UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA DE FORMACIÓN PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS PARA OPTAR LA LICENCIATURA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS, MENCIÓN MATEMÁTICAS

"EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE ALGUNAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN SEMILINEALES ABSTRACTAS"

Presentado por:

Bach. VLADIMIR ACORI FLORES

ASESOR: Lic. ADRIÁN ALLAUCCA PAUCAR

CO-ASESOR: Mg. GLADYS M. CRUZ YUPANQUI

AYACUCHO, 2015

"EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE ALGUNAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN SEMILINEALES ABSTRACTAS"

RECOMENDADO	:	**24 DE JULIO DEL 2015**
APROBADO	:	**14 DE SETIEMBRE DEL 2015**

MSc. Ing. Carlos A. PRADO PRADO
PRESIDENTE

Mat. Víctor A. COAQUIRA CÁRDENAS
MIEMBRO

Lic. Daúl A. PAIVA YANAYACO
MIEMBRO

Lic. Wilson A. YUCRA HUYHUA
MIEMBRO

Ing. Floro N. YANGALI GUERRA
SECRETARIO DOCENTE

Según el acuerdo constatado en el Acta, levantada el 14 de setiembre del 2015, en la Sustentación de Tesis Profesional presentado por el Bachiller en ciencias Físico Matemáticas, especialidad de Matemáticas Sr. **Vladimir ACORI FLORES**, con la Tesis Titulada **"EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE ALGUNAS ECUACIONES DE EVOLUCIÓN SEMILINEALES ABSTRACTAS"**, fue calificado con la nota de **DIECIÉIS (16)** por lo que se da la respectiva **APROBACIÓN**.

MSc. Ing. Carlos A. PRADO PRADO
MIEMBRO

Mat. Víctor A. COAQUIRA CÁRDENAS
MIEMBRO

***Lic. Daúl* A. PAIVA YANAYACO**
MIEMBRO

Lic. Wilson A. YUCRA HUYHUA
MIEMBRO

Ing. Floro N. YANGALI GUERRA
SECRETARIO DOCENTE

A la memoria de un querido amigo y colega Eleodoro Arroyo Licas...

AGRADECIMIENTOS

- *A Dios, por ser la luz en mis momentos de obscuridad.*
- *A mis queridos padres: Eulogio David y Eleuteria por darme la vida, el apoyo, la comprensión y el aliento para seguir la carrera de ciencias físico matemáticas, especialidad de matemáticas.*
- *A mis queridos hermanos: Edwin, Elizabeth, Edith-Juan, David, Kiusa, Ediluz y mis sobrinas: Paola, Ángeles, Keit, Jany por ser parte importante de mi vida.*
- *A la Mg. Gladys M. Cruz Yupanqui por su paciencia, apoyo y consejos. Gracias por no perder la confianza en mí, gracias por guiarme en esta experiencia de realizar la tesis.*
- *Al Lic. Adrián Allaucca Paucar por la motivación para terminar la tesis.*
- *A los profesores del Departamento de Matemática y Física de la Universidad Nacional De San Cristóbal de Huamanga que durante mi paso por la Universidad siempre compartieron conmigo sus enseñanzas, experiencias y su amistad incondicional.*
- *A los profesores de la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas, gracias por sus consejos.*
- *A la Universidad Nacional De San Cristóbal de Huamanga por permitirme ser parte de su familia.*
- *A Luz Marina, gracias por llegar a mi vida en el momento exacto y ser merecedor de tus sentimientos.*

RESUMEN

En el presente trabajo estudiamos dos tipos de problemas de evolución semilineales. El primero de ellos es el problema abstracto de Cauchy de tipo semilineal con soluciones débiles. El siguiente es un problema con valores de frontera que describe el movimiento circular de una barra flexible, aquí estudiamos la existencia de soluciones débiles. Para obtener estos resultados seguimos la metodología de los trabajos de Cerón–López [3], Lozada [14] y los trabajos de Iório [16]. Además hacemos uso de la teoría de los semigrupos de operadores lineales y sus generadores caracterizados por el teorema de Lumer–Philips, así como de las herramientas básicas del Análisis Funcional.

Índice general

Introducción

Las ecuaciones de evolución no lineales no sólo se generan en muchos campos de la matemática sino también en otras ramas de las ciencias tales como la física, las ciencias de los materiales, la mecánica y otras. La complejidad y cambios en el estudio teórico de aquellas ecuaciones de evolución no lineales han atraído el interés de muchos matemáticos a lo largo del tiempo.

Una ecuación que puede ser interpretada como la ley del desarrollo o evolución en el tiempo de un sistema, su significado depende no sólo de la ecuación en sí misma sino también de la formulación del problema para el cual éste es usado. Típico de una ecuación de evolución es la posibilidad de construir la solución de una condición inicial prescrita que puede ser interpretada como una descripción del estado inicial del sistema. El estado $u = u(t)$ de un sistema dado pertenece a un espacio abstracto X y la correspondiente ecuación de evolución toma la forma

$$\frac{d}{dt}u(t) = A\big(t, u(t)\big)$$

Donde $A(t, \cdot) : X \to X$ es una aplicación del espacio X en sí mismo, X es un espacio de Banach o aún más general un espacio vectorial topológico.

En el presente trabajo estudiamos los siguientes problemas de evolución semilineales:

1. El problema de Cauchy abstracto de la forma

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t)),\ 0 < t < a \\ u(t_0) &= u_0 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

   donde A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones de operadores fuertemente continuo en el espacio de Banach y $f : [0, a] \times X \to X$ una función apropiada. Aquí el objetivo es estudiar de manera general las soluciones clásicas o fuertes, así como las soluciones débiles del problema (0.0.1).

2. Los siguientes dos problemas específicos de aplicación en ecuaciones de evolución semilineales estudiados aquí son:

   I) Un problema abstracto semilineal de evolución con valores iniciales en donde se obtiene la solución débil.

   II) El otro problema a estudiar es el movimiento circular de una barra flexible con condiciones de frontera. Para este problema obtenemos soluciones débiles.

Para abordar nuestro estudio de existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de los problemas de evolución semilineales es fundamental conocer la teoría de los semigrupos fuertemente continuos o de contracción de operadores lineales, mediante el teorema de Lumer–Phillips. También se requiere de los conceptos básicos del análisis funcional así como de las ecuaciones diferenciales.

Como antecedentes del estudio de las ecuaciones de evolución abstractas se tiene los trabajos de R.J.Iório [16] que estudia las soluciones débiles del problema semilineal, y seguiremos las ideas de Halle–López [9], López [13], así como la tesis de Lozada [14], Césari y Kannan [4], quienes han estudiado la existencia de soluciones débiles de problemas de evolución de tipo hiperbólico.

El trabajo está dividido de la siguiente manera, en el capítulo 1 se hace un resumen de temas de análisis funcional, se da un breve resultado de operadores lineales acotados, teoría de semigrupos: existencia, unicidad, dependencia continua y contracciones. En el capítulo 2 se estudia la teoría abstracta de ecuaciones de evolución, el problema abstracto de Cauchy: homogénea, no homogénea y semilineal. Finalmente en el capítulo 3 se estudian la existencia de soluciones débiles del problema de evolución hiperbólico con condiciones iniciales, el problema siguiente es sobre el movimiento circular de una barra flexible, aquí se estudian soluciones débiles así como su continuidad y decaimiento exponencial de éstas.

NOTACIÓN

$\mathbb{K}$ cuerpo real $\mathbb{R}$ o complejo $\mathbb{C}$.

$\|\cdot\|$ norma en espacios de Banach.

$\mathcal{L}(X,Y)$ conjunto de operadores lineales de X en Y.

$\mathcal{B}(X,Y)$ conjunto de operadores lineales acotados de X en Y.

$\mathcal{P}[a,b]$ conjunto de particiones del intervalo cerrado $[a,b]$.

$\rho(A)$ conjunto resolvente del operador A.

$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda : A)$ familia de operadores lineales acotados.

X^* dual topológico de X.

$\mathcal{C}([0,\infty[: X)$ espacio de las funciones continuas de $[0,\infty[$ en X.

$\mathcal{C}^1([0,T] : X)$ espacio de las funciones continuas diferenciales de orden 1.

$L^p(\mathbb{R})$ espacio de Lebesgue en $\mathbb{R}$ de orden p , $0 < p < \infty$.

C es el operador cerrado con dominio denso, autoadjunto, definido negativo.

$C^{\frac{1}{2}}$ es el operador raíz cuadrada del operador C.

H el espacio real de Hilbert.

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ producto interno en el espacio de Hilbert.

$|\cdot|$ norma en el espacio de Hilbert.

$L^2(0,1)$ espacio de Lebesgue de funciones cuadraticamente integrables.

$\mathcal{L}(H)$ espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados sobre H.

Capítulo 1

Conceptos Preliminares y Semigrupo de operadores lineales

En este primer capítulo desarrollamos definiciones, propiedades y teoremas importantes del análisis funcional.

1.1. Conceptos Preliminares

Definición 1.1.1. *Un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *es un conjunto no vacío* X *dotado con dos aplicaciones* $+ : X \times X \to X$ *(suma de vectores) y* $\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ *(multiplicación por escalar) tales que para todo* $x, y, z \in X$ *y todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se verifica lo siguiente:*

i) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

ii) $x + y = y + x$;

iii) Existe un elemento $0 \in X$, *denominado neutro o cero, tal que* $0 + x = x$;

iv) Para cada $x \in X$ *existe un elemento* $-x \in X$, *llamado opuesto de* x, *tal que* $x + (-x) = 0$;

v) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

vi) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

vii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

viii) $1x = x$.

Dado un subconjunto M de un espacio vectorial X, diremos que es un **subespacio vectorial** de X si, y sólo si, para cualesquiera $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se satisface que $\alpha x + \beta y \in M$. Es obvio que M con las operaciones inducidas de X es un espacio vectorial.

Definición 1.1.2. *Sea U un conjunto arbitrario. Una métrica (o distancia) ρ sobre U es una aplicación $\rho : U \times U \to \mathbb{R}$ que satisfece las siguientes propiedades:*

i) $\rho(u, v) \geq 0 \quad \forall u, v \in U$;

ii) $\rho(u, v) = 0$ *si y sólo si* $u = v$;

iii) $\rho(u, v) = \rho(v, u) \quad \forall u, v \in U$;

iv) $\rho(u, v) \leq \rho(u, w) + \rho(w, v) \quad \forall u, v, w \in U$ *(desigualdad triangular).*

En este caso, al par (U, ρ) se le llama *espacio métrico*, y motiva la introducción de algunas definiciones.

Definición 1.1.3. *Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio métrico (U, ρ) se dice de Cauchy si $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(u_n, u_m) = 0$, esto es, si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \rho(u_n, u_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Definición 1.1.4. *Una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio métrico (U, ρ) se dice convergente si existe un $u \in U$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n, u) = 0$, esto es, si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \rho(u_n, u) \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Se nota que el concepto de convergencia de una sucesión implica la existencia de un único límite de ella. El siguiente resultado muestra que una métrica ρ es continua por sucesiones en cada una de sus componentes.

Lema 1.1.1. *Sea (U, ρ) un espacio métrico y sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en U que converge a $u \in U$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(u_n, v) = \rho(u, v) \quad \forall v \in U$.*

Los siguientes conceptos se necesitan para establecer el teorema del punto fijo de Banach, el teorema de Arzelá–Ascoli, el teorema del punto fijo de Schauder y aplicarlo posteriormente.

Definición 1.1.5. *Un espacio métrico (U, ρ) se llama completo si toda sucesión de Cauchy de U es convergente.*

Definición 1.1.6. *Sea (U, ρ) espacio métrico y sea $V \subseteq U$. Se dice que V es un subconjunto cerrado de U si el límite de cada sucesión convergente de V pertenece a V.*

Como consecuencia de estas definiciones, se sigue imediatamente que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es también completo.

Definición 1.1.7. *Sean U y V espacios de Banach y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq U \to V$ un operador. T es un operador compacto si y sólo si*

i) T es continuo.

ii) T lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.

$M \subset U$ es relativamente compacto en U, si $\overline{M}$ es compacto en U.

Definición 1.1.8. *$F \subset C[a, b]$ es equicontinua si $\forall \epsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para toda $f \in C[a, b]$ y todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $|x_1 - x_2| < \delta$ se tiene que $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$.*

Definición 1.1.9. *$F \subset C[a, b]$ es uniformemente acotada si existe una constante $k > 0$ tal que $\|f\|_C \leq k$ para todo $f \in F$.*

Con estas definiciones ya podemos mencionar un teorema muy importante del análisis funcional

Teorema 1.1.1 (De Arzelá–Ascoli). *Sea $F \subset C[a, b]$, $a < b$, equipado con la norma del máximo. Entonces F es relativamente compacto en $C[a, b]$ si y sólo si F es equicontinua y uniformemente acotada.*

Sean X e Y espacios de Banach, con $X \subseteq Y$ y $T : X \to Y$ un operador, toda solución de la ecuación

$$Tx = x$$

es llamado un punto fijo de T.

El siguiente teorema ha llegado a ser uno de los resultados más utilizados en la resolución de problemas de existencia en muchas ramas del Análisis por su simplicidad y utilidad.

Definición 1.1.10. *Sea (U, ρ) un espacio métrico y sea $T : U \to U$. Se dice que la aplicación T es una contracción si existe $k \in \langle 0, 1\rangle$ tal que*

$$\rho(T(u), T(v)) \leq k\rho(u, v) \quad \forall u, v \in U.$$

Teorema 1.1.2 (Del punto fijo de Banach). *Sea (U, ρ) un espacio métrico completo y sea $T : U \to U$ una contracción. Entonces existe un único $w \in U$ tal que $T(w) = w$.*

El siguiente teorema es una versión mejorada del teorema del punto fijo de Banach.

Teorema 1.1.3. *Sea (U, ρ) un espacio métrico completo y sea $T : U \to U$ tal que T^m es una contracción, para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces existe un único $w \in U$ tal que $T(w) = w$.*

Del teorema anterior queda claro que no es necesario exigir que T sea una contración, sino que simplemente requerir que alguna potencia de ella lo sea.

Teorema 1.1.4 (Del Punto Fijo de Schauder, 1930). *Sea U un espacio de Banach y M un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo de U, y sea $T : M \to M$ un operador compacto. Entonces T tiene un punto fijo.*

Definición 1.1.11. *Sea M un espacio métrico con función distancia ρ. Definamos lo siguiente:*

i) Una aplicación $T : M \to M$ se llama Lipschitziana si existe una constante $k \geq 0$ tal que para todo $x, y \in M$

$$\rho(Tx, Ty) \leq k\rho(x, y) \tag{1.1.1}$$

ii) La aplicación $T : M \to M$ se dice localmente Lipschitziana en M si allí existe una familia de $\{E_\alpha\}$, cubriendo M, $\cup E_\alpha = M$, tal que T es Lipschitziana en cada una E_α , es decir, si existe $k_\alpha \geq 0$ tal que para todo $x, y \in E_\alpha$

$$\rho(Tx, Ty) \leq k_\alpha \rho(x, y)$$

iii) La aplicación $T : M \to M$ de un subconjunto M de un espacio de Banach X se dice que es uniformemente Lipschitziana si la condición

$$\rho\left(T^n x, T^n y\right) \leq k\rho(x, y) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

se satisface para algún $k > 0$.

La constante más pequeña que verifica (1.1.1) se llama constante de Lipschitz de la aplicación T.

Definición 1.1.12. *Sea X un espacio vectorial sobre K. Una aplicación $\|\cdot\| : X \to X$ se dice una norma sobre X si ella satisface las siguientes propiedades:*

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$ *(positividad).*

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in X.$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ *(desigualdad triangular).*

El espacio X dotado de la norma $\|\cdot\|$ recibe el nombre de *espacio vectorial normado* y se denota $(X, \|\cdot\|)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que el espacio normado es real, y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que es complejo.

Es importante resaltar que $(X, \|\cdot\|)$ constituye también un espacio métrico (X, ρ), con $\rho(x, y) := \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$.

Definición 1.1.13. *Una suseción* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *del espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice que es de Cauchy si* $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$*, esto es, si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Definición 1.1.14. *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *del espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice convergente si existe un* $x \in X$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$*, esto es, si*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tal que} \quad \|x_n - x\| \leq \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Es fácil notar que toda sucesión convergente es de Cauchy, pero el recíproco en general no es cierto, lo cual da origen a la siguiente definición.

Definición 1.1.15. *El espacio vectorial normado* $(X, \|\cdot\|)$ *se dice completo (o espacio de Banach) si toda sucesión de Cauchy en* X *es convergente.*

El siguiente lema establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de la sucesión de Cauchy, siendo la condición suficiente de mayor interés y aplicabilidad que la condición necesaria.

Lema 1.1.2. *Sea* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy de* $(X, \|\cdot\|)$*. Entonces* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es convergente si y sólo si ella posee una subsucesión convergente.*

Acontinuación introduciremos los conceptos de espacios pre–Hilbert y espacios de Hilbert, pero previamente se necesita de la definición de producto escalar.

Definición 1.1.16. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. Una aplicación* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ *se dice un producto escalar (o producto interior) sobre* X*, si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \quad$ *y* $\quad \langle x,x\rangle = 0$ *si y sólo si* $\quad x = 0 \quad$ *(positividad)*

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad \forall x,y \in X \quad$ *(simetría)*

iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x,y,z \in X \quad$ *(linealidad)*

En lo que sigue, $\overline{z}$, *Re*(z) *y Im*(z) *denotan el conjugado, la parte real y la parte imaginaria respectivamente, de* $z \in \mathbb{C}$. *A su vez* $\overline{z} = Re(z) = z$, $Im(z) = 0$, *si* $z \in \mathbb{R}$.

Definición 1.1.17. *Sea* X *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{C}$. *Una aplicación* $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ *se dice un producto escalar (o un producto interno) sobre* X, *si satisface las siguientes propiedades:*

i) $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \quad$ *y* $\quad \langle x,x\rangle = 0$ *si y sólo si* $\quad x = 0 \quad$ *(positividad)*

ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle} \quad \forall x,y \in X \quad$ *(sesquisimetría)*

iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x,y,z \in X \quad$ *(linealidad en la primera componente)*

Observemos aquí que en el caso real las propiedades *ii)* y *iii)* garantizan también la linealidad del producto escalar en la segunda componente. Sin embargo, en el caso complejo ello no ocurre ya que *ii)* y *iii)* sólo implican que

$$\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle x,y\rangle + \overline{\beta}\langle x,z\rangle \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad \forall x,y,z \in X,$$

lo cual recibe el nombre de sesquilinealidad.

El espacio vectorial X provisto de un producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ se denomina espacio pre–Hilbert y se denota $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Uno de los resultados más importantes sobre estos espacios está dado por la siguiente desigualdad clásica.

Teorema 1.1.5. *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz) Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio pre–Hilbert sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$. *Entonces se tiene*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2} \quad \forall x,y \in X.$$

Es interesante notar que todo producto escalar induce una norma sobre el espacio vectorial X respectivo. En efecto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 1.1.6. *Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre–Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y consideremos la siguiente aplicación $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| := \langle x, x\rangle^{1/2} \quad \forall x \in X$. Entonces $\|\cdot\|$ es una norma sobre X, la cual se llama norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

El teorema anterior induce la siguiente definición.

Definición 1.1.18. *Se dice que un espacio pre–Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert si él es completo con la norma inducida por su producto escalar.*

Lema 1.1.3. *Sea X un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Por otro lado, todo espacio de Hilbert es Banach, pero el recíproco no necesariamente es cierto. Es decir, existen espacios vectoriales normados completos cuyas normas respectivas no provienen de ningún producto escalar. Un resultado clásico que usualmente se emplea para constatar este hecho es el siguiente.

Lema 1.1.4. *(Ley del paralelogramo) Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Entonces*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \quad \forall x, y \in X.$$

A continuación daremos algunas nociones fundamentales sobre teoría espectral, asumiendo que A es un operador lineal autoadjunto, definido positivo y no necesariamente acotado, H un espacio de Hilbert y $\mathcal{L}(H)$ el espacio de Banach de todos los operadores lineales y acotados sobre H.

Definición 1.1.19. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset H \to H$ un operador sobre H. Se define el conjunto resolvente de A como*

$$\rho(A) := \left\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) \textit{ es invertible y } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\right\},$$

y al espectro de A como $\sigma := \mathbb{C}/\rho(A)$. Para $\lambda \in \rho(A)$, $\mathcal{R}(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$ el resolvente u operador resolvente de A en λ.

El espectro de A es un concepto familiar en la teoría de Álgebra lineal en espacios de dimensión finita, pues en tal caso, éste consiste en el conjunto de los valores propios del operador A.

Definición 1.1.20. *Para un operador A definido en un espacio de Hilbert H tiene resolvente compacto si $\rho(A) \neq \emptyset$ y $\mathcal{R}(\lambda, A)$ es un operador compacto, para cada $\lambda \in \rho(A)$.*

Para ciertos operadores, tenemos la siguiente caracterización.

