UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO - MATEMÁTICAS

Existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt

Tesis para optar el título profesional de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática

Presentado por:

Bach. Ruben, Tomaylla Mendieta

Asesor:

Mg. Adrian, Allaucca Paucar

Ayacucho - Perú

2023

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi madre Emiliana, que desde cielo ha sido mi motivación.

AGRADECIMIENTOS

Primero agradezco a Dios, por darme la oportunidad de concluir “esta etapa de mi vida”.

Segundo agradezco a mi familia, a mis hermanos (as) y amigos de verdad quienes, con su cariño apoyo incondicional y paciencia supieron llenarme de fuerzas desde el inicio de este proyecto de vida hasta el día de hoy y con quienes estoy seguro, que contaré por siempre, a mamá Téofila Ramirez Noa y toda la familia Rivera Ramirez, por la ayuda y incentivo que me dió en los momentos más difíciles de mi vida, para poder terminar este desafío.

Finalmente, dejo en constancia de mi agradecimiento a mi asesor de tesis, profesor Adrián Allaucca Paucar por la paciencia y dedicación que me brindó de este trabajo de tesis, así mismo agradezco a mi amigo Factor Risco Guillen por su extraordinaria amistad, por su gran ayuda y a todos los docentes de la escuela de ciencias físico matemáticas por mi formación profesional.

RESUMEN

En este trabajo de investigación se estudia la existencia y unicidad de la solución local de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt del sistema definido sobre el intervalo (0, L); El objetivo de este trabajo es establecer condiciones para garantizar la existencia y unicidad de la solución local del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, por medio de la teoría de los semigrupos. El estudio se realiza a partir de sistema de ecuaciones diferenciales (EDP). Primero analizamos la existencia y luego la unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, del C_0 - semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Se concluye que bajo las condiciones; $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ es disipativo y $0 \in \rho(\mathcal{A})$ se garantiza la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a campos de temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.

Palabras clave: Materiales porosos, semigrupo, Kelvin - Voigt.

ABSTRACT

This research paper studies the existence and uniqueness of the local solution of the solution of the system associated with temperature and porosity in a Kelvin-Voigt-type mixture of the system defined on the interval (0, L); The objective of this work is to establish conditions to guarantee the existence and uniqueness of the local solution of the system associated with temperature and porosity in a Kelvin - Voigt type mixture, through the theory of semigroups. The study is carried out from the system of differential equations (EDP). First we analyze the existence and then the uniqueness of the solution of the system associated to temperature and porosity in a mixture of the Kelvin - Voigt type, of the C_0 - semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. It is concluded that under the conditions; $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ is dissipative and $0 \in \rho(\mathcal{A})$ is guaranteed to exist and unique of the solution of the system associated with fields of temperature and porosity in a mixture of the Kelvin - Voigt type.

Keywords: Porous materials, semigroup, Kelvin - Voigt

Índice general

NOTACIÓN

$\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ es el cuerpo real y $\mathbb{C}$ es el complejo

$\|.\|$: Es la norma en el espacio de Banach

$\mathcal{L}(X, Y)$: Conjuntos de operadores lineales del espacio X en Y

$B(X, Y)$: Familia de operadores lineales acotados del espacio X en Y

$B(X, X)$: Espacio de operadores lineales y continuas en el espacio normado $(X, \|.\|)$

$\rho(\mathcal{A})$: Conjunto resolvente del operador $\mathcal{A}$

$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda, A)$: Familia de operadores lineales acotados

C_0^∞: Funciones de prueba

$\mathcal{H}$: Es el espacio de fase (Hilbert)

$\langle ., . \rangle$: Producto interno dada en $\mathcal{H}$

$L^p(\Omega)$: Espacios L^p de omega, $1 \leq p < \infty$

D^α: Derivada distribucional de orden α

$D^{'}(\Omega)$: Espacio de las distribuciones

$W^{m,p}(\Omega)$: Espacios de Sóbolev

∇u: Gradiente de **u**

$\{T(t)\}_{t \geq 0}$: Semigrupo de operadores lineales o (simplemente semigrupo)

C_0: (Semigrupos de clase C_0)

u_{xx}: Describe los campos de porosidad en el espacio

u_{tt}: Describe los campos de porosidad en el tiempo

w_{xx}: Describe los campos de porosidad en el espacio

w_{xxt}: Describe la interacción entre la temperatura y los campos de porosidad en el espacio y tiempo

θ_{xx}: Describe la interacción de la temperatura

u_t: Describe a los materiales porosos

w_t: Describe a los materiales porosos

u_{xxt}: Describe la interacción entre la temperatura y los campos de porosidad en el espacio y tiempo

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se estudiará la interacción entre la temperatura de campo y los materiales porosos de Kelvin - Voigt. En la actualidad la teoría de las mezclas porosas ha sido investigada por varios autores (Ieşan and Nappa, 2008), (D. Ieşan, 2002), (Martínez, 1995) y (Ieşan and Quintanilla, 2007) y se continua con su estudio pues tiene la atención de los investigadores que trabajan en las áreas, tales como: "ingeniería de perforación de petróleo por métodos térmicos, eliminación de desechos nucleares y otras".

Para abordar nuestro estudio sobre la existencia y unicidad de la solución local del sistema asociado a una mezcla homogénea e isotrópica de materiales porosos de Kelvin - Voigt. Para el estudio del trabajo es fundamental conocer los conceptos básicos de análisis funcional como: espacio normado, espacios $L^p(\Omega)$, espacios de Sóbolev, teoría de distribuciones, ecuaciones diferenciales parciales, teoría de semigrupos, teoremas de Hille - Yosida y Lummer - Phillips. Enfatizamos que la teoría de semigrupos surge como una teoría alternativa al observar que los "métodos clásicos" presentan dificultades para resolver ecuaciones en derivadas parciales (EDP). A partir del sistema lineal unidimensional establecida en (Ieşan and Quintanilla, 2007), del paper investigado por los autores: Margareth S. Alves, Jaime E. Muñoz Rivera, Mauricio Sepúlveda y Octavio Vera. Consideremos el siguiente sistema a estudiar.

Dado los campos u, w y θ en ausencia de cargas corporales están dadas por el sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}u_{xxt} - b_{12}w_{xxt} + \alpha(u-w) + \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_1\theta_{xx} - \beta_1\theta = 0,\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty); \\ \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}u_{xxt} - b_{22}w_{xxt} - \alpha(u-w) - \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_2\theta_{xx} - \beta_2\theta = 0,\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty); \\ \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + k_1 u_{xxt} + k_2 w_{xxt} + \beta_1 u_t + \beta_2 w_t = 0;\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty). \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{(Condiciones iniciales)} \\ u(x,0) = u_0, u_t(x,t) = u_1, w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \theta(x,0) = \theta_0; \\ x \in (0,L). \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{(Condiciones de frontera)} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, w(0,t) = w(L,t) = 0, \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0; \\ t \in (0,\infty). \end{array}\right. \tag{0.1}$$

.

El sistema (0.1) será transformado mediante el cambio de variable a un "problema de Cauchy abstracto de la forma":

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0, \forall t > 0. \end{array}\right. \tag{0.2}$$

donde $\mathcal{A}$ es un operador diferencial no acotado. Para el sistema (0.2) (Huang, 1985), fue uno de los primeros en presentar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad del semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en el espacio de Hilbert. En este sentido, mencionamos las obras (Alves, 2009a), (Alves, 2009b) y (Quintanilla, 2005). En (Quintanilla, 2005), los autores investigan la existencia - unicidad y el comportamiento asintótico de soluciones del problema de Cauchy abstracta para mezclas unidimensionales.

La siguiente tesis está estructurada en 4 capítulos:

El Capítulo 1, presenta conceptos preliminares como: espacios L^p; espacios de Sóbolev, operadores lineales: acotados y no acotados, definiciones básicas sobre la teoría de semigrupos, teoremas como: Hille - Yosida, Lummer - Phillips y Lax - Milgram.

El capítulo 2, describe la metodología de la tesis.

El capítulo 3, presenta las bases teóricas que describen la resolución propiamente del problema planteado, primeramente demostrando la existencia y luego la unicidad de la solución del sistema (0.1), “usando el método de la teoría de C_0 - semigrupos” para un $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ asociada al modelo de campos de temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.

En el capítulo 4, se presentan las conclusiones y las recomendaciones.

CAPITULO I: MARCO TEÓRICO

1.1. Antecedentes

Para demostrar que el tema tiene relevancia en la investigación se verificó los antecedentes en los medios virtuales e impresos de la siguiente manera.

Antecedentes internacionales

Carlos Arrieta (2017) en su tesis: " Análisis teórico y experimental de la combustión de mezclas CH_4 - Syngas en un quemador de medio poroso inerte". UA - COLOMBIA. En este trabajo de tesis doctoral, el objetivo general es estudiar sobre los combustibles alternativos energéticos y técnicas que consisten en estabilizar una llama de premezcla al interior y sobre la superficie de un medio poroso inerte. Y concluye que para los dos modos de combustión (combustión estabilizada en la superficie y combustión sumergida) evaluados se observó que los comportamientos sobre su estabilidad, de lo cual resulta en un incremento en los niveles de temperatura en la superficie del quemador.

