right)y.$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$, entonces derivando

$$rr' = x \left(x - y - \left(x^2 + \frac{3}{2}y^2 \right) x \right) + y \left(x + y - \left(x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) y \right)$$

$$rr' = x^2 + y^2 - x^4 - y^4 - 2x^2y^2 + \frac{y^4}{2} - \frac{x^2y^2}{2}$$

$$rr' = r^2 - r^4 + \frac{1}{2}y^2(y^2 - x^2).$$

Como $y^2(y^2 - x^2) = \frac{r^4 \cos^2 2\alpha - r^4 \cos 2\alpha}{2}$, entonces

$$rr' = r^2 - r^4 + \frac{1}{2}y^2(y^2 - x^2)$$

$$rr' = r^2 - r^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{r^4 \cos^2 2\alpha - r^4 \cos 2\alpha}{2} \right)$$

$$r' = r - r^3 \left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{\cos^2 2\alpha}{4} \right)$$

Para encontrar la región M , que contenga la órbita periódica se debe hacer $r' = 0$, esto pues tal región debe ser tangente a la órbita periódica en algún punto en el cual $r' = 0$, entonces

$$r' = r - r^3 \left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{\cos^2 2\alpha}{4} \right) = 0$$

factorizando convenientemente se tiene:

$$\cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha = 4 \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right)$$

Como $-2 \leq \cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha < \frac{1}{4}$, entonces el radio r debe satisfacer las desigualdades

$$-2 \leq 4 \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \leq \frac{1}{4}$$

Entonces se tiene las desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2} &\leq \frac{1}{r^2} - 1 \leq \frac{1}{16} \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{r^2} \leq \frac{17}{16} \\ \frac{16}{17} &\leq r^2 \leq 2 \end{aligned}$$

Entonces el radio r tiene como desigualdades a

$$\frac{4}{\sqrt{17}} \leq r \leq \sqrt{2}$$

Se tiene:

I) $r' = r - r^3 \left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{\cos^2 2\alpha}{4} \right) > 0$, para $r = \frac{4}{\sqrt{17}}$. En este caso, cualquier órbita por el punto $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2\}$ sale del disco abierto $x^2 + y^2 < \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2$.

II) $r' = r - r^3 \left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{4} - \frac{\cos^2 2\alpha}{4} \right) < 0$, para $r = \sqrt{2}$. Aquí, cualquier órbita por el punto $(x_0, y_0) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > \sqrt{2}\}$ entra al disco cerrado $x^2 + y^2 \leq \sqrt{2}$.

Por tanto, el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2 \leq x^2 + y^2 \leq (\sqrt{2})^2\}$ es invariante y compacto. Esto quiere decir que para cualquier punto que se tome en el conjunto M , la órbita por este punto permanecerá en tal conjunto.

Como el punto de equilibrio $(0, 0)$ no pertenece a M , entonces por el teorema 3.4 se tiene que existe una órbita periódica contenida en M . Veamos la figura 3.13 esbozada en Matlab.

