

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

**FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS**



CONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE PARETO CON MÉTODOS DE ESCALARIZACIÓN EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON DOS OBJETIVOS

TESIS PRESENTADA PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

Bach. Factor, RISCO GUILLEN

Asesor:

Prof. Juan Alfredo, HUAMANCHAQUI QUISPE

AYACUCHO-PERÚ

2021

No hay mejor escudo para el imbécil que el error del hombre honrado.

Alonso de Varros.

AGRADECIMIENTOS

Con la conclusión de este trabajo, dejo mis agradecimientos:

A la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, Facultad de Ingeniería Minas y Geología Civil y mi querida escuela profesional de Ciencias Físico-Matemáticas.

A mi asesor de tesis, profesor Juan Alfredo Huamanchaqui Quispe por la paciencia y dedicación que me brindó en este trabajo de tesis, al profesor Wilhem Pasarella por darme la iniciativa de este trabajo, así mismo a todos los profesores de la escuela profesional de Ciencias Físico Matemática por mi formación profesional.

A mi amigo Ruben Tomaylla Mendieta por su plena y permanente ayuda y a mis padres, Luciano y Paulina, por el ejemplo de motivación, cariño y apoyo incondicional, a mi esposa querida, Katherine Magaly por el apoyo en todo instante y a mi linda hija Haru Chiassa por el ejemplo de motivación y a mis hermanos, Nilcerio, Diana, por la ayuda e incentivo que me dieron para poder terminar este desafío.

RESUMEN

La investigación trata sobre Optimización Multi-objetivo. El problema es cómo construir el frente de Pareto conexo y no conexo, dado que el objetivo del presente estudio es determinar la construcción de frente de Pareto conexo y no conexo con los métodos de escalarización, donde existen condiciones necesarias y suficientes para la construcción de frente de Pareto. Presentamos los conceptos básicos, las condiciones de optimalidad y cuatro técnicas de escalarización para la construcción de soluciones de problemas de optimización con dos objetivos. Dos de esas técnicas, el Método de Sumas Ponderadas y Escalarización de Tchebychev son de amplio conocimiento en la área de optimización.

El Método de Escalarización de Tchebychev a lo Largo de Rayos, es una modificación de la Escalarización de Tchebychev y del Método de Restricción Ponderada, será discutido en detalles. Presentaremos las principales características de esas escalarizaciones, sus limitaciones y hacemos comparaciones con la utilización de los ejemplos numéricos para la construcción de frente de Pareto.

La investigación que se ha desarrollado es de tipo básica, nivel descriptivo, con diseño experimental pura y con enfoque de la investigación de tipo cualitativo, por que se busca comprender e interpretar el comportamiento de la construcción de frente de Pareto. Se concluye que los Métodos de Escalarización de Tchebychev a lo Largo de Rayos y Método de Restricción Ponderada son eficientes para la construcción de frente de Pareto, para los problemas de conexos y no conexos respectivamente.

Palabras clave: Optimización Multi-objetivo. Frente de Pareto. Punto Eficiente. Método de las Sumas Ponderadas. Escalarización de Tchebychev. Restricción Ponderada.

ABSTRACT

The research is about Multi-objective Optimization. The problem is how to construct the connected and unconnected Pareto front, since the objective of the present study is to determine the connected and unconnected Pareto front construction with scalarization methods, where there are necessary and sufficient conditions for the construction of front Pareto. We present the basic concepts, optimality conditions and four scalarization techniques for the construction of solutions of optimization problems with two objectives. Two of these techniques, the Tchebychev Scalarization and Weighted Sum Method, are widely known in the optimization area.

The Tchebychev Scalarization Method Along Rays, is a modification of the Tchebychev Scalarization and the Weighted Restriction Method, it will be discussed in details. We will present the main characteristics of these scalarizations, their limitations, and make comparisons with the use of numerical examples for the Pareto front construction.

The research that has been developed is of a basic type, descriptive level, with a pure experimental design and a qualitative research approach, because it seeks to understand and interpret the behavior of the Pareto front construction. It is concluded that the Tchebychev Scalarization Methods Along Rays and the Weighted Restriction Method are efficient for the Pareto front construction, for the connected and unconnected problems respectively.

Keywords: Multi-objective optimization. Pareto front. Efficient Point. Weighted Sum Method. Tchebychev scalarization. Weighted Constraint.

Índice general

AGRADECIMIENTOS	III
RESUMEN	IV
ABSTRACT	V
LISTA DE FIGURAS	VIII
LISTA DE SÍMBOLOS	X
INTRODUCCIÓN	1
I. CAPITULO I: MARCO TEÓRICO	4
1.1. Antecedentes	4
1.2. Bases Teóricas	5
1.3. Marco Conceptual	10
1.3.1. Preliminares	10
1.3.1.1. Condiciones de optimalidad	12
1.3.1.1.1. Condiciones de primera orden	12
1.3.1.1.2. Condiciones de segunda orden	17
1.3.1.2. Optimalidad por vía conos	18
1.3.2. Conceptos de la investigación	20
1.3.2.1. Conceptos básicos	20
1.3.2.1.1. Método de las sumas ponderadas	21
1.3.2.1.2. Método de escalarización de Tchebychev	25
1.3.2.2. Método de Tchebychev a lo largo de rayos	33
1.3.2.3. Método de restricción ponderada	38
II. CAPITULO II: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN	43
III. CAPITULO III: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	44
3.1. Resultados	44
3.2. Discusiones	64

Referencias Bibliográficas	66
A. MATRIZ DE CONSISTENCIA	68
*	

LISTA DE FIGURAS

0.1. Curva de phillips	2
1.1. Punto óptimo (débil) de Pareto, los puntos A y C son puntos óptimos débil de Pareto y el punto B es un punto óptimo de Pareto.	6
1.2. Ejemplo de minimización con un variable y dos objetivos.	7
1.3. Punto Ideal/Punto Utópico	8
1.4. Gráfico de las restricciones activas.	9
1.5. Conos en \mathbb{R}^2	10
1.6. Punto eficiente	11
1.7. Región factible X	13
1.8. Frente de Pareto	14
1.9. Ilustración de la ecuación (1.2) del Teorema 1.3.1	14
1.10. Dominancia de Pareto.	18
1.11. Dominancia vía cono.	19
1.12. Optimalidad de Pareto vía cono.	20
1.13. Gráfica de las sumas ponderadas con frente convexa.	22
1.14. Frente de Pareto convexa / Ejemplo 1.3.3.	22
1.15. Frente de Pareto no convexa	23
1.16. Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.4.	24
1.17. Problema linear	24
1.18. Frente de Pareto / Ejemplo 1.3.5.	25
1.19. Escalarización de Tchebychev.	26
1.20. Curva de nivel de la función $\max \{f_1, f_2\} = c$	26
1.21. Frente de Pareto convexa / Ejemplo 1.3.6.	29
1.22. Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.7.	29
1.23. Frente de Pareto convexa / Ejemplo 1.3.6.	30
1.24. Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.7.	30
1.25. Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.8.	31
1.26. Frente de Pareto no conexa / Ejemplo 1.3.9	32
1.27. Frente de Pareto no conexa / Ejemplo 1.3.10.	33
1.28. Frente de Pareto conexa.	36
1.29. Frente de Pareto no conexa.	37

1.30. Punto eficiente débil.	41
3.1. Puntos extremos de la solución.	46
3.2. Punto utópico / $u^* = f^* = (1, 0,73)$	46
3.3. Construcción de frente de Pareto.	47
3.4. Puntos extremos de la frente.	48
3.5. Punto utópico.	48
3.6. Construcción de frente de Pareto.	49
3.7. Puntos óptimos de Pareto.	49
3.8. Búsqueda de los puntos extremos de la frente.	50
3.9. Punto utópico.	50
3.10. Construcción de frente de Pareto.	51
3.11. Puntos óptimos de Pareto.	51
3.12. Puntos extremos de la frente.	52
3.13. Punto utópico.	53
3.14. Construcción de frente de Pareto.	53
3.15. Puntos óptimos de Pareto.	54
3.16. Frente de Pareto / Ejemplo 3.1.5.	56
3.17. Búsqueda de los puntos extremos de la frente.	57
3.18. Generación de puntos de Pareto para (P_W^1)	57
3.19. Generación de puntos de Pareto para (P_W^2)	58
3.20. puntos óptimos (débil) de Pareto.	58
3.21. puntos extremos del frente.	59
3.22. Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^1 y (P_w^2)	59
3.23. puntos extremos del frente de Pareto.	60
3.24. Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^1	61
3.25. Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^2	61
3.26. puntos óptimos (débil) de Pareto.	62
3.27. Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^1	62
3.28. Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^2	63
3.29. puntos óptimos (débil) de Pareto.	63

LISTA DE SÍMBOLOS

- X : Región factible
- H : Matriz Hessiana
- $s.a$: Sujeto a
- PF : Frente de Pareto
- W^+ : Pesos no negativos
- W^{++} : Pesos estrictamente positivo
- $J(x^*)$: Conjunto de los índices de las restricciones activas en el punto regular
- int : Interior
- (SP) : Suma ponderada
- (P) : Problemas de optimización multi-objetivos
- (ET) : Problemas de escalarización de Tchebychev
- inc : Incremento
- npp : Numero de puntos de Pareto
- μ^* : Punto utópico
- (TR) : Problemas de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos
- (P_w^k) : Problemas de restricción ponderada

INTRODUCCIÓN

Los más diversos problemas de áreas como Ingeniería, Economía, Física, Química, Computación y hasta Psicología son formulados como problemas de optimización. Optimización es una área de la Matemática que, dada una función f definida en un conjunto X , busca encontrar puntos de X que minimizan o maximizan f .

Los problemas de optimización pueden recibir diversas clasificaciones que trata de optimizar una función $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. En este trabajo, la formulación del problema será “es posible construir frente de Pareto conexo y no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos”, este tipo de problema es también llamado de optimización vectorial, con f una función vectorial.

- 1.- En el caso clásico de optimización mono-objetivo u optimización escalar, dada $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, busca puntos $x^* \in X$ tales que $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in X$ o $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in X$, es posible establecer el concepto de valor mínimo / máximo para la función a través del trabajo de la relación de orden existente cuando tratamos con números reales.
- 2.- En el caso multi-objetivo, debido a la inexistencia de relación de orden en \mathbb{R}^p , es preciso que se redefina la noción de valor mínimo / máximo para la función $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Esto es de hecho con la introducción del concepto de puntos eficientes u óptimo de Pareto. En este caso, se tiene un conjunto de óptimo, llamado frente de Pareto (o conjunto de Pareto) donde no hay una “mejor” solución más el que denominamos “trade-off” entre las soluciones encontradas en el sentido de que al elegir entre dos posibles soluciones de algún beneficio para sí tener alguna ganancia.

Una buena ilustración del que fue dicho es la curva de Phillips, que relaciona inflación con desempleo. Cualquier país estaría muy interesado en minimizar la inflación y el desempleo aún más, según la teoría propuesta por Phillips, en el corto plazo, esto no es posible.

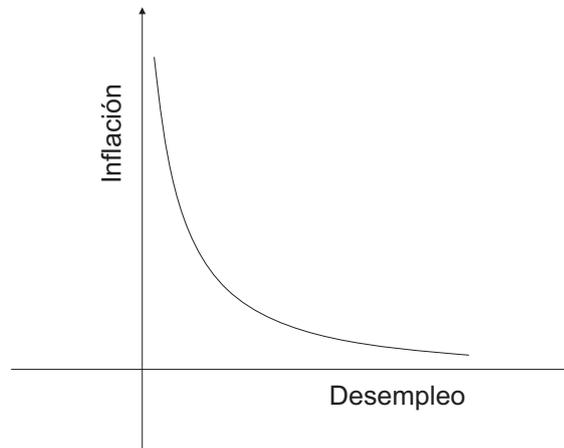
En lenguaje matemático, este problema se escribe como un problema con dos objetivos de la siguiente forma:

$$\text{minimizar} \{f_1(x), f_2(x)\}, x \in X$$

donde $f_1(x)$ proporciona la tasa de inflación, $f_2(x)$ la tasa de desempleo y $X \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto dado. De acuerdo con Phillips, la reducción de la inflación aumenta el desempleo y viceversa, es

decir, la curva de Phillips pone de manifiesto que no se puede conseguir al mismo tiempo baja inflación y alta empleo. La curva de Phillips tiene el siguiente aspecto:

Figura 0.1: Curva de phillips



minimizar $f_1(x)$ y minimizar $f_2(x)$ son conflictivas en el sentido de que al disminuir $f_1(x)$ aumenta $f_2(x)$ y viceversa. Cuando observamos la curva de Phillips (Figura 0.1), nos damos cuenta que tenemos infinitas soluciones para el problema y elegir la “mejor” solución dependerá de la disposición del gobierno en generar más inflación o más desempleo.

Un problema de optimización multi-objetivo general se escribe como

$$\text{minimizar} \{f_1(x), \dots, f_p(x)\}, x \in X \subset \mathbb{R}^n,$$

Se supone que haya conflicto entre las funciones f_1, \dots, f_p pues, caso contrario, el problema se reduce a la minimización de cada f_i separadamente que no requiere técnica especial.

En un problema de optimización multi-objetivo se busca construir una aproximación del frente de Pareto que, en general, es constituida de un número infinito de puntos; se utiliza métodos de escalarización que consiste en la construcción de una función escalar a partir de las funciones coordenadas f_1, \dots, f_p . El problema multi-objetivo se hace mono-objetivo con la utilización de la escalarización. Sin embargo, la construcción del conjunto de Pareto exigirá la solución de tantos problemas mono-objetivos surgiendo de la escalarización cuantas fueran los puntos definidos para aproximar el conjunto de Pareto.

El objetivo de este trabajo es “determinar la construcción de Frente de Pareto conexo y no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación” con las técnicas llamadas Escalarización de Tchebychev a lo Largo de Rayos, propuesta por Joydeep Dutta e C. Yalçın Kaya (Dutta and Kaya, 2011) y el Método de Restricción Ponderada, propuesta por R.S. Burachik, C.Y. Kaya, M.M. Rizvi (Burachik et al., 2014b).

Este trabajo contiene 3 capítulos, de los cuales marco teórico es el primero que son tratadas las definiciones básicas, las condiciones de optimalidad para el caso en que las funciones involucradas son diferenciables y conceptos de la investigación que son presentadas técnicas de escalarizaciones que son el método de las sumas ponderadas, escalarización de Tchebychev, Métodos de Escalarización de Tchebychev a lo Largo de Rayos y el método de restricción ponderada respectivamente. Veremos que el método de las sumas ponderadas solamente son aplicados a los problemas convexos, la escalarización de Tchebychev resuelve problemas conexos y no conexos. Notaremos también que ambos métodos pueden producir alteraciones en la frente de Pareto dependiendo de la forma como son implementados, el método escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos, trata de corregir tales distorsiones en todos los problemas conexos con la introducción de nuevas restricciones al método de Tchebychev y el aparecimiento de puntos que no son eficientes (u óptimos de Pareto) y por consiguiente como eliminar tales puntos no eficientes y el método de restricción ponderada, trata de corregir alteraciones de escalarización de Tchebychev y estudiaremos sobre las soluciones en los problemas no conexos que en el método de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos no admite resolver a los problemas no conexos. El capítulo 2 es la metodología de la investigación y finalmente en el capítulo 3 se presenta sobre resultados y discusiones.

Se concluye que este trabajo de investigación, determinó la construcción de frente de Pareto tanto como en los problemas conexos y no conexos con los métodos de escalarización para dos objetivos, analizó detalladamente a cada método con los ejemplos sencillos y se implementan algoritmos computacionales para resolución de problemas, en la cual se asumió que las funciones de restricciones y objetivos son continuamente diferenciables.

CAPITULO I: MARCO TEÓRICO

1.1. Antecedentes

Para demostrar que el tema tiene relevancia en la investigación se verificó algunos antecedentes en los medios virtuales e impresos de la siguiente forma.

Antecedentes internacionales

GUADALUPE (2020) “ Métodos de Escalarización en Optimización Multi-objetivo”. Este trabajo de tesis de licenciatura, estudia diferentes métodos de optimización para resolver problemas multi-objetivos para encontrar soluciones óptimas. Concluye sobre la efectividad de los distintos métodos estudiados con sus respectivas ventajas y desventajas, además concluyó que ningún método es superior que otro, es decir, que la selección de un método específico depende del tipo de información que proporciona el problema.

SOLEDA F.(2018) “Teoría y métodos para problemas de optimización multi-objetivo”. El objetivo principal de este trabajo de tesis doctoral es analizar la convergencia global del método Lagrangiano aumentativo clásico utilizando la condición de calidad de quasinormalidad de optimización escalar, para resolver problemas de optimización multi-objetivo.

OSSIAN (2009) “ Informaciones Trade-Off en Problemas de optimización multi-objetivo”. En este trabajo de tesis de maestría se concluye, que es posible resolver problemas de optimización multi-objetivos a través de métodos de optimización escalar, además después de resolver el problema se utiliza informaciones trade-off para decidir cual es mejor solución óptimo de Pareto.

Antecedentes nacionales

SEGUNDO(2018) “Un método de punto proximal escalarizado inexacto para minimización multi-objetivo cuasi-convexa”. El objetivo de esta investigación fue extender y determinar las condiciones de error y la velocidad de convergencia a su versión inexacta del método de punto proximal escalarizado para minimización multi-objetivo cuasi-convexa.

BERMEO (2010) “Programación Multi-objetivo Convexa”. En este trabajo de licenciatura se ha estudiado los diferentes conceptos y revisado la técnica de escalarización como “Suma

Ponderada” y también se analizó el método de mayor pendiente para optimización multi-objetivo.

1.2. Bases Teóricas

Definición 1.2.1 (El problema de optimización multi-objetivo). Se define de la siguiente forma

$$(P) \begin{cases} \text{minimizar} \{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \\ \text{s.a } x \in X. \end{cases}$$

Donde; la función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ es continua y el conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es, en general, dado por $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$ con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ continua y (P) es una notación que asignamos a un problema de optimización multi-objetivos.

Observación 1.2.1.

- La función f es llamada función objetivo, X es el conjunto viable o región factible, los vectores $x \in X$ son los vectores de decisión (variables) y la imagen del conjunto viable X por la función f , el conjunto $f(X)$, es la región objetivo viable o factible.
- Una vez maximizado una función f es equivalente a minimizar $-f$, en la investigación se asume que todas las funciones f_i deben ser minimizadas.
- En el contexto de optimización multi-Objetivo, la palabra minimizar significa que se desea minimizar todas las funciones coordenadas simultáneamente, si no existe conflicto entre ellas entonces la solución óptima podrá ser encontrada minimizando cada f_i separadamente.
- Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g(x) \leq 0$, para $x \in \mathbb{R}^n$,
 $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)) \leq 0$.
con, $g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0$ continuas.

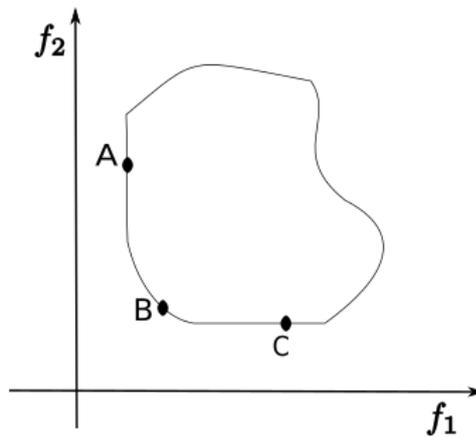
Definición 1.2.2 (Óptimo de Pareto). Un punto $x^* \in X$ se dice óptimo de Pareto (o eficiente) si no existe otro punto $x \in X$ tal que existe $f_i(x) \leq f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, p$ y $f_j(x) < f_j(x^*)$ para algún $j \in \{1, \dots, p\}$.

Observación 1.2.2. Un punto óptimo de Pareto produce una solución tal que mejora un objetivo implica en empeorar algún otro objetivo.

Definición 1.2.3 (Óptimo débil de Pareto). Un punto $x^* \in X$ se dice óptimo débil de Pareto (o eficiente débil) si no existe otro punto $x \in X$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$, $\forall i = 1, \dots, p$.

Observación 1.2.3. Un punto óptimo débil de Pareto produce una solución tal que se puede mejorar un objetivo sin empeorar otro.

Figura 1.1: Punto óptimo (débil) de Pareto, los puntos A y C son puntos óptimos débil de Pareto y el punto B es un punto óptimo de Pareto.



Observación 1.2.4. Es fácil verificar que todo óptimo de Pareto es también óptimo débil de Pareto. En efecto, sea $x^* \in X$ un punto óptimo de Pareto, entonces, para todo $x \in X$ existe un índice $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $f_j(x) > f_j(x^*)$, por tanto, no existe $x \in X$ tal que $f_j(x) < f_j(x^*)$, $\forall j \in \{1, \dots, p\}$, luego, x^* es un punto óptimo débil de Pareto.

Ejemplo 1.2.1.