Ignacio Zenteno (2016) en su tesis: "Generación de entropía en un flujo MHD de un Nanofluido a través de un canal poroso". UNICACH - MÉXICO. En este trabajo de tesis de maestría, el objetivo general es estudiar los efectos que tienen el deslizamiento en la interface fluido - pared y las condiciones térmicas sobre la transferencia de calor. Y Concluye sobre las soluciones de las ecuaciones de balance de momento y energía para la obtención, de los campos de temperatura y velocidad.

Antecedentes nacionales

Los antecedentes nacionales se encuentran según las investigaciones.

Leonardo Aguilar (2017) en su tesis: "Estabilidad exponencial de componentes viscoso con mecanismo friccional". UNMSM - PERÚ. En este trabajo de licenciatura, el objetivo general fue estudiar que el operador disipativo es muy importante para la estabilidad exponencial. " Y Concluye sobre la presencia de diferentes mecanismos disipativos que actúan sobre una viga o una barra, el orden de las componentes es muy importante para la estabilidad exponencial".

Rocío Rivera (2017) en su tesis: "Generalización de la ecuación de la onda para **n** disipaciones puntuales". UNPRG - PERÚ. En este trabajo de licenciatura, el objetivo general es estudiar las aplicaciones y mecanismos disipativos puntuales para mejorar la estabilidad. " Y Concluye que los puntos disipativos puntuales, producen la estabilidad fuerte, si agregamos **n** disipaciones, lo importante es la posición de dichos puntos, más no la cantidad".

Milton A. Aycho (2013) en su tesis: "pre - semigrupos de operadores lineales: problema de Cauchy abstracto". UNMSM - PERÚ. En este trabajo de licenciatura, el objetivo general es estudiar el control exponencial empleando el concepto de conjunto resolvente de un operador. " Y Concluye que las propiedades asociadas al control exponencial es un resultado de la convergencia de una sucesión de pre - semigrupos".

1.2. Conceptos preliminares

En este primer capítulo desarrollaremos conceptos, propiedades y teoremas importantes del análisis funcional.

Definición 1.2.1. *Sea un conjunto $E \neq \emptyset$ se llama espacio vectorial respecto al cuerpo $\mathbb{K}$ en la que están definidas dos aplicaciones, suma y multiplicación por un escalar*

$$+ : E \times E \to E$$

(respecto a la suma) y

$$\bullet : \mathbb{K} \times E \to E$$

(multiplicación por escalar) esto

$$\forall\, p, q, r \in E$$

y para todo

$$\alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

se verifica lo siguiente:

$a)\ (p + q) + r = p + (q + r);$

$b)\ p + q = q + p;$

$c)\ Existe\ un\ \text{único}\ elemento\ 0 \in E,\ tal\ que\ 0 + p = p;$

$d)\ \forall p \in E, \exists - p \in E,\ tal\ que\ p + (-p) = 0;$

$e)\ \alpha(p + q) = \alpha p + \beta q;$

$f)\ (\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p;$

$g)\ (\alpha\beta)p = \alpha(\beta p);$

$h)\ 1.p = p.$

Definición 1.2.2. *Sea E un espacio vectorial y $M \subset E$, diremos que M es un subespacio vectorial de E, si y sólo si, para cualesquiera p, q $\in$ M; para $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se cumple lo siguiente αp+βq $\in$ M. (Hoffman, 1979).*

Definición 1.2.3. *Un espacio métrico es un par (X , d), X un conjunto arbitrario y d sobre X es una aplicación llamada distancia o métrica*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

se verefica las siguientes propiedades:

$a)\ d(m, n) \geq 0\ \forall m, n \in X;$

$b)\ d(m, n) = 0,\ si\ y\ \text{sólo}\ si,\ m = n;$

$c)\ d(m, n) = d(m, n)\ \forall\ m, n\ \in X;$

$d)\ d(m, n)\ \leq\ d(m, p) + d(p, n)\ \ \forall\ m, n, p\ \in X\ (Desigualdad\ triangular).$

(Lima, 1976).

1.2.1. Espacio Normado

Definición 1.2.4. *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, una norma sobre X es una aplicación*

$$\|.\| : X \to X$$

verificando las siguientes propiedades:

$a)$ $\|m\| \geq 0,\ \forall\, m \in X\ (positividad)\ y\ \|m\| = 0,\ si\ y\ sólo\ si,\ m = 0.$

$b)$ $\|\alpha m\| = |\alpha|\|m\|,\ \alpha \in \mathbb{K};\ \forall\, m \in X.$

$c)$ $\|m + n\| \leq \|m\| + \|n\|,\ \forall\, m, n \in X.$

(Brezis, 1984).

El espacio vectorial X provisto de la norma $\|.\|$ se le conoce como el espacio normado y se denota de la forma (X, $\|.\|$).

Observación 1.2.1.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se le conoce como el espacio normado real.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es el espacio complejo.

"Es importante resaltar que (X,$\|.\|$) constituye también un espacio métrico $d(m, n) = \|m - n\|$ $\forall\, m, n \in$ X".

Definición 1.2.5. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en el espacio normado $(X, \|.\|)$ es de Cauchy si,*

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0,$$

es decir, si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ cuando $n, m \geq k$.

(Oliveira, 2012).

Ejemplo 1.2.1. *: La sucesión* $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy en* $(\mathbb{R}, \|.\|)$

En efecto:

Dado $\epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n > n_0 \rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0} = \epsilon$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &= \|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\| \\ &\leq \|\frac{1}{n}\| + \|\frac{1}{m}\| \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \\ Luego: \|x_n - x_m\| &< \epsilon. \end{aligned}$$

Definición 1.2.6. *Dada una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio normado (X,* $\|.\|$*) se dice que converge a* $x \in X$*. Para* $\epsilon > 0 \; \exists \; k \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|x_n - x\| \leq \epsilon$*,* $\forall \; n \geq k$*.*

Observación 1.2.2. *"Toda sucesión convergente es de Cauchy, pero lo recíproco en general no es cierto", esto da origen a la siguiente definición.*

1.2.2. Espacios de Banach

Definición 1.2.7. *Un espacio normado (X ,* $\|.\|$*) se llama un espacio de Banach si cada sucesión de Cauchy en X es convergente a un elemento* $x \in X$*. (Dieudonné, 1981).*

A continuación introducimos los conceptos de espacios pre- Hilbert, pero previamente definimos el producto escalar.

Definición 1.2.8. *Sea X un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$*. Una aplicación*

$$\langle ., . \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

se llama producto escalar, si cumple las siguientes propiedades:

a) $\langle m, m \rangle \geq 0 \; \forall m \in X$ *(positividad) y* $\langle m, m \rangle = 0$*, si y sólo si,* $m = 0$*;*

b) $\langle m, n \rangle = \langle n, m \rangle \; \forall \; m, n \in X$*;*

c) $\langle \alpha m + \beta n, p \rangle = \alpha \langle m, p \rangle + \beta \langle n, p \rangle \; \forall \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;* $\forall \; m, n, p \in X$ *(linealidad). (Brezis, 1983).*

‘‘El espacio vectorial X provisto de un producto escalar $\langle .,. \rangle$ se llama espacio pre - Hilbert y se denota (X,$\langle .,. \rangle$)”.
Un resultado importante sobre el espacio pre - Hilbert podemos ver en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1. *(Desigualdad de Cauchy - Schwarz) Sea (X,$\langle .,. \rangle$) un espacio prehilbertiano. Entonces* $|\langle m,n \rangle| \leq \sqrt{\langle m,m \rangle \langle n,n \rangle}\ \forall\, m,n \in X$. *(Rudin, 1973).*

“Podemos notar que todo producto escalar induce una norma sobre el espacio vectorial X”.

Teorema 1.2.2. *Sea (X, $\langle .,. \rangle$) un espacio prehilbertiano, y consideremos la aplicación* $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ *definida por* $\|m\| = \sqrt{\langle m,m \rangle}\ \forall\, m \in X$.
Así, tenemos que $\|.\|$ es una norma sobre X, lo cual se denomina norma inducida por $\langle .,. \rangle$.

A partir del teorema anterior se induce la siguiente definición.

Definición 1.2.9. *Un espacio prehilbertiano (X,$\langle .,. \rangle$) se llama espacio de Hilbert, si él es completo con respecto a la norma inducida por su producto escalar. (Yosida, 1973).*

Lema 1.2.1. *Si X es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$. Entonces X es un espacio de Hilbert.*

Luego, todo espacio de Hilbert es de Banach, pero el recíproco no necesariamente es verdad. Es decir, “existen espacios vectoriales normados completos cuyas normas respectivas no provienen del producto escalar”. Un resultado importante que se emplea para constatar este hecho es la siguiente.

Lema 1.2.2. *(Ley del paralelogramo) Sea (X,$\langle .,. \rangle$) un espacio pre - Hilbert. Entonces* $\|m+n\|^2 + \|m-n\|^2 = 2(\|m\|^2 + \|n\|^2)\ \forall\, m,n \in X$.