Teorema 1.1.7. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H \to H$ un operador con $\rho \neq \emptyset$ y sea $X_A = \mathcal{D}(A)$, con la norma del gráfico, $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) A tiene resolvente compacto.

ii) $i : X_A \to H$ es compacto.

Para operadores no acotados en H un resultado fundamental es el teorema espectral el cual muestra que todo operador autoadjunto con resolvente compacto se puede representar por un operador diagonal.

Las siguientes definiciones son usuales en la teoría de operadores

Definición 1.1.21. *Un operador $A : \mathcal{D}(A) \to H$ con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso en H se dice:*

i) Autoadjunto si $A = A^*$, donde

$$\mathcal{D}(A^*) := \left\{x' \in H : \exists y' \in H, \langle Ax, x'\rangle = \langle x, y'\rangle, \forall x \in \mathcal{D}(A)\right\},$$

y se llama adjunto de A al operador A^* definido por

$$\forall x' \in \mathcal{D}(A^*) : A^*x' = y'$$

ii) Simétrico si $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{D}(A)$,

iii) Definido positivo si $Re\langle Ax, x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$.

1.2. Semigrupo de operadores lineales

En esta sección resumimos algunas cuestiones básicas de operadores lineales acotados y la teoría de semigrupos de operadores lineales acotados definidos en espacios de Banach. La teoría de semigrupos dió un gran impulso en el año de 1948 con la famosa demostración del teorema de Hille y Yosida, y con las investigaciones posteriores de importantes investigadores permitió consolidarse en numerosas aplicaciones en matemáticas puras y aplicadas.

Siendo nuestro principal resultado el lema 1.5.1, el teorema de generación de Hille–Yosida, teorema 1.5.1 y el teorema de Lummer–Philips, teorema 1.5.2.

La teoría de semigrupos de operadores lineales acotados es una herramienta poderosa en el estudio de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y en ecuaciones de evolución. Referencias clásicas de ésta teoría son: [1], [5], [6], [7], [10], [15], [17]

1.3. Operadores lineales acotados

En esta sección introducimos los conceptos y algunas propiedades de operadores lineales acotados. Definimos y caracterizamos el generador infinitesimal de semigrupos de operadores lineales acotados en un espacio de Banach.

1.3.1. Definiciones y propiedades generales

Sean X, Y espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ cuerpo real o complejo) y $\|\cdot\|$ la norma en X y en Y.

Definición 1.3.1. *Sea $D \subseteq X$ un subespacio vectorial de X. La función $A : D \subseteq X \to Y$ es un operador lineal (o simplemente un operador) de X en Y si:*

i) $\overline{D} = X$ (D es denso en X).

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y para todo $x, y \in D$: $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$ (A es lineal).

Denotamos por $\mathcal{L}(D, Y)$ al conjunto de operadores lineales de X en Y con dominio D. Así un operador $A \in \mathcal{L}(D, Y)$ es acotado si

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Ax\| < \infty,$$

y escribimos $\|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Ax\|$.

Denotamos por $\mathcal{B}(X, Y)$ al conjunto de los operadores acotados de X en Y y mencionamos las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{L}(X, Y)$ es un espacio vectorial y $\mathcal{B}(X, Y)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(X, Y)$.
2. $\|\cdot\|$ es la norma de $\mathcal{B}(X, Y)$.
3. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, para todo $x \in X$.
4. Si D es denso en X y $A \in \mathcal{B}(D, Y)$, entonces existe $B \in \mathcal{B}(X, Y)$ con $Bx = Ax$, para todo $x \in D$ y $\|B\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \|A\|_{\mathcal{B}(D,Y)}$.
5. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, se tiene que:

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\|.$$

6. Si $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, son equivalentes:

   i) A es uniformemente continuo.

   ii) A es continuo.

   iii) A es continuo en algún $x_0 \in X$.

   iv) A es continuo en 0.

   v) A es acotado.

   vi) $M \subset X$ acotado, entonces $A(M) \subset Y$ acotado.

7. Principio de Acotación Uniforme: Sean $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $A_n x \to Ax$ para todo $x \in X$. Entonces existe $K > 0$ tal que $\|A_n\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio de Banach. (No es necesario que X sea completo) .

9. Si $A \in \mathcal{B}(Y, Z)$ y $B \in \mathcal{B}(X, Y)$, entonces $AB \in \mathcal{B}(X, Z)$ y $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

10. $\mathcal{B}(X, Y)$ es un álgebra de Banach con unidad.

1.3.2. Convergencias en $\mathcal{B}(X, X)$

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X, X)$ y $A \in \mathcal{B}(X, X)$.
A_n converge uniformemente (o en norma) a A y se denota $A_n \to A$, si $\|A_n - A\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
A_n converge fuertemente a A y se denota $A_n \overset{s}{\to} A$ si y sólo si $\|A_n x - Ax\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X$.

Vemos que

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\| \ \|x\|;$$

es decir, la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte al mismo límite. El recíproco en general, no es cierto.

1.3.3. Funciones en $\mathcal{B}(X, X)$ en serie de potencias

Sea X un espacio de Banach complejo y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica en un entorno del origen y con radio de convergencia R con representación holomorfa: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.
Sea B la bola abierta en $\mathcal{B}(X, X)$ centrada en el origen y radio R, para $A \in B$ definimos

$$f_n(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador $f_n(A) \in \mathcal{B}(X,X)$, por ser éste un álgebra de Banach y dado que f es analítica, la sucesión $(f_n(A))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(X,X)$ es de Cauchy y por ser $\mathcal{B}(X,X)$ un espacio de Banach, $(f_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento de $\mathcal{B}(X,X)$ que lo denotamos por $f(A)$.

Así, podemos definir por ejemplo:

1) $e^{wA} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{w^n A^n}{n!}$, $A \in \mathcal{B}(X,X)$, $w \in \mathbb{C}$.

2) $\log(I+A) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}A^n}{n}$, $\|A\| < 1$, donde I es el operador identidad.

3) $\dfrac{I}{\lambda I - A} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n}{\lambda^{n+1}}$, $\|A\| < |\lambda|$.

4) Para todo n, $A_n \geqslant 0$ entonces $\|f(A)\| \leq f(\|A\|)$.

5) $A, B \in \mathcal{B}(X,X) : AB = BA \Longleftrightarrow e^{A+B} = e^A e^B$.

Ejemplo 1.3.1. *Sea* $X = \mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; $a, b \in \mathbb{R}$ *entonces:*

$$e^{tA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cosh(bt) & \operatorname{senh}(bt) \\ \operatorname{senh}(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}$$

$$e^{itA} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & i\operatorname{sen}(bt) \\ i\operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$$

Además se tiene que para todo $A \in \mathcal{B}(X,X)$: $\|e^A\| \leq e^{\|A\|}$.

1.3.4. Operadores acotados invertibles

Definición 1.3.2. *Sean X, Y espacios de Banach y A un operador acotado en $\mathcal{B}(X,Y)$. Se dice que A es invertible si existe un operador acotado B en $\mathcal{B}(Y,X)$ tal que para todo $x \in X$, $BAx = x$ y para todo $y \in Y$, $ABy = y$. En ese caso, diremos que B es el inverso de A y lo denotaremos por $B = A^{-1}$.*

Proposición 1.3.1. *Si $A \in \mathcal{B}(X,X)$ y $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible.*

Para la prueba basta ver que: $(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I$ y $\sum_{n=0}^{\infty} A^n(I-A) = I$, luego $I - A$ es invertible.

Observación 1.3.1. *Si A es invertible y $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces αA es invertible y* $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$.

1.3.5. Problema de Cauchy asociado a un operador acotado

Definimos $\mathcal{D}(I,X)=\left\{f:I\to X:\text{ para todo } t\in I,\text{ existe} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\right\}$, donde $I\subset\mathbb{R}$ es un intervalo abierto, y para $f\in\mathcal{D}(I,X)$, ponemos $\dfrac{d}{dt}f(t)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$. Para un intervalo I que es cerrado en alguno de sus extremos, la definición es la misma si t es un punto interior de I, mientras que si t es un punto extremo entonces consideramos límites por la izquierda o por la derecha según sea el caso.

Proposición 1.3.2. *La solución del problema de valor inicial*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d}{dt}f(t) & = & Af(t)\,,f\in\mathcal{D}([0,+\infty\rangle,X) \\ f(0) & = & f_0 \end{array}\right. \tag{1.3.2}$$

para $A\in\mathcal{B}(X,X)$*, es* $e^{tA}f_0$.

Prueba:

Debemos probar que
$$\left\|\frac{e^{(t+h)A}f_0-e^{tA}f_0}{h}-Ae^{tA}f_0\right\|\overset{h\to 0}{\longrightarrow}0.$$

Vemos que si $(tA)(hA)=(hA)(tA)$ entonces $e^{(t+h)A}=e^{tA}e^{hA}$ y $Ae^{tA}=e^{tA}A$.

Luego,

$$\begin{array}{rcl} \left\|\dfrac{e^{(t+h)A}f_0-e^{tA}f_0}{h}-Ae^{tA}f_0\right\| & = & \dfrac{1}{|h|}\left\|e^{tA}e^{hA}f_0-e^{tA}f_0-hAe^{tA}f_0\right\| \\ & = & \dfrac{1}{|h|}\left\|e^{tA}(e^{hA}-I-hA)f_0\right\| \\ & \leq & \dfrac{1}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\left\|e^{hA}-I-hA\right\|\|f_0\| \\ & = & \dfrac{1}{|h|}\left\|e^{tA}\right\|\left\|\dfrac{h^2A^2}{2}+\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\dfrac{h^nA^n}{n!}\right\|\|f_0\| \\ & = & |h|\left\|e^{tA}\right\|\left\|\dfrac{A^2}{2}+\dfrac{hA^3}{(n+3)(n+2)(n+1)}e^{hA}\right\|\|f_0\| \\ & \leq & |h|\left\|e^{tA}\right\|\left(\|A\|^2+|h|\|A\|^3e^{h\|A\|}\right)\|f_0\|\overset{h\to 0}{\longrightarrow}0. \end{array}$$

Concluímos que $e^{tA}f_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R},X)$ y $e^{tA}f_0$ es solución de (1.3.2).

1.4. Semigrupos uniformemente continuos

Empezamos esta sección dando algunas definiciones y propiedades básicas de semigrupos uniformemente continuos.

1.4.1. Definiciones: Semigrupo y generador infinitesimal

Definición 1.4.1. *La familia $(T(t))_{t\geqslant 0}$ de operadores lineales acotados de X en X, es un semigrupo de operadores lineales acotados (o simplemente un semigrupo) si:*

i) $T(0) = I$ *(Identidad en $\mathcal{B}(X,X)$).*

ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *para todo* $t, s \geq 0$.

Si un semigrupo $(T(t))_{t\geqslant 0}$ satisface además la propiedad

iii) $\|T(t) - I\| \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, *entonces decimos que es un semigrupo uniformemente continuo.*

De (i), (ii) y (iii) tenemos que, para todo $t \geq 0$

$$\|T(t+h) - T(t)\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\|T(t+h) - T(t)\| &= \|T(t)T(h) - T(t)\| \\
&= \|T(t)\big(T(h) - I\big)\| \\
&\leq \|T(t)\|\ \|T(h) - I\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

luego, $\|T(t+h) - T(t)\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ejemplo 1.4.1. *Si* $e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ *con $A \in \mathcal{B}(X,X)$, entonces e^{tA} es un semigrupo uniformemente continuo.*

En efecto: Sea $T(t) = e^{tA} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$.

i) $T(0) = e^0 = I$.

ii) $T(t+s) = e^{(t+s)A} = e^{tA+sA} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$, pues $(tA)(sA) = (sA)(tA)$, para todo $t, s \geq 0$.

iii)

$$\begin{aligned}
\|T(t) - I\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\
&= \left\| I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I \right\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Observación 1.4.1. *Más adelante se verá que todo semigrupo uniformemente continuo es de la forma* e^{tA} *para algún* $A \in \mathcal{B}(X, X)$.

Definición 1.4.2. *Sea* $(T(t))_{t\geqslant 0} \subseteq \mathcal{B}(X, X)$ *un semigrupo uniformemente continuo. El generador infinitesimal de un semigrupo de operadores lineales en* X*, es el operador* $A : \mathcal{D}(A) \to X$*, definido por*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \text{ existe } \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\},$$

donde, para cada $x \in \mathcal{D}(A)$ *se tiene*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+T(t)x}{dt} \right|_{t=0}.$$

Dado un semigrupo es simple obtener su generador, basta evaluar el límite en la definición de generador infinitesimal.

Observación 1.4.2. *Decir que* A *es un operador, significa que* $\mathcal{D}(A)$ *es denso en* X *y* $\mathcal{D}(A)$ *es un subespacio vectorial de* X.

Ejemplo 1.4.2. *Sea* $T(t)$ *un operador de* $L^2(\mathbb{R})$ *definido como* $T(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$*, dado por* $T(t)f(x) = f(x+t) \cdot e^{at}$*, con* $a \in \mathbb{R}$*. Mostrar que* T *es un semigrupo y encontrar su generador.*

Prueba:

De la definición tenemos que

$$T(0)f(x) = f(x), \text{ para todo } f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ entonces } T(0) = I$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} T(t+s)f(x) &= f(x+t+s) \cdot e^{a(t+s)} \\ T(t)T(s)f(x) &= T(t)f(x+s) \cdot e^{as} = f(x+s+t) \cdot e^{as}e^{at} = f(x+t+s) \cdot e^{a(t+s)}. \end{aligned}$$

De donde concluímos que

$$T(t)T(s)f(x) = T(t+s)f(x) \text{ para todo } f \in L^2(\mathbb{R}), \text{ entonces } T(t)T(s) = T(t+s).$$

Por lo tanto, T es un semigrupo de operadores en $L^2(\mathbb{R})$.

Ahora calculemos su generador infinitesimal, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{T(h)f(x)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot e^{ah}-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot e^{ah}-f(x)\cdot e^{ah}+f(x)\cdot e^{ah}-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} e^{ah}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{e^{ah}-1}{h}\\
&= f'(x)+af(x)\\
&= Af(x)
\end{aligned}$$

El límite de arriba existe si y sólo si $f \in H^1(\mathbb{R})$. Por lo tanto, denotando por A al generador infinitesimal de T, tenemos que

$$\mathcal{D}(A) = H^1(\mathbb{R})$$

y tenemos

$$A(f) = \frac{d}{dx}f + a\cdot If \quad \text{para todo } f \in L^2(\mathbb{R}),$$

entonces,

$$A = \frac{d}{dx} + aI.$$

El operador A es un operador lineal pero no es acotado.

1.4.2. Integral de Riemann de un semigrupo uniformemente continuo

Sean $0 \leq a < b$ y denotemos por $\mathcal{P}[a,b]$ al conjunto de todas las particiones del intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Si $P \in \mathcal{P}[a,b]$ y $P = \{x_0,\ldots,x_n\}$, escribiremos $|P| = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{x_k - x_{k-1}\}$. Dado un semigrupo uniformemente continuo $(T(t))_{t\geqslant 0}$ en $\mathcal{B}(X,X)$, definimos el operador $R_P(T)$ como

$$R_P(T) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})T(x_{k-1}).$$

Escribimos la integral de Riemann de $T(t)$ como $\int_a^b T(t)dt = \lim\limits_{|P|\to 0} R_P(T)$, donde el límite se toma sobre todas las $P \in \mathcal{P}[a,b]$. Por la continuidad uniforme de $(T(t))_{t\geqslant 0}$ el límite siempre existe y tiene las siguientes propiedades:

i) $\int_a^b T(t)dt \in \mathcal{B}(X,X)$.

ii) Si U, V son semigrupos uniformemente continuos y A es acotado, entonces

$$\int_a^b [AU(t) + V(t)]\,dt = A\int_a^b U(t)dt + \int_a^b V(t)dt.$$

iii) Para cada $t \geq 0$: $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_t^{t+h} T(s)ds \overset{h\to 0}{\longrightarrow} T(t)$, es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces

$$\left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)ds - T(t) \right\| < \epsilon.$$

1.4.3. Acotamiento del generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo

Proposición 1.4.1. *Si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo, entonces $\mathcal{D}(A) = X$ y $A \in \mathcal{B}(X,X)$.*

Prueba:

Escojamos un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, de manera que

$$\left\| I - \frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} T(s)ds \right\| < 1$$

luego el operador $\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^{\delta} T(s)ds$ es invertible por la proposición 1.3.1, y por lo tanto $\displaystyle\int_0^{\delta} T(s)ds$ también lo es.

Así, sea $0 < h < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\delta} T(s)ds &= \frac{1}{h}\int_0^{\delta}[T(h)T(s) - T(s)]ds \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{\delta} T(h+s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{\delta} T(s)ds + \int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \int_{\delta}^{h} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)ds.
\end{aligned}$$

Luego, tomando límite cuando $h \to 0^+$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\delta} T(s)ds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{\delta}^{\delta+h} T(s)ds + \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)ds \\
&= T(\delta) - T(0) \\
&= T(\delta) - I
\end{aligned}$$

entonces,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h} = (T(\delta) - I)\left[\int_0^{\delta} T(s)ds\right]^{-1}$$

como la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte por la sección 1.3.2, tenemos que para todo $x \in X$ existe $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{T(h)x - x}{h}$.

Concluímos que $\mathcal{D}(A) = X$ y por ser $\mathcal{B}(X,X)$ un álgebra de Banach, se tiene que

$$A = \left(T(\delta) - I\right) \left[\int_0^{\delta} T(s)ds\right]^{-1} \in \mathcal{B}(X,X).$$

1.4.4. Correspondencia entre un semigrupo uniformemente continuo y su generador

Para cada semigrupo uniformemente continuo existe un único generador infinitesimal, el cual es un operador acotado. Por otro lado, todo operador $A \in \mathcal{B}(X,X)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo definido por

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Ahora probaremos que cada operador acotado genera un único semigrupo uniformemente continuo con la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2. *Sean $(T_1(t))_{t \geqslant 0}$ y $(T_2(t))_{t \geqslant 0}$ dos semigrupos uniformemente continuos. Si $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{T_1(t) - I}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{T_2(t) - I}{h}$ entonces $T_1(t) = T_2(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Prueba:

Para $T = 0$ es inmediato. Fijemos $t > 0$ y sean las funciones $f_1(h) = \|T_1(h)\|$ y $f_2(h) = \|T_2(h)\|$, como f_1 y f_2 son continuas existen $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ tales que $\|T_1(h)\| \leq k_1$ y $\|T_2(h)\| \leq k_2$, para todo $0 \leq h \leq t$. Por otro lado, de la hipótesis tenemos: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $0 < h \leq \delta$ tenemos

$$\frac{1}{h}\|T_1(h) - T_2(h)\| < \frac{\epsilon}{t.k_1.k_2}.$$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t}{n} < \delta$ y observemos la siguiente suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[T_1\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T_2\left(\frac{kt}{n}\right) - T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right)\right] = T_1(t) - T_2(t),$$

es una suma telescópica, luego efectuando la suma y utilizando la propiedad de semigrupos $T_j(r+s) = T_j(r)T_j(s)$ para $j = 1, 2$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\|T_1(t) - T_2(t)\| &= \left\| T_1\left(n \cdot \frac{t}{n}\right) - T_2\left(n \cdot \frac{t}{n}\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[T_1\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T_2\left(\frac{kt}{n}\right) - T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right] \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T_1\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T_2\left(\frac{kt}{n}\right) - T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \left[T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) \right] \left[T_1\left(\frac{t}{n}\right) - T_2\left(\frac{t}{n}\right) \right] \left[T_2\left(\frac{kt}{n}\right) \right] \right\| \\
&< \sum_{k=0}^{n-1} k_1 \cdot \frac{\epsilon}{t.k_1.k_2} \cdot \frac{t}{n} \cdot k_2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{n} = \frac{n\epsilon}{n} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}
$$

como $\epsilon > 0$ es arbitrario, entonces $T_1(t) = T_2(t)$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 1.4.1. *Sea $(T(t))_{t \geqslant 0}$ un semigrupo uniformemente continuo. Entonces:*

i) Existe un único operador acotado A tal que $T(t) = e^{tA}$, siendo A el generador infinitesimal de $T(t)$.

ii) Existe una constante $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$ para todo $t \geq 0$.

iii) La función $T : [0, +\infty[\to \mathcal{B}(X, X)$, para cada $t \geq 0$ le asigna el operador $T(t)$ y es diferenciable en norma y verifica

$$
\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A.
$$

En particular, dado $f_0 \in X$, $f(t) = T(t)f_0$ es solución de $\frac{d}{dt}f(t) = Af(t)$, $t \geq 0$ tal que $f_0 = f(0)$.