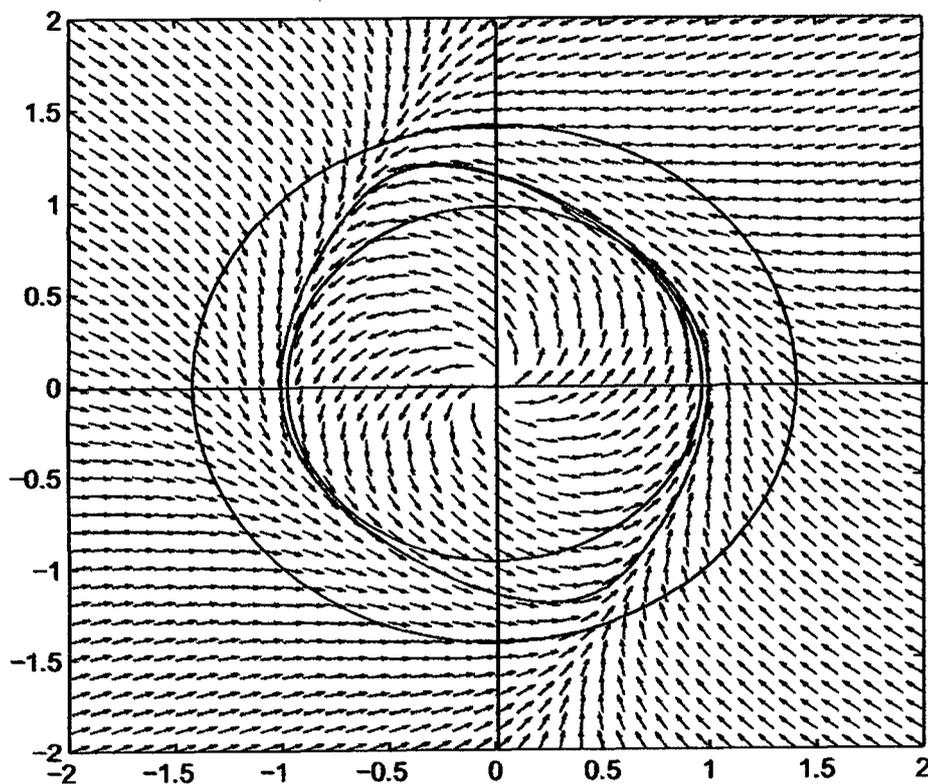


Figura 3.13: Campo vectorial de $f(x, y) = (x - y - (x^2 + \frac{3}{2}y^2)x, x + y - (x^2 + \frac{1}{2}y^2)y)$

Capítulo 4

Teorema de Poincaré - Bendixson en la esfera \mathbb{S}^2

En este capítulo se enunciará el Teorema de Poincaré-Bendixson en la esfera \mathbb{S}^2 de forma completa y su demostración se detallará siguiendo al texto *Introdução aos sistemas dinâmicos* de Jacob Palis Júnior y Welington de Melo.

Algunos resultados previos ya no serán detallados como en el capítulo anterior, ya que, sus demostraciones son iguales a las demostraciones dadas para el plano.

Denotemos por $\mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$ al conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^1 sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

4.1. Preparación para la demostración del teorema de Poincaré - Bendixson

Antes de iniciar con los resultados previos para la demostración del teorema de Poincaré-Bendixson sobre la esfera \mathbb{S}^2 , primero definimos sección transversal para un campo vectorial sobre la esfera \mathbb{S}^2 y luego presentaremos un resultado semejante al corolario 3.1.

Definición 4.1. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$. Una curva Σ contenida en \mathbb{S}^2 es una sección trans-*

versal al campo vectorial f , si existen un intervalo abierto I y un homeomorfismo diferenciable, $\sigma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$, tal que, para todo $t \in I$, $\sigma'(t)$ y $f(\sigma(t))$ son vectores linealmente independientes en TS^2_q , donde $q = \sigma(t)$. Cuando el homeomorfismo σ es de clase C^r , $r \geq 1$, diremos que la sección transversal Σ es de clase C^1 .

Una curva Σ contenida en \mathbb{S}^2 es una sección transversal al campo vectorial f por el punto $p \in \mathbb{S}^2$, si existen un intervalo abierto $I \ni 0$ y un homeomorfismo diferenciable, $\sigma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$, tal que, $\sigma(0) = p$ y para todo $t \in I$, $\sigma'(t)$ y $f(\sigma(t))$ son vectores linealmente independientes en TS^2_q , donde $q = \sigma(t)$.