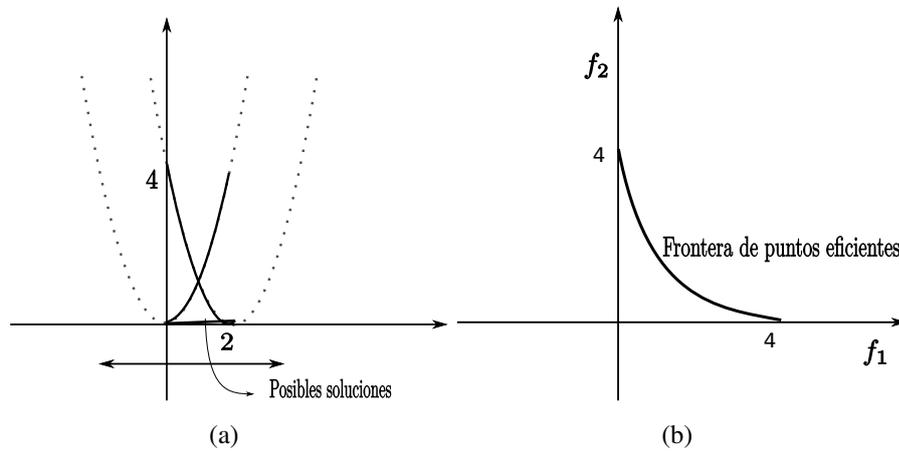
Sea un problema con una única variable y dos funciones objetivos:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \{f_1(x) = x^2, f_2(x) = (x - 2)^2\} \\ &\text{s.a } x \in [-2, 3]. \end{aligned}$$

Tabulando se tiene,

x	-2	-1	0	1	2	3
f_1	4	1	0	1	4	9
f_2	16	9	4	1	0	1

Figura 1.2: Ejemplo de minimización con un variable y dos objetivos.



Fuente: Otimização multiobjetivo e análise de sensibilidade para concepção de dispositivos (Ávila et al., 2006).

El problema consiste en la minimización de las funciones objetivos simultáneamente. La figura 1.2(a) muestra las funciones y las posibles soluciones de x^* en el intervalo $[0, 2]$. Por consiguiente, la figura 1.2(b) presenta funciones objetivos, formando frontera de solución.

El resultado del problema es un grupo de soluciones óptimas x^* , que pertenece a un intervalo $[0, 2]$. Así en el ejemplo dado, se puede optar por escoger la solución que minimiza simultáneamente, de esta forma, para $x = 1$, tenemos $f_1(1) = 1$ y $f_2(1) = 1$. Por lo tanto $x = 1$ es un punto óptimo de Pareto.

En los problemas de optimización multi-objetivo X no puede, en general, ser totalmente ordenado, sino apenas ordenado parcialmente. Esto porque f es una función vectorial como en (P) . Sea $a, b \in \mathbb{R}^p$, tales que:

$$a \leq b \Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, p \text{ y } \exists j \text{ tal que } a_j < b_j.$$

$$a < b \Leftrightarrow a_i < b_i \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Definición 1.2.4 (Frente de Pareto). El subconjunto $PF \subset f(X)$ formado por los puntos $z = f(x^*)$ donde x^* es un punto óptimo de Pareto o un óptimo débil de Pareto es llamado conjunto de Pareto o frente de Pareto. Es decir,

$$PF = \{z = f(x^*)/x^* \text{ un punto óptimo de Pareto o óptimo débil de Pareto}\}$$

Observación 1.2.5. En la figura (b) del ejemplo 1.2.1 se puede dar cuenta claramente una curva con negrita, que es frente de Pareto formado de conjunto de puntos correspondientes de óptimo (débil) de Pareto.

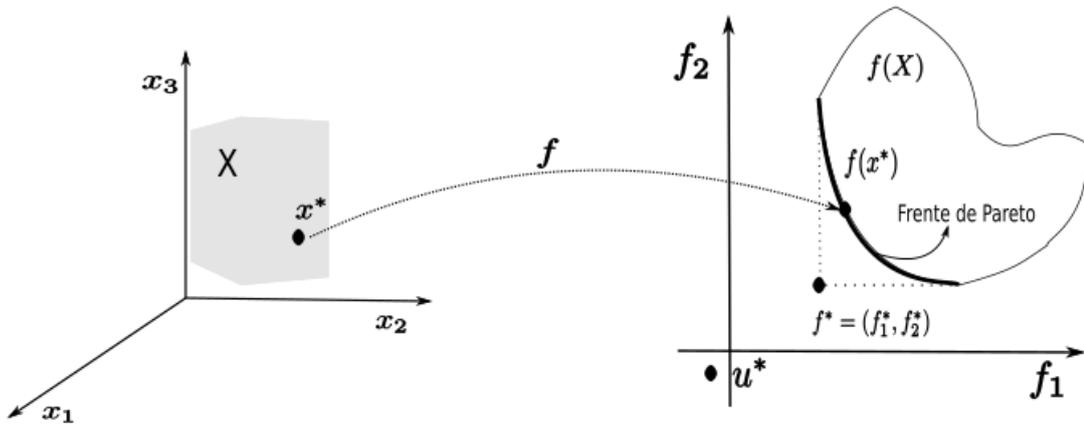
Definición 1.2.5 (Punto ideal). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$, entonces el punto $f^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_p^*)$ donde $f_i^* = \min_{x \in X} f_i(x)$, $i = 1, \dots, p$, es llamado punto ideal.

Observación 1.2.6. Punto ideal está formado con los puntos extremos de frente de Pareto, podemos ver en la figura (b) del ejemplo 1.2.1, es decir, el punto $(0, 0)$ es un punto ideal y también podemos ver gráficamente como en la Figura 1.3.

Definición 1.2.6 (Punto utópico). Sea $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$.

El punto $u^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_p^*) \in \mathbb{R}^p$ tal que $u_i^* = f_i^* - \epsilon_i$ donde $\epsilon_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, es llamado punto utópico.

Figura 1.3: Punto Ideal/Punto Utópico



Definición 1.2.7. El conjunto de pesos no negativos es definido de la siguiente forma:

$$W^+ = \{w \in \mathbb{R}^p \mid w_i \geq 0, \sum_{i=1}^p w_i = 1\}$$

$$W^{++} = \{w \in \mathbb{R}^p \mid w_i > 0, \sum_{i=1}^p w_i = 1\}$$

- W^+ es el conjunto de $\{\mathbb{R}_+ \cup \{0\}\}$ normalizados.
- W^{++} , conjunto de \mathbb{R}_+ estrictamente positivos y normalizados.

Definición 1.2.8 (Conjunto convexo). $X \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, si $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$ entonces $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$.

Definición 1.2.9 (Función convexa / función cóncava). Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo.

La función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa, si $x, y \in X$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Una función f es cóncava si $-f$ es convexa.

Definición 1.2.10. El problema de optimización multi-objetivo se dice convexo si el conjunto factible X es convexo y las funciones coordenadas $f_i, i = 1, \dots, p$, son convexas.

Definición 1.2.11 (Restricciones activas). Una restricción de desigualdad g_j se dice activa en el punto x^* si $g_j(x^*) = 0$.

El conjunto de los índices de las restricciones activas en x^* será definido por:

$$J(x^*) = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid g_j(x^*) = 0\} \quad (1.1)$$

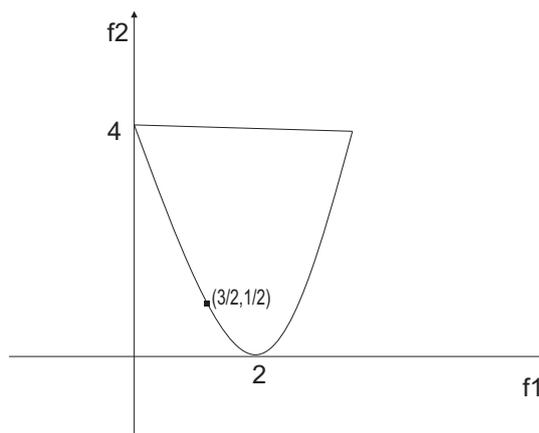
Ejemplo 1.2.2. Sea

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \{x_1, x_2\} \\ &\text{s.a } (x_1 - 2)^2 - x_2 \leq 0 \\ &\quad x_2 - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Sea $x^* = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ una de las tantas soluciones de este ejemplo, donde las restricciones son, $g_1(x) = (x_1 - 2)^2 - x_2 \leq 0$ y $g_2(x) = x_2 - 4 \leq 0$, luego, reemplazando con x^* en cada uno de las restricciones resulta $g_1(x^*) = 0$ y $g_2(x^*) \neq 0$.

Por tanto $g_1(x^*)$ es una restricción activa. Es decir, $J(x^*) = \{1 \in \{1, 2\} \mid g_1(x^*) = 0\}$.

Figura 1.4: Gráfico de las restricciones activas.



Definición 1.2.12 (Punto regular). Un punto $x^* \in X$ es un punto regular si los gradientes $\nabla g_j(x^*)$ con $j \in J(x^*)$, fueran linealmente independientes.

Observación 1.2.7. El punto $(\frac{3}{2}, \frac{1}{4})$ del ejemplo 1.2.2, es regular, porque la gradiente de $g_1(x^*)$, $\nabla g_1(x^*) = (-1, -1)$, es linealmente independiente.

Definición 1.2.13. Un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ se dice cono si $x \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda x \in C$.

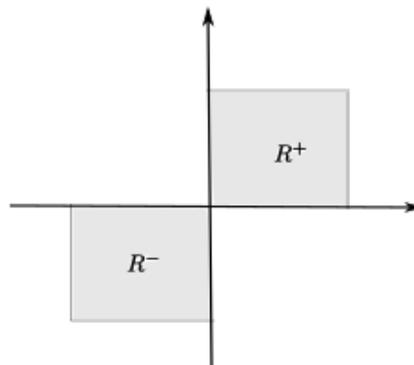
Ejemplo 1.2.3. Los conjuntos

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\} \quad y$$

$$\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}$$

son conos, pues forman un vértice de conos en el origen de las ejes coordenadas.

Figura 1.5: Conos en \mathbb{R}^2



1.3. Marco Conceptual

1.3.1. Preliminares

El problema de optimización mono-objetivo

El problema de optimización mono-objetivo consiste de los problemas con un solo objetivo con o sin restricciones, es decir, existe una única función a optimizar y encontrar los valores máximos o mínimos de una función entre todas las soluciones factibles del problema.

Definición 1.3.1. Dado el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ \text{s.a } &x \in X \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- La función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, es continua y el conjunto X es, en general, dado por $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ con $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ continuamente diferenciables.

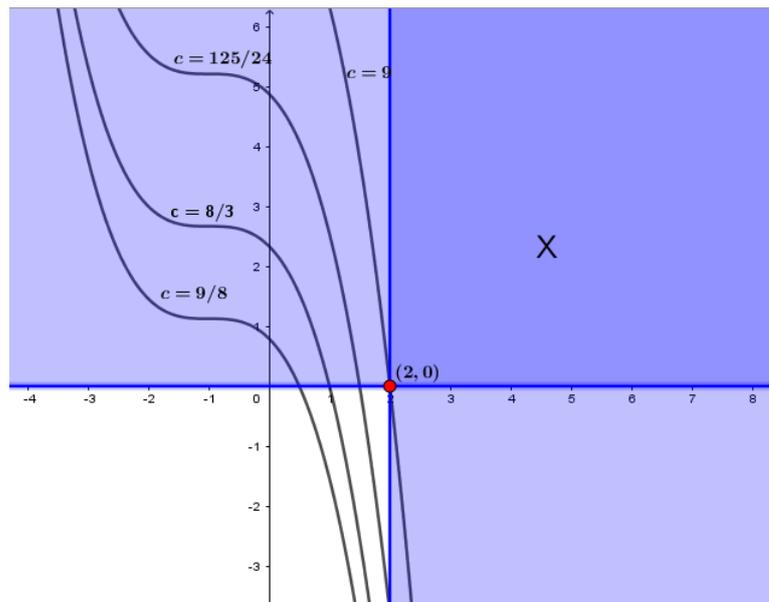
- Las soluciones óptimas en problemas de optimización mono-objetivos pueden ser totalmente ordenados de acuerdo con la función f . Es decir, sean dos soluciones $\vec{u}, \vec{v} \in X$ tal que $f(\vec{u}) \geq f(\vec{v})$ o $f(\vec{u}) \leq f(\vec{v})$.

Ejemplo 1.3.1. Sea el siguiente problema de optimización mono-objetivo con función objetivo $f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(x_1 + 1)^3 + x_2$ y sus restricciones $g_1(x_1, x_2) = 2 - x_1$ y $g_2(x_1, x_2) = x_2$, tenemos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \left\{ \frac{1}{3}(x_1 + 1)^2 + x_2 \right\} \\ \text{s.a} \quad &2 - x_1 \leq 0 \\ &x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

En efecto, podemos buscar la solución, considerando la función objetivo $f(x_1, x_2) = c$ como curvas de nivel y utilizando el programa Geogebra para ver gráficamente, tenemos para $c = \frac{9}{8}, \frac{8}{3}, \frac{125}{24}$ y 9. Por lo tanto, cuando $c = 9$ el punto $(2, 0)$ es el mínimo punto del problema mono-objetivo, dado que X es la región objetivo factible y para más detalles podemos ver la siguiente figura 1.6.

Figura 1.6: Punto eficiente



1.3.1.1. Condiciones de optimalidad

En este trabajo, abordaremos apenas las condiciones de optimalidad para el problema de optimización multi-objetivo en que todas las funciones involucradas son diferenciables. Condiciones de optimalidad para problemas no diferenciables se pueden encontrar en (Miettinen, 1998).

1.3.1.1.1 Condiciones de primera orden

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \{f_1(x), \dots, f_p(x)\} \\ & \text{s.a. } x \in X \end{aligned}$$

donde $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T \leq 0\}$ y, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, p$ y $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ son funciones continuamente diferenciables en \mathbb{R}^n .

Observación 1.3.1. Las primeras condiciones de optimalidad para problemas del tipo (P) fueron obtenidas por Fritz John en 1948 y posteriormente por Kuhn e Tucker. Más tarde fue descubierto que las condiciones de Kuhn-Tucker ya se había establecida en 1939 por William Karush. Así tales condiciones de optimalidad pasaron, a ser llamadas condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

Teorema 1.3.1 (Condiciones necesarias de primera orden de Fritz John). Sea $x^* \in X$ un punto óptimo de Pareto. Entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}^p$ y $\mu \in \mathbb{R}^m$, $\lambda, \mu \geq 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (1.2)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (1.3)$$

Observación 1.3.2. En la condición necesaria de Fritz-John puede ser que uno o hasta todos los multiplicadores asociados a las funciones objetivos sean nulos. Caso algún multiplicador λ_i sea nulo, la información proporcionado por el ∇f_i no aparecerá en la condición (1.2). Para que tenga garantía la positividad de λ , alguna condición de regularidad debe ser admitida. Existen diversas condiciones de regularidad conocidas como calificaciones de las restricciones, que presentaremos en la siguiente definición.

Ejemplo 1.3.2. Vamos ilustrar el Teorema 1.3.1 con el siguiente problema de optimización biobjetivo,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \{f_1(x, y) = x, f_2(x, y) = y\} \\ \text{s.a } &g_1(x, y) = x - \frac{1}{2} \leq 0 \\ &g_2(x, y) = y - \frac{1}{2} \leq 0 \\ &g_3(x, y) = 1 - 2x - 2y \leq 0. \end{aligned}$$

Tenemos los gradientes de las siguientes funciones f_1, f_2, g_1, g_2 y g_3

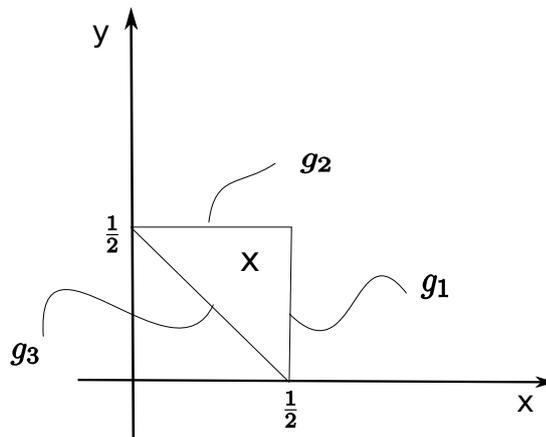
$$\begin{aligned} \nabla f_1(x, y) &= (1, 0) \\ \nabla f_2(x, y) &= (0, 1) \\ \nabla g_1(x, y) &= (1, 0) \\ \nabla g_2(x, y) &= (0, 1) \\ \nabla g_3(x, y) &= (-2, -2) \end{aligned}$$

y la región factible X es el conjunto definido por:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}, 2x + 2y \geq 1\}.$$

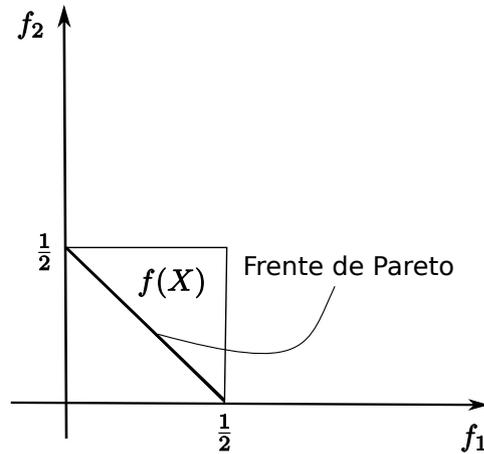
Para mayor comprensión tenemos gráficamente, la región factible,

Figura 1.7: Región factible X



Tenemos gráficamente, solución del frente de Pareto del ejemplo 1.3.2 que es la recta definida por $2x + 2y = 1$.

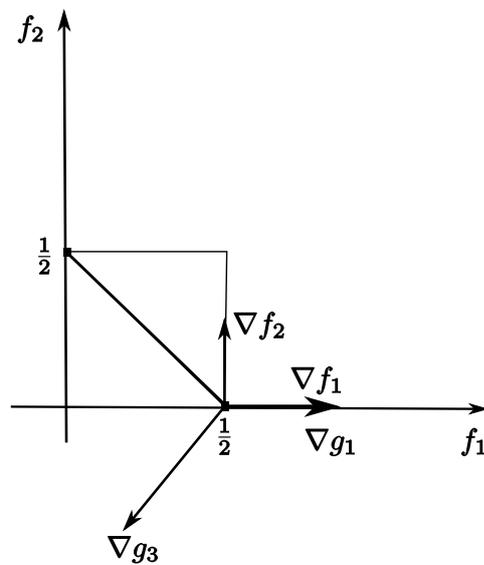
Figura 1.8: Frente de Pareto



La figura 1.9 ilustra la ecuación (1.2) del Teorema 1.3.1 en el punto $(\frac{1}{2}, 0)$, se tiene,

$$\begin{aligned} \nabla L(x, \lambda, \mu) &= 1 \cdot \nabla f_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) + 2 \cdot \nabla f_2\left(\frac{1}{2}, 0\right) + 1 \cdot \nabla g_1\left(\frac{1}{2}, 0\right) + 1 \cdot \nabla g_3\left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ &= 1 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (-2, -2) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

Figura 1.9: Ilustración de la ecuación (1.2) del Teorema 1.3.1



Teorema 1.3.2 (Teorema de Motzkin). Sean las matrices A y B .
Entonces, o bien el sistema de desigualdades descrito por:

$$Ax < 0 \quad y \quad Bx \leq 0$$

tiene solución x , o bien la tiene el sistema descrito por:

$$A^T \lambda + B^T \mu = 0, \lambda \geq 0, \lambda \neq 0, \mu \geq 0$$

tiene solución (λ, μ) , pero nunca ambos sistemas.

Demostración 1.3.1.

- Cuando se verifica la primera alternativa, obtendríamos como sigue

$$x^T A^T \lambda + x^T C^T \mu < 0$$

ya que

$$x^T A^T \lambda < 0, \quad x^T C^T \mu \leq 0, \lambda \neq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0$$

pero $x^T (A^T \lambda + C^T \mu) < 0$

lo que obliga a que

$$A^T \lambda + C^T \mu \neq 0$$

De ahí que la alternativa segunda no pueda verificarse.

- Veamos ahora que si no verifica la segunda alternativa se verifica la primera:
Si el sistema

$$A^T \lambda + C^T \mu = 0 \quad \text{con} \quad \lambda, \mu \geq 0$$

tiene solución.

Al no poderse verificar segunda parte, tendremos que: $\lambda = 0$

y por álgebra lineal sabemos que,

$B = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ e $\Gamma = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ obtenemos que, como A no es nula, los sistemas:

$$Ax < 0, Cx \leq 0$$

y

$$A^T \lambda + C^T \mu = 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0$$

poseen soluciones x, λ, μ satisfaciendo $Ax + \lambda < 0$ y $Cx + \mu < 0$,

pero como $\lambda = 0$ resulta que

$Ax < 0$ y por tanto, se verifica el primer sistema.

Definición 1.3.2. Supongamos que las funciones de restricción $g_j, j = 1, \dots, m$, que aparecen en (P) sean continuamente diferenciables en $x^* \in X$.

El problema (P) satisface la calificación de las restricciones de Kuhn-Tucker en x^* si para cualquier $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla g_j(x^*)d \leq 0, j \in J(x^*)$, existen una curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en 0 y algún escalar $a \in \mathbb{R}_+$ tales que:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= x^* \\ g(\alpha(t)) &\leq 0, \forall t \in [0, 1] \text{ y} \\ \alpha'(0) &= ad.\end{aligned}$$

Tomando en consideración la calificación de las restricciones de Kuhn-Tucker, se puede garantizar que $\lambda \neq 0$ conforme al siguiente teorema

Teorema 1.3.3 (Condiciones necesarias de primer orden de Karush-Kuhn-Tucker). Si $x^* \in X$ es un punto óptimo de Pareto y (P) satisface la calificación de las restricciones de Kuhn-Tucker entonces el Teorema 1.3.1 vale con $\lambda \neq 0$.

Demostración 1.3.2. Sea $x^* \in X$ óptimo de Pareto.

Vamos aplicar el teorema. En virtud de ello, probamos que no existe ningún $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla f_i(x^*)^T d < 0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (1.4)$$

$$\nabla g_j(x^*)^T d \leq 0 \quad \forall j \in J(x^*). \quad (1.5)$$

Consideremos, por contradicción que existe algún $d^* \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo las ecuaciones (1.4) y (1.5).