Prueba:

(i) Sea $x \in X$ entonces

$$
\lim_{t \to 0^+} T(t)x = \lim_{t \to 0^+} e^{tA}x = \lim_{t \to 0^+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) x = Ix = x.
$$

Luego,

$$
\lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{e^{tA}x - x}{t} \right] = \lim_{t \to 0^+} \left[Ax + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} A^n x \right] = Ax,
$$

lo que demuestra que A es el generador de $(e^{tA})_{t\geqslant 0}$ y la unicidad está dada por la proposición 1.4.2.

(ii)

$$\begin{aligned}\|T(t)\| = \|e^{tA}\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n A^n}{n!}\| \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t|^n\|A\|^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!} \\ &= e^{t\|A\|},\end{aligned}$$

luego existe $w = \|A\| > 0$ para todo $t \geq 0$.

(iii) Sea $x \in \mathcal{D}(A)$ y $t > 0$. Para $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \frac{T(t)T(h)x - T(t)x}{h} \\ &= \frac{T(h)-I}{h}T(t)x \\ &= T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x\end{aligned}$$

por la continuidad de $T(t)$ se tiene

$$\frac{d^+T(t)}{dt}x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Para $0 < h < t$, tenemos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| &= \left\|\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right\| \\ &= \left\|T(t-h)\left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right] + T(t-h)Ax - T(t)Ax\right\| \\ &\leq \|T(t-h)\|\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|\end{aligned}$$

luego, concluímos que

$$\frac{d^-T(t)x}{dt} = T(t)Ax$$

Con lo cual queda probado la parte (iii).

1.5. Semigrupos fuertemente continuos

En ésta sección damos algunas definiciones y propiedades básicas de semigrupos fuertemente continuos.

1.5.1. Definiciones y propiedades fundamentales

Estudiamos a los operadores acotados que satisfacen una condición más débil que la condición uniforme y como corolario mostramos condiciones para A, para que la ecuación (1.3.2) tenga solución.

Definición 1.5.1. *Un semigrupo de operadores lineales acotados $(T(t))_{t\geqslant 0}$ en X, es un semigrupo fuertemente continuo ($T(t)$ es de clase C^0 o un C^0-semigrupo) si para todo $x \in X$ se tiene que*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x. \tag{1.5.3}$$

Esta definición es equivalente a

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \text{ para todo } x \in X.$$

Proposición 1.5.1. *Sea $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C^0-semigrupo. Entonces existen constantes $w \geq 0$ y $M \geq 1$ tal que para todo $0 \leq t < \infty$, se tiene que*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}. \tag{1.5.4}$$

Prueba:

Por la continuidad fuerte, existen $\delta \geq 0$ y $M \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \delta]$. De lo contrario, existiría una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \langle 0, +\infty\rangle$ con $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $\|T(t)\| \geq n$. Como $(\|T(t_n)\|)_{n\geqslant 1}$ no es acotada, por el Principio de Acotación Uniforme, existe $x \in X$ tal que $(\|T(t_n)x\|)_{n\geqslant 1}$ no es acotada, contradiciendo la continuidad fuerte, pues para cada $x \in X$ que verifica $\lim\limits_{t\to 0} T(t)x = x$ tenemos que $\left\|\lim\limits_{t\to 0} T(t)x\right\| = \|x\|$. Ahora , dado que $T(0) = I$, tenemos que $M \geq 1$. Por otro lado, dado $t \geq 0$ existen $m \in \mathbb{N}$ y $\eta \in [0, \delta]$ tal que $t = \delta m + \eta$ (lema de Euclides), así

$$\begin{aligned}
\|T(t)\| &= \|T(\delta m + \eta)\| \\
&= \|T(\delta m)T(\eta)\| \\
&= \|T(\delta)^m T(\eta)\| \\
&\leq \|T(\delta)\|^m \, \|T(\eta)\| \\
&\leq M^m.M \\
&\leq M.M^{t/\delta} \quad \text{pues} \quad m \leq \frac{t}{\delta},\ M \geq 1
\end{aligned}$$

como $M \geq 1$ se tiene $w = \frac{1}{\delta}\ln M \geq 0$ entonces $e^w = M^{\frac{1}{\delta}}$. Así $M^{\frac{t}{\delta}} = e^{tw}$ para todo $t \geq 0$ y

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}$$

Observación 1.5.1. *Cuando un semigrupo sobre X satisface (1.5.4), decimos que es del tipo (M, w). Los semigrupos del tipo $(1,0)$ se denominan semigrupos de contracción y aquellos del tipo $(M, 0)$ serán llamados semigrupos uniformemente acotados.*

Proposición 1.5.2. *Si $(T(t))_{t\geqslant 0}$ es un C^0-semigrupo, entonces para cada $x \in X$ la función $\varphi_x : [0, +\infty\rangle \to X$ dada por $\varphi_x(t) = T(t)x$ es continua.*

Prueba:

Por la proposición 1.5.1, existen constantes $M, w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para todo $t \geq 0$.

Sea $x \in X$ y $h \geq 0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(t+h)x - T(t)x\| &= \|T(t)(T(h)x - x)\| \\
&\leq \|T(t)\| \, \|T(h)x - x\| \\
&\leq Me^{wt}\|T(h)x - x\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Por otro lado, para $x \in X$ y $h \in [0, t]$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|T(t-h)x - T(t)x\| &= \|T(t-h)\big(x - T(h)x\big)\| \\
&\leq \|T(t-h)\| \, \|x - T(h)x\| \\
&\leq Me^{w(t-h)} \, \|x - T(h)x\| \\
&\leq Me^{wt} \, e^{-wh} \, \|T(h)x - x\| \overset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi_x(s) \to T(s)x$ es continua para todo $x \in X$.

Observación 1.5.2. *El resultado anterior permite dar sentido a la integral de Riemann $\int_a^b T(s)ds$ para todo $x \in X$.*

La definición de generador infinitesimal para un C^0-semigrupo es la misma que para un semigrupo uniformemente continuo:

$$\begin{aligned}
A &: \mathcal{D} \subseteq X \longrightarrow X. \\
\mathcal{D}(A) &= \left\{ x \in X : \text{ existe} \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}, \\
Ax &= \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}, \quad \text{para } x \in \mathcal{D}(A)
\end{aligned}$$

Veamos que en este caso, aunque es posible que $\mathcal{D}(A) \subsetneq X$, se tiene que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Observación 1.5.3. *Todo semigrupo uniformemente continuo es un C^0-semigrupo. La diferencia está que un semigrupo uniformemente continuo converge uniformemente a la identidad en cero, mientras que un C^0-semigrupo converge fuertemente. Al igual que los semigrupos uniformemente continuos, los C^0-semigrupos satisfacen una propiedad de acotación para su norma.*

Como la continuidad fuerte es una condición más débil que la continuidad uniforme, esperamos que A también tenga una propiedad un poco más débil que ser acotado. El siguiente resultado será importante para confirmar estos hechos y para resultados posteriores.

Lema 1.5.1. *Sea $(T(t))_{t\geqslant 0}$ un C^0-semigrupo y A su generador infinitesimal, entonces se verifican las siguientes propiedades:*

a) Para todo $t \geq 0$ y todo $x \in X$, $\lim\limits_{s\to t} T(s)x = T(t)x$. Más aún si el semigrupo es uniformemente continuo entonces $\lim\limits_{s\to t} T(s) = T(t)$ en $\mathcal{L}(X)$.

b) Para todo $x \in X$ y todo $t \geq 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

c) Para todo $x \in X$ y todo $t \geq s \geq 0$,

$$\int_s^t T(\tau)x d\tau \in \mathcal{D}(A) \quad y \quad A \int_s^t T(\tau)x d\tau = T(t)x - T(s)x.$$

d) Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y todo $t \geq 0$,

$$T(t)x \in \mathcal{D}(A) \quad y \quad \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

e) Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y todo $t \geq s \geq 0$,

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

Prueba:

(a) Sean $x \in X$, $t > 0$ y $\epsilon > 0$. Como el semigrupo es fuertemente continuo, existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\|T(s)\| \leq M$ para $s \in [0, t+1]$ y $\|T(s)x - x\| < \frac{\epsilon}{M}$ cuando $0 < s < \delta$. Para $0 < t - s < \delta$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|T(s)x - T(t)x\| &= \|T(s)x - T(t)x - T(s)T(t-s)x + T(s)T(t-s)x\| \\
&= \|T(s)(x - T(t-s)x) - T(t)x + T(s)T(t-s)x\| \\
&= \|T(s)(x - T(t-s)x) - T(t)x + T(t)x\|, \text{ pues } T(s)T(t-s) = T(t) \\
&\leq \|T(s)\| \, \|x - T(t-s)x\| \\
&< M \cdot \frac{\epsilon}{M} \\
&= \epsilon.
\end{aligned}
$$

(b) De la parte (a), existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s)x - T(t)x\| < \epsilon$, cuando $|s - t| < \delta$, luego para $0 \leq h \leq \delta$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|T(s)x - T(t)x\| ds \\
&< \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \epsilon \cdot ds = \frac{1}{h} \cdot \epsilon \cdot h \\
&= \epsilon.
\end{aligned}
$$

El límite izquierdo para el caso $t > 0$ se prueba en forma análoga. Con esto se prueba la propiedad.

(c) Sea $x \in X$, $h > 0$ y como el operador $T(s)$ es continuo tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \int_s^t T(\tau)xd\tau &= \frac{1}{h} \int_s^t \left[T(\tau + h)x - T(\tau)x\right] d\tau \\
&= \frac{1}{h} \int_s^t T(\tau + h)xd\tau - \frac{1}{h} \int_s^t T(\tau)xd\tau \\
&= \frac{1}{h} \int_{s+h}^{t+h} T(\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_s^t T(\tau)xd\tau \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_{s+h}^t T(\tau)xd\tau + \int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \int_s^t T(\tau)xd\tau \right], \ t < t + h \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \int_s^t T(\tau)xd\tau - \int_t^{s+h} T(\tau)xd\tau \right] \\
&= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \frac{1}{h} \int_s^{s+h} T(\tau)xd\tau,
\end{aligned}
$$

tomando límite cuando $h \to 0$ y por la parte (b) se tiene

$$
\lim_{h \to 0} \frac{T(h) - I}{h} \int_s^t T(\tau)xd\tau = T(t)x - T(s)x.
$$

Por la definición de generador se tiene que $\int_s^t T(\tau)xd\tau \in \mathcal{D}(A)$ y

$$
A \int_s^t T(\tau)xd\tau = T(t)x - T(s)x.
$$

(d) Sea $x \in \mathcal{D}(A)$ y $h > 0$, se tiene

$$\left[\frac{T(h)-I}{h}\right] T(t)x = \left[\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\right] x = T(t)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right] x,$$

tomando límite cuando $h \to 0$ (o de la continuidad de $T(t)$) tenemos $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ y además

$$AT(t)x = \frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax.$$

Por otro lado, si $0 < h \leq t$ y $M > 0$ y tal que $\|T(s)\| \leq M$, para todo $s \in \langle 0, t \rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= T(t-h)\left(\frac{T(h)Ax - x}{h}\right) - T(t-h)Ax + \\
&\quad + T(t-h)Ax - T(t-h)T(h)Ax \\
&= T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\right),
\end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right\| &\leq \|T(t-h)\| \left(\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| + \|Ax - T(h)Ax\|\right) \\
&\leq M\left(\left\|\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right\| + \|Ax - T(h)Ax\|\right),
\end{aligned}$$

el término $\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\|$ es cero, pues $x \in \mathcal{D}(A)$ y $\|Ax - T(h)Ax\|$ es cero, pues $T(t)$ es un C^0-semigrupo y por la parte (a). Esto prueba que $\frac{d^-}{dt}T(t)x$ existe y que $\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax$.

Con esto se prueba que para todo $t \geq 0$ y todo $x \in \mathcal{D}(A)$, se tiene

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax$$

(e) Sea $x \in \mathcal{D}(A)$ y $s, t \geq 0$. Por (b) y (d) se tiene que

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau.$$

1.5.2. Cerradura del generador infinitesimal de un C^0-semigrupo

Proposición 1.5.3. *Si A es un generador infinitesimal de un C^0-semigrupo $(T(t))_{t\geqslant 0}$, entonces $\mathcal{D}(A)$ es denso en X.*

Prueba:

Sea $x \in X$, construyamos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ que converge a x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos $x_n = n\int_0^{1/n} T(s)xds$. Por la parte $c)$ del lema 1.5.1, $x_n \in \mathcal{D}(A)$ para todo $n > 0$, y la parte $b)$ del mismo lema, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} T(s)xds = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds = T(0)x = Ix = x$$

Por lo tanto, $x \in \overline{\mathcal{D}(A)}$, de donde concluímos que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Se puede probar algo más fuerte.

Proposición 1.5.4. *Si A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo y $\mathcal{D}(A^n)$ es el dominio del operador A^n, entonces se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(A^n)$ es denso en X .*

Aunque el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo no necesariamente es acotado, éste sí tiene una propiedad similar pero más débil.

Definición 1.5.2. *Sean X e Y espacios de Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to Y$ un operador. Diremos que el operador A es cerrado si dada una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(A)$ que satisface $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ y $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in Y$, se tiene que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Ax = y$.*

Observación 1.5.4. *Vemos que si A es acotado, entonces también es cerrado. El recíproco, en general no es cierto. Sin embargo, si $\mathcal{D}(A) = X$, entonces A es acotado si y sólo si es cerrado.*

Proposición 1.5.5. *Si A es un generador infinitesimal de un C^0-semigrupo $(T(t))_{t\geqslant 0}$, entonces A es un operador lineal cerrado.*

Prueba:

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$, $x \in X$, $y \in Y$ tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$, probaremos que $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Ax = y$.

De la parte (e) del lema 1.5.1, se tiene

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(t)Ax_n ds \tag{1.5.5}$$

Afirmamos que $T(t)Ax_n \to T(s)y$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en intervalos acotados. Para $0 < s \leq t$, vemos que

$$\begin{aligned} \|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)\,(Ax_n - y)\,\| \\ &\leq \|T(s)\|\,\|Ax_n - y\| \\ &\leq Me^{ws}\,\|Ax_n - y\| \\ &= Mte^{wt}\,\|Ax_n - y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

donde M, w son constantes de la proposición 1.5.1. Usando lo que se hizo antes y haciendo $n \to \infty$ en (1.5.4), concluímos que

$$T(t)x - x = \int_0^t T(t)yds.$$

Finalmente, por la parte (b) del lema 1.5.1, se tiene

$$\lim_{t\to 0}\frac{T(t)x-x}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds=T(0)y=Iy=y.$$

Lo que prueba que $x\in\mathcal{D}(A)$ y que $Ax=y$. Por lo tanto, A es un operador lineal cerrado.

Al igual que en el caso uniformemente continuo, el generador infinitesimal caracteriza al semigrupo.

La siguiente proposición nos garantiza la unicidad del semigrupo asociado a un generador infinitesimal para semigrupos fuertemente continuos.

Proposición 1.5.6. *Sean $(T(t))_{t\geqslant 0}$ y $(S(t))_{t\geqslant 0}$ dos C^0-semigrupos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Entonces $A=B$ si y sólo si $T(t)=S(t)$ para todo $t\geq 0$.*

Prueba:

(Necesidad) De la definición de generador infinitesimal se tiene que si $T(t)=S(t)$ para todo $t\geq 0$ entonces $A=B$.

(Suficiencia) Supongamos que $x\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)$. Por la parte ($d$) de lema 1.5.1, si $x\in X$ y $t\geq 0$, definamos $\varphi_t:[0,t]\to X$ dado por $\varphi_t(r)=T(t-r)S(r)x$.

Por la parte (d) del lema 1.5.1 y la regla de la cadena, $\varphi_t(r)$ es diferenciable, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\varphi_t(r) &= \left[\frac{d}{dr}T(t-r)\right]S(r)+T(t-r)\frac{d}{dr}S(r)\\ &= -AT(t-r)S(r)+T(t-r)BS(r)\\ &= -T(t-r)AS(r)+T(t-r)BS(r)\\ &= 0,\text{ pues } A=B.\end{aligned}$$

Tenemos que φ_t es constante en $[0,t]$. En particular, $\varphi_t(0)=T(t-0)S(0)x=T(t)x$ y $\varphi_t(t)=T(t-t)S(t)x=T(0)S(t)x=S(t)x$, entonces: $\varphi_t(0)=\varphi_t(t)$ lo que muestra que, $T(t)x=S(t)x$, para todo $x\in\mathcal{D}(A)$ y $t>0$.

Ahora probaremos, que la propiedad es válida para $x\in X$. Para $x\in X$, tomemos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n\to x$. Como $T(t)$ y $S(t)$ son continuas, se tiene que $T(t)x_n\to T(t)x$ y $S(t)x_n\to S(t)x$ cuando $n\to\infty$. Entonces $T(t)x_n=S(t)x_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$, luego se sigue $T(t)x=S(t)x$. Por lo tanto, $T(t)=S(t)$ para todo $t\geq 0$.

1.5.3. C^0-semigrupo de contracciones

Sabemos que todo C^0-semigrupo satisface $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$ para las constantes $M \geq 1$ y $w \geq 0$. Si $w = 0$ y $M = 1$, $(T(t))_{t\geqslant 0}$, se llama C^0-semigrupo de contracciones y se tiene para todo $t \geq 0$ y todo $x, y \in X$

$$\|T(t)x - T(t)y\| \leq \|x - y\|$$

Esta clase de semigrupos es muy interesante por su papel importante en diversas aplicaciones.

Definición 1.5.3. *Si $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ un operador lineal, no necesariamente acotado en X. El conjunto resolvente $\rho(A)$ de A se define como*

$$\rho(A) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe y es un operador lineal acotado en } X\Big\}.$$

La familia de operadores lineales acotados $\mathcal{R}(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ con $\lambda \in \rho(A)$, se llama resolvente de A.

Observación 1.5.5. *Todo operador A, acotado o no conmuta con su operador resolvente.*

En efecto,

$$\begin{aligned}
A(\lambda I - A)^{-1} &= -A(\lambda I - A)A(\lambda I - A)^{-1} + \lambda(\lambda I - A)^{-1} \\
&= -A(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) + (\lambda I - A)^{-1}\lambda I \\
&= (\lambda I - A)^{-1}[-(\lambda I - A) + \lambda I] \\
&= (\lambda I - A)A.
\end{aligned}$$

Definición 1.5.4. *Sea A un operador lineal con $\rho(A) \neq \emptyset$. Definimos para $\lambda \in \rho(A)$ la regularizada o aproximación de Yosida de A por*

$$A_\lambda = \lambda A \mathcal{R}(\lambda : A) = \lambda^2 \mathcal{R}(\lambda : A) - \lambda I$$

La siguiente proposición nos ayudará en la demostración del teorema de Hille–Yosida.

Proposición 1.5.7. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ un operador lineal cerrado tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$ y que $\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x = x$, *para todo* $x \in X$.

b) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$ *,para todo* $x \in \mathcal{D}(A)$.

c) Para cada $\lambda > 0$, A_λ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones uniformemente continuos $\left(e^{tA_\lambda}\right)_{t\geqslant 0}$ en X. Más aún se tiene que, para todo $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ y $t \geq 0$

$$\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \| \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \| .$$

Prueba:

Probemos (a). Sea $x \in \rho(A)$ y $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda : A) &= (\lambda I - A)^{-1} \\ (\lambda I - A)\mathcal{R}(\lambda : A) &= I \\ \lambda\mathcal{R}(\lambda : A) - A\mathcal{R}(\lambda : A) &= I \\ \lambda\mathcal{R}(\lambda : A) - I &= A\mathcal{R}(\lambda : A). \end{aligned}$$

Así, para $x \in \rho(A)$ y de la última igualdad se tiene

$$\begin{aligned} \| \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x - x \| &= \| A\mathcal{R}(\lambda : A)x \| \\ &= \| \mathcal{R}(\lambda : A)Ax \| \\ &= \| \mathcal{R}(\lambda : A) \| \cdot \|Ax\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \cdot \|Ax\| \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

luego, se sigue que $\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x \to x$ cuando $\lambda \to \infty$.

Sea $x \in X$. Como $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \to x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ y $L > 1$ tal que $\|x_n - x\| < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $n \geq n_\epsilon$, y

$$\| \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x \| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todo $\lambda > L$.

Para $\lambda > L$, se tiene

$$\begin{aligned} \| \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x - x \| &= \| \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)(x - x_{n_\epsilon}) + \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x \| \\ &\leq \| \lambda\mathcal{R}(\lambda : A) \| \cdot \|x - x_{n_\epsilon}\| + \| \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x_{n_\epsilon} - x \| \\ &\leq \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x = x$, para todo $x \in X$, esto prueba (a).