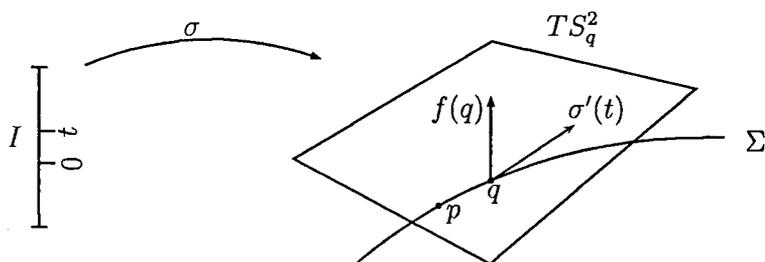


Figura 4.1: Σ es una sección transversal al campo vectorial f sobre \mathbb{S}^2 .

Proposición 4.1. Sean $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$ y $p \in \mathbb{S}^2$ un punto regular del campo vectorial f . Si Σ es una sección transversal de clase C^1 al campo vectorial f por el punto p , entonces existen $\epsilon > 0$, W_p vecindad de p en \mathbb{S}^2 y $\tau : W_p \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tales que,

- $\tau(\Sigma \cap W_p) = \{0\}$.
- Si $q \in W_p$, entonces $\Gamma_q \cap \Sigma = \{\varphi(q, \tau(q))\}$, donde φ es el flujo del campo vectorial f .
- Para todo $q \in W_p$, la solución φ_q está definida y es inyectiva en el intervalo $(-\epsilon + \tau(q), \epsilon + \tau(q))$. □

Para la demostración de este resultado se utiliza la proposición 2.1 y el corolario 3.1.

La demostración del siguiente resultado es análogo a la demostración del lema 3.1, por ello ya no se realizará con detalles.

Lema 4.1. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$, $q \in \omega(p)$ punto regular de f y Σ una sección transversal al campo vectorial f en q . Entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R}^+ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q.$$

Prueba. Si $q \in \omega(p)$, entonces por la definición del conjunto ω -límite existe una sucesión (t'_n) en $[0, +\infty)$ tal que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t'_n = +\infty$ y $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = q$.

Por la proposición 4.1, existe una vecindad V_q de q en E y existe una función $\tau : V_q \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 , tal que $\tau(V_q \cap \Sigma) = \{0\}$.

Por otro lado, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = q$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \phi(t'_n, p) \in V_q.$$

Consideremos la sucesión (t_n) definida por $t_n = t'_n + \tau(\phi(t'_n, p))$, $\forall n \geq n_0$. Como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t'_n, p) = q$ y τ es una función continua, entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(\phi(t'_n, p)) = \tau(q)$. Por la definición de τ resulta que $\tau(q) = 0$, de donde $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(\phi(t'_n, p)) = 0$.

Por tanto, se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$. Por propiedad de flujo y por la proposición 4.1,

$$\phi(t_n, p) = \phi(t'_n + \tau(\phi(t'_n, p)), p) = \phi(\tau(\phi(t'_n, p)), \phi(t'_n, p)) \in \Sigma.$$

Así, $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma$.

Finalmente, por la continuidad de ϕ , $\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = \phi(0, q) = q$. □

La demostración del siguiente resultado también es análogo a la demostración del lema 3.2, por ello en algunas partes se resumirá sin mas detalles.

Lema 4.2. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$ y $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ una sección transversal a f . Si $p \in \Sigma$ entonces Γ_p^+ interseca a Σ en una sucesión monótona.*

Prueba. Consideremos el conjunto $A = \{t \in \mathbb{R}^+ : \phi(t, p) \in \Sigma\}$, por la proposición 4.1, el conjunto A es un conjunto discreto, por lo cual, podemos ordenar el conjunto A de la siguiente manera $A = \{0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots\}$.

Sea $p_1 = \phi(t_1, p)$, $p_2 = \phi(t_2, p)$, ..., $p_n = \phi(t_n, p)$.