Entonces, por la definición de la calificación de restricción de kuhn-tucker, sabemos que existe una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable en el punto 0 y algún escalar $a \in \mathbb{R}^+$ tal que $\alpha(0) = x^*, g(\alpha(t)) \leq 0 \forall 0 \leq t \leq 1$ y $\alpha'(0) = ad^*$.

Luego la función f_i son continuamente diferenciable, podemos aproximar linealmente como,

$$\begin{aligned}f_i(\alpha(t)) &= f_i(x^*) + \nabla f_i(x^*)^T(\alpha(t) - x^*) + \|\alpha(t) - x^*\|\varphi(\alpha(t), x^*) \\ &= f_i(x^*) + \nabla f_i(x^*)^T(\alpha(t) - \alpha(0)) + \|\alpha(t) - \alpha(0)\|\varphi(\alpha(t), \alpha(0)) \\ &= f_i(x^*) + t \nabla f_i(x^*)^T \left(\frac{\alpha(0+t) - \alpha(0)}{t} \right) + \|\alpha(t) - \alpha(0)\|\varphi(\alpha(t), \alpha(0)),\end{aligned}$$

donde, $\varphi(\alpha(t), \alpha(0)) \rightarrow 0, \|\alpha(t) - \alpha(0)\| \rightarrow 0$.

Cuando $t \rightarrow 0, \left(\frac{\alpha(0+t) - \alpha(0)}{t} \right) \rightarrow \alpha'(0) = ad^*$.

Así, $f_i(\alpha(t)) = f_i(x^*) + t \nabla f_i(x^*)^T ad^*$, luego utilizando la suposición

$\nabla f_i(x^*)^T d^* < 0$ para todo $i = 1, \dots, p$ y $t \geq 0$, tenemos, $\frac{f_i(\alpha(t)) - f_i(x^*)}{ta} = \nabla f_i(x^*)^T d^* < 0$,

$\forall i = 1, \dots, p$ para un t suficientemente pequeño.

Después, $f_i(\alpha(t)) - f_i(x^*) < 0$, se sigue que, $f_i(\alpha(t)) < f_i(x^*)$

Por lo tanto, contradice que x^* no es un punto óptimo de Pareto.

Así, llegamos a probar las ecuaciones (1.4) y (1.5).

Ahora aplicando Teorema de Motzkin que $\exists \lambda_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, p, \lambda \neq 0$ y $\mu_j \geq 0$ para $j \in J(x^*)$ tal que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j \in J(x^*)} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

obteniendo la ecuación 1.2 del Teorema 1.3.1 conformando $\mu_j = 0, j \in \{1, \dots, m\} \setminus J(x^*)$.

Si $g_j(x^*) < 0$ para algún $j = 1, \dots, m$, entonces de acuerdo con el anterior resultado sigue que $\mu_j = 0$ de la ecuación 1.3 de Teorema 1.3.1. Ver (Miettinen, 1998).

Si (P) es un problema convexo, entonces las condiciones de primera orden de Karush-Kuhn-Tucker son también suficientes, conforme al siguiente teorema.

Teorema 1.3.4 (Condiciones suficientes de Karush-Kuhn-Tucker para problemas convexos). Suponga que $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_m$ sean convexas y continuamente diferenciable en $x^* \in X$. Si existen,

$0 < \lambda \in \mathbb{R}^p$ y $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (1.6)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (1.7)$$

entonces x^* es óptimo de Pareto.

1.3.1.1.2 Condiciones de segunda orden

Sean $f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_m$ dos veces continuamente diferenciables en el punto regular $x^* \in X$.

Teorema 1.3.5 (Condición necesaria de segunda orden). Sea el punto regular $x^* \in X$ eficiente, entonces existen $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^p, \lambda \neq 0$ y $0 \leq \mu \in \mathbb{R}^m$ tales que:

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (1.8)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (1.9)$$

$$d^T \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i H f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j H g_j(x^*) \right) d \geq 0. \quad (1.10)$$

$$\forall d \in \{0 \neq d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f_i(x^*)^T d \leq 0 \forall i = 1, \dots, p, \nabla g_j(x^*)^T d = 0 \forall j \in J(x^*)\}.$$

Teorema 1.3.6 (Condición suficiente de segunda orden). Sean $x^* \in X$, $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}^p$ tales que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ y

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0 \quad (1.11)$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (1.12)$$

$$d^T \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i H f_i(x^*) + \sum_{j=1}^m \mu_j H g_j(x^*) \right) d > 0. \quad (1.13)$$

para $d \in \{0 \neq d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f_i(x^*)d \leq 0, i = 1, \dots, p, \nabla g_j(x^*)d, j \in J(x^*)\}$ o $d \in \{0 \neq d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(x^*)d = 0, j \in J^+(x^*), \nabla g_j(x^*)d \leq 0, j \in J(x^*) - J^+(x^*)\}$ donde $J^*(x^*) = \{j \in J(x^*) \mid \mu_j > 0\}$. Entonces, el punto regular $x^* \in X$ es óptimo de Pareto.

1.3.1.2. Óptimalidad por vía conos

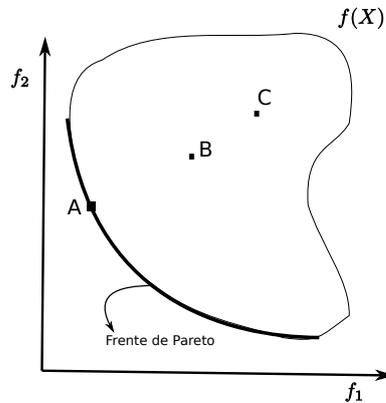
Veremos ahora como usar el concepto de cono en las caracterizaciones de los puntos óptimos de Pareto. El uso de conos es bastante útil del punto de vista geométrico conociendo la región objetivo factible, la identificación del frente de Pareto queda bastante simple con el uso de conos.

Definición 1.3.3. Sean $x, y \in X$. Diremos que x domina y , denotado por $x \prec y$, cuando $f_i(x) \leq f_i(y)$, $i = 1, \dots, p$ y existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tal que $f_j(x) < f_j(y)$.

Observación 1.3.3. Si $x^* \in X$ es un óptimo de Pareto, entonces no existe $x \in X$ tal que x domine x^* , o sea, puntos óptimos de Pareto son aquellos que no son dominados por ningún otro punto del conjunto factible.

La figura 1.10 ilustra la Definición 1.3.3.

Figura 1.10: Dominancia de Pareto.



En la figura 1.10, observamos que A domina B , B domina C y A domina C . Es decir, $A \prec B$, $B \prec C$ y $A \prec C$, respectivamente. Luego, sean $A = f(x)$, $B = f(y)$ y $C = f(z)$ con $x, y, z \in X$ donde X es el conjunto factible. De esta forma, notamos que $x \prec y$, $x \prec z$ e $y \prec z$.

Ahora, consideramos, el cono $C = \mathbb{R}_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_i \leq 0, i = 1, \dots, n\}$ y es fácil ver que los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $x \prec \bar{x}$ son aquellos que $f(x) - f(\bar{x}) \in C$.

En efecto, sean

$$y = f(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n)$$

donde,

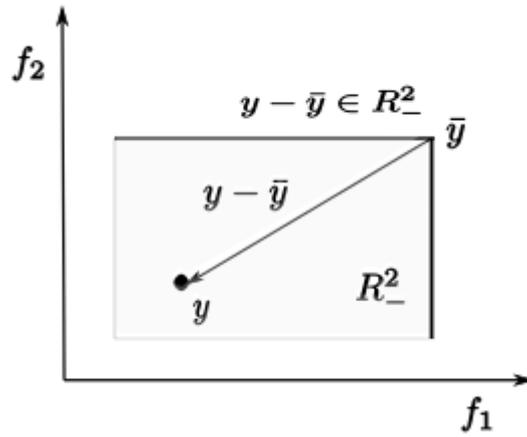
$$y_i = f_i(x), i = 1, \dots, n$$

$$\bar{y}_i = f_i(\bar{x}), i = 1, \dots, n.$$

Ahora, $x \prec \bar{x}$ significa que $y_i \leq \bar{y}_i, i = 1, \dots, n$ y existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $y_j < \bar{y}_j$.

Sigue que $y_i \leq \bar{y}_i, \forall i = 1, \dots, n$ o, equivalentemente, $y_i - \bar{y}_i \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$, implica $f(x) - f(\bar{x}) \in C$.

Figura 1.11: Dominancia vía cono.



En seguida definiremos óptimos de Pareto por vía conos.

Definición 1.3.4. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$

1. Un punto $x^* \in X$ es óptimo de Pareto si

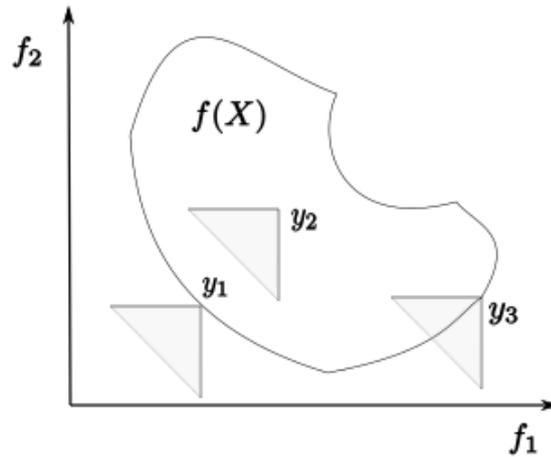
$$\{f(x^*) + (\mathbb{R}_-^n - \{0\})\} \cap f(X) = \phi \quad (1.14)$$

2. Un punto $x^* \in X$ es óptimo débil de Pareto si

$$\{f(x^*) + \text{int}(\mathbb{R}_-^n)\} \cap f(X) = \phi. \quad (1.15)$$

Para utilizar la Definición 1.3.4 en la identificación de eficiencia se tiene. Dado un punto $y = f(x)$ en la región objetivo factible y se verifica la condición (1.14). La figura 1.12 muestra como puede ser geoméricamente.

Figura 1.12: Optimalidad de Pareto vía cono.



Observando la Figura 1.12, se tiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{y_1 + (\mathbb{R}_-^2 - \{0\})\} \cap f(X) &= \phi \\ \{y_2 + (\mathbb{R}_-^2 - \{0\})\} \cap f(X) &\neq \phi \\ \{y_3 + (\mathbb{R}_-^2 - \{0\})\} \cap f(X) &\neq \phi \end{aligned}$$

Sean, $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ e $y_3 = f(x_3)$.

Combinando las figuras 1.11 e 1.12, vemos que los puntos $x \in X$ que dominan x_1 satisfacen $f(x) \notin f(X)$. Por tanto, x_1 es un punto óptimo de Pareto. Por otro lado, existen $\bar{x}, \tilde{x} \in X$ tales que $\bar{x} < x_2$ y $\tilde{x} < x_3$ con $f(\bar{x}), f(\tilde{x}) \in f(X)$. Luego, x_2 y x_3 no son puntos óptimos de Pareto.

1.3.2. Conceptos de la investigación

1.3.2.1. Conceptos básicos

Problemas multi-objetivos en general son resueltos a través del proceso de escalarización que consiste en optimizar una función escalar obtenida a partir de las funciones coordenadas f_1, f_2, \dots, f_p .

En esta sección presentamos dos métodos de escalarización que son el método de las sumas ponderadas y el método de escalarización de Tchebychev.

El método de las sumas ponderadas fue uno de los primeros a surgir para la solución de problemas multi-objetivos. Este método tiene la desventaja de no producir toda la frente de Pareto

cuando esta no sea convexa. Incluso si el frente de Pareto es convexo, esta situación puede ocurrir si el problema es lineal, como se muestra en el ejemplo 1.3.5 y el método de Tchebychev puede ser aplicado en problemas que son convexos y no convexos, pero tiene la desventaja de producir funciones escalares no diferenciables cuando el problema original es diferenciable. Vamos a describir ejemplos que muestran que ambos métodos pueden producir alteraciones en los frentes de Pareto debido a la concentración de puntos de Pareto en un pedazo del frente.

1.3.2.1.1 Método de las sumas ponderadas

Este método consiste en asignar coeficientes (pesos) a las funciones f_1, f_2, \dots, f_p para obtener la función escalar y así minimizar.

Sean w_1, w_2, \dots, w_p tales que $w_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \sum_{i=1}^p w_i = 1$.

El problema (P) será transformado en

$$(SP) \begin{cases} \text{minimizar} & w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + \dots + w_p f_p(x) \\ \text{s.a} & x \in X \end{cases}$$

Teorema 1.3.7. Dado $(w_1, w_2, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p$ con $w_i \geq 0, i = 1, \dots, p$ y $\sum_{i=1}^p w_i = 1$, la solución correspondiente de (SP) es óptimo débil de Pareto.

Demostración 1.3.3. Sea $x^* \in X$ una solución de (SP) .

Suponga que x^* no es un óptimo débil de Pareto. Por consiguiente, existe una solución $x \in X$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*) \forall i = 1, \dots, p$.

Dado que los coeficientes de ponderación $w_i > 0$ al menos un i , tenemos la ecuación siguiente,

$$\sum_{i=1}^p w_i f_i(x) < \sum_{i=1}^p w_i f_i(x^*)$$

Entonces, es una contradicción a la suposición que x^* es una solución de (SP) .

Por lo tanto, x^* es un óptimo débil de Pareto. Para más detalles pueden ver (Miettinen, 1998).

Teorema 1.3.8. Si $w_i > 0, i = 1, \dots, p$, entonces la solución de (SP) son óptimos de Pareto.

Demostración 1.3.4. Sea $x^* \in X$ una solución de (SP) con $w > 0$.

Consideremos que x^* no es un óptimo de Pareto. Entonces existe una solución $x \in X$ tal que $f_i(x) \leq f_i(x^*) \forall i = 1, \dots, p$ y existe $f_j(x) < f_j(x^*)$ para al menos una j .

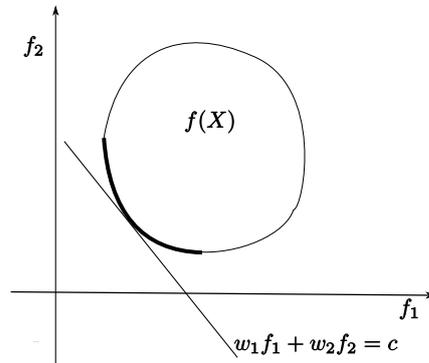
Tenemos, desde $w_i > 0 \forall i = 1, \dots, p$

$$\sum_{i=1}^p w_i f_i(x) < \sum_{i=1}^p w_i f_i(x^*).$$

Por lo tanto, contradice a la suposición que x^* es una solución de (SP) y así, x^* es un óptimo de Pareto. Para más información (Miettinen, 1998).

La Figura 1.13 ilustra el método de las sumas ponderadas con frente de Pareto convexo.

Figura 1.13: Gráfica de las sumas ponderadas con frente convexa.



Ejemplo 1.3.3. Ilustramos el método de las sumas ponderadas, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo, cuya frente sea convexa

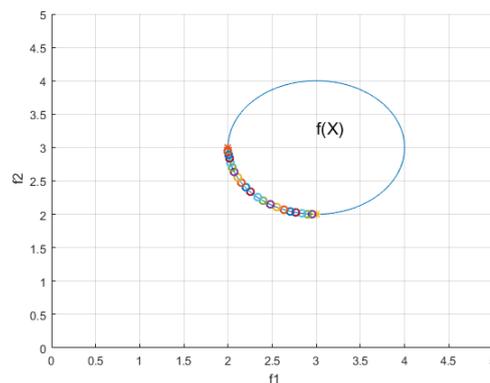
$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \{f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2\} \\ &s.a \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Utilizando el programa Matlab solucionamos para un número de puntos de Pareto ($npp = 20$) con incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), la variación $i = 1, \dots, npp$ y con los pesos normalizados como:

$$w_1 = i * inc, w_2 = 1 - w_1.$$

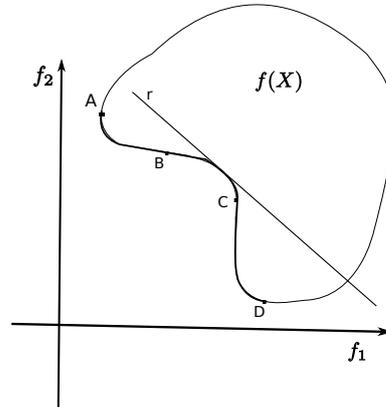
Por tanto, en la siguiente figura 1.14 tenemos la solución sobre la construcción de frente de Pareto, con el método de las sumas ponderadas, dado que el método es eficiente cuando frente sea convexa.

Figura 1.14: Frente de Pareto convexa / Ejemplo 1.3.3.



El método de las sumas ponderadas puede dejar de encontrar puntos de Pareto caso el frente sea no convexa, como ilustran la Figura 1.15 y el Ejemplo 1.3.4.

Figura 1.15: Frente de Pareto no convexa



Los puntos A , B , C y D son algunos puntos óptimos de Pareto, pero con el método de las sumas ponderadas no se puede encontrar los puntos B y C . Es decir, la recta r no encuentra como valores objetivos mínimos.

Ejemplo 1.3.4. Explicaremos el método de las sumas ponderadas, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo, cuya frente es no convexa,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \{f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2\} \\ &\text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\ &\quad x_1 - 4,5 \leq 0 \\ &\quad x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

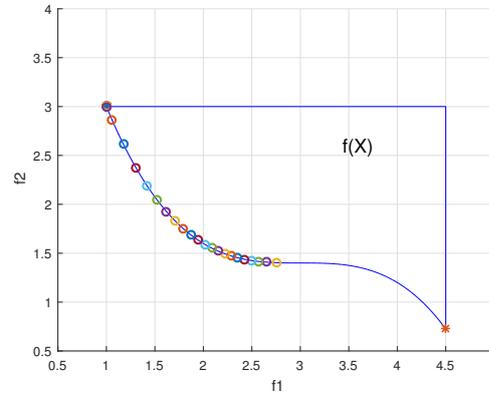
Utilizando el programa Matlab solucionamos para un número de puntos de Pareto ($npp = 30$) con incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), la variación $i = 1, \dots, npp$ y con los pesos normalizados como:

$$w_1 = i * inc,$$

$$w_2 = 1 - w_1.$$

Tenemos, en la siguiente figura 1.16, la solución sobre la construcción de frente de Pareto, dado que el método no es eficiente cuando el frente sea no convexa.

Figura 1.16: Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.4.



Mismo en casos convexos, aplicando algoritmo del método de las sumas ponderadas puede fallar mas no teóricamente, como muestra el siguiente Ejemplo 1.3.5, que trata de un caso lineal.

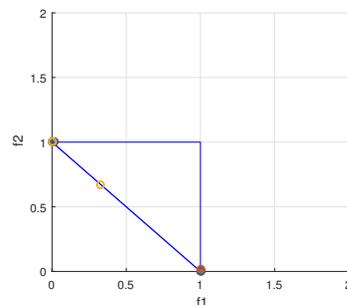
Ejemplo 1.3.5. En este ejemplo trataremos de un caso lineal, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{f_1(x) = x_1, f_2(x) = x_2\} \\ & \text{s.a } 1 - x_1 - x_2 \leq 0 \\ & \quad x_1 - 1 \leq 0 \\ & \quad x_2 - 1 \leq 0 \end{aligned}$$

Utilizando el programa Matlab solucionamos para un número de puntos de Pareto ($npp = 30$) con incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), la variación $i = 1, \dots, npp$ y con los pesos normalizados como: $w_1 = i * inc, w_2 = 1 - w_1$.

Tenemos, en la figura 1.17, la solución sobre la construcción de frente de Pareto en el caso lineal, donde el método no es eficiente, a pesar que el frente es convexa. Es decir, solo se encuentra siempre 3 puntos en el frente, cuantas veces tengamos la iteración.

Figura 1.17: Problema lineal



Mostraremos teóricamente que en este caso el método de las sumas ponderadas si encuentra puntos del frente.

De hecho, la función escalar es dada por

$$\varphi(x_1, x_2) = w_1 f_1(x_1, x_2) + w_2 f_2(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2$$

donde $w_1, w_2 \geq 0$ e $w_1 + w_2 = 1$.

(1) Supongamos $w_1 < w_2$. Tenemos que

$\varphi(0, 1) = w_2$, $\varphi(1, 0) = w_1$ y sabemos que los óptimos de Pareto satisfacen la ecuación $x_1 + x_2 = 1$.

Luego, $\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, 1 - x_1) = w_1 x_1 + w_2(1 - x_1) = (w_1 - w_2)x_1 + w_2$

Siendo $w_1 - w_2 < 0$ e $x_1 \leq 1$ sigue que

$$(w_1 - w_2)x_1 \geq w_1 - w_2$$

De ahí, $(w_1 - w_2)x_1 + w_2 \geq w_1 = \varphi(1, 0)$

Así, $(1, 0)$ es siempre solución en el caso en que $w_1 < w_2$.

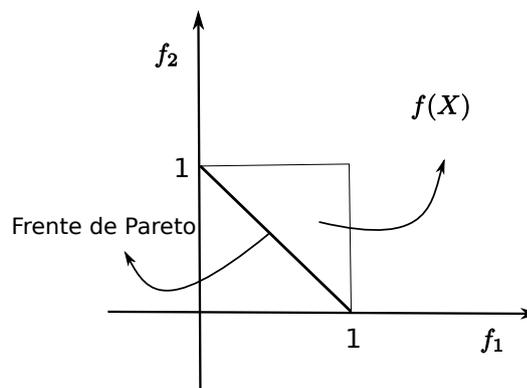
(2) De manera análoga, el punto $(0, 1)$ es la solución para $w_1 > w_2$.