Probemos (b). Para cada $\lambda > 0$, de la regularizada de Yosida de A se tiene

$$A_\lambda = \lambda A\mathcal{R}(\lambda : A) = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2\mathcal{R}(\lambda : A) - \lambda I = \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)A.$$

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, se tiene

$$A_\lambda x = \lambda A\mathcal{R}(\lambda : A)x = \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)Ax$$

lo que equivale a

$$A_\lambda x - Ax = \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)Ax - Ax$$

de la parte (a), y de la definición de A_λ,

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(A).$$

Probemos (c). Es obvio que A_λ es un operador lineal acotado y por la proposición 1.4.1 también es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo $(T_\lambda(t))_{t\geqslant 0}$, dado por $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$, esto por el teorema 1.4.1 parte (i), más aún de las hipótesis tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)\| &= \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \\
&= \left\| e^{t\lambda^2\mathcal{R}(\lambda:A)}\, e^{-\lambda t} \right\| \\
&= e^{-\lambda t} \left\| e^{t\lambda^2\mathcal{R}(\lambda:A)} \right\| \\
&\leq e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t\|\mathcal{R}(\lambda:A)\|} \\
&\leq e^{-\lambda t}\, e^{\lambda t} = 1.
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que $(T_\lambda(t))_{t\geqslant 0}$ es un C^0-semigrupo de contracciones. Es claro ver por las definiciones que A_λ, A_μ, e^{tA_λ} y e^{tA_μ} conmutan, y como $t \to T_\lambda x$ es diferenciable, y por la parte (c) del lema 1.5.1, tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &= \left\| e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x \right\| \\
&= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\left[e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right] ds \right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\| tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x \right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \left\| e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x) \right\| ds \\
&\leq \int_0^1 t \left\| A_\lambda x - A_\mu x \right\| ds \\
&\leq t\left\|A_\lambda x - A_\mu x\right\|,
\end{aligned}$$

lo que completa la prueba.

Ahora mostraremos el resultado más importante de ésta sección, el teorema de Hille–Yosida para semigrupos de contracción. Este teorema nos dice cuando un operador lineal cerrado es el generador de un semigrupo fuertemente continuo en un espacio de Banach y sus aplicaciones más importantes están en las ecuaciones de evolución en derivadas parciales.

Teorema 1.5.1 (Hille–Yosida, 1948). *Un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones si, y sólo si,*

i) A es un operador cerrado y $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$,

ii) $\langle 0, +\infty\rangle \subset \rho(A)$ y $\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.

Prueba:

Sea A el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones $(T_\lambda(t))_{t\geqslant 0}$ en X.

Prueba de (i). Es consecuencia inmediata de las proposiciones 1.5.3 y 1.5.5.

Prueba de (ii). Para $\lambda > 0$ y $x \in X$, definamos el operador $\mathcal{R}(\lambda)$ por

$$\mathcal{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt.$$

Como $t \to T(t)x$ es continuo y uniformemente acotado, pues $\|T(t)x\| \leq \|x\|$, la integral impropia existe en el sentido de Riemann y más aún define un operador lineal acotado que satisface

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}(\lambda)x\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt \right\| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|T(t)x\| dt \\
&\leq \frac{1}{\lambda} \|x\|,
\end{aligned}$$

concluyendo que $\mathcal{R}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ y que $\|\mathcal{R}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Por otro lado, para $\lambda > 0$, $x \in X$ y $h > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \mathcal{R}(\lambda)x &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h)T(t)x \, dt + \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \\
&= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left[T(t+h)x - T(t)x \right] dt \\
&= \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)x \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \int_h^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[e^{\lambda h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - e^{\lambda h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt \right] \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)x \, dt,
\end{aligned}$$

cuando $h \to 0$ el lado derecho converge a $\lambda \mathcal{R}(\lambda)x - x$, lo que implica que $\mathcal{R}(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ y que $A\mathcal{R}(\lambda)x = \lambda \mathcal{R}(\lambda)x - x$; es decir,para todo $x \in X$ y $\lambda > 0$, $\mathcal{R}(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$ y

$$(\lambda I - A)\mathcal{R}(\lambda)x = x. \tag{1.5.6}$$

Por otro lado, como A es cerrado, para $x \in \mathcal{D}(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt \\ &= A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\ &= A\mathcal{R}(\lambda)x, \end{aligned}$$

lo que muestra que para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, se tiene

$$\mathcal{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x. \tag{1.5.7}$$

De las ecuaciones (1.5.6) y (1.5.7) vemos que $\mathcal{R}(\lambda)$ es la inversa de $\lambda I - A$. Por lo tanto, $\langle 0, +\infty\rangle \subset \rho(A)$ y $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para $\lambda > 0$, lo cual concluye la prueba.

Supongamos ahora que (i) y (ii) se cumplen. Sea $(T(t))_{t\geqslant 0}$ y A_λ como en la proposición 1.5.7, para $x \in \mathcal{D}(A)$, tenemos la siguiente desigualdad para $\lambda > 0$ y $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \\ &\leq t\,\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t\,\|A_\lambda x - Ax\| + t\,\|A_\mu x - Ax\|, \end{aligned}$$

por la proposición 1.5.7, $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$ es convergente en X, si $\lambda \to \infty$ y la convergencia es uniforme para t en intervalos acotados. Como $\mathcal{D}(A)$ es denso en X y $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$ es un semigrupo de contracciones, entonces podemos concluir que $(e^{tA_\lambda})_{t\geqslant 0}$ es convergente, para todo $x \in X$ y que la convergencia es uniforme para t en intervalos acotados. En efecto, sea $x \in X$, $t \in [0, a]$ con $a > 0$; fijando $y \in \mathcal{D}(A)$ y $\lambda_0 > 0$, tales que $\|x - y\| < \epsilon$ y $\|\, e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y \,\| < \epsilon$, para todo $\lambda, \mu > \lambda_0$; se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \left\|e^{tA_\lambda}(x-y) - e^{tA_\lambda}y + e^{tA_\mu}y + e^{tA_\mu}y - e^{tA_\mu}x\right\| \\ &\leq \left\|e^{tA_\lambda}(x-y)\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y\right\| + \left\|e^{tA_\mu}y - e^{tA_\mu}x\right\| \\ &\leq \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \|x-y\| + \epsilon + \left\|e^{tA_\lambda}\right\| \|x-y\| \\ &< 2\|x-y\| + \epsilon = 3\epsilon, \end{aligned}$$

como $\epsilon > 0$, esto demuestra la afirmación.

Definamos la familia de operadores $(T(t))_{t\geqslant 0}$, para $x \in X$ por

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{1.5.8}$$

Es claro que $T(t)$ es un operador lineal en X, para todo $t \geq 0$. Vemos que

$$\|T(t)x\| = \left\| \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x \right\| \leq \|x\|,$$

lo que implica que $\|T(t)x\| \leq 1$, para todo $t \geq 0$ y por lo tanto, $(e^{tA_\lambda})_{t \geqslant 0}$ es de contracción. Probemos ahora que $(T(t))_{t \geqslant 0}$ es un C^0-semigrupo en X y que A es su generador infinitesimal. De (1.5.8) vemos que $T(0)x = x$, para todo $x \in X$. Para probar $T(t+s) = T(t)T(s)$, sean $x \in X$ y $s, t \geq 0$, entonces $T(t+s)x = \lim\limits_{\lambda \to \infty} e^{sA_\lambda}\, e^{tA_\lambda} x$.
De la igualdad,

$$\begin{aligned}
\left\| e^{sA_\lambda} e^{tA_\lambda} x - T(s)T(t)x \right\| &= \left\| e^{sA_\lambda} \left(e^{tA_\lambda} x - T(t)x \right) + e^{sA_\lambda} T(t)x - T(s)T(t)x \right\| \\
&\leq \left\| e^{sA_\lambda} \right\| \left\| e^{tA_\lambda} x - T(t)x \right\| + \left\| e^{sA_\lambda} T(t)x - T(s)T(t)x \right\| \\
&\leq \left\| e^{tA_\lambda} x - T(t)x \right\| + \left\| e^{sA_\lambda} T(t)x - T(s)T(t)x \right\|,
\end{aligned}$$

para $\lambda \to \infty$ se tiene $e^{sA_\lambda} e^{tA_\lambda} x \to T(s)T(t)x$, lo cual prueba que $T(s+t) = T(s)T(t)$. Esto con el hecho de que $\|T(t)x\| \leq 1$ muestra que $(T(t))_{t \geqslant 0}$ es un semigrupo en X. Ahora, como $e^{tA_\lambda} x$ converge uniformemente para $t \in [0, a], a > 0$; vemos que $T(\cdot)x$ es una función continua en $[0, a]$. Por lo tanto, $(T(t))_{t \geqslant 0}$ es un C^0-semigrupo de contracciones. Finalmente, probemos que A es su generador infinitesimal de $(T(t))_{t \geqslant 0}$. Sea $x \in \mathcal{D}(A)$ y $t > 0$, tenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\left\| e^{sA_\lambda} A_\lambda x - T(s)Ax \right\| &= \left\| e^{sA_\lambda} - e^{sA_\lambda} Ax + e^{sA_\lambda} Ax - T(s)Ax \right\| \\
&= \left\| e^{sA_\lambda} \left(A_\lambda x - Ax \right) + \left(e^{sA_\lambda} - T(s) \right) Ax \right\| \\
&\leq \left\| e^{sA_\lambda} \left(A_\lambda x - Ax \right) \right\| + \left\| \left(e^{sA_\lambda} - T(s) \right) Ax \right\| \\
&\leq \left\| e^{sA_\lambda} \right\| \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + \left\| \left(e^{sA_\lambda} - T(s) \right) Ax \right\| \\
&\leq \left\| A_\lambda x - Ax \right\| + \left\| \left(e^{sA_\lambda} - T(s) \right) Ax \right\|,
\end{aligned}$$

cuando $\lambda \to \infty$, se sigue que $e^{sA_\lambda} A_\lambda x$ converge uniformemente para s en intervalos acotados para $T(s)Ax$. De la ecuación 1.5.8 y del lema 1.5.1 parte (e), se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - x}{t} &= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \to \infty} \left(e^{tA_\lambda x} - x \right) \\
&= \frac{1}{t} \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t e^{sA_\lambda} A_\lambda x \, ds,
\end{aligned}$$

de donde concluímos, para $x \in \mathcal{D}(A)$ que

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax \, ds. \tag{1.5.9}$$

Sea B el generador infinitesimal de $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Sabemos que la convergencia $T_\lambda A_\lambda x \to T(t)Ax$, es uniforme en intervalos acotados para t. Haciendo $t \to 0$ en (1.5.9), se tiene que $x \in \mathcal{D}(B)$ y que $Bx = Ax$. Asimismo $A \subset B$, $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to X$ es una extensión de A, y $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Por hipótesis $1 \in \rho(A)$ y por la condición necesaria $1 \in \rho(B)$, tenemos que $(I - A)\mathcal{D}(A) = X = (I - B)\mathcal{D}(A)$, también $(I - B)\mathcal{D}(A) = X = (I - B)\mathcal{D}(B)$, luego $\mathcal{D}(B) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$, lo cual implica que $A = B$ en X. Por lo tanto, A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones, lo que completa la prueba.

Como consecuancia del teorema de Hille–Yosida, se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 1.5.1. *Si $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Si A_λ es la aproximación de Yosida de A, entonces para todo $x \in X$ se tiene*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x.$$

Prueba:

De la prueba del teorema 1.3.1, la familia $(S(t))_{t\geqslant 0}$ dada por $S(t) = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ es un C^0-semigrupo de contracciones $S(t)$ y A es su generador infinitesimal; y por la unicidad del generador infinitesimal proposición 1.3.6, se tiene que $S(t) = T(t)$.

Corolario 1.5.2. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones $(T(t))_{t\geqslant 0}$. El conjunto resolvente de A contiene al semiplano $\{\lambda : Re(\lambda) > 0\}$ y para λ se tiene que*

$$\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}.$$

Prueba:

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, definimos

$$\mathcal{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt.$$

De la prueba del teorema 1.3.1, se tiene

$$\mathcal{R}(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$$

luego, $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$; además para $x \in X$ se tiene

$$\|\mathcal{R}(\lambda)x\| \leq \int_0^\infty e^{-\mathrm{Re}(\lambda)t}\|x\|\, dt \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}\, \|x\|,$$

por lo tanto,

$$\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\mathrm{Re}(\lambda)}$$

y la prueba está completa.

Ejemplo 1.5.1. *Para el problema*

$$U_t - U_x = 0, x \in \mathbb{R}, U(x,0) = U_0.$$

Muestre que existe una única solución.

Prueba:

Usaremos el teorema 1.5.1 de Hille–Yosida. Para $A = (\cdot)_x$, mostraremos que es un generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones.
Para eso definimos el dominio,

$$\mathcal{D}(A) = \{w \in X : \; Aw \in X\} = \{w \in X : \; w_x \in X\}$$

Tomando X de la forma más simple posible

$$X = L^2(\mathbb{R}),$$

tenemos

$$\mathcal{D}(A) = \{w \in L^2(\mathbb{R}) : \; w_x \in L^2(\mathbb{R})\} = H^1(\mathbb{R}).$$

Es simple verificar que A es un operador cerrado y con dominio denso en $L^2(\mathbb{R})$. Probaremos que $\mathbb{R} \subset \rho(A)$ y que para todo $\lambda > 0$

$$\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Sea $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$w = \mathcal{R}(\lambda : A)f = (\lambda I - A)^{-1} f$$

entonces

$$\lambda w - w_x = f.$$

Aplicando la transformada de Fourier, encontramos

$$\lambda \widehat{w} - \widehat{w}_x = \widehat{f}.$$

Luego

$$\widehat{f} = \frac{\widehat{f}}{\lambda - i\xi}$$

entonces

$$|\widehat{w}|^2 = \frac{1}{\lambda^2 + \xi^2} |\widehat{f}|^2.$$

Usando la identidad de Plancherel obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |w|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{w}|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2 + \xi^2} |\widehat{f}|^2 d\xi.$$

Asi tenemos

$$\lambda\left(\int_{\mathbb{R}}|w|^2dx\right)^{1/2}\leq\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^2dx\right)^{1/2}.$$

Luego

$$\begin{aligned}\|w\|_X &\leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_X\\ \|\mathcal{R}(\lambda:A)f\| &\leq \frac{1}{\lambda}\|f\|_X\\ \|\mathcal{R}(\lambda:A)\| &\leq \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Esto muestra que A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones.

1.5.4. Operadores disipativos

En esta sección veremos una caracterización alternativa para los generadores infinitesimales de C^0-semigrupos de contracciones.

Sea X un espacio de Banach real o complejo y X^* su dual topológico. El valor $x^* \in X^*$ en $x \in X$ está dado por $\langle x, x^*\rangle$ o $\langle x^*, x\rangle$. Definimos el conjunto dual $F(x) \subseteq X^*$ por

$$F(x)=\left\{x^*\in X^*:\mathrm{Re}\langle x^*,x\rangle=\|x\|^2=\|x^*\|^2\right\},$$

por el teorema de Hahn–Banach, para todo $x \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\langle x, f\rangle = \|x\|$ y $\|f\|_* = 1$.

Luego $x^* = \|x\|f$ satisface $\|x\| = \|x^*\|_*$ y

$$\langle x,x^*\rangle=\|x\|\langle x,f\rangle=\|x\|^2,$$

por lo tanto, para todo $x \in X$, $F(x) \neq \emptyset$.

Definición 1.5.5. *Un operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ es disipativo, si para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ existe $x^* \in F(x)$ tal que*

$$Re\langle Ax,x^*\rangle\leq 0.$$

Proposición 1.5.8. *Un operador $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ es disipativo si y sólo si para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y para todo $\lambda > 0$ se tiene que*

$$\|(\lambda I - A)x\|\geq\lambda\|x\|.$$

Prueba:

Supongamos que A es disipativo y sea $x \in \mathcal{D}(A)$. Si $x = 0$, la desigualdad es inmediata. Sea $x \neq 0$ y $\lambda > 0$, sea $x^* \in F(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, entonces se tiene

$$
\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)x\| \, \|x^*\| &= \|\lambda x - Ax\| \, \|x^*\| \\
&\geq |\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle| \\
&\geq \mathrm{Re}\langle \lambda x - Ax, x^* \rangle \\
&= \mathrm{Re}\langle \lambda x, x^* \rangle - \mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \\
&= \lambda \|x\|^2 - \mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \\
&\geq \lambda \|x\|^2
\end{aligned}
$$

de donde,

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|.$$

Reciprocamente, sea $x \in \mathcal{D}(A)$ y supongamos que para $\lambda > 0$ (podemos suponer que $x \neq 0$)

$$\|\lambda x - Ax\| \geq \lambda \|x\|.$$

Sea $y_\lambda^* \in F(\lambda x - Ax)$ y $z_\lambda^* = \dfrac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|_*}$, entonces $\|z_\lambda^*\| = 1$ y

$$
\begin{aligned}
\lambda \|x\| &\leq \|\lambda x - Ax\| \\
&= \langle \lambda x - Ax, z_\lambda^* \rangle \\
&= \lambda \langle x, z_\lambda^* \rangle - \langle Ax, z_\lambda^* \rangle \\
&= \lambda \mathrm{Re}\langle x, z_\lambda^* \rangle - \mathrm{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle, \\
&\leq \lambda \|x\| - \mathrm{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle
\end{aligned}
$$

luego,

$$\mathrm{Re}\langle Ax, z_\lambda^* \rangle \leq 0 \tag{1.5.10}$$

y

$$\mathrm{Re}\langle x, z_\lambda^* \rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\lambda} \|Ax\|. \tag{1.5.11}$$

Como la sucesión $(z_\lambda^*)_{\lambda \in \mathbb{N}}$ está contenida en la bola unitaria en X^*, la cual es compacta para la topología débil *, entonces existe una subsucesión (que seguimos denotando por $(z_\lambda^*)_{\lambda \in \mathbb{N}}$) que converge a un cierto z^* para ésta topología. Al pasar al límite (1.5.10) y (1.5.11) se convierten en $\mathrm{Re}\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$ y $\mathrm{Re}\langle x, z^* \rangle \geq \|x\|$.

Pero como

$$\mathrm{Re}\langle x, z^* \rangle \leq |\langle x, z^* \rangle| \leq \|x\|,$$

entonces $\langle x, z^* \rangle = \|x\|$ y $\|z^*\|_* = 1$.

Ahora tomando $x^* = \|x\| z^*$, tenemos que $x^* \in F(x)$ es decir, $\langle x, z^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2$ y $\mathrm{Re}\langle Ax, z^* \rangle \leq 0$. Por lo tanto, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ existe $x^* \in F(x)$ tal que $\mathrm{Re}\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Concluyendo que A es disipativo.

Proposición 1.5.9. *Sea $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador disipativo. Si $Im(\lambda_0 I - A) = X$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces*

i) A es cerrado.

ii) $Im(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$.

Prueba:

Prueba de (i). Como $\mathrm{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ y $\|(\lambda_0 I - A)x\| \geq \lambda_0 \|x\|$, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$; tenemos que $\lambda_0 \in \rho(A)$. Luego $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado y por lo tanto cerrado, de donde $\lambda_0 I - A$ y A son cerrados.

Prueba de (ii). Consideremos el conjunto

$$\Lambda = \{\lambda > 0 : \ \mathrm{Im}(\lambda I - A) = X\}.$$

Es claro que $\Lambda \neq \emptyset$, pues $\lambda_0 \in \Lambda$.

Λ es abierto en $\langle 0, +\infty \rangle$. En efecto, sea $\lambda \in \Lambda$. Como $Im(\lambda I - A) = X$ y $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, se tiene que $\lambda \in \rho(A)$, el cual es abierto , luego existe $\delta > 0$ tal que $\langle \lambda - \delta, \lambda + \delta \rangle \subseteq \Lambda$.

Λ es cerrado en $\langle 0, \infty \rangle$. En efecto, sea $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \lambda > 0$. Para cada $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tal que $\lambda_n x_n - A x_n = y$.

Luego para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n} \|\lambda_n x_n - A x_n\| = \frac{\|y\|}{\lambda_n} \leq k$$

para algún $k > 0$.

Además,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \frac{1}{\lambda_m} \|\lambda_m (x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \| - (\lambda_m x_m - A x_m) + (\lambda_n x_n - A x_n) + (\lambda_m - \lambda_n) x_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m} \| - y + y + (\lambda_m - \lambda_n) x_n\| \\
&= \frac{\|x_n\|}{\lambda_m} |\lambda_n - \lambda_m| \\
&\leq k \, |\lambda_n - \lambda_m| ,
\end{aligned}$$

como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, también lo es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto converge a algún $x \in X$. De allí, $Ax_n \to \lambda x - y$ cuando $n \to \infty$. Como A es cerrado, $x \in \mathcal{D}(A)$ y $(\lambda I - A)x = y$ concluyendo así que $\lambda \in \Lambda$.

Por otro lado, como $\langle 0, +\infty\rangle$ es conexo, tenemos que $\Lambda = \langle 0, +\infty\rangle$.