1.2.3. Teoría de distribuciones e introducción a los espacios de Sóbolev

En esta sección introducimos propiedades elementales de los espacios de Sóbolev y algunas resultados simples.

1.2.4. Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 1.2.10. *Sean p* ≥ 1, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *denotemos por* $L^p(\Omega)$ *a todas las funciones medibles "m", entonces* $| \ m \ |^p$ *es una función integrable sobre* Ω. *Esto es,*
$L^p(\Omega) = \{m : \Omega \to \mathbb{R}$*; m es medible /* $\int_\Omega | \ m(x) \ |^p \ dx < \infty\}$, *donde* $1 \leq p < \infty$.
En el espacio $L^p(\Omega)$ *la norma se define de la forma:*

$$\|m\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega | \ m(x) \ |^p \ dx, \ para \ 1 \leq p < \infty,$$

con la norma definida el espacio $L^P(\Omega)$ *es un espacio de Banach.*
cuando p = 2.
$L^2(\Omega) = \{m : \Omega \to \mathbb{R}$*; m es medible /*$\int_\Omega | \ m(x) \ |^2 \ dx < \infty\}$, $1 \leq p < \infty$.

es un espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle m, n \rangle = \int_\Omega m(x)\overline{n(x)}\, dx$$

y cuya norma es, $\|m\|^2 = \int_\Omega | \ m(x) \ |^2 \, dx$. *(Kreyszig, 1978).*

Teorema 1.2.3. ***(Desigualdad de Hölder)***

Sean $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si $s \in L^p(\Omega)$, $t \in L^q(\Omega)$, luego $st \in L^{'}(\Omega)$ y se cumple la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega |s(x)t(x)|dx \leq \|s\|_p\|t\|_q. \ (Brezis, \ 1983).$$

Definición 1.2.11. *Una ecuación en derivadas parciales (EDP) es una expresión de la forma*

$$F(x, t, u, \partial_{x_1}u, ..., \partial_{x_n}u; \partial_t u, ..., D^\alpha u) = 0.$$

Donde u(x, t); "es una función de la variable espacial $x = (x_1, ..., x_n)$ *y la variable temporal t, es la incógnita".*
En las (EDPs) u representa una cantidad física, como: temperatura, intensidad de una señal acústica, etc.
Veamos el orden de las derivadas parciales (EDP).

Si m, n son variables independientes, u(m, n) es la función buscada, entonces:

- $n\dfrac{\partial u}{\partial m} - m\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *= 0, es una EDP de primer orden.*

- $\dfrac{\partial u^2}{\partial m^2} - \dfrac{\partial u^2}{\partial n^2}$ *= 0, es una EDP de segundo orden.*

Nota. *También utilizaremos las notaciones:*
$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x},\quad u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1.2.5. Teorema de Lax - Milgram

El teorema de Lax - Milgram asegura que las formas bilineales sobre un espacio de Hilbert son “representables"por elementos del dual de dicho espacio considerada.
“En el análisis funcional uno de los teoremas más conocido es el de Riesz, el cuál usaremos en la prueba del teorema de Lax - Milgram”.

Teorema 1.2.4. ***Teorema de Representación de Riesz.***

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $G : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{K}$ una funcional lineal continua. Entonces existe un único $m \in \mathcal{H}$ tal que $G(n) = \langle n, m\rangle\ \forall n \in \mathcal{H}$, y además $\|G\| = \|m\|$. (Yosida, 1973).

Prueba:

Si $G = 0$, tomamos $m = 0$ y resulta, $G(n) = \langle n, 0\rangle = 0\ \forall n \in \mathcal{H}$. Por el contrario si $G \neq 0$, $N(G) \subset \mathcal{H}$ por la continuidad de G, N(G) es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, por el teorema de proyección existe $s \neq 0$ en $\mathcal{H}$ con $s \notin N(G)$ tal que $s \perp N(G)$. Es claro que podemos asumir $\|s\| = 1$.

Notemos que $\forall n \in \mathcal{H}$.

$G(G(n)s - G(s)n) = G(n)G(s) - G(s)G(n) = 0.$

Por lo que, $G(n)s - G(s)n \in N(G)$ como $s \perp N(G)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle G(n)s - G(s)n, s\rangle \\ &= \langle G(n)s, s\rangle - \langle G(s)n, s\rangle \\ &= G(n)\|s\|^2 - \langle n, \overline{G(s)}s\rangle \\ &= G(n) - \langle n, \overline{G(s)}s\rangle, \end{aligned}$$

es decir

$G(n) = \langle n, \overline{G(s)}s \rangle = \langle n, m \rangle \; \forall n \in \mathcal{H}$, tomando $m = \overline{G(s)}s$.

Veamos ahora que "m" es único, si existieran $m_1, m_2 \in \mathcal{H}$ tal que $G(n) = \langle n, m_1 \rangle = \langle n, m_2 \rangle$, entonces. $\langle n, m_1 - m_2 \rangle = 0, \forall n \in \mathcal{H}$, se sigue que $m_1 - m_2 = 0$, por lo tanto $m_1 = m_2$.

Para probar la afirmación 2 del teorema, notemos que $G(n) = \langle m, n \rangle$ entonces

$|G(n)| = |\langle n, m \rangle| \leq \|n\| \|m\|$ por la desigualdad de Cauchy -Schwarz. Luego

$$\|G\| = \sup_{\|n\|=1} |G(n)| \leq \|m\|.$$

Si $\|m\| = 0$, es evidente, $\|G\| = \|m\|$.

Si $\|m\| \neq 0$

$$\begin{aligned} \|G\| = \sup\nolimits_{\|n\|=1} |G(n)| \geq \left| G\left(\frac{m}{\|m\|} \right) \right| \\ = \left| \left\langle \frac{m}{\|m\|}, m \right\rangle \right| \\ = \frac{1}{\|m\|} |\langle m, m \rangle| \\ = \tfrac{\|m\|^2}{\|m\|} = \|m\|, \end{aligned}$$

por lo tanto, $\|G\| = \|m\|$■.

Ahora daremos un par de lemas antes de dar a paso a demostrar el teorema de Lax - Milgram, que serán útiles para su demostración.

Lema 1.2.3. *Sean X, Y espacios normados, y una transformación lineal $T : X \longrightarrow Y$ acotada por debajo, admite inversa continua en la transformación $T^{-1} : R(T) \longrightarrow X$. (Czenky, 2017).*

prueba:

Supongamos T es acotada por debajo. Luego existe una constante $k > 0$ tal que

$$k\|n\| \leq \|Tn\| \; \forall \, n \in X,$$

luego se tiene $n \in N(T)$, entonces $\|n\| = 0$, si y sólo si, n=0 por lo que $N(T) = \{0\}$ y T es inyectiva. Por lo que existe $T^{-1} : R(T) \longrightarrow X$ esto equivale a

$\|T^{-1}n\| \leq \frac{1}{k}\|n\|.$
esto significa que, T^{-1} es acotada, y por lo tanto continua.

Lema 1.2.4. *Sea U un espacio de Banach y $T : U \longrightarrow U$ un operador lineal y continuo. Si T es acotado por debajo, entonces R(T) es cerrado en U. (Czenky, 2017).*

Prueba:

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en R(T) tal que $x_n \to x$, $x \in U$. Como T es acotado por debajo, por el lema 1.2.3, se tiene que T es inyectivo por ello existe una única solución y_n en T tal que $x_n = T(y_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Luego, $\|x_n - x_m\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq k\|y_n - y_m\|$
por otro lado tenemos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por lo que.
$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$
Luego, por la desigualdad anterior, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es de Cauchy. Mas aún, como U es un espacio de Hilbert, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente con la norma usual a un elemento, digamos a algún $v \in U$.
Para terminar utilizamos la continuidad de T
$x = \lim_{n\to\infty}(x_n) = \lim_{n\to\infty} T(y_n) = T(\lim_{n\to\infty} y_n) = Tv.$
Es decir $x = Ty \in R(T)$. Por lo tanto, R(T) es cerrado $\blacksquare$.

Teorema 1.2.5. *Teorema de Lax - Milgram (TLM). Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $U : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal, acotada y coerciva.*
Si $G : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal acotada, entonces existe un único $y_0 \in \mathcal{H}$ tal que

$$U(x, y_0) = G(x), \forall x \in \mathcal{H}. \tag{1.1}$$

Prueba:

Para cada $m \in \mathcal{H}$, la aplicación $U_m : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$
$v \longrightarrow U_m(n) = U(m, n),$
a cada $n \in \mathcal{H}$ le asigna U(m,n) es una funcional lineal acotado sobre $\mathcal{H}$, entonces por el teorema 1.2.3, se tiene la existencia y es único el elemento $s \in \mathcal{H}$ que satisaface

$$U(m, n) = U_m(n) = \langle s, n\rangle \; \forall n \in \mathcal{H}, \tag{1.2}$$

esto $\forall m \in \mathcal{H}$, entonces definamos un operador lineal $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ dado por $T(m) = s$, donde $U(m,n) = \langle s, n\rangle \ \forall n \in \mathcal{H}$.