(3) Finalmente, si $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$ tendremos

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(x_1, 1 - x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}(1 - x_1) = \frac{1}{2}, \forall (x_1, x_2).$$

Por tanto, cualquier (x_1, x_2) que satisfaga $x_1 + x_2 = 1$ es mínimo de φ .

Figura 1.18: Frente de Pareto / Ejemplo 1.3.5.



1.3.2.1.2 Método de escalarización de Tchebychev

Se deduce que el método de las sumas ponderadas no puede encontrar puntos de Pareto caso el frente de Pareto sea no convexa o hasta en problemas lineales.

En esta sección trataremos en detalle de un método, denominado escalarización de Tchebychev, que puede ser aplicado a problemas conexos y no conexos con frente de Pareto convexos y no

convexos.

El problema escalarizado tiene la forma siguiente

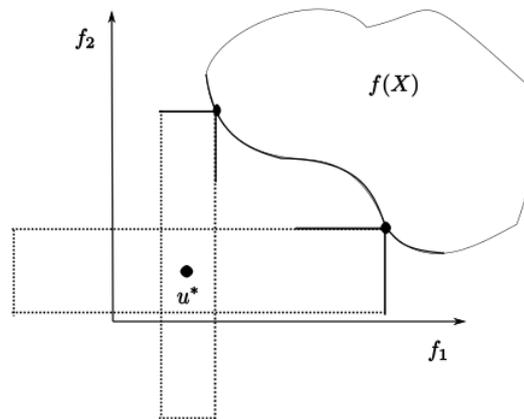
$$(ET) \begin{cases} \text{minimizar } \text{máx}\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\} \\ \text{s.a } x \in X. \end{cases}$$

Escalarización de Tchebychev recibe este nombre debido a una métrica de Tchebychev,

$$\text{máx}_{i=1, \dots, p} \{|w_i(f_i - u_i^*)|\} = \text{máx}_{i=1, \dots, p} \{w_i(f_i(x) - u_i^*)\}$$

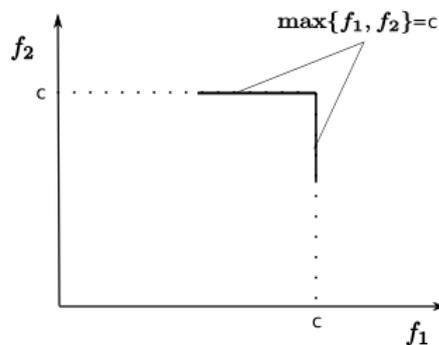
que aparece en la función objetivo del problema escalarizado.

Figura 1.19: Escalarización de Tchebychev.



Note que las curvas de nivel $\text{máx}\{f_1, f_2\} = c$ tiene el formato del cono \mathbb{R}_+^2 . De hecho, $\text{máx}\{f_1, f_2\} = c$ representa la curva definida por el conjunto $\{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1 = c \text{ o } f_2 = c\} \cap \{(f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1 \leq c \text{ e } f_2 \leq c\}$.

Figura 1.20: Curva de nivel de la función $\text{máx}\{f_1, f_2\} = c$.



En la siguiente, presentamos algunos resultados referente a la escalarización de Tchebychev que pueden ser encontrados en (Miettinen, 1998).

Teorema 1.3.9. Si los coeficientes w_1, \dots, w_p son positivos entonces la solución de (ET) es un óptimo débil de Pareto.

Demostración 1.3.5. Sea $x^* \in X$ una solución del problema (ET) .

Supongamos que x^* no es un óptimo débil de Pareto. Entonces, existe $x \in X$ tal que $f_i(x) < f_i(x^*) \forall i = 1, \dots, p$. Por consiguiente,

$$w_i(f_i(x) - \mu_i^*) < w_i(f_i(x^*) - \mu_i^*) \quad \forall i.$$

Luego, es una contradicción. Por lo tanto, x^* es un óptimo débil de Pareto.

Para más detalles, se puede ver (Miettinen, 1998).

Teorema 1.3.10. Si (ET) tiene solución única, entonces esta solución es óptimo de Pareto.

Demostración 1.3.6. Sea $x^* \in X$ solución única. Supongamos, que no es un óptimo de Pareto. En este caso, existe solución $x \in X$ tal que

$$f_i(x) \leq f_i(x^*) \quad \forall i = 1, \dots, p$$

$$f_j(x) < f_j(x^*) \quad \text{para algun } j.$$

Para todo $w_i > 0$, tenemos

$$\sum_{i=1}^p w_i f_i(x) \leq \sum_{i=1}^p w_i f_i(x^*).$$

Por otro lado, la unicidad de x^* significa que.

$$\sum_{i=1}^p w_i f_i(x^*) < \sum_{i=1}^p w_i f_i(\hat{x}) \quad \forall \hat{x} \in X.$$

Las dos desigualdades anteriores son contradictorias y por tanto, x^* es óptimo de Pareto.

Teorema 1.3.11. Sea $x^* \in X$ un punto óptimo de Pareto. Existe un vector $0 < w \in \mathbb{R}^p$ para el cual x^* es la solución de (ET) .

Demostración 1.3.7. Sea $x^* \in X$ óptimo de Pareto.

Supongamos que $\nexists w > 0 \in \mathbb{R}^p$ tal que x^* es una solución de (ET) .

Sabemos por definición que $f_i(x) > \mu_i^* \forall i = 1, \dots, p$ y $\forall x \in X$.

Consideremos,

$$w_i = \frac{\beta}{(f_i(x^*) - \mu_i^*)} \forall i = 1, \dots, p, \quad \beta > 0$$

Si x^* no es una solución de (ET) , entonces existe otro punto $x \in X$ que es una solución de (ET) , significa que,

$$\begin{aligned} \max_i [w_i(f_i(x) - \mu_i^*)] &< \max_i [w_i(f_i(x^*) - \mu_i^*)] \\ &= \max_i \left[\frac{\beta}{f_i(x^*) - \mu_i^*} (f_i(x^*) - \mu_i^*) \right] = \beta \end{aligned}$$

así, $w_i(f_i(x) - \mu_i^*) < \beta \forall i = 1, \dots, p$.

Luego, $\frac{\beta}{f_i(x^*) - \mu_i^*}(f_i(x) - \mu_i^*) < \beta$ y simplificando la expresión tenemos, de la siguiente forma

$$f_i(x) < f_i(x^*) \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Por lo tanto, es una contradicción, por lo cual x^* es la solución de (ET) .
Más detalles en (Miettinen, 1998).

Combinando los teoremas 1.3.9 y 1.3.11 se obtiene.

Teorema 1.3.12. Sea $x^* \in X$ óptimo débil de Pareto si y solamente si x^* es una solución de (ET) para algún $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$.

Demostración 1.3.8. \Rightarrow). Si $x^* \in X$ es un óptimo débil de Pareto, entonces por el Teorema 1.3.9 existe $0 < w \in \mathbb{R}^p$ y por Teorema 1.3.11, x^* es óptimo de Pareto. Por lo tanto x^* es la solución de (ET) .

\Leftarrow). Si x^* es la solución de (ET) para algún $(w_1, \dots, w_p) > 0$. Luego por el Teorema 1.3.9, x^* es un óptimo débil de Pareto.

Observación 1.3.4. Escalarización de Tchebychev, al principio, encuentra todos los puntos del frente de Pareto sea el problema convexo o no, como ilustran los siguientes ejemplos 1.3.6 y 1.3.7.

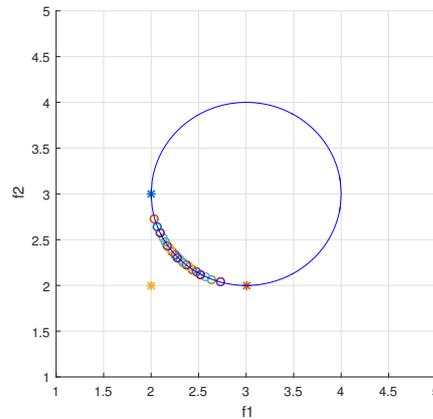
Ejemplo 1.3.6. Ilustramos el método de escalarización de Tchebychev, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo, cuya frente es convexa.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{f_1(x_1, x_2) = x_1, f_2(x_1, x_2) = x_2\} \\ & \text{s.a.} \quad (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Se utilizó el programa Matlab para su solución, considerando, número de puntos de Pareto ($npp = 20$), incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), con iteración ($i = 1, \dots, npp$) y los pesos normalizados como: $w_1 = i * inc$, $w_2 = 1 - w_1$ y sea punto utópico $u^* = f^* = (2, 2)$.

Por tanto, en la siguiente (figura 1.21) tenemos la solución sobre la eficacia del método cuando su frente es convexa.

Figura 1.21: Frente de Pareto convexa / Ejemplo 1.3.6.



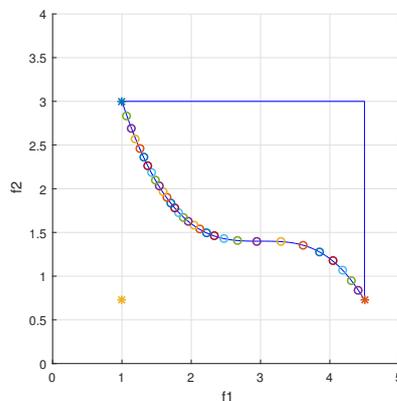
Ejemplo 1.3.7. Ilustramos el método de escalarización de Tchebychev, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo, cuya frente es no convexa.

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{f_1(x_1, x_2) = x_1, f_2(x_1, x_2) = x_2\} \\ \text{s.a } & 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\ & x_1 - 4,5 \leq 0 \\ & x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

Se utilizó el programa Matlab para su solución, considerando, número de puntos de Pareto ($npp = 30$), incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), con iteración ($i = 1, \dots, npp$) y los pesos normalizados como: $w_1 = i * inc$, $w_2 = 1 - w_1$ y con punto utópico $u^* = f^*$.

Por tanto, en la figura 1.22 tenemos la solución sobre la eficacia del método cuando su frente sea no convexa, pero la eficacia no funciona para todos los problemas, por ejemplo, veremos en la figura 1.23 y figura 1.24 el comportamiento de la construcción de frente de Pareto cuando varía el punto utópico.

Figura 1.22: Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.7.



Sin embargo, es importante destacar que el aspecto del frente de Pareto sufre gran influencia en la selección de punto utópico. Como en las figuras 1.23 y 1.24 tomadas de los Ejemplos 1.3.6 y 1.3.7 respectivamente, observamos para $npp = 20$ en la figura 1.23(a) 8 puntos de Pareto mientras tanto en la figura 1.23(b) solamente 6 puntos de Pareto, mismo ocurre también en la figura 1.24 con diferentes puntos utópicos tomadas.

Figura 1.23: Frente de Pareto convexa / Ejemplo 1.3.6.

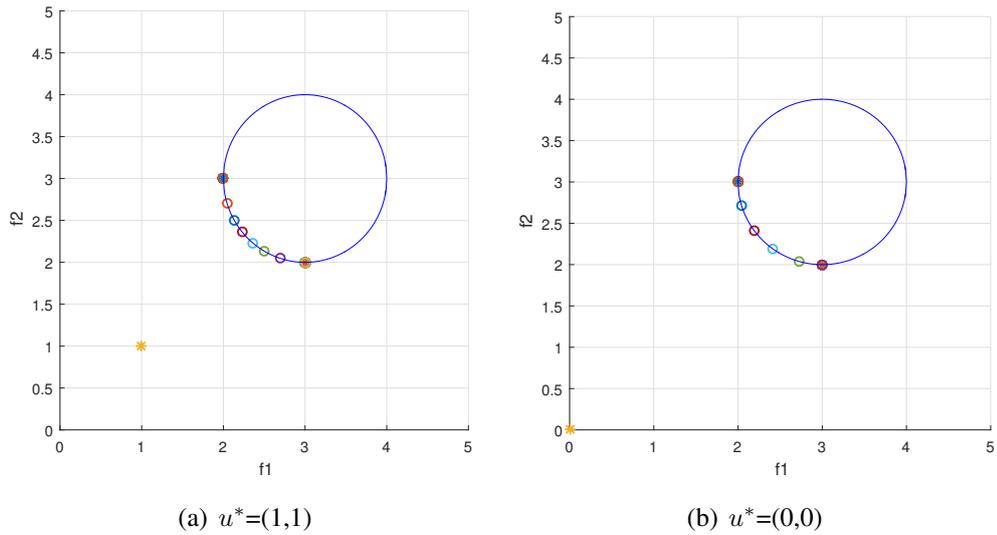
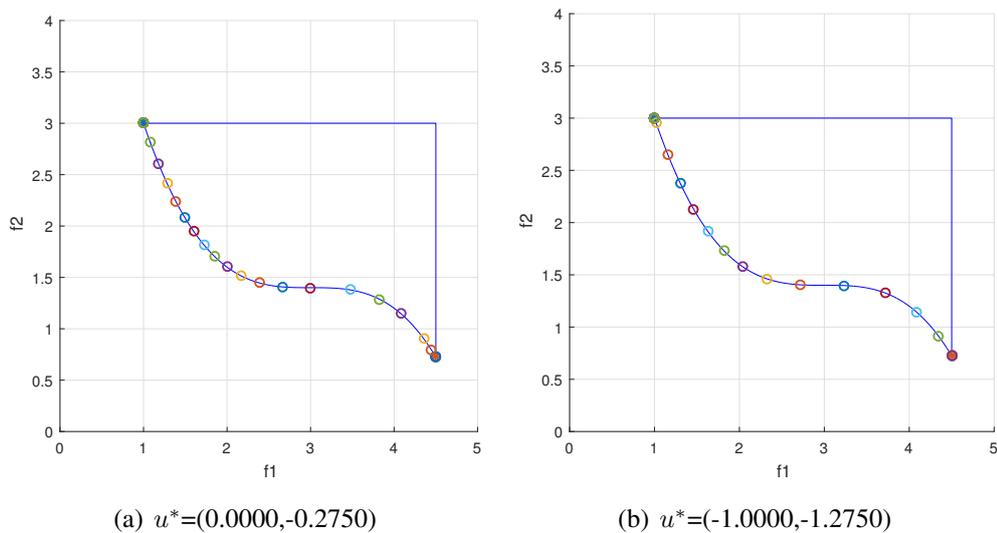


Figura 1.24: Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.7.



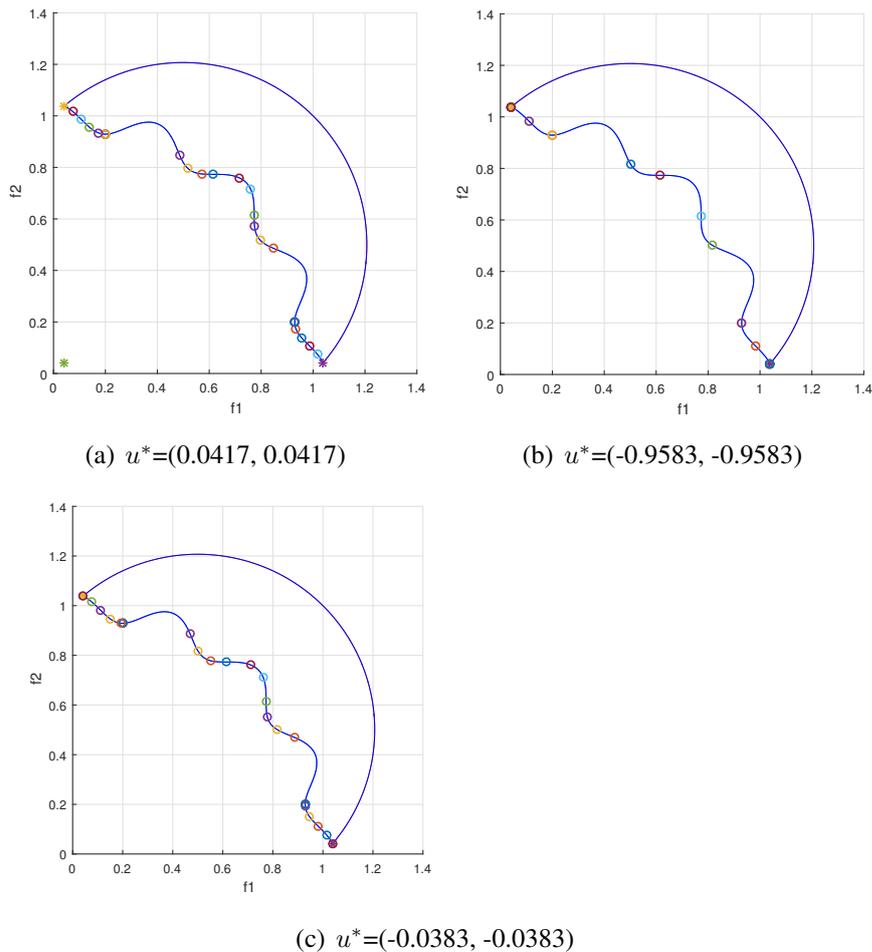
Ejemplo 1.3.8. Ilustramos el método de escalarización de Tchebychev, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo, cuya frente sea no convexa. Extraído desde Deb et al. (2002).

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a. } & -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0,1\cos(16\arctg(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0 \\ & (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 0,5 \leq 0 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi \end{aligned}$$

Aplicando el programa Matlab tenemos la solución y consideremos el numero de puntos de Pareto ($npp = 30$), incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), con iteración ($i = 1, \dots, npp$) y los pesos normalizados como: $w_1 = i * inc, w_2 = 1 - w_1$.

Por tanto, en la figura 1.25 tenemos la solución sobre el comportamiento de la construcción de frente de Pareto cuando varía el punto utópico.

Figura 1.25: Frente de Pareto no convexa / Ejemplo 1.3.8.



Los ejemplos 1.3.9 y 1.3.10 son problemas no conexos que pueden ser encontradas frente de Pareto por la escalarización de Tchebychev, sin embargo, es importante destacar que los puntos del frente de Pareto no obtiene una distribución de manera uniforme como vemos en la figura 1.27(b) a pesar que los pesos son distribuidos uniformemente.

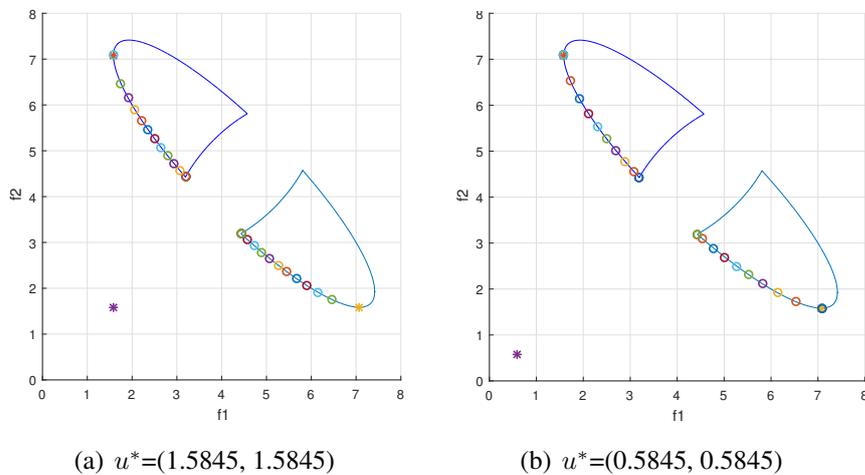
Ejemplo 1.3.9. Ilustramos el método de escalarización de Tchebychev, en el siguiente modelo de optimización biobjetivo no conexo,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a } & 17x_1^2 + 17x_2^2 + 30x_1x_2 - 288x_1 - 288x_2 + 1264 \leq 0 \\ & -5x_1^2 - 5x_2^2 + 6x_1x_2 + 18x_1 + 18x_2 \leq 73 \end{aligned}$$

Utilizando el programa Matlab tenemos la solución y consideremos el número de puntos de Pareto ($npp = 30$), incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), iteración ($i = 1, \dots, npp$) y los pesos normalizados como: $w_1 = i * inc, w_2 = 1 - w_1$.

Por tanto, en la figura 1.26 tenemos la solución sobre el comportamiento de la construcción de frente de Pareto tomados punto utópico en diferentes puntos.

Figura 1.26: Frente de Pareto no conexa / Ejemplo 1.3.9

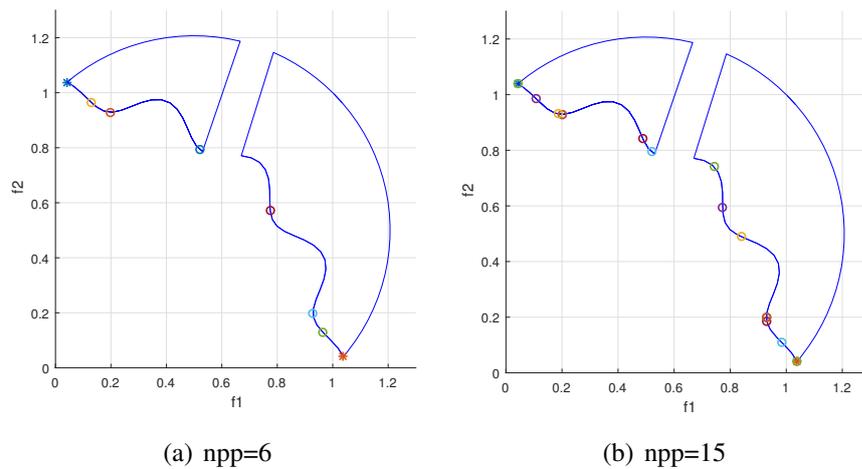


Ejemplo 1.3.10. Ilustramos el método de escalarización de Tchebychev, en el siguiente modelo de optimización biobjetivo no conexo,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a } & -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 1,01\cos(16\arctan(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0, \\ & (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 0,5 \leq 0,5, \\ & 1,69x_1^2 + 1,01x_2^2 - 2,6x_1x_2 - 0,02 \geq 0, \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi. \end{aligned}$$

Utilizando el programa Matlab tenemos la solución. considere, incremento uniforme ($inc = \frac{1}{npp}$), con iteración ($i = 1, \dots, npp$) y los pesos normalizados como: $w_1 = i * inc, w_2 = 1 - w_1$ y considerando punto utópico $u^* = (-0,0383, -0,0383)$. Por tanto, en la figura 1.27 tenemos la solución sobre el comportamiento de la construcción de frente de Pareto para dos números de puntos de Pareto.