Teorema 1.5.2 (Lumer–Phillips, 1961). *Sea X un espacio de Banach y $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \to X$ un operador.*

i) Si A es disipativo y Im$(\lambda_0 I - A) = X$ para algún $\lambda_0 > 0$, entonces A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones en X.

ii) Si A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones en X, entonces Im$(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ y A es disipativo. Más aún, para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y para todo $x^* \in F(x)$, se tiene que Re$\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

Prueba:

Prueba de (i). Por la proposición 1.5.9, A es cerrado y $\langle 0, +\infty\rangle \subseteq \rho(A)$ y

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}x\right\| \leq \frac{1}{\lambda}\left\|(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\right\| = \frac{\|x\|}{\lambda}$$

de donde $\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$ para todo $\lambda > 0$. Del teorema de Hille-Yosida se sigue el resultado.

Prueba de (ii). Si A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones $(T(t))_{t\geqslant 0}$ en X, el teorema de Hille-Yosida dice que $\langle 0, +\infty\rangle \subset \rho(A)$ y por lo tanto, $\mathrm{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

Para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ y $x^* \in F(x)$ se tiene

$$|\langle T(t)x, x^*\rangle| \leq \|T(t)x\|\|x^*\|_* \leq \|x\|^2$$

por lo tanto,

$$\mathrm{Re}\langle T(t)x - x, x^*\rangle = \mathrm{Re}\langle T(t)x, x^*\rangle - \|x\|^2 \leq 0$$

dividiendo por $t > 0$ y pasando al límite cuando $t \to 0$, tenemos que

$$\mathrm{Re}\langle Ax, x^*\rangle = \mathrm{Re}\langle \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t}, x^*\rangle \leq 0.$$

Probando el resultado.

Corolario 1.5.3. *Sea A un operador lineal cerrado densamente definido en X. Si A y A^* son disipativos, entonces A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de contracciones en X.*

Prueba:

Del teorema 1.3.2 (i) es suficiente demostrar que $\mathrm{Im}(I - A) = X$. Como A es disipativo y cerrado, entonces $Im(I - A)$ es un subespacio cerrado de X. Supongamos que $\mathrm{Im}(I - A) \neq X$, entonces existe $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ tal que $\langle x^*, x - Ax \rangle = 0$ para $x \in \mathcal{D}(A)$. De donde tenemos que $x^* - A^*x^* = 0$. Como A^* también es disipativo, de la Proposición 1.5.8 se sigue que $x^* = 0$, contradiciendo la construcción de x^*. Luego, $\mathrm{Im}(I - A) = X$. este comando permite poner en la cabeza de cada página el título del capítulo y el número de página

Capítulo 2

El problema abstracto de Cauchy

Para este capítulo se ha consultado [8], [10], [14] y [19].

En este capítulo estudiaremos el problema semilineal

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t, u(t)),\ 0 < t < a \\ u(0) &= u_0 \end{cases} \tag{2.0.1}$$

donde $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de operadores en un espacio de Banach X de la forma $(T(t))_{t \geqslant 0}$, donde $T(t) = e^{tA}$ y $f : [0, a] \times X \to X$ una función apropiada.

Empezaremos estudiando el problema de Cauchy de valor inicial homogéneo, no homogéneo y finalmente el problema de valor inicial semilineal.

2.1. El problema de valor inicial homogéneo

Para $x \in X$, el problema abstracto de Cauchy para A con valor inicial x, consiste en hallar una solución $u(\cdot)$ para la ecuación

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= Au(t),\ t > 0 \\ u(0) &= x. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Definición 2.1.1. *La función $u(\cdot) \in C([0, \infty\rangle : X)$ es una solución del problema de valor inicial (2.1.2), si $u(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $\langle 0, \infty\rangle$, $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ para $t > 0$ y ésta satisface a (2.1.2).*

Sea $x \in \mathcal{D}(A)$, del lema 1.5.1, la función $u(t) = T(t)x$ es la única solución de (2.1.2).

En efecto, sea $v(\cdot)$ otra solución de (2.1.2), para $t > 0$ y $0 < s < t$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}T(t-s)v(s) &= T(t-s)\frac{d}{ds}v(s) + \frac{d}{ds}T(t-s)v(s) \\
&= T(t-s)\frac{d}{ds}v(s) - AT(t-s)v(s) \\
&= T(t-s)\left[\frac{d}{ds}v(s) - Av(s)\right] = 0, \qquad (2.1.3)
\end{aligned}$$

integrando (2.1.3) desde 0 hasta t obtenemos $v(t) - T(t)v(0) = 0$; es decir, para todo $t > 0$

$$v(t) = T(t)x = u(t).$$

2.2. El problema de valor inicial no homogéneo

En esta sección estudiaremos el problema de valor inicial no homogéneo de la forma

$$\left\{\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t),\ 0 < t < a \\ u(0) &= x,\ x \in X \end{aligned}\right. \qquad (2.2.4)$$

donde $f : [0,a] \to X$ es una función apropiada que nos ayudará en el estudio del problema (2.0.1). Para esto definamos el concepto de solución clásica para (2.2.4).

Definición 2.2.1. *Una función $u : [0,a] \to X$ es una solución clásica del problema de valor inicial (2.2.4) si $u(\cdot) \in C^1([0,a] : X)$ con $u(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < a$ tal que satisface (2.2.4).*

Proposición 2.2.1. *Si $f \in L^1([0,a] : X)$, entonces el problema de valor inicial (2.2.4) tiene como máximo una solución clásica. Si $u(\cdot)$ es solución clásica de (2.2.4), entonces para $t \in [0,a]$*

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \qquad (2.2.5)$$

Prueba:

Sea $u(\cdot)$ solución clásica de (2.2.4), entonces la función $g(s) = T(t-s)u(s)$ es diferenciable en $0 < s < t$ y

$$\begin{aligned}
\frac{dg}{ds} &= \frac{d}{ds}T(t-s)u(s) \\
&= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}u(s) \\
&= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)(Au(s) + f(s)) \\
&= -AT(t-s)u(s) + T(t-s)Au(s) + T(t-s)f(s) \\
&= T(t-s)f(s).
\end{aligned}$$

Como $f \in L^1([0,a]:X)$, la función $g \to T(t-s)f(s)$ es integrable sobre $[0,t]$.
Luego, integrando la igualdad anterior entre 0 y t, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{dg}{ds}ds &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds\\ g(t)-g(0) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds\\ T(0)u(t)-T(t)u(0) &= \int_0^t T(t-s)f(s)ds\end{aligned}$$

de donde,

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \tag{2.2.6}$$

como $u(\cdot)$ es continua, entonces (2.2.6) es válida para todo $[0,t]$. La unicidad es resultado directo de la representación (2.2.6). Esto completa la prueba.
Se sabe que en general $\mathcal{D}(A) \neq X$, entonces consideremos la siguiente definición.

Definición 2.2.2. *Sea $x \in X$ y $f \in L^1([0,a]:X)$. La función $u \in C([0,a]:X)$ es una solución débil del problema (2.2.4) si*

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds,\ t \in [0,a].$$

Observemos que en general una solución débil del problema (2.2.4) no es una solución clásica.

Ejemplo 2.2.1. *Asumamos que $x \notin D(A)$ y que $T(t_0)x \notin D(A)$ para algún $t_0 > 0$. Consideremos el problema*

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= Au(t) + T(t)x, \quad t > 0\\ u(0) &= 0\end{cases} \tag{2.2.7}$$

La solución débil de (2.2.7) es dada por

$$u(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds = tT(t)x.$$

Como $T(t)x$ no es diferenciable (2.2.7) no posee solución clásica.

Los siguientes resultados nos proporcionan condiciones sobre f y x de modo que la solución débil sea una solución clásica.

Teorema 2.2.1. *Sean $x \in D(A)$ y $f \in L^1([0,a]:X) \cap C(\langle 0,a\rangle : X)$ y $v \in C([0,a]:X)$ la función definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \le t \le a. \tag{2.2.8}$$

El problema de valor inicial (2.2.4) tiene una solución clásica $u(\cdot)$ si alguna de las siguientes condiciones se verifica:

i) $v(t)$ es continuamente diferenciable en $\langle 0, a\rangle$.

ii) $v(t) \in D(A)$ para todo $0 < t < a$ y $Av(\cdot)$ es continua en $\langle 0, a\rangle$.

Si (2.2.4) tiene una solución clásica $u(\cdot)$, entonces v satisface i) y ii).

Prueba:

Supongamos que $u(\cdot)$ es solución clásica de (2.2.4), sabemos de la proposición 2.2.1 que ésta solución está dada por $u(t) = T(t)x+v(t)$, luego $v(t) = u(t)-T(t)x$ es diferenciable en $\langle 0, a\rangle$ y $v'(t) = u'(t) - T(t)Ax$ es continua en $\langle 0, a\rangle$, con esto probamos que v satisface i). Además como $x \in D(A)$, se tiene que $T(t)x \in D(A)$ para $t \geq 0$, entonces $v(t) = u(t)-T(t)x \in D(A)$ para $0 < t < a$.

Ahora como

$$Av(t) = Au(t) - AT(t)x = u'(t) - f(t) - T(t)Ax$$

es continua en $\langle 0, a\rangle$, con esto se prueba que $v(\cdot)$ satisface ii).

Supongamos ahora que (i) se cumple, para $t \in \langle 0, a\rangle$ y $h > 0$ se tiene $t + h \in \langle 0, a\rangle$ y

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}v(t) &= \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds\right] \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds
\end{aligned}$$

luego,

$$\frac{T(h)-I}{h}v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds. \tag{2.2.9}$$

Como f es continua y $(T(t))_{t\geqslant 0}$ es un C^0-semigrupo, entonces el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.2.9) tiene límite $f(t)$ cuando $h \to 0$. Como $v(t)$ es diferenciable en $\langle 0, a\rangle$ de (2.2.9) se tiene que $v(t) \in D(A)$ y que $Av(t) = v'(t) - f(t)$ para $0 < t < a$ y $v(0) = 0$, implica que $u(t) = T(t)x + v(t)$ es solución clásica de (2.2.4). Además, $u(t)$ es continua en $[0, a]$, continuamente diferenciable en $\langle 0, a\rangle$ y $u(t) \in D(A)$ para $0 < t < a$. Además se tiene para $t \in \langle 0, a\rangle$,

$$u'(t) = AT(t)x + v'(t) = AT(t)x + Av(t) + f(t) = A(T(t)x + v(t)) + f(t) = Au(t) + f(t).$$

Ahora supongamos que (ii) se cumple. Como $v(t) \in D(A)$ para $0 < t < a$, de la continuidad de f y (2.2.9), se tiene que $v(t)$ es diferenciable por la derecha y se tiene $\frac{d^+}{dt}v(t) = Av(t) +$

$f(t)$, y también $\dfrac{d^+}{dt}v(t)$ es continua en $0 < t < a$, pues f y $Av(\cdot)$ son continuas. Concluyendo que $v(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $0 < t < a$ y que $v'(t) = Av(t) + f(t)$. Por lo tanto $u(t) = T(t)x + v(t)$ es solución clásica (2.2.4). Luego la prueba está completa.

De este teorema resultan los siguientes corolarios.

Corolario 2.2.1. *Si f es continuamente diferenciable sobre $[0, a]$, entonces el problema de valor inicial (2.2.4) tiene una solución clásica para todo $x \in D(A)$.*

Prueba:

Sea $v(\cdot)$ la función definida en (2.2.8), probaremos que $v(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $\langle 0, a\rangle$. Sea $t \in \langle 0, a\rangle$ y $h > 0$ tal que $t + h \in \langle 0, a\rangle$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{v(t+h)-v(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{h} T(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds - \\
&\quad \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{h} T(t)T(h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_0^{t} T(t-s)f(s+h)ds - \\
&\quad \frac{1}{h}\int_0^t T(t-s)f(s)ds \\
&= T(t)\frac{1}{h}\int_0^{h} T(h-s)f(s)ds + \int_0^{t} T(t-s)\frac{f(s+h)-f(s)}{h}ds, \qquad (2.2.10)
\end{aligned}$$

usando el teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue o el hecho de que f es continuamente diferenciable en $\langle 0, a\rangle$, se sigue de (2.2.10) que

$$\frac{d^+}{dt}v(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds,$$

$\frac{d^+}{dt}v(t)$ es continua en $[0, a]$. Luego $v(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $\langle 0, a\rangle$ y que

$$v'(t) = T(t)f(0) + \int_0^t T(t-s)f'(s)ds.$$

Por lo tanto, $v(\cdot)$ satisface la condición (i) del teorema (2.2.1) y así el problema de valor inicial (2.2.4) tiene una solución clásica.

Corolario 2.2.2. *Sea $f \in L^1([0, a] : X) \cap C(\langle 0, a\rangle : X)$. Si $f(s) \in D(A)$ para $s \in \langle 0, T]$ y $Af \in L^1([0, a] : X)$ entonces para todo $x \in D(A)$ el problema de valor inicial (2.2.4) tiene una solución clásica (única).*

Prueba:

Sea $v(\cdot)$ una función definida como en (2.2.8). De las hipótesis se tiene que $T(t-s)f(s) \in D(A)$ para todo $s < t < a$ y que $AT(t-s)f(s) = T(t-s)Af(s)$ es integrable, y como A es cerrado y por el lema (1.5.1) tenemos que $v(t) \in D(A)$ para todo $0 < t \leq a$ se tiene

$$Av(t) = A\int_0^t T(t-s)f(s)ds = \int_0^t T(t-s)Af(s)ds,$$

se concluye que $Av(\cdot)$ es continua en $(0, a]$, luego $v(\cdot)$ satisface la condición (ii) del teorema 2.2.1 lo que muestra que tiene una solución clásica para (2.2.4).

Por la densidad de $\mathcal{D}(A)$ en X y los resultado anteriores se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea $f \in L^1([0,a] : X)$ y $x \in X$. Si $u(\cdot)$ es solución débil de (2.2.4), entonces $u(\cdot)$ es el límite uniforme en $[0,a]$ de soluciones clásicas de (2.2.4).*

Prueba:

Sean $x \in X$ y $M, w > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ para $t \in [0,a]$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A)$ tal que $x_n \to x$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C^1([0,a] : X)$ tal que $f_n \to f$ en $L^1([0,a] : X)$. Del corolario 2.2.1, para cada $n \geq 1$, el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{w}(t) &= Aw(t) + f_n(t) \\ w(0) &= x_n \end{cases} \tag{2.2.11}$$

tiene solución clásica $u_n(\cdot)$, dada por

$$u_n(t) = T(t)x_n + \int_0^t T(t-s)f_n(s)\, ds,\ 0 \leq t \leq a.$$

Por otro lado, si $u(\cdot)$ es solución débil de (2.2.4), entonces

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s)\, ds,\ 0 \leq t \leq a.$$

Para $0 \leq t \leq a$, se tiene

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - u(t)\| &\leq \|T(t)(x_n - x)\| + \int_0^t \|T(t-s)(f_n(s) - f(s))\|\, ds \\ &\leq Me^{wt}\|x_n - x\| + \int_0^t Me^{w(t-s)}\, \|f_n(s) - f(s)\|\, ds \\ &\leq Me^{wt}\left(\|x_n - x\| + \int_0^a \|f_n(s) - f(s)\|\, ds\right), \end{aligned}$$

de donde $u_n \to u$ en $C([0,a] : X)$, con lo que se completa la prueba.

Ahora estudiaremos el concepto de solución fuerte para (2.2.4).

Definición 2.2.3. *Una función $u \in C([0,a] : X)$ es una solución fuerte de (2.2.4), si $u(\cdot)$ es diferenciable c.t.p. en $[0,a]$, $\dot{u} \in L^1([0,a] : X)$, $u(0) = x$ y $\dot{u}(t) = Au(t) + f(t)$ c.t.p. en $[0,a]$.*

La solución clásica de (2.2.4) es una solución fuerte. Por otro lado, si $A \equiv 0$ y $f \in L^1([0,a]:X)$, pero $f \notin C([0,a]:X)$, la función $u(t) = x + \int_0^t f(s)ds$, $x \in X$ es una solución fuerte de (2.2.4), pero no es clásica.

Como en el caso de soluciones clásicas, estudiaremos las condiciones suficientes para que una solución débil sea una solución fuerte.

Teorema 2.2.3. *Sean $x \in D(A)$, $f \in L^1([0,a]:X)$ y $v(\cdot) \in C([0,a]:X)$ la función definida por*

$$v(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)ds, \quad 0 \leq t \leq a.$$

El problema de valor inicial (2.2.4) tiene una solución fuerte, si alguna de las siguientes condiciones es verificable:

i) $v(t)$ es diferenciable c.t.p. en $[0,a]$ y $\dot{v}(t) \in L^1([0,a]:X)$.

ii) $v(t) \in D(A)$ c.t.p. en $[0,a]$ y $Av(\cdot) \in L^1([0,a]:X)$.

Si (2.2.4) tiene solución fuerte $v(t)$, entonces satisface la condición i) y ii).

Prueba:
La prueba es similar al teorema (2.2.1), basta observar el término

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(t+h-s)f(s)ds \to f(t)$$

c.t.p. sobre $[0,a]$, pues $f \in L^1([0,a]:X)$.

2.3. El problema de valor inicial semilineal

En esta sección estudiaremos el problema de valor inicial semilineal de la forma

$$\begin{cases} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t,u(t)), \quad t_0 < t < a \\ u(t_0) &= u_0, \; u_0 \in X, \end{cases} \tag{2.3.12}$$

donde $A : \mathcal{D}(A) \to X$ es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo $(T(t))_{t \geqslant 0}$ para $T(t) = e^{tA}$ en un espacio de Banach X y $f : U \to X$ una función continua, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times X$ y $(t_0, u_0) \in U$.
Por analogía al problema de valor inicial (2.2.4), adoptamos las siguientes definiciones.

Definición 2.3.1. *La función $u \in C([t_0,t_1]:X)$, $0 < t_1 \leq a$ es solución clásica del problema de valor inicial (2.3.12) en $\langle 0, t_1\rangle$, si $u(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $\langle t_0, t_1\rangle$; $u(t) \in D(A)$ para todo $t_0 < t < t_1$ y (2.3.12) es satisfecha en $[0, t_1\rangle$.*

Si $f \in C([t_0,a]:X)$ y $u \in C([t_0,a]:X)$ es una solución clásica de (2.3.12), de la proposición (2.2.1) tenemos que

$$u(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \in [t_0,a]. \tag{2.3.13}$$

Definición 2.3.2. *La función $u \in C([t_0,t_1]:X)$, $0 < t_1 \leq a$ se llama solución débil del problema de valor inicial (2.3.12) en $[t_0,t_1]$, si u satisface (2.3.13) en $[t_0,t_1]$.*

Definición 2.3.3. *La función $u \in C([t_0,t_1]:X)$, $0 < t \leq a$ es llamada solución fuerte del problema de valor inicial (2.3.12) si $\dot{u} \in L^1([t_0,t_1]:X)$, $u(0) = u_0$ y la ecuación (2.3.12) es satisfecha c.t.p. en $t \in [t_0,t_1]$.*

El siguiente teorema establece la existencia y unicidad de soluciones débiles de (2.3.12) cuando f es de Lipschitz.

Teorema 2.3.1. *Sea $f:[t_0,a]\times X \to X$ una función continua en $[t_0,a]$ y uniformemente Lipschitz en X; es decir, supongamos que existe $L > 0$ tal que para todo $x,y \in X$*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|.$$

Entonces existe una única solución débil del problema de valor inicial (2.3.12) para todo $u_0 \in X$. Además, la aplicación $u_0 \to u(\cdot,u_0)$ es Lipschitz de X en $C([t_0,a]:X)$.

Prueba:

En el espacio $C([t_0,a]:X)$ dotado con la norma de la convergencia uniforme $\|u\| = \sup_{s\in[t_0,a]} \|u(s)\|$, definimos la función $F: C([t_0,a]:X) \to C([t_0,a]:X)$ dado por

$$Fu(t) = T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \in [t_0,a] \tag{2.3.14}$$

Mostraremos que F es una contracción en $C([t_0,a]:X)$. Sea $M = \sup_{t\in[t_0,a]} \|T(t)\|$ y fijemos $u,v \in C([t_0,a]:X)$.