Probemos que T es un operador lineal acotado.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle T(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2), n\rangle &= U(\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2, n) && \textit{por } (1{,}2)\\
&= \lambda_1 U(m_1, n) + \lambda_2 U(m_2, n) \\
&= \lambda_1 \langle T(m_1), n\rangle + \lambda_2 \langle T(m_2), n\rangle && \textit{por } (1{,}2)\\
&= \langle \lambda_1 T(m_1) + \lambda_2 T(m_2), n\rangle, \ \forall \, n \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Así resulta T lineal, como U es acotada existe una constante $\alpha > 0$ tal que $|U(u,v)| \leq \alpha \|m\| \|n\|$, por lo tanto

$\|T(m)\|^2 = \langle T(m), T(m)\rangle = U(m, T(m)) \leq \alpha \|m\| \|T(m)\|$.

Por otro lado, se tiene que U es coerciva, entonces existe un constante $\beta > 0$ tal que

$\beta \|m\|^2 \leq U(m,m) = \langle T(m), m\rangle \leq \|T(m)\| \|m\|$

Luego, $\beta \|m\| \leq \|T(m)\|$.

Por lema 1.2.3, tenemos que T tiene inversa continua, y por lo tanto es inyectiva. Además R(T) es cerrado por el lema 1.2.4.

Ahora probemos que $R(T) = \mathcal{H}$. Supongamos lo contrario, esto es, $R(T) \subset \mathcal{H}$. Entonces en virtud del teorema de proyección y además utilizaremos el hecho de que R(T) es cerrado por lema 1.2.4, existe $s \in \mathcal{H}$ con $s \neq 0$ tal que $s \in R(T)^{\perp}$. Es decir $s = 0$, esto implica una contradición. Por lo tanto $R(T) = \mathcal{H}$.

Ahora, por el teorema 1.2.3, existe un elemento $s \in \mathcal{H}$ que cumple

$G(n) = \langle s, n\rangle \ \forall n \in \mathcal{H}$.

Pero como $R(T) = \mathcal{H}$, existe $m \in \mathcal{H}$ tal que $T(m) = s$.

Entonces

$U(m,n) = \langle T(m), n\rangle = \langle s, n\rangle = G(n) \ \forall n \in \mathcal{H}$.

Así, $U(m,n) = G(n) \ \forall n \in \mathcal{H}$ que corresponde a la ecuación (1.1).

Finalmente, veamos que "m"es el único que satisface (1.1).

En efecto,

si se tendría otro $\tilde{m} \in \mathcal{H}$ tal que,

$B(\tilde{m}, n) = G(n)\ \forall n \in \mathcal{H}$.

Como U es bilineal, entonces se tiene

$U(m - \tilde{m}, n) = U(m, n) - U(\tilde{m}, n) = G(n) - G(n) = 0$. Si tomamos $n = m - \tilde{m}$, resulta

$\beta\|m - \tilde{m}\|^2 \leq U(m - \tilde{m}, m - \tilde{m}) = 0$ y luego $\|m - \tilde{m}\| = 0$.

Por lo tanto, $m = \tilde{m}$, es decir "m"es el único que satisface (1.2).

1.2.6. Teoría de Distribuciones

La teoría de distribuciones fue introducida en 1935 por Serguei Sóbolev. Sin embargo debemos mencionar que fue Laurent Schwartz a los finales de la década de 1940 formalizó la "**teoría de distribuciones**", por ello le otorgaron la medalla de Fields en 1950.

A continuación tenemos la seguiente definición.

Definición 1.2.12. *Llamaremos multiíndice a* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$*,*
si $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*,*

$$| \alpha | = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

D^α *se llama la derivada distribucional de orden* α*,*

$$D^\alpha : D^{'}(\Omega) \to D^{'}(\Omega)$$

$$T \to D^\alpha T$$

donde $D^{'}(\Omega)$ *es el espacio de las distribuciones.*

La derivada distribucional está definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Cuando $\alpha = (0, 0, ..., 0)$ *se define* $D^\alpha u = u$*. (J.J. Duistermaat, 2010).*

Ejemplo 1.2.2. *Sea* $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, n = 3$
para $\alpha = (2, 1, 3) \in \mathbb{N}^3, |\alpha| = 2 + 1 + 3 = 6$*, entonces*

$$D^\alpha u = \frac{D^6}{\partial x_1^2 \partial x_2^1 \partial x_3^3}.$$

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y una función $u : \Omega \to \mathbb{R}$, entonces. ***El soporte de u*** *es un conjunto que se define de la forma:*

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega / u(x) \neq 0\}}$$

Ejemplo 1.2.3. *: Sea $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como:*

$$u(x) = \begin{cases} 1 \quad \textit{si} \quad -1 < x < 1 \\ \\ 0 \quad \textit{si} \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

El supp(u)= [-1,1].

También se define

$$C_0^\infty = \{u : \Omega \to \mathbb{R} / u \in C^\infty(\Omega) \text{ con supp(u) compacto} \subseteq \Omega\},$$

donde los elementos de C_0^∞ son denominados " funciones de prueba *".*

Proposición 1.2.1. *El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$, es denso en $L^p(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$, es decir*

$$\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = L^p(\Omega),$$

para todo $1 \leq p < \infty$.

Distribuciones sobre Ω, sea

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\varphi \to T(\varphi)$$

"es continua en el sentido de la convergencia definida en $\mathcal{D}(\Omega)$ se llama distribución en Ω". Más precisamente, la aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ será una distribución si verifica las siguientes propiedades,

a) $T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

b) Si $(\varphi_v) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_v \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces

$$T(\varphi_v) \to T(\varphi).$$

Ahora veamos la denotación del espacio de las distribuciones,

$$\mathbf{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}/T \textit{ lineal y continua}\}.$$

$$T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$A \to TA$$

La continuidad de T significa que $A_n \to A$ en $D(\Omega) \Longrightarrow TA_n \to TA$ en $\mathbb{R}$.

1.2.7. Espacios de Sóbolev

*Toda función **u** $\in L^p(\Omega)$ posee derivadas distribucionales de todos los órdenes, "donde las derivadas de **u** no siempre pertenece al espacio $L^p(\Omega)$", esto motivo a Serguéi Sóbolev en 1936, a imaginar una nueva clase de espacios vectoriales llamados "*Espacios de Sóbolev *".*
Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ regular. Entonces se define el espacio de Sóbolev, representado por $W^{m,p}(\Omega)$ y formalmente se define,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\} \subseteq L^p(\Omega),$$

"donde D^α es el operador de derivación de orden α, en el sentido de las distribuciones".
Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ se define la norma de " u *" por,*

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \mid D^\alpha u(x) \mid^p_{L^p(\Omega)}.$$

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \mid D^\alpha u(x) \mid .$$

Sea $I =]a, b[$ un intervalo acotado o no y sea $p \in \mathbb{R}$ donde $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 1.2.13. *El espacio de Sóbolev $W^{1,p}(I)$ se define por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) / \int_{(I)} u\varphi' = -\int_{(I)} g\varphi \;\; \forall \varphi \in C^1_0(I)\right\}$$

Denotemos

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Se tiene, $\forall u \in W^{1,p}(I)$ su denotación como: $u^{'} = g$.
En el espacio $W^{1,p}$ la norma está definida de la siguiente forma,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u^{'}\|_{L^p}.$$

El espacio H^1 está dotado por el producto interno

$$< u, v >_{H^1} = < u, v >_{L^2} + \left\langle u^{'}, v^{'} \right\rangle_{L^2};$$

y su norma asociada

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^p}^2 + \|u^{'}\|_{L^p} \right)^{\frac{1}{2}}$$

es equivalente a la norma dada del espacio $W^{1,2}(I)$. Brezis (1983).

Proposición 1.2.2. *El espacio $W^{1,p}$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W^{1,p}$ es reflexivo para $1 < p < \infty$ y separable para $1 \leq p < \infty$.*
El espacio H^1 es un espacio de Hilbert.
Demostración. *Ver (Brezis, 1983).*

•***Algunas propiedades:*** *Ver (Muñoz-Rivera, 2008).*

a) $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

b) $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$, si $m \geq k$.

c) $C^m(\overline{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,p(\Omega)}$.

d) $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{m,p}(\Omega)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$.

La propiedad (d) permite definir, "un subespacio de clases de equivalencias de funciones que se anulan sobre la frontera",

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{W^{m,p}(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)} \simeq \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

***Nota**: Cuando m= 1, p = 2, se tiene: $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$*
Por la definición de $W^{1,2}(\Omega)$ obtenemos la siguiente igualdad.

$$W^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m\} = H^1(\Omega)$$

Así, resulta :

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq 1\}$

y en general, $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall\, |\alpha| \leq m\},$$

Veamos para m = 2,
$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall\, |\alpha| \leq 2\}$.