Figura 1.27: Frente de Pareto no conexas / Ejemplo 1.3.10.



Con el intuitivo de obtener una distribución más uniforme para frente de Pareto, (Dutta and Kaya, 2011) modificaron escalarización de Tchebychev incorporando restricciones que fueron denominados rayos. Este método modificado, es llamado como escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos, será mostrado en el próximo capítulo.

1.3.2.2. Método de Tchebychev a lo largo de rayos

En la sección 1.3.2.1, presentamos el método de las sumas ponderadas y el método de Tchebychev para construcción del frente de Pareto para problemas de optimización multi-objetivo.

Observamos que el método de las sumas ponderadas falla al buscar puntos de Pareto caso el frente de Pareto no sea convexa y, mismo siendo convexa, se puede encontrar dificultades en la construcción del frente como en el caso lineal, ilustrado por el ejemplo 1.3.5. Presentamos entonces el método de Tchebychev, que puede ser aplicado para problemas conexos y no conexos. Sin embargo, puede ser que haya una concentración de los puntos de solución en una parte del frente, dejando así el retrato de su real aspecto.

En esta sección, vamos a presentar una nueva técnica, propuesta en (Dutta and Kaya, 2011), que se trata de una modificación del método de Tchebychev, llamada método de Tchebychev a lo largo de rayos, que se obtiene una distribución más uniforme de los puntos del frente de Pareto para problemas multi-objetivos conexos. Entenderemos, que ese nuevo método produce un frente más bien distribuida. Sin embargo, surgen puntos que no son óptimos de Pareto como solución del

problema resultante de la nueva escalarización. Veremos entonces como eliminar esa inconveniencia con introducción de una técnica que elimina puntos que no son óptimos de Pareto.

Consideremos nuevamente el problema

$$(ET) \begin{cases} \text{minimizar } \text{máx}\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\} \\ \text{s.a } x \in X. \end{cases}$$

El Teorema 1.3.13 indica el camino para la formulación del método de Tchebychev a lo largo de rayos.

Teorema 1.3.13. (Ogryczak, 2001, Teorema 1) Suponga que $x^* \in X$ es un punto eficiente de (P) tal que

$$w_1(f_1(x^*) - u_1^*) = \dots = w_p(f_p(x^*) - u_p^*) \quad (1.16)$$

para ciertos $w_1, \dots, w_p > 0$.

Sean $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p) = (f_1(x^*), \dots, f_p(x^*))$ y \bar{x} solución de (ET) con los mismos $w_1, \dots, w_p > 0$. Entonces $\bar{f} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_p) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}))$ es el único vector de valores óptimos.

Demostración 1.3.9. Sea $\bar{f}(x) \in f(X)$ un vector no dominado con $f(x) \in X$ que satisface,

$$w_1(f_1(x) - \bar{f}_1(x)) = \dots = w_p(f_p(x) - \bar{f}_p(x))$$

con algún vector objetivo $f \in f(X)$ y $w_i > 0, i = 1, \dots, p$.

Supongamos que \bar{f} no es una única solución óptima de (ET) . Entonces existe un vector objetivo \hat{f} tal que $\hat{f} \neq \bar{f}$ y

$$\text{máx}_{1 \leq i \leq p} \{w_i(f_i - \hat{f}_i)\} \leq \text{máx}_{1 \leq i \leq p} \{w_i(f_i - \bar{f}_i)\} = \alpha.$$

Aquí,

$$w_i(f_i - \hat{f}_i) \leq \alpha = w_i(f_i - \bar{f}_i) \quad \text{para } i = 1, \dots, p.$$

Así, $\hat{f} \geq \bar{f}$ y $\hat{f} \neq \bar{f}$ que contradice a la suposición que \hat{f} no es dominado.

Para más detalles ver (Ogryczak, 2001)

Observación 1.3.5. Note que las ecuaciones

$$w_1(f_1 - u_1^*) = \dots = w_p(f_p - u_p^*) \quad (1.17)$$

representan una semi-recta (rayo) con vector director $v = (\frac{1}{w_1}, \dots, \frac{1}{w_p})$ y con origen en el punto utópico.

Una ecuación paramétrica para el rayo en la región objetivo factible puede ser escrita como

$$f = tv + u^* \quad , \quad t \geq 0. \quad (1.18)$$

Combinando los Teorema 1.3.12 y Teorema 1.3.13, contemplamos que el rayo definido por (1.17) intercepta el frente de Pareto para algún $w = (w_1, \dots, w_p)$ y el punto de intersección es un punto óptimo entonces la solución de (ET) produce tal punto de intersección en la frente de Pareto.

Esta idea puede ser útil para generar una buena aproximación del frente de Pareto en el caso en que los puntos óptimos débil de Pareto también son óptimos de Pareto. En esta situación, se usa un conjunto conveniente de pesos w_1, \dots, w_p y seleccionado “apropiadamente” el punto utópico para la construcción de frente de Pareto. Métodos que usan este concepto son encontrados en (Eichfelder, 2008, 2009a,b; Mueller-Gritschneider et al., 2009).

La idea presentada por (Dutta and Kaya, 2011) es mejor que los otros métodos en el sentido que estos últimos proponen una nueva escalarización con la cual es posible construir una aproximación de frente de Pareto que contengan puntos óptimos (débil) de Pareto.

La escalarización tipo Tchebychev presentada en (Dutta and Kaya, 2011) aumenta restricciones dadas por los rayos asociados a los pesos w_1, \dots, w_p al problema (ET) de la siguiente forma

$$(TR) \begin{cases} \text{minimizar } \text{máx}\{w_1(f_1(x) - u_1^*), \dots, w_p(f_p(x) - u_p^*)\} \\ \text{s.a } w_i(f_i(x) - u_i^*) - w_{i+1}(f_{i+1}(x) - u_{i+1}^*) = 0, i = 1, \dots, p-1 \\ x \in X. \end{cases}$$

La nueva escalarización fue denominada como escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos.

Teorema 1.3.14. Si x^* es un óptimo débil de Pareto de (P) entonces x^* es la solución de (TR) para algún vector $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$.

Demostración 1.3.10. Sea x^* un punto óptimo débil de Pareto.

Para $\beta > 0$,

$$w_i = \frac{\beta}{f_i(x^*) - \mu_i^*}, \forall i = 1, \dots, p \quad (1.19)$$

con esta elección de w_i , $x^* \in X$ satisface las restricciones de la igualdad en (TR) .

Consideremos que $x^* \in X$ no es una solución de (TR) . Entonces existe un punto $x \in X$ satisfaciendo las restricciones de igualdad de manera que

$$\text{máx}_{1 \leq i \leq p} w_i(f_i(x) - \mu_i^*) < \text{máx}_{1 \leq i \leq p} w_i(f_i(x^*) - \mu_i^*) = \beta,$$

es decir,

$$w_i(f_i(x) - \mu_i^*) < \beta, \forall i = 1, \dots, p. \quad (1.20)$$

sustituyendo la ecuación (1.19) en (1.20), se obtiene

$$\frac{\beta}{f_i(x^*) - \mu_i^*}(f_i(x) - \mu_i^*) < \beta,$$

si $f_i(x^*) - \mu_i^*$, β son positivos y reorganizando se llega a:

$$f_i(x) < f_i(x^*) \forall i = 1, \dots, p. \quad (1.21)$$

Dado que es una contradicción, entonces x^* es un punto óptimo débil de Pareto.

Para más detalles se puede ver (Dutta and Kaya, 2011).

Observación 1.3.6. La recíproca del Teorema 1.3.14 no es verdad a menos que el frente de Pareto sea conexo. Este caso puede ser verificado como sigue.

Sea el problema bi-objetivo $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$, $x \in X \subset \mathbb{R}^2$, donde x_1^* e x_2^* son soluciones de los problemas mono-objetivos

$$(P_1) \quad \min f_1(x), \quad x \in X$$

$$(P_2) \quad \min f_2(x), \quad x \in X$$

respectivamente.

Sean

$$f_1^* = f_1(x_1^*), \quad \bar{f}_2 = f_2(x_1^*)$$

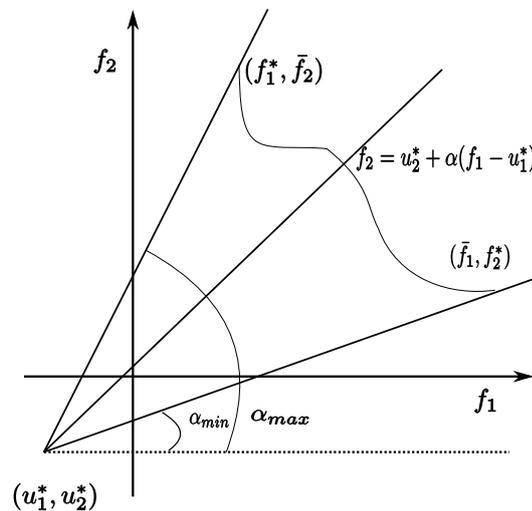
$$\bar{f}_1 = f_1(x_2^*), \quad f_2^* = f_2(x_2^*),$$

frente de Pareto será conexo si y solamente si la recta $f_2 = u_2^* + \alpha(f_1 - u_1^*)$ en el espacio objetivo intercepta al Frente para todo ángulo $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ donde

$$\alpha_{\min} = \arctg\left(\frac{f_2^* - u_2^*}{f_1^* - u_1^*}\right)$$

$$\alpha_{\max} = \arctg\left(\frac{\bar{f}_2 - u_2^*}{\bar{f}_1 - u_1^*}\right)$$

Figura 1.28: Frente de Pareto conexo.



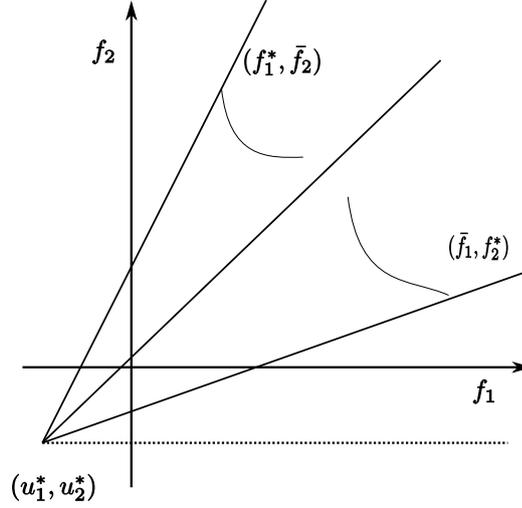
Fuente: Dutta and Kaya (2011)

Si el frente de Pareto no es conexa entonces existirán $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ y $w = (w_1, w_2)$ tales que la semi-recta

$$w_1(f_1(x) - u_1^*) = w_2(f_2(x) - u_2^*) \quad (1.22)$$

no interceptará al Frente.

Figura 1.29: Frente de Pareto no conexa.



Fuente: Dutta and Kaya (2011)

En este caso, la solución de (TR) con la restricción (1.22) no será un óptimo de Pareto (o eficiente).

Vale la recíproca de Teorema 1.3.14 desde que a frente de Pareto sea conexa, conforme el siguiente teorema

Teorema 1.3.15. Considere que el frente de Pareto asociada al problema (P) sea conexa.

Si x^* es una solución de (TR) para algún $w = (w_1, \dots, w_p) > 0$ entonces x^* es óptimo débil de Pareto de (P) .

Demostración 1.3.11. Sea x^* solución de (PR) para algún $w_1, \dots, w_p > 0$,

Para todo $i = 1, \dots, p - 1$ afirmamos,

$$w_i(f_i(x^*) - \mu_i^*) - w_{i+1}(f_{i+1}(x^*) - \mu_{i+1}^*) = 0.$$

Entonces, se pueden escribir las igualdades en (1.17) que a su vez definen en el espacio objetivo el rayo $f = \mu^* + tv, t \geq 0$, en (1.18). Así, $f(x^*) = (f_1(x^*), \dots, f_p(x^*))$ es un punto en el rayo, para algún $t \geq 0$.

Afirmamos que x^* es un punto óptimo débil de Pareto de (P) .

Supongamos, por contradicción, que x^* no es un punto óptimo débil de Pareto. Entonces, como frente de Pareto es conectado, existe $\bar{x} \in X$ tal que $f(\bar{x})$ es un punto de intersección de rayo con el frente de Pareto y que

$$f_i(\bar{x}) - \mu_i^* < f_i(x^*) - \mu_i^* \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

Como $w_1, \dots, w_p > 0$, tenemos

$$w_i (f_i(\bar{x}) - \mu_i^*) < w_i (f_i(x^*) - \mu_i^*) \quad \forall i = 1, \dots, p.$$

de tal forma que,

$$\max_{1 \leq i \leq p} w_i (f_i(\bar{x}) - \mu_i^*) < \max_{1 \leq i \leq p} w_i (f_i(x^*) - \mu_i^*).$$

Por lo tanto, es una contradicción, entonces x^* es una solución de (PR) .

Para más información ver (Dutta and Kaya, 2011).

Observación 1.3.7. El Teorema 1.3.15 es la condición principal para aplicar el método de Tchebychev a lo largo de rayos para superar las dificultades encontradas por los métodos estudiados en la sección 1.3.2.1, en el caso de frente de Pareto conexas.

Este Método agrega restricciones definidas por rayos que, en el caso conexo, atraviesan al frente produciendo una solución de Pareto. Los ángulos son distribuidos uniformemente con la variación uniforme de pesos para los rayos de modo a si obtener una buena aproximación para la frente. Obviamente, al principio, no hay como saber si un determinado rayo intercepta a frente de Pareto. Por tanto, una solución de (TR) puede no ser un punto eficiente. Tales soluciones son eliminadas con la introducción de una rutina referido en el último paso del algoritmo de Tchebychev a lo largo de rayos, detallado en el algoritmo del método, que identifica puntos que no son óptimos (débil) de Pareto.

1.3.2.3. Método de restricción ponderada

En la sección 1.3.2.1, el método de escalarización de Tchebychev para la construcción de frente de Pareto, se observa particularmente en los problemas no conexos que los puntos eficientes no son distribuidos de manera uniforme y en la sección 1.3.2.2, presentamos el método de Tchebychev a lo largo de rayos para la construcción del frente de Pareto para problemas de optimización multi-objetivo.

Notamos que el método de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos no es aplicable para problemas caso la frente de Pareto fuera no conexo.

En esta sección, mostraremos detalladamente una nueva técnica, propuesta en (Burachik et al., 2014b), llamado método de restricción ponderada, se trata de una función k -ésimo objetivo que minimiza, para un k fijo y los restantes de las funciones objetivas son incorporadas como restricciones. Evaluaremos que el nuevo método resuelve problemas conexos y no conexos con frente de Pareto y/o conjunto factible no conexo, de un k -ésimo objetivo, que produce frente de Pareto, distribuido uniformemente con adecuada selección del punto utópico.

Para $k \in \{1, \dots, p\}$ y $w \in W^{++}$ el problema (P_w^k)

$$(P_w^k) \begin{cases} \text{minimizar} & w_k f_k(x) \\ \text{s.a} & w_i f_i(x) \leq w_k f_k(x), \quad i = 1, \dots, p, i \neq k. \\ & x \in X. \end{cases}$$

Observación 1.3.8. Las funciones objetivas que son incorporados como restricciones son planos que cambian su posición para cada iteración de k -ésimo peso, de acuerdo que se busca minimizar k -ésimo función objetivo.

Definición 1.3.5. La región factible del problema (P_w^k) . Para k y w fijos es definido como

$$X_w^k = \{x \in X \mid w_i f_i(x) \leq w_k f_k(x); \forall i \neq k\}.$$

Donde, para cada $x \in X$, k se verifica $w_k f_k(x) = \max_{i=1, \dots, p} \{w_i f_i(x)\}$, por tanto, $x \in X_w^k$ tal que x son los puntos óptimos (débil) de Pareto.

Definición 1.3.6. El conjunto de solución del problema (P_w^k) es definido como

$$S_w^k = \{x \in X \mid x \text{ resuelve } (P_w^k)\}$$

Definición 1.3.7. Sea $w \in W^{++}$ fijo, se tiene

$$X = \bigcup_{k=1}^p X_w^k.$$

Definición 1.3.8. Sea $W(x)$ para cada $x \in X$, se define de la siguiente forma

$$W(x) = \{w \in W^{++} \mid x \in S_w^k, \forall k = 1, \dots, p\}$$

donde, $W(x)$ puede ser vacío, para algunos $x \in X$.

Teorema 1.3.16. $x^* \in X$ es un punto óptimo débil de Pareto del problema (P) , si y sólo si existe $w \in W^{++}$, x^* es una solución de (P_w^k) para todo $k = 1, \dots, p$

Demostración 1.3.12.

\Rightarrow). Asumamos, $w \in W^{++}$ tal que x^* es una solución de $(P_w^k) \forall k$.

Supongamos, que $x^* \in X$ no es un óptimo débil de Pareto de (P) . Entonces existe $\bar{x} \in X$ tal que

$$f_i(\bar{x}) < f_i(x^*), i = 1, \dots, p \quad (1.23)$$

Por la definición 1.3.7, existe k tal que $\bar{x} \in X$. Entonces desde ecuación 1.23 y w_k , tenemos

$$w_k f_k(\bar{x}) < w_k f_k(x^*). \quad (1.24)$$

Por consiguiente, la ecuación 1.24 es una contradicción, entonces x^* es una solución de (P_w^k) .

\Leftarrow). Sea $x^* \in X$ óptimo débil de Pareto de (P) .

Demostremos, que $\exists w \in W^{++}$ tal que x^* es una solución de $(P_w^k) \forall k$.

Sabemos que, $f_i(x) > 0 \forall x \in X$.

Definimos,

$$w_i = \frac{\frac{1}{f_i(x^*)}}{\sum_{i=1}^p \frac{1}{f_i(x^*)}}.$$

Entonces, $w_i > 0$, $\sum w_i = 1$. Es decir, $w \in W^{++}$ y x^* satisface todas las restricciones como igualdades,

$$w_i f_i(x^*) = w_k f_k(x^*), i = 1, \dots, p, i \neq k. \quad (1.25)$$

Si x^* no es la solución de (P_w^k) para algún k , entonces $\exists \bar{x} \in X$ tal que

$$\begin{aligned} w_k f_k(\bar{x}) &< w_k f_k(x^*) \\ w_i f_i(\bar{x}) &\leq w_k f_k(\bar{x}), i \neq k. \end{aligned}$$

De manera que, de la ecuación anterior y 1.25 tenemos,

$$w_i f_i(\bar{x}) \leq w_k f_k(\bar{x}) < w_k f_k(x^*), i = 1, \dots, p \quad y \quad i \neq k.$$

Luego por la ecuación 1.25, podemos escribir

$$w_i f_i(\bar{x}) < w_k f_k(x^*) = w_i f_i(x^*), i = 1, \dots, p \quad y \quad i \neq k. \quad (1.26)$$

Entonces, como $w_i > 0$ y por la ecuación 1.26 se llega:

$$f_i(\bar{x}) < f_i(x^*), i = 1, \dots, p.$$

Por lo tanto, es una contradicción que x^* es un punto óptimo débil de Pareto.

Para más información (Burachik et al., 2014b).

Observación 1.3.9. Notemos particularmente, que la parte “sólo sí” del Teorema 1.3.16 es válida, para puntos óptimos de Pareto, pues todo punto óptimo de Pareto es un punto óptimo débil de Pareto, mostrado en la observación 1.2.4. Sin embargo, no necesariamente implica que el punto sea óptimo de Pareto, a menos que sea X convexo y todas las funciones objetivas sean estrictamente convexas. El siguiente ejemplo ilustra esta observación.

Ejemplo 1.3.11.

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $f(x) = (x_1, x_2)$ y consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \{f_1(x), f_2(x)\} \\ &\text{s.a } (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 0,8 \\ &\quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

Si $x^* = (1, 0,8)$ es un punto óptimo débil de Pareto.

Sean $w_1 = \frac{4}{9}$ y $w_2 = \frac{5}{9}$, para $k = 1, 2$ el problema (P_w^k) se puede escribir como

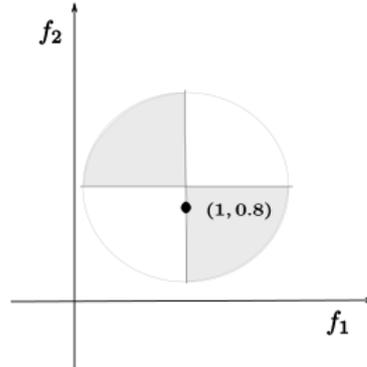
$$(P_w^1) \begin{cases} \text{minimizar } w_1 f_1(x) \\ \text{s.a } w_2 f_2(x) \leq w_1 f_1(x). \end{cases}$$

y

$$(P_w^2) \begin{cases} \text{minimizar } w_2 f_2(x) \\ \text{s.a. } w_1 f_1(x) \leq w_2 f_2(x). \end{cases}$$

luego, $x^* = (1, 0,8)$ es un óptimo de Pareto de ambos problemas. Sin embargo, $x^* = (1, 0,8)$ no es un óptimo de Pareto (es un óptimo débil de Pareto).