De la definición de F, tenemos para $t \in [t_0,a]$ que

$$\begin{aligned}
\|Fu(t) - Fv(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} T(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\| ds \\
&\leq ML \int_{t_0}^{t} \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq ML(t-t_0)\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Similarmente para

$$\begin{aligned}
\left\|F^2u(t) - F^2v(t)\right\| &= \|F(Fu(t)) - F(Fv(t))\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} T(t-s)\big(f(s, Fu(s)) - f(s, Fv(s))\big)ds\right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\|\|f(s, Fu(s)) - f(s, Fv(s))\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} ML\|Fu(s) - Fv(s)\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} M^2L^2 s\|u-v\|ds \\
&\leq M^2L^2\frac{(t-t_0)^2}{2}\|u-v\|,
\end{aligned}$$

y así

$$\left\|F^2u - F^2v\right\| = M^2L^2\frac{(t-t_0)^2}{2}\|u-v\|,$$

se sigue, por inducción matemática que

$$\|F^n u(t) - F^n v(t)\| \leq \frac{\big(ML(t-t_0)\big)^n}{n!}\|u-v\|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in [t_0, a]. \tag{2.3.15}$$

En efecto, supongamos que la desigualdad (2.3.15) es satisfecha para $n-1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F^n u(t) - F^n v(t)\| &= \left\|F\left(F^{n-1}\right)u(t) - F\left(F^{n-1}\right)v(t)\right\| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\| \left\|f\left(s, F^{n-1}u(s)\right) - f\left(s, F^{n-1}v(s)\right)\right\| ds \\
&\leq ML\int_{t_0}^{t} \left\|F^{n-1}u(s) - F^{n-1}v(s)\right\| ds \\
&\leq ML\int_{t_0}^{t} \frac{\big(ML(s-t_0)\big)^{n-1}}{(n-1)!}\|u-v\|ds \\
&\leq \frac{\big(ML(t-t_0)\big)^n}{n!}\|u-v\|.
\end{aligned}$$

Luego, obtenemos (2.3.15) para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia,

$$\|F^n u - F^n v\| \leq \frac{(MLa)^n}{n!}\|u-v\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como para n suficientemente grande se tiene $\dfrac{(MLa)^n}{n!} < 1$. Por el Principio de Contracción de Banach, podemos asumir que F^n posee un único punto fijo $u(\cdot, u_0) \in C([t_0, a] : X)$, lo que implica que $u(\cdot)$ es también punto fijo de F y como consecuencia es una solución débil de (2.3.12).

Si $u(\cdot,u_0)$ representa la solución débil de (2.3.12) con $u(t_0)=u_0$, entonces para $u_0,v_0\in X$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|u(t,u_0)-u(t,v_0)\| &\le \|T(t-t_0)\|\|u_0-v_0\|+\\ &\quad \int_{t_0}^t \|T(t-s)\|\|f(s,u(s,u_0))-f(s,v(s,v_0))\|ds\\ &\le M\|u_0-v_0\|+ML\int_{t_0}^t\|u(s,u_0)-v(s,v_0)\|ds\end{aligned}$$

por la desigualdad de Gronwall-Bellman, se tiene

$$\|u(t,u_0)-u(t,v_0)\| \le Me^{ML(a-t_0)}\|u_0-v_0\|.$$

Por lo tanto,

$$\|u(\cdot,u_0)-u(\cdot,v_0)\|_\infty \le Me^{ML(a-t_0)}\|u_0-v_0\|,$$

esto muestra que la aplicación $u_0\to u(\cdot,u_0)$ es Lipschitz de X en $C([t_0,a]:X)$ y que la solución débil de (2.3.12) es única.

Corolario 2.3.1. *Sea $g\in C([t_0,a]:X)$ y supongamos que se verifican las condiciones del teorema 2.3.1. Entonces la ecuación integral*

$$w(t)=g(t)+\int_{t_0}^t T(t-s)f(s,w(s))ds,\quad t\in[t_0,a]$$

tiene una única solución $w\in C([t_0,a]:X)$.

Prueba:

La prueba es análoga al teorema 2.3.1, basta definir la función

$$Fu(t)=g(t)+\int_{t_0}^t T(t-s)f(s,u(s))ds.$$

La condición uniforme de Lipschitz de la función f en el teorema 2.3.1 garantiza la existencia de una solución débil global de (2.3.12), o sea, definida en todo $[t_0,a]$. Asumiendo que f satisface apenas una condición local de Lipschitz en X, uniformemente para t en intervalos acotados, se puede mostrar la existencia de una solución local.

Para demostrar el siguiente teorema necesitamos los siguientes lemas.

Lema 2.3.1. *Sea $u_0\in D(A)$ y $f\in C^1([t_0,a]\times X:X)$. Si $u(\cdot)$ es una solución débil de (2.3.12), entonces $u(\cdot)$ es Lipschitz sobre $[t_0,a]$.*

Prueba:

Como f es continuamente diferenciable, entonces f es Lipschitz en $[t_0, a] \times K$ para cada $K \subset X$ compacto. En particular, existe $L_f > 0$ tal que

$$\|f(t_1, u(t)) - f(t_2, u(s))\| \leq L_f \left(|t_1 - t_2| + \|u(t) - u(s)\|\right),$$

para todo $t_1, t_2, t, s \in [t_0, a]$.

Sea $u(\cdot) = u(\cdot, u_0)$ solución débil de (2.3.12) y M y N constantes positivas dadas por

$$M = \sup_{t \in [t_0, a]} \|T(t)\|, \quad N = \sup_{t \in [t_0, a]} \|f(t, u(t))\|$$

y fijemos un $C_1 > 0$ tal que

$$\|T(t+h)u_0 - T(t)u_0\| \leq C_1 h,$$

para $t \in [t_0, a\rangle$ y $h > 0$ tal que $t + h \in [t_0, a]$.

De la definición 2.3.2, se tiene que

$$\begin{aligned}
& u(t+h) - u(t) \\
= \;& T(t+h-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t-t_0)u_0 - \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \\
= \;& T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0-h}^{t} T(t-s)f(s+h,u(s+h))ds + \\
& \int_{t}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds \\
= \;& T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0 + \int_{t_0-h}^{t} T(t-s)f(s+h,u(s+h))ds + \\
& \int_{t}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds + \int_{t_0}^{t} T(t-s)\big(f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\big)ds.
\end{aligned}$$

Tomando norma se tiene

$$\begin{aligned}
& \| u(t+h) - u(t)\| \\
\leq \;& \| T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0\| + \int_{t_0-h}^{t_0} \|T(t-s)\|\|f(s+h,u(s+h))\|ds + \\
& \int_{t}^{t+h} \|T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|ds + \int_{t_0}^{t} \|T(t-s)\|\|f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\|ds \\
\leq \;& C_1 h + MNh + MNh + ML_f \int_{t_0}^{t} \big(h + \|u(s+h) - u(s)\|\big)ds \\
\leq \;& C_1 h + 2MNh + MNL_f h(t-t_0) + ML_f \int_{t_0}^{t} \big(h + \|u(s+h) - u(s)\|\big)ds \\
\leq \;& (C_1 + 2MN + ML_f T)\, h + ML_f \int_{t_0}^{t} \|u(s+h) - u(s)\|ds
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Gronwall–Bellman se tiene que

$$\begin{aligned}\|u(t+h)-u(t)\| &\leq (C_1+2MN+ML_fT)\, e^{ML_f\int_{t_0}^{t} ds}h \\ &\leq (C_1+2MN+ML_fT)\, he^{aML_f}\end{aligned}$$

Esto prueba que $u(\cdot)$ es Lipschitz sobre $[t_0,a]$.

Haciendo una analogía como en el problema homogéneo, una solución débil no necesariamente es una solución clásica. El siguiente teorema establece condiciones sobre las cuales una solución débil es solución clásica. Para demostrar esto necesitamos algunas notaciones y resultados previos.

Sean $(X_1,\|\cdot\|)$ y $(X_2,\|\cdot\|)$ espacios de Banach y $\rho:[t_0,\delta]\times X_1\to X_2$ una función diferenciable.

Para $t\in[t_0,\delta]$, $s\in\mathbb{R}$ con $t+s\in[t_0,\delta]$ y $x,y\in X_1$, introducimos la siguiente descomposición

$$\rho(t+s,x+y)-\rho(t,x)=\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,x)s+\frac{\partial}{\partial x}\rho(t,x)y+R(\rho,t,x,y,s)$$

donde $\dfrac{\|R(\rho,t,x,y,s)\|}{\|(y,s)\|}\to 0$, cuando $\|(y,s)\|=|s|+\|y\|\to 0$.

Lema 2.3.2. *Sea $g:[t_0,a]\times X\to X$ continuamente diferenciable $K,S\subset X$ compactos con $0\in S$. Entonces, dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que para todo $(t,x)\in[t_0,a]\times K$ y $(s,y)\in[-1,1]\times S$ con $t+s\in[t_0,a]$,*

$$\frac{\|R(g,(t,x),(s,y))\|}{\|(s,y)\|}<\epsilon,$$

si $0<\|(s,y)\|=|s|+\|y\|<\delta$.

Prueba:

Para $(t,x)\in[t_0,a]\times K$ y $(s,y)\in[-1,1]\times S$ con $t+s\in[t_0,a]$, se tiene

$$\begin{aligned}&g(t+s,x+y)-g(t,x)-\frac{\partial}{\partial t}g(t+s)s-\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\\ =\ &\int_0^1\frac{\partial}{\partial \tau}g(t+\tau s,x+\tau y)d\tau-\frac{\partial}{\partial t}g(t+s)s-\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\\ =\ &\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y)s+\frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y)y-\frac{\partial}{\partial t}g(t,x)s-\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)y\right)d\tau\\ =\ &\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial t}g(t+\tau s,x+\tau y)-\frac{\partial}{\partial t}g(t,x)\right)sd\tau+\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}g(t+\tau s,x+\tau y)-\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)\right)yd\tau.\end{aligned}$$

Como las funciones $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ son continuas y el conjunto $U = ([t_0, a] + [0,1] \times [-1,1]) \times (K + [0,1] \times S)$ es compacto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $(\widehat{s}, \widehat{x}), (s, x) \in U$ con $\widehat{s}, s \in [t_0, a]$

$$\left\| \frac{\partial g}{\partial t}(\widehat{s}, \widehat{x}) - \frac{\partial g}{\partial t}(s, x) \right\| < \epsilon \qquad \text{y} \qquad \left\| \frac{\partial g}{\partial x}(\widehat{s}, \widehat{x}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s, x) \right\| < \epsilon,$$

cuando $|\widehat{s} - s| < \delta$ y $\|\widehat{x} - x\| < \delta$. Luego, para todo $(t, x) \in [t_0, a] \times K$ y todo $(s, y) \in [-1,1] \times S$ con $t + s \in [t_0, T]$ y $0 < \|(s, y)\| = |s| + \|y\| < \delta$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|R(g, (t,x), (s,y))\| &= \left\| g(t+s, x+y) - g(t,x) - \frac{\partial}{\partial t} g(t,x) s - \frac{\partial}{\partial x} g(t,x) y \right\| \\ &\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial t} g(t + \tau s, x + \tau y) - \frac{\partial}{\partial t} g(t,x) \right\| |s| d\tau + \\ &\quad \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial x} g(t + \tau s, x + \tau y) - \frac{\partial}{\partial x} g(t,x) \right\| \|y\| d\tau \\ &\leq \epsilon |s| + \epsilon \|y\| = \epsilon\big(|s| + \|y\|\big), \end{aligned}$$

probando el resultado.

Ahora enunciaremos el teorema de regularidad de soluciones.

Teorema 2.3.2. *Sea $u_0 \in D(A)$ y $f : [t_0, a] \times X \to X$ continuamente diferenciable en $[t_0, a] \times X$. Si $u(\cdot)$ es una solución débil de (2.3.12) en $[0, a]$, entonces $u(\cdot)$ es una solución clásica de (2.3.12) en $[0, a]$.*

Prueba:

Sea

$$u(t) = T(t - t_0) u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in [t_0, a]$$

y $t_1 < a$. Mostremos que esta solución débil es continuamente diferenciable en $[t_0, t_1]$. Veamos que si $u(\cdot)$ fuese diferenciable, usamos el hecho de que f es continuamente diferenciable y las mismas ideas de la prueba del corolario (2.2.1) tenemos

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= AT(t - t_0) u_0 + T(t - t_0) f(t_0, u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} T(t-s) \frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s)) ds + \\ &\quad \int_{t_0}^{t} T(t-s) \frac{\partial}{\partial u} f(s, u(s)) \dot{u}(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

para demostrar que $u(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $[t_0, t_1]$, tomemos $w(\cdot)$ siendo una solución de la ecuación integral

$$w(t) = g(t) + \int_{t_0}^{t} T(t-s) \frac{\partial}{\partial u} f(s, u(s)) w(s) ds, \quad t \in [t_0, t_1], \tag{2.3.16}$$

donde

$$g(t) = AT(t - t_0) u_0 + T(t - t_0) f(t_0, u(t_0)) + \int_{t_0}^{t} T(t-s) \frac{\partial}{\partial s} f(s, u(s)) ds.$$

La existencia de $w(\cdot)$ es debido al corolario 2.3.1, de las hipótesis tenemos que $g \in C([t_0,t_1]:X)$ y $\dfrac{\partial}{\partial u}f(t,u(t))w(t)$ es continua en $[t_0,t_1]$, además $\dfrac{\partial}{\partial u}f(t,u(t))w(t)$ es uniformemente Lipschitz en X, en efecto

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial u}f(t,u(t))w(t)-\frac{\partial}{\partial u}f(t,u(t))v(t)\right\| &\leq \left\|\frac{\partial}{\partial u}f(t,u(t))\right\| \|w(t)-v(t)\| \\ &\leq N\|w-v\|, \quad t\in[t_0,t_1],\end{aligned}$$

donde $N = \text{máx}\left\{ \, \|\frac{\partial}{\partial u}f(s,u(s))\| : s\in[t_0,t_1] \, \right\}$, lo que muestra que las hipótesis del corolario 2.3.1 son satisfechas.

Ahora mostraremos que $\dot{u}(t) = w(t)$ para $[t_0,t_1]$. Si $t\in[t_0,t_1[$ y $h>0$ tal que $t+h\in[t_0,t_1]$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - w(t)\\
=\ & \frac{1}{h}T(t+h-t_0)u_0 + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - \frac{1}{h}T(t-t_0)u_0 - \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds - w(t)\\
=\ & \frac{1}{h}\big(T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0\big) + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds + \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)\big(f(s+h,u(s+h)) - f(s,u(s))\big)ds - w(t)\\
=\ & \frac{1}{h}\big(T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0\big) + \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds + \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)\left(\frac{\partial}{\partial s}f(s,u(s))h + \frac{\partial}{\partial u}f(s,u(s))\big(u(s+h)-u(s)\big) + R(s)\right)ds - w(t),
\end{aligned}$$

donde $R(s) = R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s))$ es la función introducida antes del teorema, luego sustituyendo $w(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - w(t) \ =\ & \frac{1}{h}(T(t+h-t_0)u_0 - T(t-t_0)u_0) + AT(t-t_0)u_0 + \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s))\,ds + \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))\,ds - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0)) + \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial u}f(s,u(s))\left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - w(s)\right)ds.
\end{aligned}$$

Tomando norma vemos que los tres primeros términos del lado derecho de la última igualdad tienden a cero cuando $h\to 0$. Para el primer término A es el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Para el segundo término observamos de los lemas 2.3.1 y 2.3.2 que

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\|R(s,u(s),h,u(s+h)-u(s))\|}{h}\,ds \to 0, \quad \text{cuando } h\to 0.$$

Para el tercer término observamos que

$$
\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0)) \right\| \\
= & \left\| \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \big(T(t+h-s)f(s,u(s)) - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0))\big)\, ds \right\| \\
\leq & \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \|T(t+h-s)\|\ \|f(s,u(s)) - f(t_0,u(t_0))\|\, ds + \\
& \frac{1}{h}\int_{t_0}^{t_0+h} \| \, T(t+h-s)f(t_0,u(t_0)) - T(t-t_0)f(t_0,u(t_0)) \, \|\, ds.
\end{aligned}
$$

Como las funciones $s \to f(s,u(s))$ y $s \to T(t+h-s)f(t_0,u(t_0))$ son continuas, entonces el lado derecho de esta desigualdad tiende a cero cuando $h \to 0$.

Además, para

$$
M = \max_{t\in[t_0,t_1]} \|T(t-s)\| \quad \text{y} \quad N = \max\left\{ \left\|\frac{\partial}{\partial u} f(s,u(s))\right\| : s \in [t_0,t_1] \right\}
$$

se tiene

$$
\begin{aligned}
& \left\| \int_{t_0}^{t} T(t-s)\frac{\partial}{\partial u}f(s,u(s)) \left(\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - w(s) \right) ds \right\| \\
\leq & \ MN \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} - w(s) \right\| ds.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - w(t) \right\| \leq \epsilon(h) + MN\int_{t_0}^{t} \left\| \frac{u(s+h)-u(s)}{h} - w(s) \right\| ds,
$$

donde $\epsilon(h) \to 0$ cuando $h \to 0$. Por la desigualdad de Gronwall-Bellman tenemos

$$
\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - w(t) \right\| \leq \epsilon(h) e^{MN(t_1-t_0)},
$$

y así tenemos que

$$
\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - w(t) \right\| \to 0, \text{ cuando } h \to 0.
$$

Así, $u(\cdot)$ es diferenciable en $[t_0,t_1\rangle$ y $\dot{u}(t) = w(t)$ para $t \in [t_0,t_1\rangle$. Por lo tanto, $u(\cdot)$ es continuamente diferenciable en $[t_0,t_1\rangle$, pues t_1 es arbitrario.

Como u y f son continuamente diferenciables en $[t_0,t_1]$, entonces $s \to f(s,u(s))$ y pertenece a C^1. Por el corolario 2.3.1, se tiene que la función

$$
v(t) = T(t-s)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t-s)f(s,u(s))ds,
$$

es solución clásica del problema de valor inicial

$$
\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + f(t,u(t,)) \\ x(t_0) &= u_0. \end{cases} \tag{2.3.17}
$$

Por la unicidad de solución débil para (2.3.17) se sigue que $u = v$ en $[t_0, t_1]$. Lo que permite concluir que $u(\cdot)$ es una solución clásica de (2.3.12) en $[t_0, a]$.

Ahora estudiaremos la existencia de solución débil para (2.3.12) usando el clásico teorema del Punto Fijo de Schauder, para empezar introducimos la siguiente definición.

Definición 2.3.4. *Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados $(T(t))_{t\geqslant 0}$ en X es compacto para $t_0 > 0$ si $T(t)$ es compacto para todo $t > t_0$. Diremos que $(T(t))_{t\geqslant 0}$ es compacto si es compacto para $t > 0$.*

Teorema 2.3.3. *Sea $U \subset X$ abierto, $u_0 \in U$ y $f : [0, a\rangle \times U \to U$ continua y asumamos que el semigrupo $(T(t))_{t\geqslant 0}$ es compacto con generador infinitesimal A. Entonces para cada $u_0 \in U$, existe $0 < t_1 = t_1(u_0) < a$ tal que el problema de valor inicial (2.3.12) tiene una solución débil $u \in C([0, t_1] : X)$.*

Prueba:

Estamos interesados en soluciones locales y asumiremos que $a > 0$. Sea $M > 0$ tal que $\|T(t)\| \leq M$ para todo $0 \leq t \leq a$. Como $f(\cdot)$ es continua, podemos fijar $0 < t' < a$, $N > 0$ y $\rho > 0$ tal que $B_\rho(u_0) = \{v : \|v - u_0\| \leq \rho\} \subset U$ y $\|f(s, v)\| \leq N$ para todo $(s, v) \in [0, t'] \times B_\rho(u_0)$. Fijemos ahora $0 < t'' < t'$ tal que $\|T(t)u_0 - u_0\| < \dfrac{\rho}{2}$ para todo $t \in [0, t'']$ y sea $t_1 = t_1 u_0 = \text{mín}\left\{t', t'', a, \dfrac{\rho}{2MN}\right\}$.
Sea $Y = C([0, t_1] : X)$ y $Y_0 = \{u \in Y : u(0) = u_0, u(t) \in B_\rho(u_0), 0 \leq t \leq t_1\}$ con la topología de la convergencia uniforme. Vemos que Y_0 es un subconjunto limitado, cerrado y convexo de Y.
Definimos la aplicación $F : Y_0 \to Y$ por

$$Fu(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Si F tiene un punto fijo, entonces el problema (2.3.12) tiene una solución débil en $C([0, t_1] : X)$. Para mostrar que F tiene un punto fijo en Y usaremos el clásico teorema del Punto Fijo de Schauder. Así, mostraremos que F es una aplicación continua con valores en $F(Y_0)$, que el conjunto $F(Y_0)(t) = \{Fu(t) : u \in Y_0\}$ es relativamente compacto en X para todo $t \in [0, t_1]$ y que $FY_0 = \{Fu : u \in Y_0\}$ es equicontinuo en $[0, t_1]$, estudiaremos cada una de estas propiedades por separado.
(a) $F(\cdot)$ es continua en Y_0.
Veamos que $F(Y_0) \subset Y_0$. Sea $u \in F(Y_0)$, entonces $u(s) \in B_\rho(u_0)$ para todo $s \in [0, t_1]$ y $\|f(s, u(s))\| \leq \epsilon N$ para $s \in [0, t_1]$. Luego, por definición de F tenemos

$$
\begin{aligned}
\|Fu(t)-u_0\| &\leq \|T(t)u_0-u_0\| + \left\|\int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds\right\| \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \int_0^t \|T(t-s)\|\ \|f(s,u(s))\|ds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \int_0^{t_1} MNds \\
&\leq \frac{\rho}{2} + t_1MN \\
&\leq \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho,
\end{aligned}
$$

lo que implica que $u(t) \in B_\rho(u_0)$ para todo $t \in [0, t_1]$, luego $Fu \in Y_0$.