Definición 1.2.14. ***El espacio*** $W_0^{1,p}(\Omega)$

Dado $1 \leq p < \infty$*, se designa por* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *a la clausura de* $C_0^1(\Omega)$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$.
Se denota $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.
El espacio $W_0^{1,P}(\Omega)$ *está dotado por la norma inducida por* $W^{1,p}(\Omega)$*; análogamente el espacio* $H_0^1(\Omega)$ *está dotado del producto interno inducido por* $H^1(\Omega)$.
El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$*, "es un espacio de Banach separable; es reflexivo para* $1 < p < \infty$*".*
El espacio $H_0^1(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert separable. (Brezis, 1983).*

Formas sesquilineales

Se denomina formas sesquilineales sobre un espacio vectorial E, a una aplicación numérica

$$(m, n) \longrightarrow a(m, n) \quad de \quad E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

que verifica las siguientes propiedades:
$a)\ a(m + n) = a(m, p) + a(n, p)$
$b)\ a(\lambda m, n) = \lambda a(m, n)$
$c)\ a(m, n + p) = a(m, n) + a(m, p)$
$d)\ a(m, \lambda n) = \bar{\lambda} a(m, n)$
Si E es un espacio vectorial real, $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que satisaface las condiciones anteriores, se le llama una forma bilineal.*
Las dos primeras condiciones nos indican que la aplicación $a : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *es lineal en la primera coordenada y las dos últimas nos dicen que es antilineal o semilineal en la segunda coordenada.*

Dualidad

Definición 1.2.15. *Sea E definido en un espacio topológico sobre el campo* $\mathbb{K}$ $(donde\ \mathbb{K} = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C})$.

a) Una familia lineal en E es una aplicación lineal de E en $\mathbb{K}$.

b) Una forma antilineal en E es una aplicación antilineal (o semilineal) de E en $\mathbb{C}$*, que f sea antilineal o semilineal significa:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \ y\ \ f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x),\ \forall x, y\ \in\ E,\ \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

c) Llamaremos $L = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$*, al espacio de las formas lineales continuas (antilineal) en E, el (antidual) de E y lo denotamos por* $E^{'}$.

Si $f \in E^{'}$ *el valor del vector* ***u*** *será denotada por*

$$f(u) = < f, v >$$

donde $< .,. >$ *se denota de acuerdo al caso de la dualidad (antidual respectiva) entre* $E^{'}$ *y E, algunas veces con precisión se denotará*

$$f(u) = < f, u >_{E', E}\ .$$

Notación: Se denota por $W^{-1,p}(\Omega)$ *el espacio dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *con* $(1 \leq p < \infty\ y\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ *y por* $H^{-1}(\Omega)$ *el espacio dual de* $H_0^1(\Omega)$.

Se identificamos L^2 *y su dual, pero no se identifican* H_0^1 *y su dual, entonces por las inmersiones de Sóbolev si tienen las siguientes:*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)\ y\ L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$
$$Entonces\ si\ cumple:\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$$

con inyecciones continuas y densas.

Si se tiene Ω *es acotado, entonces se cumple*

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p}\ \forall 1 \leq p < \infty,$$

con inyecciones continuas y densas.

Por otro lado, sea $\Omega = (0, L)$

Afirmación 1.1

$$H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)\ es\ denso\ en\ H_0^1(0, L)\ y\ en\ L^2(0, L). \tag{1.3}$$

En efecto:

sea $f \in H_0^1(0,L)$,

sea $H_0^1(0,L)$ *denso en* $L^2(0,L)$ *y* $f_x \in L^2(0,L)$, *entonces* $\exists\ \{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,L)/g_n \longrightarrow f_x$ *en* $L^2(0,L)$.

Tomando

$$p_n(x) = \int_0^x g_n(s)ds,$$

entonces

$$p_{nx} = g_n \in H_0^1(0,L) \ \ y \ \ p_n(0) = 0.$$

así $p_n \in H^2(0,L)$ *y* $p_n(0) = 0$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = L \\ p_n(x) & , \quad 0 \leq x < L \end{cases}$$

Como $f_n = p_n$ *c.t.p.*

Entonces

$$f_n = p_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esta manera

$$f_n(0) = 0, \ f_n(L) = 0, \ f_{nx} = g_n \quad y \quad f_n \in H^2(0,L)$$

Entonces

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \quad y \quad f_{nx} = g_n.$$

Luego

$$\|f_n - f\|_{H_0^1}^2 = \|f_{nx} - f_x\|_{L^2}^2.$$

Es decir

$$\|f_n - f\|_{H_0^1}^2 = \|g_n - f_x\|_{L^2}^2.$$

También tenemos que $g_n \longrightarrow f_x$ *en* $L^2(0,L)$, $\Rightarrow \|f_n - f\|_{H_0^1} \longrightarrow 0$.

Así obtenemos

$$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)/f_n \longrightarrow f \ en \ H_0^1(0,L).$$

Entonces

$$H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \ \ es \ \ denso \ \ en \ \ H_0^1(0,L).$$

Afirmación 1.2, $H_0^1(0,L)$ *es denso en* $L^2(0,L)$,

finalmente de las afirmaciones 1.1 y 1.2 tenemos que $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$ *es denso en* $L^2(0,L)$$_\blacksquare$.

Observación 1.2.3. *Sea* Ω *un abierto acotado en* $\mathbb{R}^n$, *se define para el espacio* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *de la forma,*

$$H_0^m(\Omega) = \overline{H^m(\Omega) \cap C_0^\infty}.$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = \overline{D(\Omega)}^{|.|_{H^m}}$$

• ***Cuando p = 2***, *se obtiene:*

$$W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega)/u(0) = u(1) = 0\}.$$

donde:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega); \forall\, |\alpha| \leq m\}.$$

Definición 1.2.16. ***(El espacio de Sóbolev*** $H^1(\Omega)$***).***

Se llama espacio de Sóbolev de orden 1 sobre Ω.

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega)/\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

El producto interno en $H^1(\Omega)$ *es de la forma.*

$$< u, v >_{1,\Omega} = \int_\Omega \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} . \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx \tag{1.4}$$

. Y su norma correspondiente es

$$\|v\|_{1,\Omega} = < v, v >_{1,\Omega}^{1/2} \tag{1.5}$$

(Figueroa, 1986).

Teorema 1.2.6. *El espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con respecto al producto interno definido en (1.4).*

Demostración. *Ver (Figueroa, 1986) Teorema 2.3.*

Teorema 1.2.7. *El espacio $H^1(\Omega)$ es separable, esto es, existe un conjunto numerable denso en $H^1(\Omega)$.*

Demostración. *Ver (Figueroa, 1986) Teorema 2.4.*

Definición 1.2.17. *$H_0^1(\Omega)$ es un sub espacio de $H^1(\Omega)$ de las funciones lineales "$nulas$" sobre $\partial(\Omega)$ (frontera), cuando $\Omega = (0, L)$.*
$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$, $H_0^1(\Omega)$ es la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Observación 1.2.4.

a) Si Ω $es\ acotado$: $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$.
b) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$: $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$; es decir $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Observación 1.2.5. *Se tiene las siguientes definiciones cuando $\Omega = (0, L)$, p=2 y m= 1,2.*
$L^2(0, L) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$, *u es medible*/$\int_\Omega |\ u(x)\ |^2\ dx < \infty\}$, *para* $1 \leq p < \infty$.
$H^1(0, L) = \{u \in L^2(0, L)/D^\alpha u \in L^2(0, L), \forall|\alpha| \leq 1\}$
$H^2(0, L) = \{u \in L^2(0, L)/D^\alpha u \in L^2(0, L); \forall|\alpha| \leq 2\}$
$H_0^1(0, L) = \{u \in H^1(0, L)/u(0) = u(1) = 0\}$.
$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \Rightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega), entonces\ \ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega).$

1.2.8. Desigualdad de Poincaré

Teorema 1.2.8. *(Desigualdad de Poincaré)*

Sea p, tal que $1 \leq p < \infty$ y Ω un conjunto abierto acotado en $\mathbb{R}^n$, al menos en una dirección. Entonces existe una constante C, dependiendo sólo de Ω y p, tal que para cada función "u" del espacio de Sóbolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene:

$$|u|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla u|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega);\ donde\ \nabla\ es\ un\ operador\ gradiente.\ (Brezis,\ 1983).$$

Donde

$$|\nabla u|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial_{xn}} \right|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad y\ \ C\ \ constante\ \ de\ \ poincaré.$$

"Para que la desigualdad de poincaré sea válida es suficiente que u *se anule en una componente abierta de la frontera de* Ω*".*

***Prueba**:*

Supongamos que Ω *sea acotado en una dirección paralela a las ejes coordenadas.*

Sea $R = (z_1, ..., z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $z_n \in (a, b)$ *tal que* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$*.*

Sea $u \in W^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{|.|_{1,p}}$*, entonces existen* $\psi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ *para m= 1,..., tal que* $\psi_m \to u$ *en* $W^{1,p}(\Omega)$*. Probaremos la desigualdad para* $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$*, sabemos que* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *entonces* $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$*, donde*