De forma análoga a la demostración del lema 3.2 se prueba que la sucesión (p_n) es monótona. Lo único que debemos tener en cuenta es que, por el teorema de la curva de Jordan, la curva Λ continua, cerrada y simple divide a la esfera \mathbb{S}^2 en dos componentes conexas y acotadas $(R_i$ y $R_e)$ tal que $\partial R_i = \partial R_e = \Lambda$. \square

Lema 4.3. *Sea Σ una sección transversal al campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$ y $p \in \mathbb{S}^2$, entonces el conjunto $\omega(p)$ intersecta a la sección transversal Σ , a lo más en un punto.*

La demostración de este resultado es igual a la demostración del lema 3.3.

Definición 4.2. *El ω -límite de una órbita Γ de una campo vectorial $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$, denotado por $\omega(\Gamma)$, se define como el $\omega(p)$, donde p es cualquier punto sobre Γ , es decir, $\omega(\Gamma) = \omega(p)$ para cualquier p en Γ . De forma análoga se define el α -límite de una órbita, denotado por $\alpha(\Gamma)$.*

Lema 4.4. *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$. Si $\omega(\Gamma)$ no contiene puntos de equilibrio de f , entonces $\omega(\Gamma)$ es una órbita periódica.*

Prueba. Sea el punto $p \in \omega(\Gamma)$. Se probará que la órbita de p , Γ_p , es periódica.

Sea $y \in \omega(p)$. Entonces $y \in \omega(\Gamma)$ y como $\omega(\Gamma)$ no contiene puntos de equilibrio, entonces y es un punto regular de f .

Consideremos una sección transversal Σ conteniendo el punto y . Del lema 4.1, existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R}^+ tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = y.$$

Como $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Gamma_p$ y $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$, entonces $\{\phi(t_n, p)\} \subset \omega(\Gamma)$ y como $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma$ tenemos que $\{\phi(t_n, p)\} \subset \Sigma \cap \omega(\Gamma)$.

Por el lema 4.3, se tiene que el conjunto $\omega(\Gamma)$ intersepta a la sección transversal Σ a lo más en un punto, entonces $\phi(t_n, p) = y$, para todo n . Por tanto, la órbita Γ_p es periódica.

El conjunto $\omega(\Gamma)$ no contiene puntos de equilibrio de f y $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$ es periódica, entonces $\omega(\Gamma)$ se reduce a la órbita de p ; esto es, $\omega(\Gamma) = \Gamma_p$. Entonces el conjunto $\omega(\Gamma)$ es una órbita periódica. \square

4.2. Demostración del Teorema de Poincaré - Bendixson en \mathbb{S}^2

En esta sección se demostrará detalladamente el teorema de Poincaré- Bendixson en la esfera unitaria (\mathbb{S}^2).

Teorema 4.1 (Poincaré-Bendixson). *Sea $f \in \mathfrak{X}^1(\mathbb{S}^2)$ un campo de vectores con un número finito de puntos de equilibrio en $\omega(p)$. Entonces ocurre una de las siguientes alternativas.*

- a) *Si $\omega(p)$ no contiene puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es un punto de equilibrio.*
- b) *Si $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares, entonces $\omega(p)$ es una órbita periódica.*
- c) *Si $\omega(p)$ contiene puntos regulares y puntos de equilibrio, entonces $\omega(p)$ está constituido por puntos de equilibrio p_1, \dots, p_n y órbitas regulares tales que si $\Gamma \subset \omega(p)$ entonces*

$$\alpha(\Gamma) = p_i \text{ y } \omega(\Gamma) = p_j.$$

Prueba.

- a) Supongamos que el conjunto $\omega(p)$ no contiene puntos regulares.

Luego, como $f \in C^1(\mathbb{S}^2)$, es un campo con un número finito de puntos de equilibrio en $\omega(p)$, entonces por la conexidad de $\omega(p)$ es un único punto de equilibrio.

- b) Supongamos que $\omega(p)$ contiene solamente puntos regulares. Entonces por lema 4.4, $\omega(p)$ es una órbita periódica.

- c) Por hipótesis se tiene que $\omega(p)$ contiene puntos regulares y puntos de equilibrio.