Figura 1.30: Punto eficiente débil.



Proposición 1.3.1. Sea $W(x) \neq \phi$. Para un $k \in \{1, \dots, p\}$, $\exists x_k^* \in S_w^k$ tal que $\forall r \neq k$, $\exists x_r^* \in S_w^k$, que satisfice

$$f_r(x_k^*) \leq f_r(x_r^*). \quad (1.27)$$

Entonces x_k^* es óptimo débil de Pareto del problema (P) .

Prueba I.1. Sea $k = 1$. Supongamos que x_1^* no es un punto óptimo débil de Pareto. Entonces $\exists \hat{x} \in X$ tal que

$$f_i(\hat{x}) < f_i(x_1^*) \quad (1.28)$$

Notemos por definición 1.3.7, $\hat{x} \in X = \bigcup_{r=1}^p X_w^r$.

Tenemos dos casos.

- Caso I: Sea $\hat{x} \in X_w^1$. Donde $w_1 > 0$ y desde la ecuación 1.28, se puede escribir de la siguiente forma

$$w_1 f_1(\hat{x}) < w_1 f_1(x_1^*) \quad (1.29)$$

Por tanto, es una contradicción, pues $x_1^* \in S_w^1$.

- Caso II: Sea $\hat{x} \in X_w^s$, para algún $s \neq 1$. Tenemos desde la ecuación 1.28

$$w_s f_s(\hat{x}) < w_s f_s(x_1^*) \quad (1.30)$$

Tenemos por la ecuación 1.27,

$$w_s f_s(\hat{x}) < w_s f_s(x_1^*) \leq w_s f_s(x_s^*). \quad (1.31)$$

Esto contradice el hecho de que $x_s^* \in S_w^s$. Dado que los ambos casos conducen a una contradicción, concluimos que x_1^* es un punto óptimo débil de Pareto.

Para más detalles pueden consultar a (Burachik et al., 2014b).

Corolario I.1. Sea $w \in W^{++}$. Suponer que $(x_1^*, \dots, x_p^*) \in S_w^1 \times \dots \times S_w^p$ y que $\forall r, k \in \{1, \dots, p\}$,

$$f_r(x_r^*) \geq f_r(x_k^*).$$

Entonces $x_k^* \in WE(P)$, para cada $k = 1, \dots, p$.

Prueba I.2. En la proposición 1.3.1, probamos que, si existe k tal que la ecuación (1.27) sostiene que x_k^* es un punto óptimo débil de Pareto.

Asumamos, que por la hipótesis, $\forall k, r$,

$$f_r(x_k^*) \leq f_r(x_r^*).$$

Por lo tanto, x_k^* es un punto óptimo débil de Pareto.

Para más detalles, se puede ver en (Burachik et al., 2014b).

En el Teorema 1.3.16 demuestra que, si tiene una solución común x^* para todo $k \in \{1, \dots, p\}$ de (P_w^k) entonces x^* es un óptimo débil de Pareto. Sin embargo, si las soluciones no son comunes de (P_w^k) y también los valores óptimos correspondientes no sean los mismos, entonces por la proposición 1.3.1 es posible hacer ciertas comparaciones entre las soluciones de cada problema (P_w^k) y concluir si alguna de esas soluciones es óptimo débil de Pareto o no. Por tanto, podemos identificar más de un óptimo débil de Pareto como resultado final del procedimiento de comparación. La ventaja de este método de restricción ponderada es la perspectiva de encontrar dos puntos de Pareto para una única selección de pesos sobre los métodos de escalarizaciones existentes, que son problemas principalmente con un dominio que no es conexo.

CAPITULO II: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Tipo de investigación

El trabajo de investigación, de acuerdo a la naturaleza del problema a los objetivos formulados, reúne condiciones para ser calificado como una investigación de tipo básica. Sostiene **Hernandez, Fernandez y Baptista**(2006) “La investigación para su función es producir conocimientos y teorías, su objetivo es incrementar el conocimiento ya existente”.

Nivel de investigación

El presente trabajo de investigación es nivel descriptivo. Sostiene **Arias**(2016) “su objetivo es conocer los aspectos más importantes del o los fenómenos que le interesan responder al interrogante ¿cómo, quien, dónde, cuando? describe los datos y características de un hecho o fenómeno en estudio”.

Diseño de investigación

El diseño de investigación utilizado en el presente trabajo de investigación, es de tipo experimental pura. **Hernandez, Fernandez y Baptista**(2014) afirma que se puede manipular una o varias variables independientes para observar sus cambios en las variables dependientes.

Enfoque de investigación

El enfoque de la investigación es de tipo cualitativo, porque se busca comprender e interpretar el comportamiento de la construcción de frente de Pareto.

CAPITULO III: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Resultados

Los resultados esperados de esta investigación se determinó con la construcción de Frente de Pareto en los problemas de optimización biobjetivo conexo y no conexo, con los algoritmos de la programación de los métodos de escalarización.

Algoritmo de tchebychev a lo largo de rayos

Describiremos en los siguientes pasos del algoritmo que utiliza escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos (Dutta and Kaya, 2011).

- Paso 1 (Inicio)
Sea $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ y $N = npp$. Hacer $k = 1$
- Paso 2 (Puntos extremos de la frente)
 - 2.1 Encontrar \bar{x}_1 solución de minimizar $f_1(x)$, $x \in X$
Hacer $f_1^* = f_1(\bar{x}_1)$ y $\bar{f}_2 = f_2(\bar{x}_1)$
Defina $P^o = (f_1^*, \bar{f}_2)$
 - 2.2 Encontrar \bar{x}_2 solución de minimizar $f_2(x)$, $x \in X$
Hacer $\bar{f}_1 = f_1(\bar{x}_2)$ y $f_2^* = f_2(\bar{x}_2)$
Defina $P^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$
- Paso 3 (Punto utópico)
Hacer $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ con $u_1^* = f_1^* - \epsilon_1$, $u_2^* = f_2^* - \epsilon_2$
- Paso 4 (Ángulos)

$$\text{Calcule } \alpha_{\text{mín}} = \arctg\left(\frac{f_2^* - u_2^*}{f_1^* - u_1^*}\right)$$

$$\alpha_{\text{máx}} = \arctg\left(\frac{\bar{f}_2 - u_2^*}{\bar{f}_1 - u_1^*}\right)$$

$$\Delta\alpha = \frac{\alpha_{\text{máx}} - \alpha_{\text{mín}}}{npp}$$

- Paso k (Ciclo)

- k.1 Hacer $\alpha = \alpha_{\text{mín}} + k\Delta\alpha$

- Hacer $w_1 = \sin \alpha$ y $w_2 = \cos \alpha$

- k.2 Encontrar \bar{x} solución de (TR)

- Defina $P^k = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$

- k.3 Si $k = npp$ vá para el Paso N

- Si no, $k = k + 1$ y vá para $k,1$

- Paso N (Eliminando puntos no Pareto)

- Para $i = 1, \dots, npp$ existe $j = 0, \dots, npp$

- tal que $P_1^j < P_1^i$ y $P_2^j < P_2^i$ entonces elimine P^i .

El algoritmo de Tchebychev a lo largo de rayos proporciona una buena herramienta para la construcción de frente de Pareto para problemas de optimización con dos objetivos, puede ser adaptado también para problemas con tres o más objetivos (Das and Dennis, 1998; Eichfelder, 2008; Mueller-Gritschneider et al., 2009). Con el intuitivo de obtener una buena distribución de los puntos óptimos es importante escoger los pesos w_1 y w_2 uniformemente y tomar el punto utópico suficientemente menor del punto ideal, escogiendo ϵ_1 y ϵ_2 suficientemente grandes.

Otro aspecto importante del algoritmo es que en el paso $k,2$ el problema no diferenciable (TR) es resuelto, además empleamos el Deflected Subgradient Method (DSG) (Burachik et al., 2014a, 2006; Burachik and Kaya, 2007, 2010; Burachik et al., 2010) que utiliza Dualidad Lagrangiana como técnica no diferenciable. Esa rutina requiere la solución de subproblemas sin restricciones de optimización, los cuales fueron resueltos usando subrutina `fminsearch` de MatLab que emplea el Método de Nelder-Mead (Lagarias et al., 1998).

Ejemplos numéricos de la escalarización de tchebychev a lo largo de rayos

Ejemplo 3.1.1. Ilustramos el método de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos, en el siguiente modelo de optimización biobjetivo,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ &\text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\ &\quad x_1 - 4,5 \leq 0 \\ &\quad x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

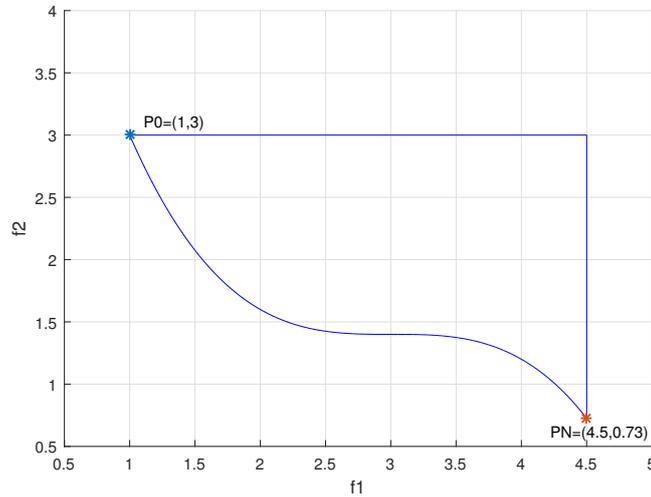
Vamos buscar solución del ejemplo para $npp = 30$, aplicando algoritmo del método de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos

- Paso 1 Para $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ y $npp = 30$

■ Paso 2

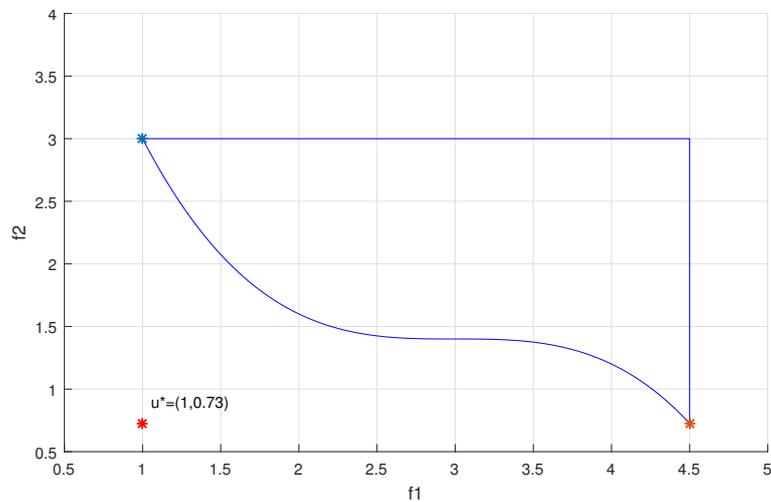
Vamos buscar los puntos extremos de la frente $P^o = (f_1^*, \bar{f}_2)$ y $P^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

Figura 3.1: Puntos extremos de la solución.



■ Paso 3 Tenemos el punto utópico $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, en este caso, se tiene $u^* = f^*$,

Figura 3.2: Punto utópico / $u^* = f^* = (1, 0,73)$.



■ Paso 4: Calcular los ángulos máx. y mín. para la variación de rayos, como:

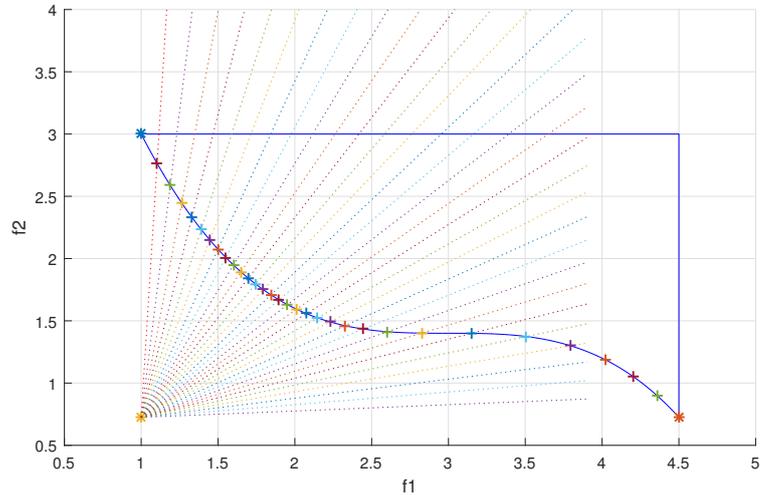
$$\alpha_{\text{mín}} = 0$$

$$\alpha_{\text{máx.}} = 1,5708 \text{ y}$$

$$\Delta\alpha = 0,0507$$

- Paso k: Tenemos que hallar solución de (TR) con la variación de, $\alpha = \alpha_{\min} + k\Delta\alpha$ y los pesos $w_1 = \sin \alpha$ y $w_2 = \cos \alpha$ de la siguiente manera

Figura 3.3: Construcción de frente de Pareto.



- Paso N: Eliminando los puntos no paretos, en este caso no es necesario eliminar, porque todos sus puntos son óptimos de Pareto.

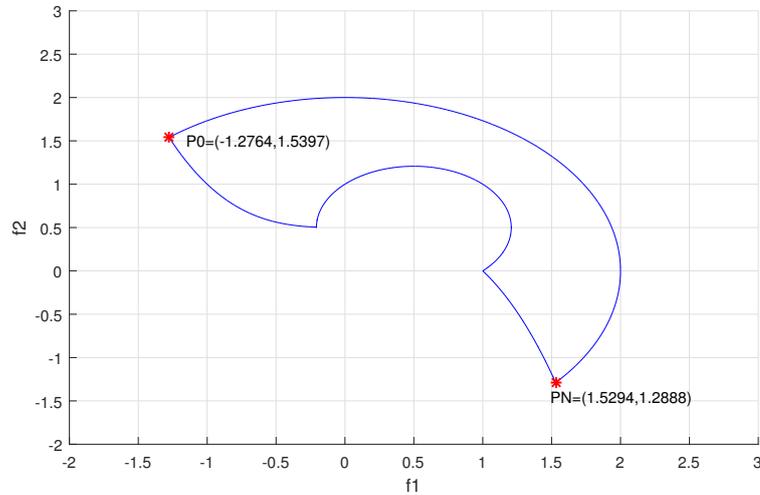
Ejemplo 3.1.2. Ilustramos el algoritmo del método, en el siguiente modelo de optimización biobjetivo,

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\
 \text{s.a } &-(x_1 - 0,5)^2 - (x_2 - 0,5)^2 + 0,5 \leq 0 \\
 &x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \\
 &-x_1^3 - 2x_2 + 1 \leq 0
 \end{aligned}$$

Solucionamos el ejemplo dado, paso por paso aplicando algoritmo del método, para $npp = 30$,

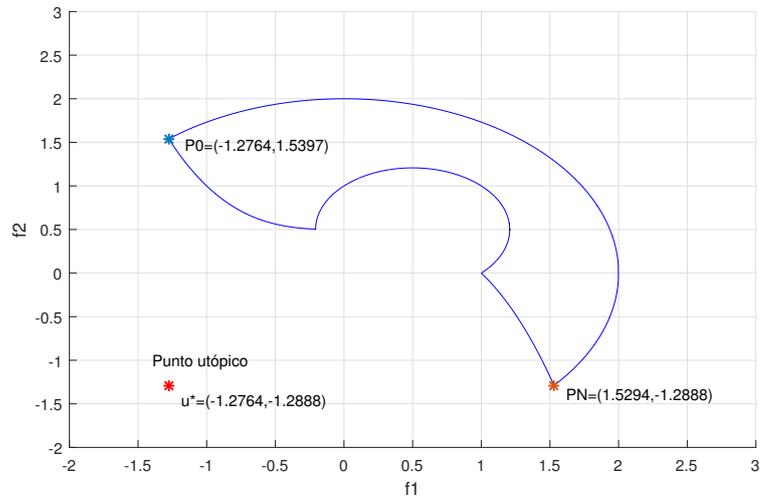
- Paso 1: Para $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ y $npp = 30$
- Paso 2: Buscaremos los puntos extremos de la frente $P^o = (f_1^*, \bar{f}_2)$ y $P^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

Figura 3.4: Puntos extremos de la frente.



- Paso 3: Tenemos el punto utópico $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, en este caso, se tiene $u^* = f^*$,

Figura 3.5: Punto utópico.



- Paso 4: Calculamos los ángulos máx. y mín. para la variación de rayos, como:

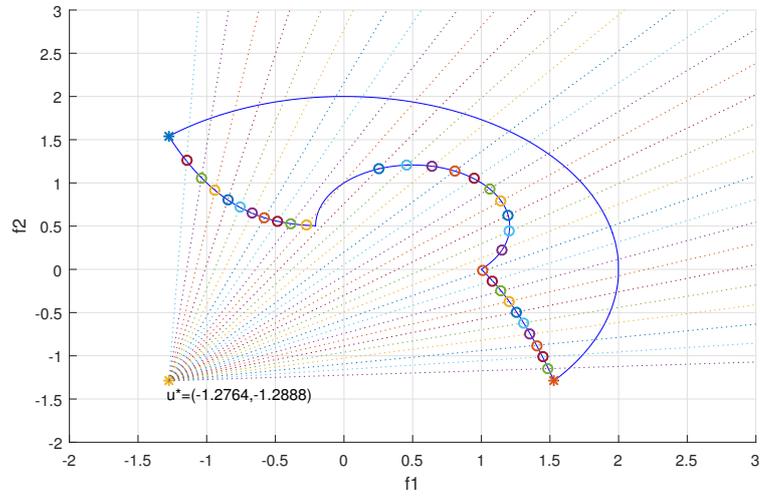
$$\alpha_{\text{mín}} = 0$$

$$\alpha_{\text{máx.}} = 1,5708 \text{ y}$$

$$\Delta\alpha = 0,0507$$

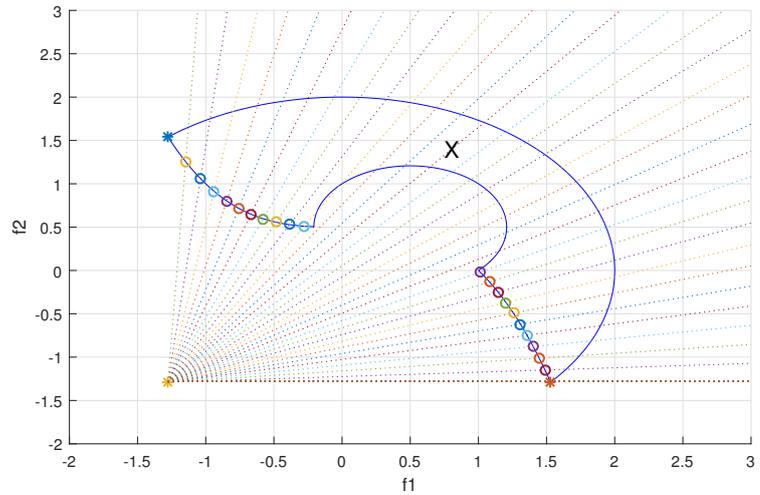
- Paso K: Tenemos que hallar solución de (TR) , es decir, puntos óptimos y puntos no óptimos con la variación de, $\alpha = \alpha_{\text{mín}} + k\Delta\alpha$ y los pesos $w_1 = \sin \alpha$ y $w_2 = \cos \alpha$ de la siguiente manera

Figura 3.6: Construcción de frente de Pareto.



- Paso N: Eliminando los puntos no Pareto,

Figura 3.7: Puntos óptimos de Pareto.



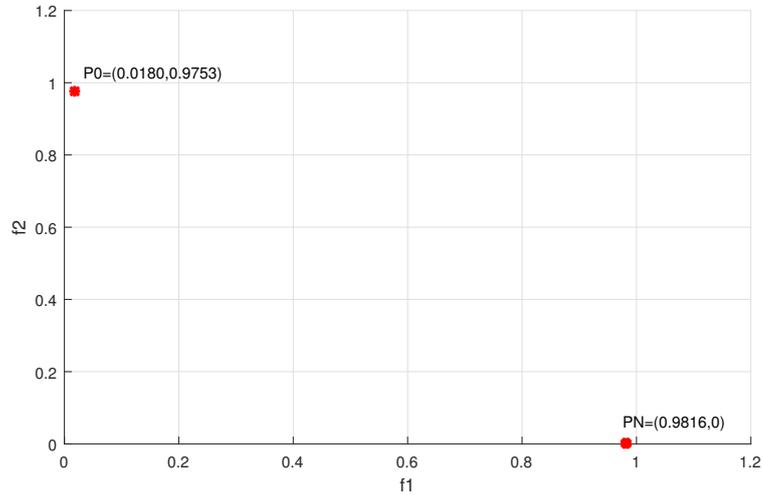
Ejemplo 3.1.3. Ilustramos el algoritmo del método, en el siguiente modelo de optimización biobjetivo. Extraído de (Deb et al., 2002)

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \left\{ 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 (x_i - 0,577)^2\right), 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^3 (x_i + 0,577)^2\right) \right\} \\ &\text{s.a } \quad -0,577 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 0,577 \end{aligned}$$

Se utilizó el programa Matlab para la solución, considerando numero de puntos de Pareto ($n_{pp} = 80$), tenemos la eficacia de la solución del método.