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & si \quad x \in \Omega \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} - \Omega. \end{cases}$$

además, $D^\alpha \tilde{u} = \widetilde{D^\alpha u}$ *para* $|\alpha| \leq 1$ *y* $\|u\|_{1,p(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{1,p(\mathbb{R})}$*. Sea* $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ *entonces* $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *y*

$$\tilde{\psi}(z_1, ..., z_{n-1}, z) - \tilde{\psi}(z_1, ..., z_{n-1}, a) = \int_a^z \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s)ds$$

$$\tilde{\psi}(z_1, ..., z_{n-1}, z) - \underbrace{(\tilde{\psi}(z_1, ..., z_{n-1}, a)}_{=0} = \int_a^z \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s)ds$$

Recuerde. $\frac{\partial u}{\partial_{zn}} = 0$*, entonces* $u = 0$ *en* L^p*.*

Usando la desigualdad de $Hölder$*, tenemos*

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(z_1, ..., z_{n-1}, z)| &= \left| \int_a^z \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s)ds \right| \\ &\leq \int_a^z \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s) \right| ds \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s) \right| 1.ds \\ &\leq \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s) \right|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} (b-a)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Elevando a la potencia p e integrando (1.6) sobre (a, b); con respecto a z tenemos

$$\int_a^b |\tilde{\psi}(z_1, ..., z_{n-1}, z)|^p dz \leq \left(\int_a^b \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s) \right|^p ds \right) (b-a)^{p-1} \int_a^b dz$$
$$= \int_a^b \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(z_1, ..., z_{n-1}, s) \right|^p ds (b-a)^p \tag{1.7}$$

Integrando (1.7) con respecto a $\tilde{z} = (z_1, ..., z_{n-1})$*, se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{\psi}|^p dy = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(y) \right|^p dy.(b-a)^p \qquad por\ otro\ lado$$

$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{\psi}|^p dy = \int_{\Omega} |\psi|^p dy$ *y* $\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial_{zn}}(y) \right|^p dy = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial_{zn}}(y) \right|^p dy$*, entonces*

$$\int_{\Omega} |\psi|^p dy = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \psi}{\partial_{zn}}(y) \right|^p dy.(b-a)^p \qquad esto\ es,$$

$$|\psi|_{L^p(\Omega)} \leq \left| \frac{\partial \psi(y)}{\partial_{zn}} \right|_{L^p(\Omega)} .(b-a),\ \forall\ \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$
$$|\psi|_{L^p(\Omega)} \leq C|\nabla\psi|_{L^p(\Omega)},\ \forall\, \psi \in C_0^\infty(\Omega).\ \ donde\ \ C = (b-a)$$

Observación 1.2.6. *La expresión* $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ *es una norma en* $W_0^{1,P}(\Omega)$*, equivalente a la norma* $\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)}$*, en* $W_0^{1,p}(\Omega)$*.*

•***Para p = 2****, se obtiene:*

$$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$$

Por tanto,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.2.9. Semigrupos: Definiciones y Teoremas

En esta parte mostraremos los resultados importantes sobre la teoría de semigrupos. En esta sección lo denotaremos a X como un espacio de Banach.

‘‘A continuación daremos algunas nociones fundamentales sobre teoría espectral, asumiendo que A es un operador lineal autoadjunto, definido positivo y no necesariamente acotado”, $\mathcal{H}$ *un espacio Hilbert y* $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ *el espacio de Banach de los operadores lineales acotados en* $\mathcal{H}$*.*

Definición 1.2.18. *Sea X un espacio de Banach, una familia de operadores* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$*, es llamado un* ***semigrupo*** *en X, si*

$a)T(0) = I$

$b)T(s)T(t) = T(s+t), \forall\ s, t \geq 0$. *(Muñoz-Rivera, 2008).*

Observación 1.2.7. $T(t) = e^{At}$, $\forall t \geq 0$ *es un semigrupo en X, esto es,*

$T : X \longrightarrow X$ *puesto que verefican :*

a) $T(t) = e^{At} \rightarrow T(0) = e^{A0} = I$

b) $T(s)T(t) = e^{As}e^{At} \rightarrow e^{As}e^{At} = e^{A(s+t)} = T(s+t)$ *por tanto,* $T(s)T(t) = T(s+t)$, $\forall t \geq 0$

1.2.10. Semigrupo de operadores lineales

En esta sección daremos algunas definiciones básicas de operadores lineales acotados en un espacio de Banach y la teoría de semigrupos . La teoría de semigrupos dió un gran impulso en el año de 1948 con la famosa demostración del teorema de Hille - Yosida, y el teorema de Lummer - Phillips. "La teoría de semigrupos de operadores lineales acotados es una herramienta poderosa en el estudio de ecuaciones diferenciales parciales".

Definiciones y propiedades generales *Sean X,Y espacios de Banach sobre el cuerpo* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ó* $\mathbb{C}$ *y* $\|.\|$ *la norma en X, Y.*

Definición 1.2.19. *Sea* $D \subseteq X$ *un subespacio vectorial de X.*

La función $A : D(A) \subseteq X \rightarrow Y$ *es un operador lineal de X en Y si*

a) $\overline{D(A)} = X$ *(D(A) es denso en X).*

b) para todo $\beta \in \mathbb{K}$ *y* $\forall x, y \in D(A)$*; A(*$\beta x + y$*) =* $\beta A(x) + A(y)$ *(A es lineal).*

"Denotamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ *al conjunto de operadores lineales de X en Y con dominio D(A)".*

(Felipe Álvarez, 2003).

Entonces, un operador $A \in \mathcal{L}(X)$ *es acotado si*

$$\sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Ax\| < \infty,$$

denotemos por $\|A\|$ *la norma del operador A, y esto es*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|=1}} \|Ax\|.$$

Denotamos por "B(X,Y) al conjunto de los operadores lineales y acotados de X en Y"; es decir, B(X,Y)= $\{A \in \mathcal{L}(X,Y)/A$ *es acotado*$\}$, *y se tiene las siguientes propiedades.*

1. $\|.\|$ *es la norma de B(X,Y).*

2. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|, \forall x \in X.$

3. $SiA \in \mathcal{L}(X,Y)$, *si tiene que:*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

4. Si $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, *el operador lineal A es continuo en* $x_0 \in X \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ *tal que* $\|Ax - Ax_0\| < \epsilon$, *siempre que* $x \in X$ *y* $\|x - x_0\| < \delta$.

A es continua en "X" si es continua en cada $x \in X$.

Teorema 1.2.9. *Sean X e Y espacios normados y* $A : X \to Y$ *un operador lineal. Si A es continuo en un punto* $x_0 \in X$, *entonces A es acotado. (Alejandro A. F., 2005).*

Prueba:

como A es continua en $x_0 \in X$, *entonces para* $\epsilon = 1$, $\delta > 0$ *tal que* $\|x - x_0\| < \delta$

$\to \|Ax - Ax_0\| < 1.$

Sea y = $x_0 + \dfrac{\delta z}{2\|z\|}$, $z \neq 0.$

Tenemos; y - $x_0 = \dfrac{\delta z}{2\|z\|}$

$$\|y - x_0\| = \|\frac{\delta z}{2\|z\|}\|\|y - x_0\|$$
$$= \frac{\delta}{2}\|Ay - Ax_0\| < 1.$$
$$Entonces$$
$$\|Ay - Ax_0\| < 1$$
$$\|A(x - x_0)\| < 1$$
$$\|A(\frac{\delta z}{2\|z\|})\| < 1$$
$$\frac{\delta z}{2\|z\|}\|Az\| < 1\|Az\|$$

$$\frac{2\|z\|}{\delta}\delta\|Az\| < M\|z\|, z \neq 0; donde : M = \tfrac{2}{\delta}.$$
$$Por\ tanto, \|Az\| \leq M\|z\|, \forall z \in X.$$

Teorema 1.2.10. *Sean X e Y espacios normados y* $A : X \to Y$ *un operador lineal, entonces A es continuo ⇔ A es acotado. (Alejandro A. F., 2005).*

Prueba:

(⟶) Si A es continuo, entonces es continuo en cualquier punto $x_0 \in X$*. Por el Teorema (1.2.6) A es acotado.*

(⟵) Supongamos que A es acotado entonces ∃ M> O tal que $\|Ax\| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$.

Además, para $\epsilon > 0$ *dado tomemos* $\delta = \dfrac{\epsilon}{M}$*, estonces para* $x_0 \in X$ *si cumple*

$$\|x - x_0\| < \delta$$
$$\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{M}$$
$$M\|x - x_0\| < \epsilon$$
$$\|Ax - Ax_0\| = \|A(x - x_0)\|$$
$$\leq M\|x - x_0\| \leq \epsilon.$$

Luego: $\|Ax - Ax_0\| < \epsilon$.

Entonces A es continua en x_0, como x_0 fue arbitrario A es continua.

1.2.11. Convergencias en B(X,X)

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B(X,X)$ donde $A \in B(X,X)$.

• $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a A y su denotación es $A_n \to A$, si $\|A_n - A\| \to 0$; cuando $n \to \infty$.*

• $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fuertemente a A y lo denotamos $A_n \longmapsto A$, $\Leftrightarrow$ $\|A_n x - Ax\| \to 0$, $\forall x \in X$ cuando $n \to \infty$.*

vemos que

$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leq \|A_n - A\|\|x\|$,

es decir, "la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte al mismo límite".