Sea $q \in \omega(p) - \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un elemento cualesquiera, donde los p_i son puntos de equilibrio. Entonces $\Gamma_q \subset \omega(p)$ no contiene puntos de equilibrio. Por consiguiente, $\omega(p)$ está constituido por puntos de equilibrio y órbitas regulares.

Sea $\Gamma \subset \omega(p)$ una órbita regular. Afirmamos que $\omega(\Gamma) = p_i$ y $\alpha(\Gamma) = p_j$. Supongamos que $\omega(\Gamma)$ contiene algún punto regular q . Sea Σ una sección transversal al campo vectorial f por el punto q . Por lema 4.3, Γ intercepta a Σ en apenas un punto. Esto quiere decir que Γ es una órbita periódica, y por tanto, $\omega(p) = \Gamma$, lo cual es una contradicción, puesto que $\omega(p)$ contiene puntos de equilibrio de f .

Por consiguiente, $\omega(\Gamma)$ es un punto de equilibrio. De manera similar, se cumple que $\alpha(\Gamma)$ es un punto de equilibrio. \square

4.3. Consecuencias y Aplicaciones

En esta sección vamos a presentar algunas consecuencias del teorema de Poincaré - Bendixson sobre la esfera \mathbb{S}^2 .

Teorema 4.2. *Si Γ_0 es una órbita periódica del campo vectorial $f \in \mathcal{X}^1(\mathbb{S}^2)$, entonces existe un punto de equilibrio de f en cada componente conexa determinada por Γ_0 .*

Prueba. Sean R_1 y R_2 las componentes conexas determinadas por la órbita periódica Γ_0 tal que $\partial R_1 = \partial R_2 = \Gamma_0$.

Probemos que el campo vectorial f tiene al menos un punto de equilibrio en R_1 .

Por reducción al absurdo, supongamos que Γ_0 es una órbita periódica del campo vectorial f tal que en R_1 no hay puntos de equilibrio de f . Consideremos el conjunto

$$S = \{\Gamma / \Gamma \text{ es una órbita periódica tal que } \Gamma \subset \overline{R_1}\}.$$

Tenemos que $S \neq \emptyset$, puesto que $\Gamma_0 \subset \overline{R_1}$.

Si $\Gamma \in S$, entonces Γ es una curva de Jordan contenida en \mathbb{S}^2 , por tanto, esta curva cerrada divide a la esfera en dos componentes conexas acotadas; a la componente conexa contenida en R_1 indiquemos como $int(\Gamma)$.

Sean $\Gamma_1, \Gamma_2 \in S$, definimos la relación de orden “ \preceq ” en S por:

$$\Gamma_1 \preceq \Gamma_2 \Leftrightarrow \overline{int(\Gamma_1)} \supset \overline{int(\Gamma_2)}.$$

Se tiene que (S, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado, es decir, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Siguiendo el mismo procedimiento a la demostración dada por el teorema 3.3, se sigue que el conjunto parcialmente ordenado S es inductivamente ordenado.

Luego, por el lema de Zorn se obtiene que S admite elemento maximal. Sea $u \in S$ un elemento maximal de S , entonces $\Gamma \preceq u$ para todo $\Gamma \in S$.

Sea $p \in \text{int}(u)$ un punto cualesquiera. Entonces $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ están contenidas en $\overline{\text{int}(u)}$. En $\overline{\text{int}(u)}$, el campo vectorial f no tiene puntos de equilibrio, entonces por el teorema de Poincaré - Bendixson, tenemos que $\omega(p)$ y $\alpha(p)$ son órbitas periódicas. Por la maximalidad de u se tiene que $\omega(p) = \alpha(p) = u$, de donde $p \in u$, lo cual no es posible ya que $p \in \text{int}(u)$. Por tanto, ya sea $\omega(p)$ o $\alpha(p)$ tendrá que ser igual a u . Si suponemos que $u = \omega(p)$ entonces $\alpha(p) \subset \text{int}(u)$; esto contradice a la maximalidad de u . Por consiguiente, existe un punto de equilibrio en el R_1 .