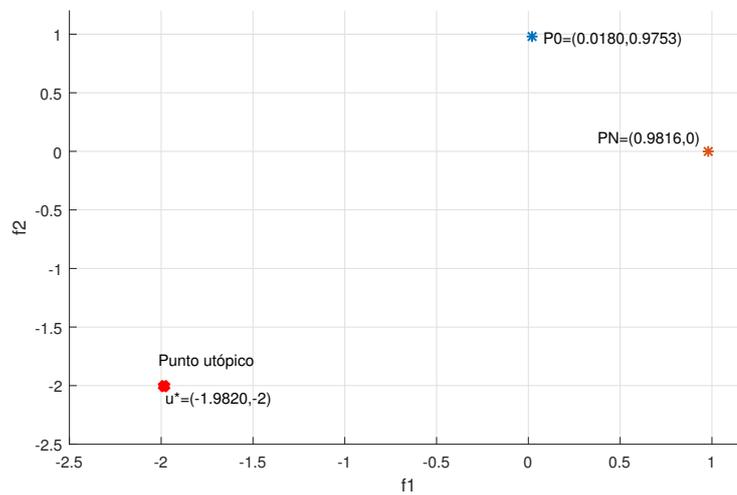
- Paso 1: Para $\epsilon_1 = 2$, $\epsilon_2 = 2$ y $npp = 80$
- Paso 2: Buscamos los puntos extremos de la frente $P^o = (f_1^*, \bar{f}_2)$ y $P^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

Figura 3.8: Búsqueda de los puntos extremos de la frente.



- Paso 3: Sea el punto utópico $u^* = (u_1^*, u_2^*) = (-1,9820, -2,0000)$,

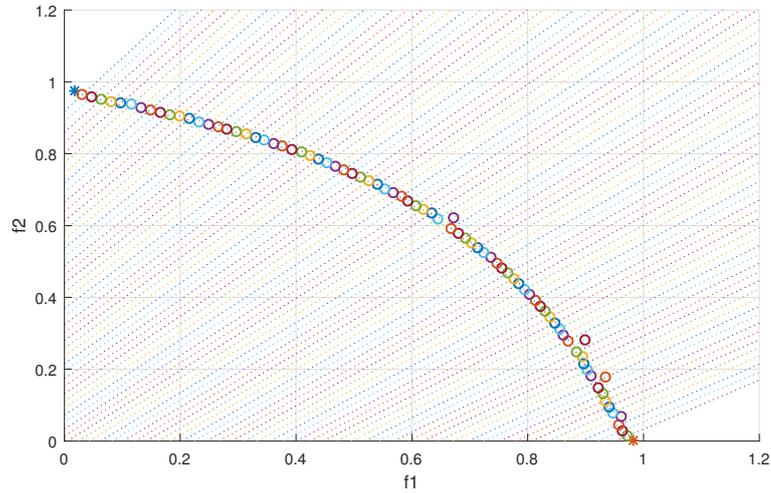
Figura 3.9: Punto utópico.



- Paso 4: Calculamos los ángulos máx. y mín. para la variación de rayos, como:
 $\alpha_{\text{mín}} = 0,5937$
 $\alpha_{\text{máx.}} = 0,9790$ y
 $\Delta\alpha = 0,0048$

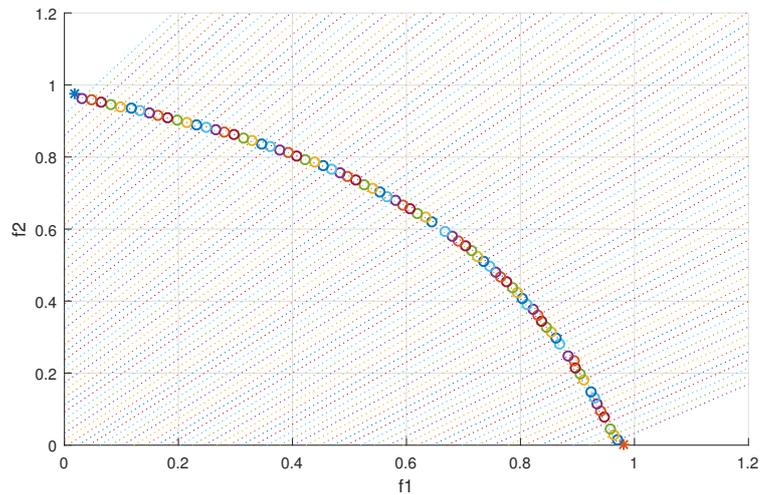
- Paso K: Tenemos que hallar solución de (TR) , es decir, puntos óptimos y puntos no óptimos con la variación de, $\alpha = \alpha_{\min} + k\Delta\alpha$ y los pesos $w_1 = \sin \alpha$ y $w_2 = \cos \alpha$ de la siguiente manera

Figura 3.10: Construcción de frente de Pareto.



- Paso N: Eliminación de los puntos no Pareto y luego tenemos resultado de la construcción de óptimos de Pareto.

Figura 3.11: Puntos óptimos de Pareto.



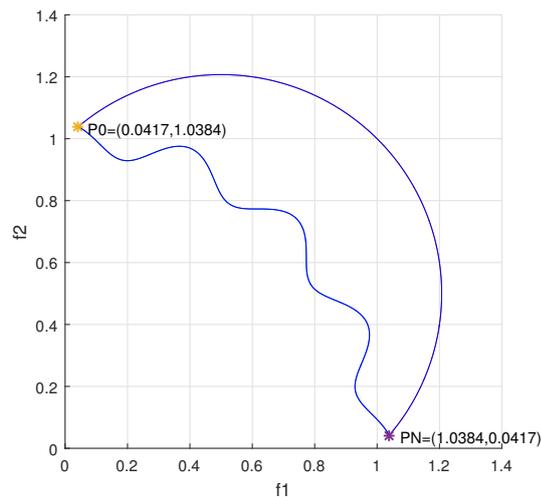
Ejemplo 3.1.4. Ilustramos el algoritmo del método, en el siguiente modelo de optimización biobjetivo. Extraído de (Deb et al., 2002).

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a } & -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0,1\cos(16\arctg(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0 \\ & (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 0,5 \leq 0 \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi \end{aligned}$$

Utilizando el programa Matlab para la solución, para un número de puntos de Pareto ($npp = 30$), tenemos la eficiencia del método de solución.

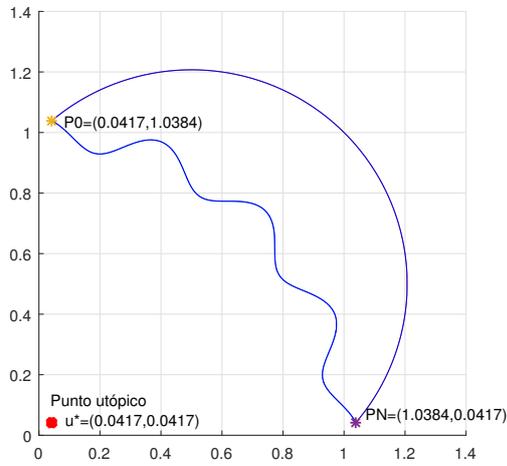
- Paso 1: Para $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ y $npp = 30$
- Paso 2: Buscamos los puntos extremos de la frente $P^o = (f_1^*, \bar{f}_2)$ y $P^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

Figura 3.12: Puntos extremos de la frente.



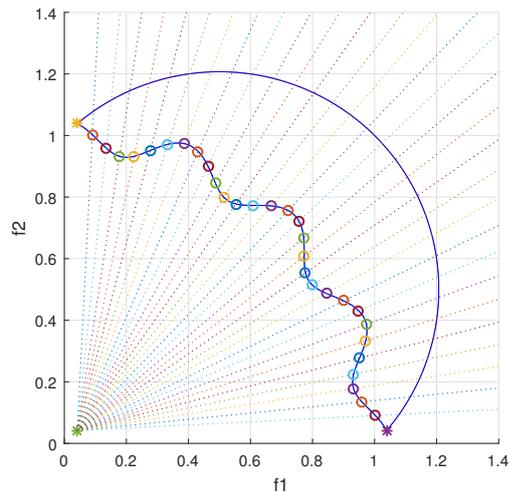
- Paso 3: Sea el punto utópico $u^* = (u_1^*, u_2^*)$,

Figura 3.13: Punto utópico.



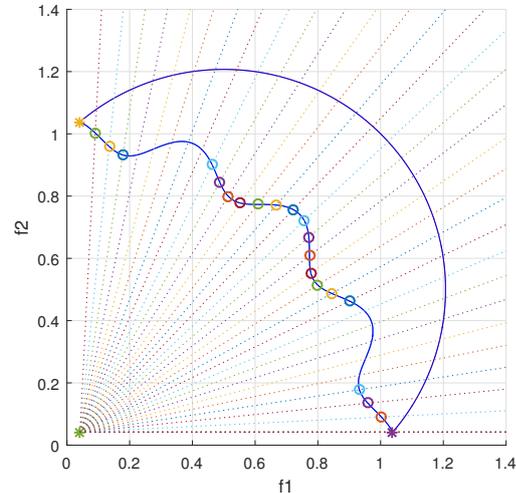
- Paso 4: Calculamos los ángulos máx. y mín. para la variación de rayos, como:
 - $\alpha_{\text{mín}} = 0$
 - $\alpha_{\text{máx.}} = 1,5708$
 - $\Delta\alpha = 0,0507$
- Paso K: Tenemos que hallar solución de (TR) , es decir, puntos óptimos y puntos no óptimos de Pareto con la variación de, $\alpha = \alpha_{\text{mín}} + k\Delta\alpha$ y los pesos $w_1 = \sin \alpha$ y $w_2 = \cos \alpha$ de la siguiente manera

Figura 3.14: Construcción de frente de Pareto.



- Paso N: Eliminar los puntos no Pareto y vemos el resultado en la siguiente figura.

Figura 3.15: Puntos óptimos de Pareto.



Algoritmo del método de restricción ponderada

Describiremos en los siguientes pasos el algoritmo, que implementa la técnica del método de restricción ponderada, para generar una aproximación de frente de Pareto a los problemas conexos y no conexos de optimización de dos objetivos.

- Paso 1 (Inicio)
 - Sea $N = npp$ y escoger un punto utópico $u^* = (u_1^*, u_2^*)$. Hacer $s = 1$
- Paso 2 (Puntos extremos de la Frente)
 - 2.1 Encontrar \bar{x}_0 solución de minimizar $f_1(x)$, $x \in X$
 Hacer $\bar{f}_1 = f_1(\bar{x}_0)$ y $\bar{f}_2 = f_2(\bar{x}_0)$
 Defina $F^o = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$
 - 2.2 Encontrar \bar{x}_f solución de minimizar $f_2(x)$, $x \in X$
 Hacer $\bar{f}_1^* = f_1(\bar{x}_f)$ y $\bar{f}_2^* = f_2(\bar{x}_f)$
 Defina $F^N = (\bar{f}_1^*, \bar{f}_2^*)$
- Paso 3 (Generación de partición de pesos)
 - Defina $w_0 = \frac{\bar{f}_2^* - u_2^*}{[(\bar{f}_1 - u_1^*) + (\bar{f}_2^* - u_2^*)]}$
 - Defina $w_f = \frac{\bar{f}_2 - u_2^*}{[(\bar{f}_1^* - u_1^*) + (\bar{f}_2 - u_2^*)]}$
 - Defina $w_t = w_0 + t \frac{w_f - w_0}{npp}$, $t = 0, 1, \dots, npp$
 - Hacer $t=0$

- Paso 4 (Ciclo)

Hacer $w = (w_1, w_2) := (w_t, 1 - w_t)$

- (a) (i) Encontrar \bar{x}_1 solución de (P_w^1)
- (ii) Encontrar \bar{x}_2 solución de (P_w^2)

- (b) (Determinar los puntos óptimos (débil) de Pareto)

Hacer $s = s + 1$

Si $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \bar{x}$ entonces, defina $F(s) := (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}))$ e ir al paso 5.

sino, uno de los siguientes dos casos es ejecutado.

(i) Si $f_2(\bar{x}_1) \leq f_2(\bar{x}_2)$, entonces $F(s) := (f_1(\bar{x}_1), f_2(\bar{x}_1))$.

(ii) Si $f_1(\bar{x}_2) \leq f_1(\bar{x}_1)$, entonces $F(s) := (f_1(\bar{x}_2), f_2(\bar{x}_2))$.

- Paso 5 (Criterio de parada)

Si $t = npp$, entonces ir al paso 6

sino, defina $t = t + 1$ e ir al paso 4

- Paso 6 (Salida)

Defina $F(s + 1) = F^N$

El algoritmo del método de restricción ponderada ofrece una buena herramienta para la construcción de frente de Pareto para problemas de optimización con dos objetivos, incluidos a los problemas con frente de Pareto no conexo y/o dominio no conexo, con la partición uniforme del intervalo de pesos asociado con funciones objetivos y seleccionado de manera adecuada los puntos utópicos; además es aplicable para problemas con tres o más objetivos, de acuerdo al Teorema 1.3.16 y la proposición 1.3.1, empleando técnicas de generación de cuadrículas de pesos discretos como en (Das and Dennis, 1998; Eichfelder, 2008; Mueller-Gritschneider et al., 2009).

Otro aspecto importante como en el paso 4(a) son resueltos dos problemas para encontrar puntos de Pareto, esto puede parecer una desventaja. Sin embargo, uno debe tener en cuenta para solución del problema en el paso 4(a)(ii), considerando como una suposición inicial al paso 4(a)(i). En el caso que la solución en la etapa 4(a)(i) y 4(a)(ii) son iguales, entonces en la etapa 4(a)(ii) pierde cantidad de insignificante de tiempo computacional. Por otro lado, si la solución en la etapa 4(a)(ii) es diferente de la etapa 4(a)(i), entonces la solución en la etapa 4(a)(ii) también puede ser una solución eficiente, que es verificada en la etapa 4(b), donde los distintos puntos de frente de Pareto generados por el algoritmo podría ser mayor que npp .

La versión del MatLab fue empleada *R2015b* con licencia 838860 instalada en una computadora Intel(R) Core (TM)i5-3337U CPU, Memoria instalada(RAM) 4,00 GB con sistema operacional de 64bits.

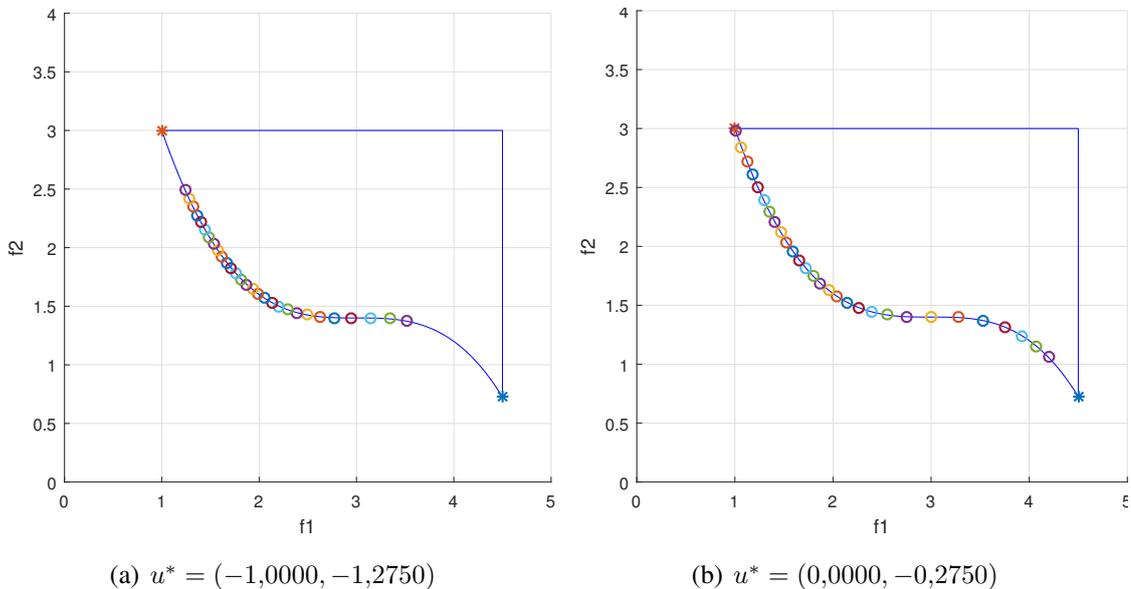
Ejemplos numéricos del método de restricción ponderada

Ejemplo 3.1.5. Ilustramos el método de restricción ponderada, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } 5(x_2 - 1) + (x_1 - 3)^3 \geq 2 \\ & \quad x_1 - 4,5 \leq 0 \\ & \quad x_2 - 3 \leq 0 \end{aligned}$$

Para la solución, se utilizó el programa Matlab, para un $npp = 30$ y vamos ver el comportamiento de la construcción de la frente de Pareto cuando es tomada diferentes puntos utópicos de la siguiente forma.

Figura 3.16: Frente de Pareto / Ejemplo 3.1.5.



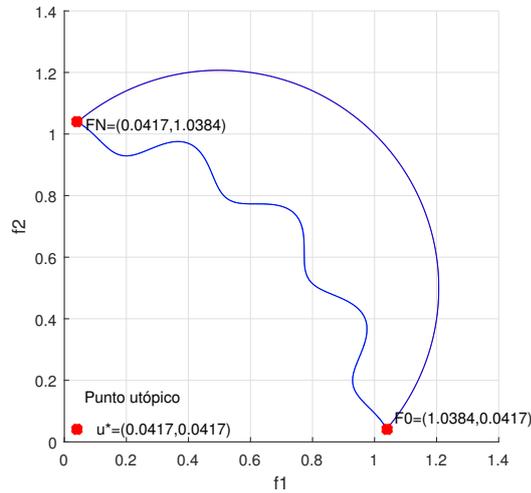
Ejemplo 3.1.6. Ilustramos el método de restricción ponderada, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ & \text{s.a } -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 0,1\cos(16\arctg(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0 \\ & \quad (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 0,5 \leq 0 \\ & \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi \end{aligned}$$

Para la solución, se utilizó el programa Matlab, para un $npp = 30$ y vamos ver el comportamiento de la construcción de la frente de Pareto cuando es tomada diferentes puntos utópicos de la siguiente forma. Tenemos la solución del ejemplo con el algoritmo del método paso por paso.

- Paso 1: Para $npp = 30$ y punto utópico $u^* = (0,0417, 0,0417)$
- Paso 2: Buscamos los puntos extremos del frente $F^o = (f_1^*, \bar{f}_2)$ y $F^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

Figura 3.17: Búsqueda de los puntos extremos de la frente.



- Paso 3: Generación de la partición de pesos para $w_o = -3,5980e - 05$, $w_f = 1,0000$ con $w_t = w_o + t \frac{w_f - w_o}{npp}$, $t = 0, 1, \dots, npp$.
- Paso 4: Generación de puntos para la construcción de frente de Pareto para (P_w^1) y (P_w^2) , respectivamente,

Figura 3.18: Generación de puntos de Pareto para (P_w^1) .

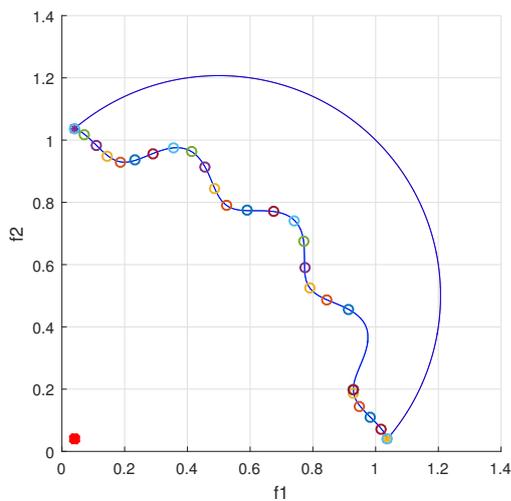
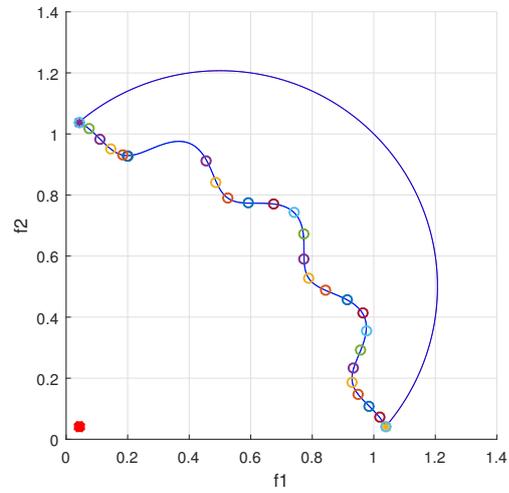
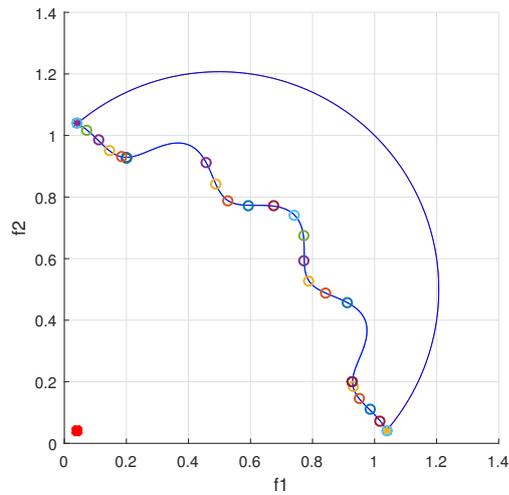


Figura 3.19: Generación de puntos de Pareto para (P_W^2) .