Veamos ahora que $u(t) \in B_\rho(u_0)$ es completamente continua. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y_0 y $u \in Y_0$ tal que $u_n \to u$ en Y_0. De la definición de F, se tiene

$$
\begin{aligned}
\|Fu(t)-Fu_n(t)\| &\leq \left\|\int_0^t T(t-s)\big(f(s,u(s))-f(s,u_n(s))\big)ds\right\| \\
&\leq \int_0^t \|T(t-s)\|\|f(s,u(s))-f(s,u_n(s)\|ds \\
&\leq \int_0^a M\|f(s,u(s))-f(s,u_n(s))\|ds = G(u_n,u).
\end{aligned}
$$

Como f es continua, $f(s,u_n(s)) \to f(s,u(s))$ para todo $s \in [0,a]$ cuando $n \to \infty$. Además $f(s,u_n(s))$ es uniformemente acotada para $n \in \mathbb{N}$ y $s \in [0,a]$. Entonces por el teorema de la Convergencia Dominada (de Lebesgue) concluímos que $G(u_n,u) \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo que demuestra que $Fu_n \to Fu$ en Y_0.

Probemos ahora que $F(Y_0)$ es relativamente compacto en Y.

(b) El conjunto $F(Y_0)(t) = \{Fu(t) : u \in Y_0\}$ es relativamente compacto en X para todo $t \in [0, t_1]$.

Para $t = 0$ tenemos $F(Y_0)(0) = \{u_0\}$, que es compacto.

Luego, para $0 < t \leq t_1$, tomemos $\epsilon > 0$ tal que $0 < \epsilon < t$ y sea $\delta = MN(t_1-\epsilon)$. Si $u \in Y_0$, entonces

$$
\begin{aligned}
Fu(t) &= T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\,ds \\
&= T(t)u_0 + \int_0^{t-\epsilon} T(t-s)f(s,u(s))\,ds + \int_{t-\epsilon}^t T(t-s)f(s,u(s))\,ds \\
&= T(t)u_0 + T(\epsilon)\int_0^{t-\epsilon} T(t-s-\epsilon)f(s,u(s))\,ds + \qquad (2.3.18)\\
&\quad \int_{t-\epsilon}^t T(t-s)f(s,u(s))\,ds
\end{aligned}
$$

como

$$\begin{aligned}\left\|\int_0^{t-\epsilon} T(t-s-\epsilon)f(s,u(s))ds\right\| &\leq \int_0^{t-\epsilon} \|T(t-s-\epsilon)\|\|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq MN(t_1-\epsilon)=\delta\end{aligned}$$

para $s \in [0,t_1]$ de (2.3.18) se sigue que

$$Fu(t) \in \{T(t)u_0\} + T(\epsilon)B_\delta(0,X) + C_\epsilon,$$

donde $C_\epsilon \subset X$ y $\mathrm{diam}(C_\epsilon) < MN\epsilon$. Como $T(\epsilon)$ es compacto y ϵ es arbitrario, podemos concluir que $F(Y_0)(t)$ es totalmente limitada y en consecuencia, relativamente compacto en X, para todo $t \in [0,t_1]$.

(c) El conjunto de funciones $F(Y_0) = \{Fu : u \in Y_0\}$ es equicontinuo en $[0,t_1]$.

Sea $0 < \epsilon < t < t_1$. Como $(T(t))_{t\geqslant 0}$ es continuo en $\langle 0,t_1]$, existe $0 < \delta < \epsilon$ tal que $\|T(s) - T(s')\| < \epsilon$ para todo $s, s' \in [\epsilon, t]$ tal que $|s - s'| < \delta$. Con estas condiciones para $u \in Y_0$ y $0 < h < \delta$ se tiene que

$$\begin{aligned}&\|Fu(t+h) - Fu(t)\| \\ = &\left\|T(t+h)u_0 + \int_0^{t+h} T(t+h-s)f(s,u(s))ds - T(t)u_0 - \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds\right\| \\ \leq &\|T(t)(T(h)-I)u_0\| + \int_0^{t-\epsilon} \|T(t-s) - T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|ds + \\ &\int_{t-\epsilon}^t \|T(t-s)-T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|ds + \int_t^{t+h} \|T(t+h-s)\|\|f(s,u(s))\|ds \\ \leq &M\|(T(h)-I)u_0\| + MN(t-\epsilon) + MN\epsilon + MNh. \qquad (2.3.19)\end{aligned}$$

Vemos que el lado derecho de (2.3.19) es independiente de $u \in Y_0$, podemos concluir que $F(Y_0)$ es equicontinuo a la derecha en t. Usando argumentos similares, podemos mostrar que $F(Y_0)$ es equicontinuo a izquierda en $t \in \langle 0,t_1]$ y a la derecha en $t = 0$. Esto prueba que $F(Y_0)$ es equicontinuo en $[0,t_1]$.

Del teorema de Áscoli-Arzelá y de (a), (b) y (c), se sigue que $F(Y_0)$ es compacto. Luego $F(\cdot)$ es una aplicación completamente continua.

Por último el teorema del Punto Fijo de Schauder, garantiza que F tiene un punto fijo $u(\cdot)$ en Y_0, lo que prueba que $u(\cdot)$ es una solución débil de (2.3.12), lo que completa la prueba del teorema (2.3.3).

Capítulo 3

Aplicaciones de algunas ecuaciones semilineales de evolución

En este capítulo estudiamos dos aplicaciones del problema de evolución semilineal.

3.1. Aplicación 1: Ecuación de evolución semilineal de segundo orden

Consideramos la ecuación de evolución de la forma (2.3.12), donde f satisface las hipótesis del teorema (2.3.1).

Estudiaremos la existencia de soluciones débiles de la ecuación diferencial de segundo orden de la forma

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u = Bu - f_1\left(\frac{\partial}{\partial t}u\right) - f_2(u) + f_3(t), \tag{3.1.1}$$

en un espacio de Hilbert real H con producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y norma $|\cdot|$.

Haciendo el cambio de variable $\frac{\partial}{\partial t}u = v$ en (3.1.1) la ecuación es equivalente al sistema de primer orden

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & Bu - f_1(v) - f_2(u) + f_3(t), \quad (u_0, v_0) \in X. \end{array}\right. \tag{3.1.2}$$

o como una ecuación de evolución abstracta

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{w} & = & Aw + f(t,w) \\ w_0 & = & (u_0, v_0) \in X, \end{array}\right. \tag{3.1.3}$$

donde $w = (u,v)$, $Aw = (v, Bu)$, $f(t,w) = (0, -f_1(v) - f_2(u) + f_3(t))$.

Para el operador $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ tenemos los siguientes lemas.

Lema 3.1.1. *B es cerrado con dominio denso.*

Prueba:

Se prueba que B es un operador lineal cerrado y $\mathcal{D}(B) \hookrightarrow H$ ($\mathcal{D}(B)$ está contenido densamente y continuamente en H).

Lema 3.1.2. *B es autoadjunto y definido negativo.*

Prueba:

$$\langle Bu, v\rangle = -\langle u, Bv\rangle$$

1. B es biyectivo. En la norma $|\cdot|$ de H, es decir, $Bu = 0 \leftrightarrow |Bu| = 0 \leftrightarrow u = 0$ y si $v \in H$, entonces existe $u \in \mathcal{D}(B)$ tal que $Bu = v$.

2. B es lineal. Sean $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(B)$ y las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$B(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Bu_1 + \beta Bu_2.$$

3. B es continuo, acotado y definido negativo.

$$\langle Bu, u\rangle \leq -\lambda |u|^2, \text{ para todo} u \in \mathcal{D}(B).$$

Lema 3.1.3. *$\mathcal{D}(A)$ es denso en $X = \mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}}) \times H$ con el producto interno*

$$\langle (u,v), (\widehat{u}, \widehat{v})\rangle = \left\langle (-B)^{\frac{1}{2}}u, (-B)^{\frac{1}{2}}\widehat{u}\right\rangle + \langle v, \widehat{v}\rangle$$

y $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(-B) \times \mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}})$.

Prueba:

Se prueba que A es cerrado con inclusión continua en H.
Como $\mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}})$ es denso en H, entonces $\mathcal{D}(A)$ es denso en X.
Si (u_n, v_n) es una suseción en $\mathcal{D}(A)$ tal que $(u_n, v_n) \to (u, v)$ y $A(u_n, v_n) \to (\widehat{u}, \widehat{v})$, entonces

$$u_n \to u \text{ en } \mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}}) \quad , \quad v_n \to v \text{ en } H$$
$$v_n \to \widehat{u} \text{ en } \mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}}) \quad , \quad Bu_n \to \widehat{v} \text{ en } H$$

Como la inclusión de $\mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}})$ en H es continua, entonces $\widehat{u} = v$,también como $u_n \in \mathcal{D}(B)$ y B es cerrado, se tiene que $u \in \mathcal{D}(B)$ y $Bu = \widehat{v}$.
Luego, $(\widehat{u}, \widehat{v}) = (v, Bu) = A(u, v)$, lo que prueba que A es cerrado.

Lema 3.1.4. *A es autoadjunto, además A y −A son disipativos.*

Prueba:

Sea $w = (u, v) \in \mathcal{D}(A)$ y $z = (x, y) \in \mathcal{D}(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle Aw, z\rangle &= \langle A(u,v),(x,y)\rangle \\
&= \langle (v, Bu),(x,y)\rangle \\
&= \langle (-B)^{\frac{1}{2}}v, (-B)^{\frac{1}{2}}x\rangle + \langle Bu, y\rangle \\
&= \langle v, -Bx\rangle - \langle (-B)^{\frac{1}{2}}(-B)^{\frac{1}{2}}u, y\rangle \\
&= -\langle (-B)^{\frac{1}{2}}u, (-B)^{\frac{1}{2}}y\rangle - \langle v, Bx\rangle \\
&= -\langle (u,v),(y,Bx)\rangle \\
&= \langle (u,v), -(y,Bx)\rangle \\
&= \langle w, -A(x,y)\rangle \\
&= \langle w, -Az\rangle.
\end{aligned}$$

Luego, $A^* = -A$ y que $\langle Aw, w\rangle = 0$, para todo $w \in \mathcal{D}(A)$.

Proposición 3.1.1. *A es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo.*

Prueba:

Por el lema 3.1.3 y el lema 3.1.4 se prueba que A es el generador infinitesimal de una semigrupo fuertemente continuo.

Si $f_1 : H \to H$ y $f_2 : \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}} \to H$ son localmente Lipschitzianas; es decir, existen r y s reales tales que

$$\begin{aligned}
|f_1(v_1) - f_1(v_2)| &\leq r|v_1 - v_2| \\
|f_2(u_1) - f_2(u_2)| &\leq s|u_1 - u_2|
\end{aligned}$$

y $f_3 : \mathbb{R} \to H$ es continua en $\mathbb{R}$, entonces dado $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}} \times H$ y $f(t, w) \in C^1([t_0, a] \times X : X)$ existe una única solución débil por el teorema 2.3.1 $w(t) = (u(t), v(t))$ de $\dot{w} = Aw + f(t, w)$ definida en $[0, a]$ con $a > 0$ y $a = a(u_0, v_0)$ que satisface las hipótesis del teorema (2.3.1).

Ahora definamos el funcional $F : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$F(u,v) = \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{1/2}u|^2 + 2a\langle u, v\rangle + g(u)$$

donde $g : \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ con $T > 0$, $f_2(u) = \nabla g(u)$ y la forma cuadrática $F(u, v) - g(u)$ es equivalente a la norma de X

$$F(u,v) - g(u) = \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2a\langle u, v\rangle$$

Teorema 3.1.1. *El sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & v \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} & = & Bu - f_1(v) - f_2(u) + f_3(t) \end{cases}$$

para f_1, f_2 localmente Lipschitz, f_3 continua y además satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. *existe una función $g : \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 acotada inferiormente tal que $f_2(u) = \nabla g(u)$ con relación al producto escalar de H,*

2. *para todo $u \in \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}}$, existen $\epsilon > 0$ y $r_\epsilon > 0$ tal que $g(u) \leq \epsilon|u|^2 + r_\epsilon$,*

3. *$\langle u, f_2(u)\rangle$ esta acotada inferiormente en $\mathcal{D}(-B)^{1/2}$,*

4. *existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha|v|^2 \leq \langle v, f_1(v)\rangle$, $|f_1(v)| \leq \beta|v|$ y $f_1(0) = 0$, para todo $v \in H$,*

5. *la función $f_3 : \mathbb{R} \to H$ es acotada.*

Es limitado disipativo.

Los siguientes lemas serán útiles en la demostración del teorema.

Lema 3.1.5. *La función $g : \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y acotada inferiormente tal que $f_2(u) = \nabla g(u)$ y existen $\epsilon > 0$ y $r_\epsilon > 0$ tal que, para todo $u \in \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}}$*

$$g(u) \leq \epsilon|u|^2 + r_\epsilon.$$

Luego la forma cuadrática $F(u, v) - g(u)$ está acotada.

Prueba:

Veamos que la forma cuadrática $F(u, v) - g(u)$ sea equivalente a la norma de X.

Se tiene que

$$\begin{aligned} F(u,v) - g(u) &= \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 - 2a\langle u, v\rangle \\ &\geq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 - 2a|u||v| \\ &\geq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 - \frac{2a}{\sqrt{\lambda}}|(-B)^{\frac{1}{2}}u||v|, \end{aligned}$$

de la última desigualdad, el lado derecho será una forma cuadrática positiva definida si $\frac{1}{4} - \frac{a^2}{\lambda} > 0$; es decir, $a^2 < \frac{\lambda}{4}$, y se tiene

$$\begin{aligned} F(u,v) - g(u) &\geq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 - \frac{a}{\sqrt{\lambda}}\left(|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + |v|^2\right) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{\lambda}}\right)\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right) \\ &= L_1\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right). \end{aligned}$$

donde $L_1 = \frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{\lambda}}$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F(u,v) - g(u) &\leq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + 2a\langle u, v\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + \frac{2a}{\sqrt{\lambda_1}}|(-B)^{\frac{1}{2}}u||v| \\ &\leq \frac{1}{2}|v|^2 + \frac{1}{2}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + \frac{a}{\sqrt{\lambda_1}}\left(|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + |v|^2\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{\sqrt{\lambda_1}}\right)\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right) \\ &= L_2\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right), \end{aligned}$$

donde $L_2 = \frac{1}{2} + \frac{a}{\sqrt{\lambda}}$.

Tomando $a > 0$ con $a^2 < \frac{\lambda}{4}$, existen constantes $L_1 > 0$ y $L_2 > 0$ tales que

$$L_1\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right) \leq F(u,v) - g(u) \leq L_2\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right),$$

para cualquier $w = (u, v) \in X$.

Por las hipótesis (1) y (2), existe una constante K tal que $g(u) \geq -K$, luego para todo $u \in \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}}$ se tiene

$$L_1\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right) - K \leq F(u,v) \leq \left(L_2 - \frac{\epsilon}{\lambda}\right)\left(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2\right) + r_\epsilon \qquad (3.1.4)$$

para todo $(u, v) \in X$.

Lema 3.1.6. *El par $(u(t), v(t))$ con las hipótesis del teorema (3.1.1) es una solución débil de $\dot{w} = Aw + f(t, w)$.*

Prueba:

Sea $(u(t), v(t))$ una solución fuerte de (3.1.3), entonces la derivada de F a lo largo de $(u(t), v(t))$ está dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(u(t),v(t)) &= \langle v(t),\dot v(t)\rangle + \langle(-B)^{\frac{1}{2}}u(t),(-B)^{\frac{1}{2}}\dot u(t)\rangle + 2a\langle u(t),\dot v(t)\rangle + 2a\langle \dot u(t),v(t)\rangle \\
&\quad +\langle \nabla g(u(t)),\dot u(t)\rangle \\
&= \langle v, Bu - f_1(v) - f_2(u) + f_3(t)\rangle + \langle(-B)^{\frac{1}{2}}u,(-B)^{\frac{1}{2}}v\rangle \\
&\quad +2a\langle u, Bu - f_1(v) - f_2(u) + f_3(t)\rangle + 2a\langle v,v\rangle + \langle f_2(u),v\rangle \\
&= \langle Bu,v\rangle - \langle v,f_1(v)\rangle + \langle v,f_3(t)\rangle + \langle -Bu,v\rangle + 2a\langle u,Bu\rangle - 2a\langle u,f_1(v)\rangle \\
&\quad -2a\langle u,f_2(u)\rangle + 2a\langle u,f_3(t)\rangle + 2a|v|^2 \\
&= 2a|v|^2 - \langle v,f_1(v)\rangle + 2a\langle u,Bu\rangle - 2a\langle u,f_1(v)\rangle - 2a\langle u,f_2(u)\rangle + \langle v,f_3(t)\rangle \\
&\quad +2a\langle u,f_3(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

Como $\langle v,f_1(v)\rangle \geq \alpha|v|^2$ y $|\langle u,f_1(v)\rangle| \leq |u||f_1(v)| \leq \beta|u||v|$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(u(t),v(t)) &\leq (2a-\alpha)|v|^2 + 2a\beta|u||v| + 2a\langle u,Bu\rangle - 2a\langle u,f_2(u)\rangle + \langle v,f_3(t)\rangle + 2a\langle u,f_3(t)\rangle \\
&\leq (2a-\alpha)|v|^2 + \frac{2a\beta}{\sqrt{\lambda}}|(-B)^{\frac{1}{2}}u||v| - 2a|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 - 2a\langle u,f_2(u)\rangle + \langle v,f_3(t)\rangle \\
&\quad +2a\langle u,f_3(t)\rangle.
\end{aligned}
$$

Escogiendo $a>0$ se tiene

$$
(2a-\alpha)|v|^2 + \frac{2a\beta}{\sqrt{\lambda}}|(-B)^{\frac{1}{2}}u||v| - 2a|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq -\theta(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2)
$$

para algún $\theta > 0$.

De la última desigualdad el lado izquierdo será una forma cuadrática negativa definida si

$$
2a(\alpha - 2a) - \frac{a^2\beta^2}{\lambda} > 0;
$$

es decir, $a < \dfrac{2\alpha}{4+\dfrac{\beta^2}{\lambda}}$ para que

$$
(2a-\alpha)|v|^2 + \frac{2a\beta}{\sqrt{\lambda}}|(-B)^{\frac{1}{2}}u||v| - 2a|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq -\theta(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2).
$$

Por las hipótesis (1), (2), (3) y (4) y por desigualdades elementales, concluímos

$$
\langle v,f_3(t)\rangle \leq |\langle v,f_3(t)\rangle| \leq |v||f_3(t)| \leq \frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{1}{2\delta^2}|f_3(t)|^2
$$

y

$$
\langle u,f_3(t)\rangle \leq |\langle u,f_3(t)\rangle| \leq |u||f_3(t)| \leq \frac{\delta^2}{2}|u|^2 + \frac{1}{2\delta^2}|f_3(t)|^2,
$$

para todo $\delta > 0$.

Como $-\langle u, f_2(t)\rangle$ es acotada superiormente, existe una constante $k_1 > 0$ tal que $-\langle u, f_2(u)\rangle \leq k_1$, también $f_3(t)$ es acotada y existe una constante $k_2 > 0$ tal que $|f_3(t)| \leq k_2$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(u(t),v(t)) &\leq -\theta(|v|^2 + |(-B)^{1/2}u|^2) + \frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{1}{2\delta^2}k_2^2 + k_1 + \frac{\delta^2}{2}|u|^2 + \frac{1}{2\delta^2}k_2^2 \\ &\leq -\theta(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2) + \frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{\delta^2}{2\lambda}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 + k_1 + \frac{1}{2\delta^2}k_2^2,\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\delta^2}{2}|v|^2 + \frac{\delta^2}{2\lambda_1}|(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2 \leq \frac{\theta}{2}(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2).$$

Sea $\max\left\{\frac{\delta^2}{2}, \frac{\delta^2}{2\lambda_1}\right\} \leq \frac{\theta}{2}$ y tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeño, por ejemplo

$$\delta = \min\left\{\sqrt{\theta}, \sqrt{\theta\lambda}\right\},$$

y se tiene

$$\frac{d}{dt}F(u(t),v(t)) \leq \left(-\theta + \frac{\theta}{2}\right)(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2) + R,$$

donde $R = k_1 + \frac{1}{2\delta^2}k_2^2$, y tenemos

$$\frac{d}{dt}F(u(t),v(t)) \leq -\frac{\theta}{2}(|v|^2 + |(-B)^{\frac{1}{2}}u|^2) + R.$$

De la parte (3.1.4), obtenemos

$$F(u(t),v(t)) \leq F(u_0,v_0)e^{-\tau t} + \frac{2R}{\theta}\left(L_2 + \frac{\epsilon}{\lambda}\right) + r_\epsilon$$

donde, $\tau = \dfrac{\theta}{2\left(L_2 + \frac{\epsilon}{\lambda}\right)}$.