De forma análoga se demuestra que en la otra componente conexa R_2 , también f tiene al menos un punto de equilibrio. \square

Teorema 4.3. *Todo campo de vectores de clase C^1 en la esfera S^2 posee por lo menos un punto de equilibrio.*

Prueba. Sea $f \in \mathfrak{X}^1(S^2)$. Supongamos que f no tiene ningún punto de equilibrio. Entonces para un punto $p \in S^2$, $\omega(p)$ no contiene puntos de equilibrio, por tanto, por el teorema de Poincaré-Bendixon $\omega(p)$ es una órbita periódica. Luego, por teorema 4.2 hay un punto de equilibrio en cada componente conexa determinada por la órbita periódica $\omega(p)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, el campo vectorial f tiene por lo menos un punto de equilibrio. \square

A continuación se presenta una aplicación del teorema de Poincaré-Bendixon.

Definición 4.3. *Sea f un campo vectorial sobre S . Se dice que $M \subset S$ es un conjunto minimal si*

- a) M es invariante,
- b) M es cerrado,

c) S no contiene ningún subconjunto propio que cumple a) y b).

En la definición S puede ser un abierto de \mathbb{R}^n o una superficie.

Ejemplo 4.1. Si p es un punto de equilibrio de un campo vectorial, entonces $M = \{p\}$ es un conjunto minimal.

Ejemplo 4.2. Si Γ es una órbita periódica de un campo vectorial, entonces Γ es un conjunto minimal.

En el siguiente resultado el campo vectorial f a considerar es sobre un abierto del plano \mathbb{R}^2 o sobre la esfera S^2 .

Teorema 4.4. *Sea f un campo vectorial sobre S con un número finito de puntos singulares o de equilibrio. Si $M \subset S$ es minimal, entonces M es un punto de equilibrio o M es una órbita periódica.*

Prueba. Sea $p \in M$.

a) Si p es un punto de equilibrio y M es minimal, entonces $M = \{p\}$.

b) Sea p un punto regular. Entonces $\Gamma_p \subset M$, por ser M invariante.

Sea $q \in \omega(p)$. Entonces existe una sucesión (t_n) en \mathbb{R} tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$ y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \phi(t_n, p) = q$$

donde ϕ es el flujo del campo vectorial f .

Si $\Gamma_p \subset M$ entonces la sucesión $\{\phi(t_n, p)\} \subset M$, y como M es cerrado entonces $q \in M$. Por consiguiente, $\omega(p) \subset M$. Como $\omega(p)$ es invariante y cerrado, entonces $M = \omega(p)$.

Por el teorema de Poincaré- Bendixon, $\omega(p)$ es un punto de equilibrio, o la unión de órbitas regulares y puntos de equilibrio o es una órbita periódica.

Si $\omega(p)$ es un punto de equilibrio entonces M es un punto de equilibrio. Esto es una contradicción, porque $p \in M$ es un punto regular de f .

Si $\omega(p)$ es la unión de órbitas regulares y puntos de equilibrio, entonces M no es minimal, lo cual, es contradictorio, puesto que M es un conjunto minimal.

Por tanto, $M = \omega(p)$ es una órbita periódica.