Luego, determinar los puntos óptimos (débil) de Pareto

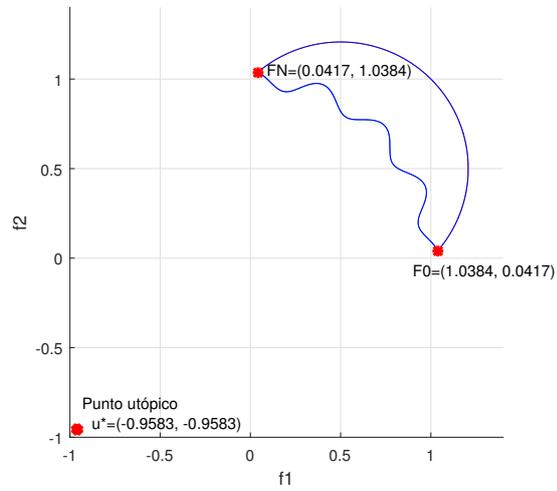
Figura 3.20: puntos óptimos (débil) de Pareto.



Ahora vamos a tomar como punto utópico a $u^* = (-0,0383, -0,0383)$ y veamos la solución de esta,

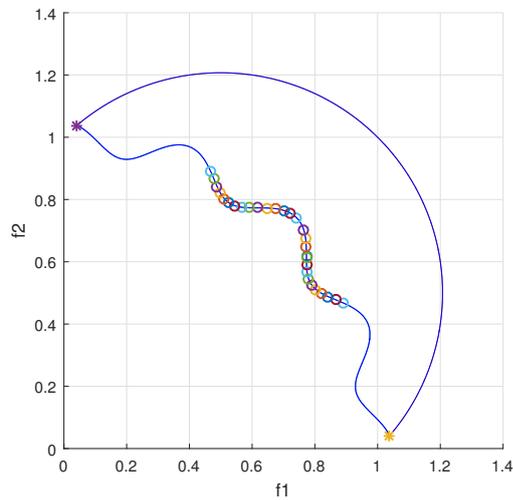
- Paso 1: Para $npp = 30$ y punto utópico $u^* = (-0,9583, -0,9583)$.
- Paso 2: Buscamos los puntos extremos del frente $F^\circ = (f_1^*, \bar{f}_2)$ y $F^N = (\bar{f}_1, f_2^*)$

Figura 3.21: puntos extremos del frente.



- Paso 3: Generación de la partición de pesos para $w_o = 0,3337$, $w_f = 0,6667$ con $w_t = w_0 + t \frac{w_f - w_0}{npp}$, $t = 0, 1, \dots, npp$.
- Paso 4: Generación de puntos óptimos (débil) de Pareto para (P_w^1) y (P_w^2) , en este caso tenemos, $(P_w^1) = (P_w^2)$, sería pérdida de tiempo hacer calcular, (P_w^2) , por tanto, se concluye.

Figura 3.22: Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^1 y (P_w^2) .



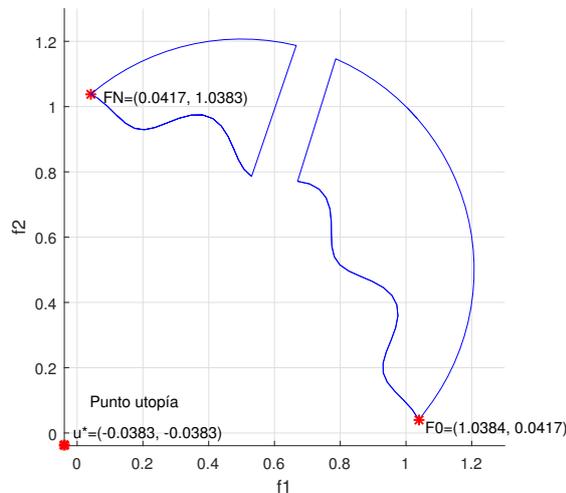
Ejemplo 3.1.7. Ilustramos el método de restricción ponderada, aplicando el siguiente modelo de optimización biobjetivo,

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \{x_1, x_2\} \\ \text{s.a } & -x_1^2 - x_2^2 + 1 + 1,01\cos(16\arctan(\frac{x_1}{x_2})) \leq 0, \\ & (x_1 - 0,5)^2 + (x_2 - 0,5)^2 - 0,5 \leq 0,5, \\ & 1,69x_1^2 + 1,01x_2^2 - 2,6x_1x_2 - 0,02 \geq 0, \\ & 0 \leq x_1, x_2 \leq \pi. \end{aligned}$$

Para la solución, se utiliza el programa Matlab, tomando punto utópico como punto fijo $u^* = (-0,0383, -0,0383)$ y vamos ver el comportamiento de la construcción de la frente de Pareto cuando se varía npp de la siguiente forma. Vamos solucionar paso a paso de este ejemplo de optimización utilizando algoritmo del método.

- Paso 1: Para $npp = 15$ y punto utópico $u^* = (-0,0383, -0,0383)$.
- Paso 2: Buscar los puntos extremos del frente F^o y F^N ,

Figura 3.23: puntos extremos del frente de Pareto.



- Paso 3: Generación de la partición de pesos para $w_o = 0,0692$, $w_f = 0,9308$ con $w_t = w_o + t \frac{w_f - w_o}{npp}$, $t = 0, 1, \dots, npp$.
- Paso 4: Generación de puntos para la construcción de frente de Pareto para (P_w^1) y (P_w^2) , respectivamente,

Figura 3.24: Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^1 .

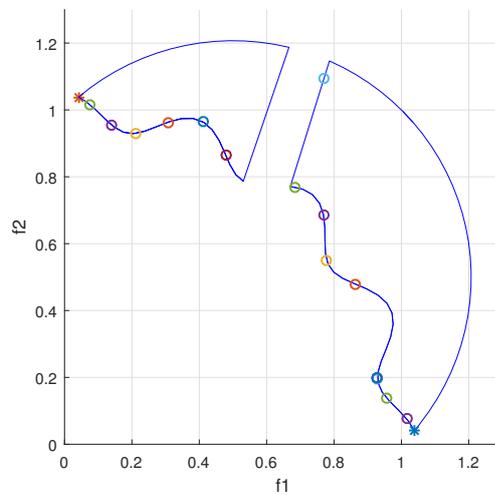
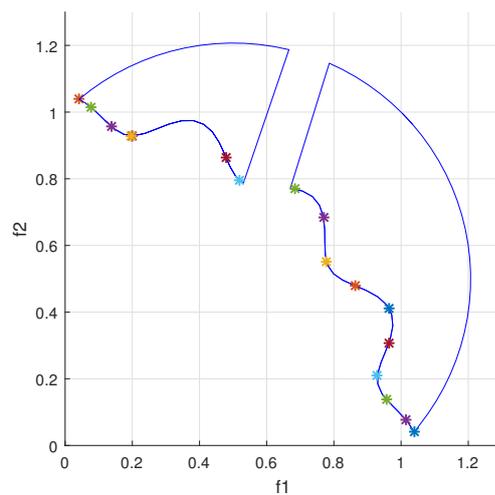
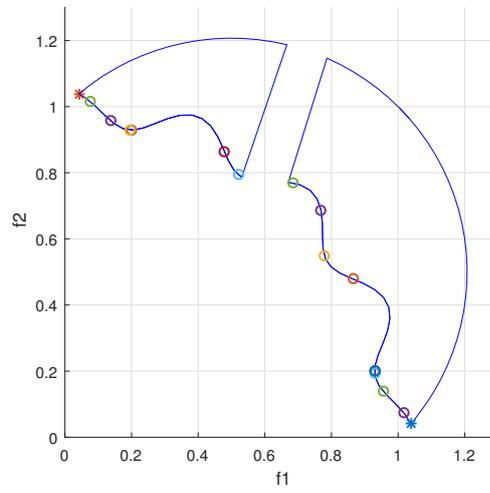


Figura 3.25: Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^2 .



Finalmente tenemos paso 4 (b). Solución de la construcción de frente de Pareto en problemas no conexos,

Figura 3.26: puntos óptimos (débil) de Pareto.



Para el mismo ejemplo, tenemos para $npp = 6$ con punto utopía $u^* = (-0,0383, -0,0383)$,

- Los pasos 1, 2 y 3 son los mismos como anterior.
- Paso 4: Generación de puntos óptimos (débil) de Pareto para (P_w^1) y (P_w^2) , respectivamente,

Figura 3.27: Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^1 .

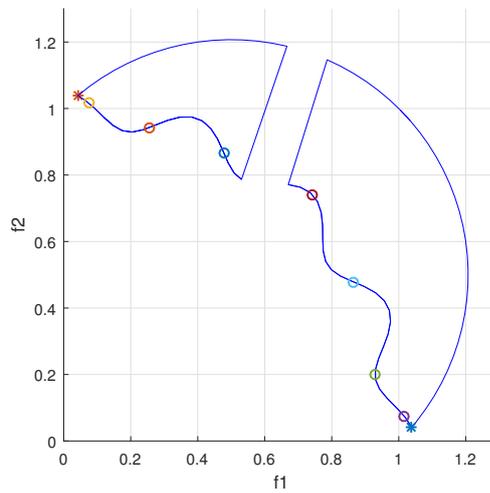
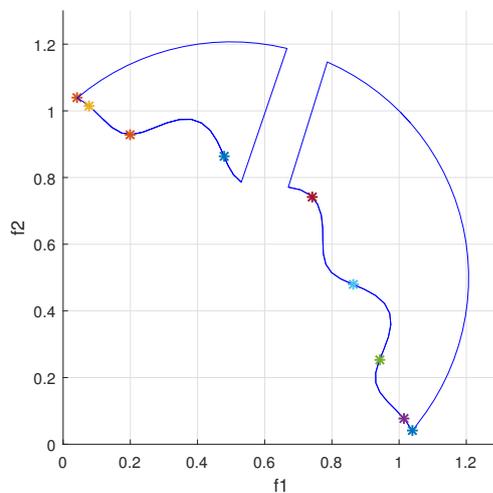
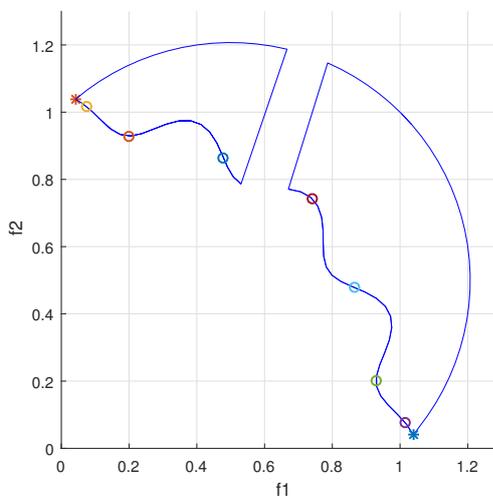


Figura 3.28: Generación de puntos óptimos de Pareto para P_w^2 .



Por lo tanto, tenemos paso 4 (b). Solución de la construcción de frente de Pareto en problemas no conexos,

Figura 3.29: puntos óptimos (débil) de Pareto.



3.2. Discusiones

1. Esta tesis puede ser considerado como un avance importante en la extensión de los métodos de escalarización para la solución de problemas de optimización multi-objetivos, las cuales según estudios recientes, modelan de manera eficiente como ejemplo 3.1.2.
2. En la bibliografía existente sobre optimización multi-objetivo conexos y no conexos muestran las definiciones, proposiciones y teoremas pero no da un algoritmo claro para minimizar o maximizar. En la tesis hemos dado una interpretación y mostrado los conceptos de solución eficiente con ejemplos sencillos.
3. Se presentó, los métodos de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos y el método de restricción ponderada. Observamos que son mejores para solución de problemas de optimización multi-objetivos que los métodos antecedentes como por ejemplo sumas ponderadas, que no es buena en los problemas no convexos y método de escalarización de Tchebychev que puede ser aplicado a los problemas conexos y no conexos y conforme a la selección del punto utópico, puede llevar a resultados pobres, además de producir un problema escalar no diferenciable mismo si el problema original fuera.
4. En este trabajo de tesis, dejamos las bases para un posible trabajo futuro.

Conclusiones y Recomendaciones

En el contexto de la optimización multi-objetivo, la construcción de frente de Pareto ofrecemos un conjunto de soluciones que al principio parecen ser indiferentes en el sentido de no tener una mejoría que las otras con los diferentes métodos de escalarización, esto es, la determinación de los diversos soluciones de puntos óptimos (débil) de Pareto.

- Se determinó la construcción de frente de Pareto conexo con los métodos de escalarización. El método más eficiente según analizado con los diferentes ejemplos es el método de escalarización de Tchebychev a lo largo de rayos. Se ha analizado el método en la cual se asume que las funciones de restricciones y objetivo son continuamente diferenciables y bajo estas condiciones, se muestra que este método es eficiente.
- Determinó y se analizó detalladamente con los ejemplos sencillos para la construcción de frente de Pareto en los problemas no conexos. Dado que, el método de restricción ponderada es eficiente que los otros métodos de escalarización, donde existen problemas de optimización multi-objetivos no conexos.
- Se implementan algoritmos computacionales de cada método de escalarización para resolución de problemas, utilizando el software MATLAB.

En el periodo de realización de esta tesis, se encontró algunas cuestiones que no se resolvió y que esperamos desarrollar en futuros trabajos. Enfatizamos las siguientes recomendaciones:

- El siguiente paso como futuro trabajo sería implementar un algoritmo que involucre tres o más funciones objetivos, claro los resultados teóricos para cualquier número de funciones objetivos son tratados en este trabajo.
- Implementar teórico y computacional los métodos estudiados con las funciones no diferenciables.
- Aplicar los métodos estudiados a un problema real.
- Implementar condiciones de optimalidad con funciones no diferenciables.

Referencias Bibliográficas

- Ávila, S. L. et al. (2006). Otimização multiobjetivo e análise de sensibilidade para concepção de dispositivos: aplicação: síntese de antenas refletoras para comunicação via satélite.
- Burachik, R. S., Freire, W., and Kaya, Y. (2014a). Interior epigraph directions method for nonsmooth and nonconvex optimization via generalized augmented lagrangian duality. *Journal of Global Optimization*, 60(3):501–529.
- Burachik, R. S., Gasimov, R., Ismayilova, N., and Kaya, Y. (2006). On a modified subgradient algorithm for dual problems via sharp augmented lagrangian. *Journal of Global Optimization*, 34(1):55–78.
- Burachik, R. S. and Kaya, Y. (2007). An update rule and a convergence result for a penalty function method. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 3(2):381.
- Burachik, R. S. and Kaya, Y. (2010). A deflected subgradient method using a general augmented lagrangian duality with implications on penalty methods. In *Variational Analysis and Generalized Differentiation in Optimization and Control*, pages 109–132. Springer.
- Burachik, R. S., Kaya, Y., and Mammadov, M. (2010). An inexact modified subgradient algorithm for nonconvex optimization. *Computational Optimization and Applications*, 45(1):1–24.
- Burachik, R. S., Kaya, Y., and Rizvi, M. (2014b). A new scalarization technique to approximate pareto fronts of problems with disconnected feasible sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 162(2):428–446.
- Das, I. and Dennis, J. (1998). Normal-boundary intersection: A new method for generating the pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. *SIAM journal on optimization*, 8(3):631–657.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., and Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: Nsga-ii. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2):182–197.
- Dutta, J. and Kaya, Y. (2011). A new scalarization and numerical method for constructing the weak pareto front of multi-objective optimization problems. *optimization*, 60:1091–1104.

- Eichfelder, G. (2008). *Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization*, volume 436. Springer.
- Eichfelder, G. (2009a). An adaptive scalarization method in multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 19(4):1694–1718.
- Eichfelder, G. (2009b). Scalarizations for adaptively solving multi-objective optimization problems. *Computational Optimization and Applications*, 44(2):249.
- Lagarias, J., Reeds, J., Wright, M., and Wright, P. (1998). Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on optimization*, 9(1):112–147.
- Miettinen, K. (1998). *Nonlinear multiobjective optimization*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Mueller-Gritschneider, D., Graeb, H., and Schlichtmann, U. (2009). A successive approach to compute the bounded pareto front of practical multiobjective optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 20(2):915–934.
- Ogryczak, W. (2001). Comments on properties of the minmax solutions in goal programming. *European Journal of Operational Research*, 132(1):17–21.

MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	HIPÓTESIS GENERAL	VARIABLE INDEPENDIENTE
¿Cómo construir el frente de Pareto conexo y no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación?	Determinar la construcción de frente de Pareto conexo y no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación.	Existen condiciones necesarias y suficientes para la construcción de frente de Pareto conexo y no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación.	Funciones diferenciables.
PROBLEMAS ESPECÍFICO	OBJETIVO ESPECÍFICO	HIPÓTESIS ESPECÍFICO	VARIABLE DEPENDIENTE
<ol style="list-style-type: none"> 1. ¿Cómo construir el frente de Pareto conexo en problemas de optimización con dos objetivos y programación? 2. ¿Cómo construir el frente de Pareto no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación? 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Determinar la construcción de frente de Pareto conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación. 2. Determinar la construcción de frente de Pareto no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Existen condiciones necesarias y suficientes para la construcción de frente de Pareto conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación. 2. Existen condiciones necesarias y suficientes para la construcción de frente de Pareto no conexo con los métodos de escalarización en problemas de optimización con dos objetivos y programación. 	Óptimo (débil) de Pareto.

**UNSCH**FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

“Año del Bicentenario del Perú: 200 años de Independencia”

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 050-2021-FIMGC

En la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **Resolución Decanal N° 617-2021-FIMGC-D**, siendo doce días del mes de noviembre del 2021, a horas 11.00 a.m.; se reunieron los jurados del acto de sustentación, en el Auditorium virtual google meet del Campus Universitario de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.

Siendo el Jurado de la sustentación de tesis compuesto por el Presidente el **Mg. José Carlos JUAREZ PULACHE**, Jurado la **Mg. María Jacqueline ATOCHE BRAVO**, Jurado – Asesor el **Mg. Juan Alfredo HUAMANCHAQUI QUISPE** y Secretario del proceso **Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR**, con el objetivo de recepcionar la sustentación de la tesis denominada “**CONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE PARETO CON MÉTODOS DE ESCALARIZACIÓN EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON DOS OBJETIVOS**”, sustentado por el Bachiller, **FACTOR RISCO GUILLEN**; Bachiller en **Ciencias Físico Matemáticas**.

El Jurado luego de haber recepcionado la sustentación de la tesis y realizado las preguntas, el sustentante al haber dado respuesta a las preguntas, y el Jurado haber deliberado; califica con la nota aprobatoria de **16 (Dieciséis)**.

En fe de lo cual, se firma la presente acta, por los miembros integrantes del proceso de sustentación.

JUAREZ PULACHE JOSE CARLOS
jose.juarez@unsch.edu.pe
Fecha: 12/11/2021 12:37
Firmado con www.tocapu.pe

Mg. José Carlos JUAREZ PULACHE
Presidente

Firmado digitalmente
por ATOCHE BRAVO
MARIA JACQUELINE
Fecha: 2021.11.12
12:14:38 -05'00'

Mg. María Jacqueline ATOCHE BRAVO
Jurado

Mg. Juan Alfredo HUAMANCHAQUI QUISPE
Jurado - Asesor

Firmado digitalmente
por LEZAMA
CUELLAR CHRISTIAN

Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR
Secretario del Proceso



UNSCH

FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

“Año del Bicentenario del Perú: 200 años de Independencia”

CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la UNSCH y Resolución Decanal N° 158-2021-FIMGC-UNSCH-D, deja constancia que Sr./Srta.

Apellidos y Nombres : RISCO GUILLEN, Factor

Escuela Profesional : CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Título de la Tesis : CONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE PARETO CON MÉTODOS DE ESCALARIZACIÓN EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON DOS OBJETIVOS

Evaluación de la Originalidad : **09** % Índice de Similitud

Por tanto, según los artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

Ayacucho, 08 de noviembre del 2021

Firmado digitalmente
por LEZAMA
CUELLAR CHRISTIAN

Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR

Verificador de Originalidad de Trabajos de Tesis de Pregrado
de la FIMGC

Numero de constancia: **147-2021-FIMGC**.

(X) Con depósito para Sustentación y Tramite de Titulo

CONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE PARETO CON MÉTODOS DE ESCALARIZACIÓN EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON DOS OBJETIVOS

por Factor Risco Guillen

Fecha de entrega: 08-nov-2021 12:14a.m. (UTC-0500)

Identificador de la entrega: 1696309917

Nombre del archivo: Tesis_Factor,_RISCO_GUILLEN.pdf (3.53M)

Total de palabras: 17720

Total de caracteres: 77998

CONSTRUCCIÓN DE FRENTE DE PARETO CON MÉTODOS DE ESCALARIZACIÓN EN PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON DOS OBJETIVOS

INFORME DE ORIGINALIDAD

9%

INDICE DE SIMILITUD

9%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

1%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.ufjf.br Fuente de Internet	3%
2	bibcyt.ucla.edu.ve Fuente de Internet	1%
3	mafiadoc.com Fuente de Internet	1%
4	Submitted to Universidad Autónoma Metropolitana-Xochimilco Trabajo del estudiante	1%
5	revistas.ujat.mx Fuente de Internet	<1%
6	docobook.com Fuente de Internet	<1%
7	Shashi Kant Mishra, Giorgio Giorgi. "Chapter 6 Invex Functions in Multiobjective Programming", Springer Science and Business Media LLC, 2008 Publicación	<1%

8	tel.archives-ouvertes.fr Fuente de Internet	<1 %
9	sedici.unlp.edu.ar Fuente de Internet	<1 %
10	Submitted to Indian Institute of Technology Goa Trabajo del estudiante	<1 %
11	repositoriosdigitales.mincyt.gob.ar Fuente de Internet	<1 %
12	hdl.handle.net Fuente de Internet	<1 %
13	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
14	repositorio.ufsc.br Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias < 30 words

Excluir bibliografía

Activo