El recíproco en general, no es verdad.

1.2.12. Operadores acotados invertibles

Definición 1.2.20. *Sean X, Y espacios de Banach y A un operador acotado en B(X ,Y). Se dice que A es invertible si existe un operador acotado B en B(X, Y) tal que $\forall$ x $\in X$, BAx = x; para todo y $\in Y$, ABy = y. "En este caso, diremos que B es el inverso de A y lo denotaremos por B = A^{-1}".*

Proposición 1.2.3. *Si $A \in B(X,Y)$ y $\|A\| < 1$, entonces I- A es invertible. (Felipe Álvarez, 2003).*

1.2.13. Definiciones: Semigrupo y su generador infinitesimal

Definición 1.2.21. *Sea una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de X en X, es un semigrupo de operadores lineales acotados (o un semigrupo) si se cumple lo siguiente,*

$a)T(0) = I(Identidad\ en\ B(X,X))$;

$b)T(s+t) = T(s)T(t), \forall s,t \in \mathbb{R}^+$;

si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ además se verifica lo siguiente,

c) $\|T(t) - I\| \to 0$, si $t \to 0^+$; luego se tiene un semigrupo uniformemente continuo.

De (a), (b) y (c) se tiene; $\|T(t+h) - T(t)\| \to 0$, si $h \to 0$ $\forall t \geq 0$.

En efecto:

$\|T(t+h)-T(t)\| = \|T(t)T(h)-T(t)\| = \|T(t)(T(h)-I)\| \leq \|T(t)\|\|T(h)-I\| \to 0$, *si* $h \to 0$. *Luego,* $\|T(t+h)-T(t)\| \to 0$, *si* $h \to 0$. *(Felipe Álvarez, 2003).*

Ejemplo 1.2.4. *Si* $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ *con* $A \in$ *B(X,X), entonces* e^{tA} *es un semigrupo uniformemente continuo.*

En efecto: Sea

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

.

a) T(0) = $e^0 = I$.

b) T(t+s) = $e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} = T(t)T(s)$, *donde (tA)(sA)=(sA)(tA),* $\forall t, s \geq 0$.

c)

$$\|T(t)-I\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I\right\| = \left\|I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} - I\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}\right\|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mid t \mid^n \|A\|^n}{n!} \to 0, \textit{si } t \longrightarrow 0^+.$$

Observación 1.2.8. *"Más adelante se verá que todo semigrupo uniformemente continuo es de la forma* e^{tA} *para algún* $A \in B(X,X)$*".*

Definición 1.2.22. *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq B(X,X)$ *un semigrupo uniformemente continuo. El generador infinitesimal de un semigrupo en un espacio X, es un operador de la forma*

$$A : D(A) \to X,$$

y su dominio se define por

$$D(A) = \left\{ x \in X : existe \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\},$$

donde

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \left.\frac{dT(t)x}{dt}\right|_{t=0}, \forall x \in D(A).$$

(Pazy, 1983).

Observación 1.2.9. *"El semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ es generado por el operador acotado A".*
Se verifica de manera sencilla las derivadas de orden "k".

$$Sea,\ \ T(t) = e^{At} \to \frac{d}{dt}T(t) = Ae^{At} \to \frac{d}{dt}T(t)\bigg|_{t=0} = A$$

$\frac{d^2}{dt^2}T(t) = A^2T(t)$, $\frac{d^k}{dt^k}T(t) = A^kT(t)$.

Por tanto, "para calcular la derivada de orden k del operador T, basta componer el semigrupo con el operador A". Entonces escribimos de la siguiente forma,

$\frac{d^k}{dt^k}T(t) = \left[AT(\frac{t}{k})\right]^k$, *ó* $\frac{d^k}{dt^k}T(t) = \left[\frac{d}{dt}T(\frac{t}{k})\right]^k$.

Nota:

En el estudio de los semigrupos se presentan dos tipos de problemas.

1) Dado un semigrupo, encontrar el generador infinitesimal.

2) Cuando el semigrupo es un exponencial de una matriz A esto es, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ la matriz A es el generador infinitesimal del semigrupo.

Esto puede ser obtenido derivando el operador T y evaluando en el punto t=0.

En efecto,

$$T(t) = e^{At} \to \frac{d}{dt}T(t) = Ae^{t} \to A = \frac{dT(t)}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

Que es una fórmula válida para matrices u opereradores lineales continuos, "asi podemos extender esta definición para operadores no acotados de la siguiente manera".

Definición 1.2.23. *Un operador A es un generador infinitesimal de un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, si* $A : D(A) \subseteq X \to X$.

$$D(A) = \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t}, \textit{existe en } X\},$$

y se tiene $\forall x \in D(A)$ lo siguiente;

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

"De la definición anterior podemos escribir el dominio de A de la forma":

$D(A) = \{w \in X; Aw \in X\}$. *(Muñoz-Rivera, 2008).*

A partir de las definiciones dadas podemos deducir que un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es una familia de operadores contínuos* $\forall t \in \mathbb{R}$*. "Interesa clasificar los semigrupos por la continuidad con relación al variable t".*
Consideremos dos casos:
1) Cuando la función $t \longmapsto T(t)$*, el semigrupo se considera como una función de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathcal{L}(X)$ *sea continuo.*
2) Cuando la función $t \longmapsto T(t)x$*, se considera como la función de* $\mathbb{R}$ *en X,* $\forall x \in X$ *sea continuo.*
"Sobre el primer caso diremos que el semigrupo es ***uniformemente continuo****. En el segundo caso diremos que el semigrupo es* ***fuertemente continuo****".*

1.2.14. Semigrupos uniformemente contínuos

Definición 1.2.24. *Un semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *de operadores acotados en X, es uniformemente continuo, si verifica*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t) = I.$$

Esta definición es equivalente a

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t) - I\| = 0, \forall x \in X.$$

(Muñoz-Rivera, 2008)

Proposición 1.2.4. *Si* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo uniformemente continuo, entonces* $D(A) = X$*, donde* $A \in B(X, X)$*. (Felipe Álvarez, 2003).*

Prueba:

Elegimos un $\delta > 0$ *lo bastante pequeño, de manera que*

$$\left\| I - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds \right\| < 1$$

Luego, el operador $\frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(s)ds$ *es invertible por la proposición 1.2.2, entonces* $\int_0^\delta T(s)ds$ *también es invertible.*

Por consiguiente, para $0 < h < \delta$*, tenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\delta} T(s)ds &= \frac{1}{h}\int_0^{\delta}[T(h)T(s)-T(s)]ds \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{\delta} T(h+s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^{\delta} T(h+s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^{\delta} T(s)ds + \int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \int_{\delta}^{h} T(s)ds - \int_0^{\delta} T(s)ds\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_{\delta}^{h+\delta} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)ds.
\end{aligned}$$

Por tanto, tomando límite cuando $h \to 0^+$*, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\delta} T(s)ds &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_{\delta}^{\delta+h} T(s)ds - \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^{h} T(s)ds \\
&= T(\delta) - T(0) \\
&= T(\delta) - I
\end{aligned}$$

$entonces,$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h} = (T(\delta)-I)\left[\int_0^{\delta} T(s)ds\right]^{-1}$$

como la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte que fue tratada en la sección 1.2.13, tenemos que $\forall x \in X$ *existe* $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{T(h)x-x}{h}$*.*

Concluimos que $D(A) = X$ *y por ser* $B(X,X)$ *un espacio de Banach, se tiene*

$$A = (T(\delta)-I)\left[\int_0^{\delta} T(s)ds\right]^{-1} \in B(X,X)_{\blacksquare}.$$

1.2.15. Relación de un semigrupo uniformemente continuo y su generador.

Para todo semigrupo uniformemente continuo existe un único generador infinitesimal, éste es un operador acotado. Asimismo, "todo operador $A \in B(X, X)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo", y está definida de la forma:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

A continuación presentamos la siguiente proposición, "trata de que cada operador acotado genera un único semigrupo uniformemente continuo".