Conclusiones

1. La demostración del teorema de Poincaré - Bendixson en el plano \mathbb{R}^2 es laborioso, para su mejor comprensión se ha ordenado por medio de lemas, siguiendo la demostración dada en el texto de Jorge Sotomayor titulado "Licoes de equacoes diferenciadas ordinarias".
2. La demostración del teorema de Poincaré - Bendixson en la superficie \mathbb{S}^2 es simplemente una generalización del teorema de Poincaré - Bendixson en el plano \mathbb{R}^2 , para para su mejor comprensión también se ha ordenado por medio de lemas, siguiendo la demostración dada para el plano \mathbb{R}^2 y el texto de Jacob Palis titulado "Introducao aos sistemas dinamicos".
3. Existen muchas consecuencias del teorema de Poincaré- Bendixson dentro de la teoría global de los sistemas dinámicos. En este trabajo, se ha presentado algunas de ellas, por ejemplo si un campo vectorial en \mathbb{R}^2 tiene una órbita periódica, entonces en su interior debe haber un punto de equilibrio u otra como todo campo vectorial en la esfera \mathbb{S}^2 tiene por lo menos un punto de equilibrio.
4. Hay muchos trabajos que podemos encontrar sobre generalizaciones del teorema de Poincaré - Bendixson en diferentes espacios por ejemplo tenemos el trabajo de Federson Demuner titulado "the Poincaré - Bendixson theorem on the klein bottle for continuous vector fields", donde demuestra una generalización de este teorema para campos de vectores continuos y lo hace introduciendo el concepto de ω -recurrencia débil, que consiste en que todas las trayectorias tienen un punto en su ω - límite.

Apéndice

4.4. Lema de Zorn

En esta parte se presenta el Lema de Zorn sin demostración, el cual es necesario para demostrar una consecuencia del teorema de Poincaré-Bendixon.

Definición 4.4. *Un conjunto parcialmente ordenado es un par (A, \preceq) donde A es un conjunto no vacío y \preceq es una relación de orden parcial, es decir una relación binaria en A la cual satisface las siguientes condiciones:*

- i) *Reflexiva: $a \preceq a, \forall a \in A$*
- ii) *Antisimetría: Si $a \preceq b$ y $b \preceq a$ entonces $a = b$*
- iii) *Transitiva: Si $a \preceq b$ y $b \preceq c$ entonces $a \preceq c$.*

Ejemplo 4.3. Sea $A = \mathbb{R}^2$, definimos la relación binaria \preceq por:

$$(m_1, n_1) \preceq (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 \leq m_2 \wedge n_1 \leq n_2,$$

donde $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in \mathbb{R}^2$. La relación binaria en A satisface las condiciones de la definición anterior, entonces (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 4.5. *Un conjunto parcialmente ordenado A y B un subconjunto no vacío de A . Decimos que B es un conjunto totalmente ordenado o una cadena si y sólo si para cualquier par $a, b \in B$ se tiene que $a \preceq b$ ó $b \preceq a$.*

Definición 4.6. *Un conjunto parcialmente ordenado es inductivamente ordenado, si todo subconjunto no vacío totalmente ordenado tiene una cota superior en A .*

Definición 4.7. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado y M un subconjunto no vacío de A . Una cota superior para M es un elemento $u \in A$ tal que $x \preceq u$, $\forall x \in M$.

Definición 4.8. Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $m \in A$ es un elemento maximal de A si y sólo si para todo $x \in A$ tal que $m \preceq x$ se tiene $x = m$.

Lema 4.5. (Lema de Zorn) Si (A, \preceq) es un conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto totalmente ordenado de A admite una cota superior, entonces A tiene al menos un elemento maximal.

Bibliografía

- [1] Sotomayor, J (1979) *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Brasil, IMPA.
- [2] Palis, J. y W. De Melo, (1977) *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Brasil, IMPA.
- [3] Stephen, L(2001) *Dynamical Systems with Applications using Maple. Second Edition*. New York, Birkhauser Boston.
- [4] Benazic, R(2006) *Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Perú, IMCA.
- [5] Jordan, D.y P. Smith,(1987) *Nonlinear Ordinary Differential Equations. Second Edition*. New York, Oxford University Press.
- [6] Galdames, O(2010) *El Teorema de Poincaré y de Bendixson disponible en: <http://www.monografias.com/trabajos-pdf4/teorema-poincare-y-bendixson.pdf>*.
- [7] Carrillo, A. y F.Sánchez *Teorema de Poincaré - Bendixson*. México, Universidad de la ciudad de México,DF disponible en: <http://www.dynamics.unam.edu/DynamicalNolineal/cursosnotas/poincare.pdf>.