Luego

$$\|(u(t),v(t))\|^2 \leq \frac{\left(L_2 + \frac{\epsilon}{\lambda}\right)\|(u_0,v_0)\|^2 + r_\epsilon}{L_1}e^{-\tau t} + \frac{1}{L_1}(K + \frac{2R}{\theta}\left(L_2 + \frac{\epsilon}{\lambda}\right) + r_\epsilon),$$

para todo $t \geq 0$.

Como toda solución débil puede ser aproximada por soluciones fuertes, la última desigualdad vale también para toda solución débil de (3.1.3) y ésta a su vez implica que (3.1.3) es acotada disipativa, lo cual completa la demostración del teorema.

3.2. Aplicación 2: Movimiento circular de una barra

En esta sección estudiamos la existencia, unicidad y dependencia continua para el problema del movimiento de rotación de una barra flexible dada por la ecuación en derivadas parciales

$$z_{\varphi\varphi} - \left[\frac{(1-r^2)}{2} z_r\right]_r + \left(\left[\frac{RI}{M\Omega^2 E^4}\right] z_{rr}\right)_{rr} = f, \tag{3.2.5}$$

donde r es la distancia radial no dimensional, φ es el ángulo azimutal, RI es una propiedad de rigidez seccional, M es la masa, E es el espesor de la barra, f representa la carga aerodinámica, Ω es una función de $\varphi, r, z_r, z_\varphi$ y z es el cambio en la posición de equilibrio, $z = 0$.

Con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} z(\varphi,0) = 0 & , z_{rr}(\varphi,0) = 0 \\ z_{rr}(\varphi,1) = 0 & , z_{rrr}(\varphi,1) = 0 \end{cases}$$

Geometricamente, el problema descrito por (3.2.5) se puede representar mediante el gráfico adjunto que descibe el movimiento circular de una barra.

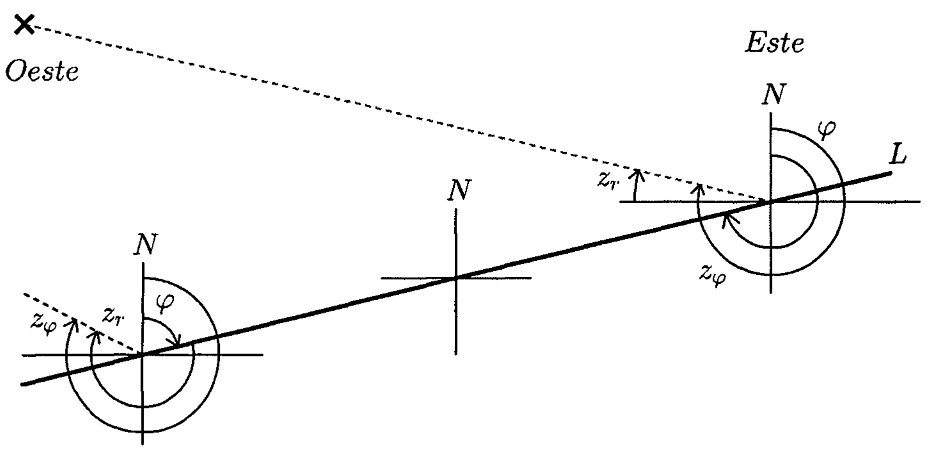

Figura 3.1: Movimiento circular de una barra

Haciendo $a^2 = \dfrac{M\Omega^2 E^4}{RI}$ la ecuación (3.2.5) se puede escribir

$$\begin{aligned} z_{\varphi\varphi} - \left[\frac{(1-r^2)}{2} z_r\right]_r + \left(\frac{1}{a^2} z_{rr}\right)_{rr} &= f \\ a^2 z_{\varphi\varphi} - a^2\left[\frac{(1-r^2)}{2} z_r\right]_r + z_{rrrr} &= a^2 f \\ a^2 z_{\varphi\varphi} + z_{rrrr} - \frac{1}{2}a^2\left[(1-r^2) z_r\right]_r &= a^2 f \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Haciendo la sustitución $r = x$, $\varphi = at$ y $\tilde{f} = a^2 f$, la ecuación (3.2.6) se puede escribir como

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)u_x\right]_x = \tilde{f}, \tag{3.2.7}$$

con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 \\ u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \end{cases} .$$

Consideramos los casos en los cuales el sistema resultante (3.2.7) es disipativo en un espacio de fase apropiado. En este caso el problema descrito de arriba puede ser interpretado como un ejemplo de ecuaciones diferenciales abstractas de segundo orden de la forma

$$u_{tt} - Bu + f_1(u_t) + f_2(u) = f_3(t) \tag{3.2.8}$$

La ecuación (3.2.8) puede ser escrita como una ecuación de evolución de primer orden

$$\dot{z} = Az + f(t,z) \tag{3.2.9}$$

donde

$$z = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & 0 \end{bmatrix}, f(t,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_1(u_t) - f_2(t) + f_3(t) \end{pmatrix},$$

en un espacio de Banach X, siendo A el generador infinitesimal de un C^0-semigrupo de operadores lineales en X. Para ciertas hipótesis básicas para f, tenemos existencia, unicidad, dependencia continua de soluciones débiles de (3.2.9) con

$$z(t) = \psi(t, t_0, z_0), t > t_0, z(t_0) = z_0.$$

Estudiemos la ecuación

$$u_{tt} + u_{xxxx} - \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)u_x\right]_x + 2\alpha u_t + f_2(t) = f_3(t) \tag{3.2.10}$$

en un espacio de Hilbert $H = L^2(0,1)$, con las condiciones de frontera

$$\begin{cases} u(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0 \\ u_{xx}(1,t) = u_{xxx}(1,t) = 0 \end{cases} .$$

La ecuación (3.2.10) se puede escribir en la forma (3.1.1)

$$Bu = -u_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)u_x\right]_x, \quad f_1(u_t) = 2\alpha u_t, \tag{3.2.11}$$

así

$$u_{tt} - Bu + f_1(u_t) + f_2(u) = f_3(t). \tag{3.2.12}$$

Con el siguiente lema probamos que el operador B es lineal.

Lema 3.2.1. *$B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ es un operador lineal.*

Prueba:

$$
\begin{aligned}
B(ru+sv) &= -(ru+sv)_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)(ru+sv)_x\right]_x \\
&= -ru_{xxxx} - sv_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)(ru_x+sv_x)\right]_x \\
&= -ru_{xxxx} - sv_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)ru_x\right]_x + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)ru_x\right]_x \\
&= -ru_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)ru_x\right]_x - sv_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2\left[(1-x^2)sv_x\right]_x \\
&= rBu + sBv.
\end{aligned}
$$

Proposición 3.2.1. *El operador $B : \mathcal{D}(B) \subset H \to H$ con dominio*

$$\mathcal{D}(B) = \left\{u \in H^4(0,1) : u(0) = u''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0\right\}$$

es definido negativo, autoadjunto y tiene resolvente compacto.

Prueba:

Sean $u, v \in \mathcal{D}(B)$ y empleando integración por partes, tenemos

$$
\begin{aligned}
\langle Bu, u\rangle &= \int_0^1 Bu(x)u(x)dx \\
&= \int_0^1 (\ -u_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x\ )udx \\
&= \int_0^1 (\ -u_{xxxx}u + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_xu\ )dx \\
&= \int_0^1 (\ u_{xxx}u_x + \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x^2\ )dx \\
&= \int_0^1 -u_{xxxx}udx + \frac{1}{2}a^2\int_0^1 [(1-x^2)u_x]_xudx \\
&= \int_0^1 (\ u_{xxx}u_x - \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x^2\ )dx \\
&= -\int_0^1 (\ u_{xx}^2 + \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x^2\ )dx \leq 0.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, para $u, v \in \mathcal{D}(B)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\langle Bu, v\rangle &= \int_0^1 Bu(x)v(x)dx \\
&= \int_0^1 (-u_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x)vdx \\
&= \int_0^1 (-u_{xxxx}v + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)u_x]_x v)dx \\
&= \int_0^1 (-u_{xx}v_{xx} - \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x v_x)dx \\
&= \int_0^1 (u_x v_{xxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)v_x]_x u)dx \\
&= \int_0^1 (-v_{xxxx}u + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)v_x]_x u)dx \\
&= \int_0^1 u(\ -v_{xxxx} + \frac{1}{2}a^2[(1-x^2)v_x]_x\ )udx \\
&= \int_0^1 u(x)Bv(x)dx \\
&= \langle u, Bv\rangle,
\end{aligned}$$

así, B es simétrico.

Ahora para mostrar que que B es autoadjunto es suficiente probar que B es sobreyectivo. Para $f \in L^2(0,1)$, consideremos la ecuación

$$-u''''(x) + \frac{1}{2}a^2\left((1-x^2)u'(x)\right)' = f(x), \quad 0 < x < 1$$

con las condiciones de frontera

$$u(0) = u''(0) = u''(1) = u'''(1) = 0.$$

Integrando en $[x,1]$, se tiene

$$u'''(x) - \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u'(x) = \int_x^1 f(s)ds = f_2(x) \in H^1(0,1).$$

Tomando $u'(x) = v(x)$, v es solución de

$$\left\{\begin{aligned} v''(x) - \frac{1}{2}a^2(1-x^2)v(x) &= f_2(x) \\ v'(0) = v'(1) &= 0. \end{aligned}\right. \tag{3.2.13}$$

$v(x) = u'(x)$ es una aplicación compacta de $L^2(0,1)$, es decir, todo subconjunto $D = [x,1] \subset L^2(0,1)$ es cerrado, además $\overline{v(D)} = L^2(0,1)$ es compacto, esto equivale a si $\{x_n\} \subseteq L^2(0,1)$ es una sucesión acotada, la sucesión $\{v(x_n)\} \subseteq L^2(0,1)$ tiene una subsucesión convergente a algún punto de $L^2(0,1)$. Así, v es solución del problema (3.2.13) y es una aplicación compacta de $L^2(0,1)$ en si mismo.

Como $u(x) = \displaystyle\int_0^x v(s)ds$ es un aplicación compacta de $f \in L^2(0,1)$, esto muestra que B tiene resolvente compacto.

Siendo B un operador autoadjunto definido negativo, el operador $-B$ es autoadjunto definido positivo, luego $(-B)^{\frac{1}{2}}$ existe y es autoadjunto definido positivo, cuyo dominio es

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}((-B)^{\frac{1}{2}}) &= \left\{u \in L^2(0,1) : (-B)^{\frac{1}{2}}u \in L^2(0,1), u(0) = 0\right\} \\
&= \left\{u \in H^2(0,1) : u(0) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

Haciendo $u_t = v$, la ecuación (3.2.10) es equivalente al sistema de primer orden

$$\left\{\begin{aligned}
u_t &= v \\
v_t &= Bu - 2\alpha v - f_2(u) + f_3(t),
\end{aligned}\right. \tag{3.2.14}$$

o, equivalentemente en la forma

$$z_t = Az + f(t,z), \tag{3.2.15}$$

donde

$$z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & -2\alpha I \end{bmatrix}, \ f(t,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f_2(u) + f_3(t) \end{pmatrix},$$

en un espacio de Hilbert real $X = \mathcal{D}\left((-B)^{\frac{1}{2}}\right) \times L^2(0,1)$ con la norma

$$\|z\|^2 = \left|(-B)^{\frac{1}{2}}u\right|^2 + |v|^2 = \int_0^1 \left(u_{xx}^2 + \frac{1}{2}a^2(1-x^2)u_x^2 + v^2\right) dx.$$

Proposición 3.2.2. *A es el generador de un C^0-semigrupo de contracciones en X y tiene resolvente compacto.*

Prueba:

El dominio del operador A esta dado por $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(-B) \times \mathcal{D}(-B)^{\frac{1}{2}}$. Sean $u, v \in \mathcal{D}(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle A(u,v),(u,v)\rangle &= \langle (v, Bu - 2\alpha v),(u,v)\rangle \\
&= \langle (-B)^{\frac{1}{2}}v, (-B)^{\frac{1}{2}}u\rangle + \langle Bu - 2\alpha v, v\rangle \\
&= \langle -Bv, u\rangle + \langle Bu, v\rangle - 2\alpha\langle v, v\rangle \\
&= -2\alpha|v|^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

lo que prueba que A es disipativo. Ahora veamos el resolvente de A, $\lambda \in \rho(A)$ si para todo $(f,g) \in X = \mathcal{D}\left((-B)^{\frac{1}{2}}\right) \times L^2(0,1)$, existe un único $(u,v) \in \mathcal{D}(A)$ tal que

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} \lambda u - v = f \\ -Bu + \lambda v + 2\alpha v = h. \end{cases}$$

Haciendo $v = \lambda u - f$, tenemos que

$$-Bu + \lambda(\lambda u - f) - 2\alpha(\lambda u - f) = h$$

$$-Bu + (\lambda + 2\alpha)\lambda u = h + (\lambda + 2\alpha)f.$$

Para $\lambda = \lambda_0 = 1$ tenemos que $-(1+2\alpha)$ no es un autovalor de $-B$. Luego $(-B+(1+2\alpha)I)^{-1}$ existe, entonces

$$\begin{cases} u = (-B + (1 + 2\alpha)I)^{-1}\,(h + (1 + 2\alpha)f) \\ v = \lambda(-B + (1 + 2\alpha)I)^{-1}\,(h + (1 + 2\alpha)f) - f. \end{cases}$$

Asi se tiene que para $\lambda = \lambda_0 = 1$, la imagen de $\lambda_0 I - A$ es X. Por el teorema 1.5.2 (Lumer–Phillips) se concluye que A es el generador de un C^0-semigrupo de contracciones de X.

El resolvente de A esta dado por

$$(A - \lambda I)^{-1} = \begin{bmatrix} -(2\alpha + \lambda) & -I \\ -B & -\lambda I \end{bmatrix} (\lambda(2\alpha + \lambda) - B)^{-1}. \tag{3.2.16}$$

Como todos los operadores de arriba conmutan, el operador $(A - \lambda I)^{-1}$ es un operador resolvente, como el operador $-B$ es autoadjunto definido positivo, concluímos que $(-B)^{-1}$ es compacto, por la proposición 3.2.1. Asi para $\lambda = 0$ en (3.2.16) se tiene

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2\alpha & -I \\ -B & 0 \end{bmatrix} (-B)^{-1},$$

es un operador compacto. Luego, por la identidad del resolvente tenemos que $\mathcal{R}(\lambda, A)$ es compacto para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Ahora consideremos a u como una solución de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial t} - Bu = 0 \tag{3.2.17}$$

donde $u(t)$ lo podemos escribir como

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n \tag{3.2.18}$$

donde $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de H tal que $\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

y φ_j son las autofunciones del operador $-B$ correspondientes a la sucesión de escalares $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ con $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \to \infty$ tal que

$$(-B)\varphi_j = \lambda_j \varphi_j.$$

Si $u(t)$ es solución de (3.2.17) entonces $u(t)$ escrito como en (3.2.18) satisface (3.2.17)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{u}_n(t) + 2\alpha \dot{u}_n(t) + \lambda_n u_n(t))\, \varphi_n = 0$$

como $\varphi_i \varphi_j = \delta_{ij}$, obtenemos que

$$\ddot{u}_n(t) + 2\alpha \dot{u}_n(t) + \lambda_n u_n(t) = 0 \tag{3.2.19}$$

resolviendo (3.2.19) por ecuaciones diferenciales odinarias, se tiene una ecuación característica de (3.2.19) de la forma

$$r^2 + 2\alpha r + \lambda_n = 0$$

cuyas raíces son

$$r_n^+ = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n} \qquad r_n^- = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \lambda_n}$$

resolviendo la ecuación diferencial ordinaria homogénea se tiene que

$$u_n(t) = \begin{cases} A_n e^{r_n^+ t} + B_n e^{r_n^- t} & , \text{ si } \ 0 < \lambda_n < \alpha^2 \\ (A_n + tB_n)\, e^{-\alpha t} & , \text{ si } \ \lambda_n = \alpha^2 \\ e^{-\alpha t}\left[A_n \cos\sqrt{\lambda_n - \alpha^2} t + B_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n - \alpha^2} t\right] & , \text{ si } \ \lambda_n > \alpha^2 \end{cases} \tag{3.2.20}$$

considerando las condiciones de frontera iniciales

$$u(0) = u_0, \dot{u}(0) = v_0$$
$$(u_n(0) = \langle u_0, \varphi_n \rangle, \dot{u}_n(0) = \langle v_0, \varphi_n \rangle)$$

los coeficientes estan dados por

i) $0 < \lambda_n < \alpha^2$, en este caso existen un número finito de n tales que $0 < \lambda_n \leq \alpha^2$ y

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\langle v_0, \varphi_n \rangle - r_n^- \langle u_0, \varphi_n \rangle}{r_n^+ - r_n^-} \\ B_n &= \frac{r_n^+ \langle u_0, \varphi_n \rangle - \langle v_0, \varphi_n \rangle}{r_n^+ - r_n^-} \end{aligned}$$

ii) $\lambda_n = \alpha^2$, tenemos

$$\begin{aligned} A_n &= \langle u_0, \varphi_n \rangle \\ B_n &= \langle v_0, \varphi_n \rangle + \alpha \langle u_0, \varphi_n \rangle \end{aligned}$$

iii) $\lambda_n > \alpha^2$, tenemos

$$\begin{aligned} A_n &= \langle u_0, \varphi_n \rangle \\ B_n &= \frac{\langle v_0, \varphi_n \rangle + \alpha \langle u_0, \varphi_n \rangle}{\sqrt{\lambda_n - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

En todos los casos los coeficientes A_n, B_n son acotados. Por lo tanto para $0 < \lambda_n < \alpha^2$, existen constantes $k > 0$, $0 < \beta \leq \alpha$, tales que

$$\left| e^{At} \right| \leq k e^{-\beta t}, t \geq 0$$

por otro lado, para $\lambda_n > \alpha^2$, existe una constante k_1 tal que

$$\left| e^{r_n^+ t} \right| \leq k_1 e^{-\alpha t} \qquad \left| e^{r_n^- t} \right| \leq k_1 e^{-\alpha t}.$$

Asi tenemos para $M = \max\{k, k_1\}$ y $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$ se tiene que

$$\left| e^{At} \right| \leq M e^{-\delta t},$$

lo cual muestra que las soluciones de la ecuación decaen exponencialmente.

Conclusiones

En la presente tesis se ha llegado a las siguientes conclusiones:

1. Se ha probado la existencia y unicidad de soluciones débiles del problema semilineal (2.3.12) cuando f es continua y uniformente de Lipschitz sobre el dominio del tiempo en los espacios de Banach, para esto se ha usado el teorema del punto fijo de Schauder; y A es un generador de un C^0-semigrupo de operadores fuertemente continuos.

2. Se ha estudiado una ecuación de evolución de segundo orden de la forma (3.1.1) demostrando la existencia de soluciones débiles en un espacio de Hilbert y el operador lineal es disipativo.

3. La segunda aplicación que se ha estudiado es el problema del movimiento de rotación de una barra flexible dada por la ecuación (3.2.5) para la cual se prueba la existencia, unicidad y dependencia continua de las soluciones débiles con decaimiento exponencial. Para lo cual se ha usado las propiedades de los semigrupos de operadores lineales de contracción con resolvente compacto.

4. Se ha obtenido resultados similares a los trabajos de Césari y Kannan [4], Halle–López [9], López [13], Lozada [14], R.J.Iório [16].

Bibliografía

[1] ÁLVARES F.& PEYPEOUQUET J. *Apuntes para la III Escuela de verano*, Univ. de Chile, 2003.

[2] BRÉZIS, H. *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*, Masson, Paris, 1983.

[3] CERÓN S. & LÓPEZ O. *α-contractions and attractors for dissipative semilinear hyperbolic equations and systems*, Annali di Matematica pura ed applicata, *CLX* (1991), pp. 193-206.

[4] CESARI L. & KANNAN R. *Solutions of nonlinear hyperbolic equations at resonance*, in Nonlinear analysis Theory, Methods and Applications, no. 8, Pergamon Press Ltd., 1982, pp. 751-805.

[5] ENGEL & NAGEL. *One-Parameter Simigroups for Linear Evolution Equations*, Springer-Verlag New York, Inc., 2000.

[6] ENGEL & NAGEL. *A short Course on Operator Semigroups*, 2005.

[7] GOLDSTEIN J. A. *Semigroups of LineaOperators and Aplications*, Oxford University Press, Inc. 1985, New York.

[8] GONÇALVES U. G. *Teoria de semigrupos e aplicações a equações impulsivas con retardamento dependendo do estado.* Dissertação apresentada ao Inst. de Matemática e de Computaçõa, Univ. São Carlos, 2006.

[9] HALLE J. & LÓPEZ O. *Fixed point theorem and dissipative processes*, J. Diff. Eq., 13 , 1973, pp. 391-402.

[10] HERNÁNDES M. E. *Teoria de Semigrupos e Aplicações a Equações funcionais Impulsivas*, São Carlos, 2003.