Proposición 1.2.5. *Sean dos semigrupos $\{T_1(t)\}_{t\geq 0}$ y $\{T_2(t)\}_{t\geq 0}$ uniformemente continuos. Si $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T_1(h) - I}{h} = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{T_2(h) - I}{h}$ entonces $T_1(t) = T_2(t)$, $\forall t \geq 0$. (Pazy, 1983).*

Prueba:

Si se considera $T = 0$ la prueba es inmediato. Ahora si fijamos $t > 0$ y las siguientes funciones $f_1(h) = \|T_1(h)\|$ y $f_2(h) = \|T_2(h)\|$, "como las funciones f_1 y f_2 son continuas existen k_1 y $k_2 > 0$" tales que $\|T_1(h)\| \leq k_1$ y $\|T_2(h)\| \leq k_2$, $\forall\, 0 \leq h \leq t$. Además, de la hipótesis tenemos: dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$, tal que $\forall\, 0 < h \leq \delta$ se tiene

$$\frac{1}{h}\|T_1(h) - T_2(h)\| < \frac{\epsilon}{t.k_1.k_2}.$$

Escogemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{t}{n} < \delta$ y observemos la siguiente suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[T_1\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T_2\left(\frac{kt}{n}\right) - T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right] = T_1(t) - T_2(t),$$

Realizando la suma y por la propiedad de semigrupos $T_i(r+s) = T_i(r)T_i(s)$ para i= 1,2 se tiene

$$\begin{aligned}
\|T_1(t) - T_2(t)\| &= \left\| T_1\left(n.\frac{t}{n}\right) - T_2\left(n.\frac{t}{n}\right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} \left[T_1\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T_2\left(\frac{kt}{n}\right) - T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right] \right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| T_1\left(\frac{(n-k)t}{n}\right) T_2\left(\frac{kt}{n}\right) - T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) T_2\left(\frac{(k+1)t}{n}\right) \right\| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \left[T_1\left(\frac{(n-k-1)t}{n}\right) \right] \left[T_1\left(\frac{t}{n}\right) - T_2\left(\frac{t}{n}\right) \right] \left[T_2\frac{kt}{n} \right] \right\| \\
&< \sum_{k=0}^{n-1} k_1.\frac{\epsilon}{t.k_1.k_2}.\frac{t}{n}.k_2 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon}{n} = \frac{n\epsilon}{n} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, por lo tanto $T_1(t) = T_2(t)$ $\forall t \geq 0$■.

Teorema 1.2.11. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo, entonces se cumple lo siguiente:*

a) Para el semigrupo $T(t) = e^{tA}$ existe un único operador acotado A, siendo A el generador infinitesimal de T(t).

b) Existe una constante $w \geq 0$ tal que $\|T(t)\| \leq e^{wt}$, $\forall t \geq 0$.

c) Sea una función $T : [0, +\infty\rangle \longrightarrow B(X, X)$, $\forall t \geq 0$, luego se le asigna un operador a T(t) y éste es diferenciable en norma y verifica

$$\frac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A.$$

Para $f_0 \in X$, la función $f(t) = T(t)f_0$ es la solución de $\frac{d}{dt}T(t) = Af(t) = Af(t)$, $t \geq 0$ tal que $f_0 = f(0)$. (Felipe Álvarez, 2003).

Prueba:

(a) Sea $x \in X$ entonces

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = \lim_{t\to 0^+} e^{tA}x = \lim_{t\to 0^+}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right)x = Ix = x.$$

Por tanto,

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{e^{tA}x - x}{t}\right] = \lim_{t\to 0^+}\left[Ax + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}A^nx\right] = Ax,$$

lo que muestra que A es el generador de $(e^{tA})_{t\geq 0}$ y la unicidad está dada por la proposición 1.2.4.

(b)

$$\|T(t)\| = \|e^{tA}\| = \|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\|$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t|^n\|A\|^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\|A\|^n}{n!}$$

$$= e^{t\|A\|},$$

entonces existe $w = \|A\| > 0$ $\forall t \geq 0$.

(c) Sea $x \in D(A)$ y $t > 0$. Para $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} &= \frac{T(t)T(x)x - T(t)x}{h}\\ &= \frac{T(h)-I}{h}T(t)x\\ &= T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x\end{aligned}$$

por la continuidad de T(t) se tiene

$$\frac{d^+T(t)}{dt}x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

Para $0 < h < t$, tenemos

$$\left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - T(t)Ax \right\| = \left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\|$$

$$= \left\| T(t-h) \left[\frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right] + T(t-h)Ax - T(t)Ax \right\|$$

$$\leq \|T(t-h)\| \left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|T(t-h)Ax - T(t)Ax\|$$

Por lo tanto, $\dfrac{d^{-}T(t)x}{dt} = T(t)Ax$∎.

1.2.16. C_0 - semigrupos.

Definición 1.2.25. *Sea un semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0- *semigrupo) de operadores lineales acotados en X, es fuertemente continuo si* $\forall\, x \in X$ *si verifica*

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x.$$

Esta definición es equivalente a

$$\lim_{t\to 0^+} \|T(t)x - x\| = 0, \forall x \in X.$$

Proposición 1.2.6. *Sea* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0 *- semigrupo. Entonces existen constantes* $w \geq 0$ *y* $M \geq 1$ *tal que para* $0 \leq t < \infty$ *se tiene,*

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.$$

(Engel, 2000).

***Prueba**:*

"De la continuidad fuerte, existen $\delta \geq 0$ *y* $M \geq 0$ *tal que* $\|T(t)\| \leq M$ *en [0,δ]". Si no se dara el caso anterior, existería una sucesión* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $t_n \to 0^+$*, tal que* $\|T(t_n)\| \geq n\; \forall\, n \in \mathbb{N}$ *y por principio de acotación uniforme, existe al menos un* $x \in X$ *tal que* $\|T(t_n)x\| \geq n$*, lo cual contradice a la definición de T(t) un* C_0 *- semigrupo. Luego,* $\|T(t)\| \leq M\; \forall\, t \in [0,\delta]$ *y como* $\|T(0)\| = 1$ *se tiene que* $M \geq 1$*. Por otro lado, para* $t \geq 0$ *existen* $m \in \mathbb{N}$ *y* $\eta \in [0,\delta]$ *tal que*

$t = \delta m + \eta$ (por la lema de Euclides). Se tiene,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \|T(\delta m + \eta)\| \\ &= \|T(\delta m)T(\eta)\| \\ &= \|T(\delta)^m T(\eta)\| \\ &\leq \|T(\delta)\|^m \|T(\eta)\| \\ &\leq M^m.M \\ &\leq M.M^{t/\delta} \qquad \text{pues } m \leq \frac{t}{\delta}, M \geq 1 \end{aligned}$$

Como $M \geq 1$ se tiene $w = \frac{1}{\delta} lnM \geq 0$ entonces $e^w = M^{\frac{1}{\delta}}$. Así $M^{\frac{1}{\delta}} = e^{tw}\ \forall\ t \geq 0$, y

$$\|T(t)\| \leq Me^{wt}.\blacksquare$$

Observación 1.2.10. *Todo semigrupo uniformemente continuo es un C_0 - semigrupo. "Un semigrupo uniformemente continuo converge uniformemente a la identidad en cero, mientras que un C_0 - semigrupo converge fuertemente. Al igual que los semigrupos continuos, los C_0 - semigrupos satisfacen una propiedad de acotación para su norma".*
El siguiente resultado será importante para poder confirmar resultados posteriores.

Teorema 1.2.12. *Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 - semigrupo y sea A su generador infinitesimal, entonces se cumple las siguientes propiedades:*
a) Para todo $t \geq 0$ y $\forall x \in X$,

$$\lim_{s\to t} T(s)x = T(t)x.$$

b)Para todo $x \in X$ y todo $t \geq 0$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

c) Para todo $x \in X$ y $\forall\ t \geq s \geq 0$,

$$\int_s^t T(\tau)xd\tau \in D(A) \quad y \quad A\int_s^t T(\tau)xd\tau = T(t)x - T(s)x.$$

d) Para todo $x \in D(A)$ y todo $t \geq 0$,

$$T(t)x \in D(A) \quad y \quad \frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

e) Para todo $x \in X$ y todo $t \geq s \geq 0$,

$$\int_s^t AT(\tau)xd\tau = \int_s^t T(\tau)Axd\tau.$$

(Engel, 2000).

***Prueba**:*

(a) Sean $x \in X, t > 0$ y $\epsilon > 0$. A partir de la continuidad fuerte del semigrupo, existen $M > 0$ y $\delta > 0$ tal que $\|T(s)\| \leq M$ para $s \in [0, t+1]$ y

$\|T(s)x - x\| < \dfrac{\epsilon}{M}$ cuando $0 < s < \delta$. para $0 < t - s < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\|T(t)x - T(t)x\| &= \|T(s)x - T(t)x - T(s)T(t-s)x + T(s)T(t-s)x\| \\
&= \|T(s)(x - T(t-s)x) - T(t)x + T(s)T(t-s)x\| \\
&= \|T(s)(x - T(t-s)x) - T(t)x + T(t)x\| \quad \text{, pues } T(s)T(t-s) = T(t) \\
&\leq \|T(s)\|\|x - T(t-s)x\| \\
&< M.\frac{\epsilon}{M} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

(b) De la parte (a), existe $\delta > 0$ tal que $\|T(s)x - T(t)x\| < \epsilon$, cuando $|s - t| < \delta$, luego para $0 \leq h \leq \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \|(T(s)x - T(t)x)\|ds \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \epsilon.ds = \frac{1}{h}.\epsilon.h \\
&= \epsilon.
\end{aligned}$$

De manera análoga se prueba el límite izquierdo, para $t > 0$. Con ello se prueba la parte (b).

(c) Sea $x \in X$, $h > 0$ y de la continuidad de T(t) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_s^t T(\tau)xd\tau &= \frac{1}{h}\int_s^t [T(\tau+h)x - T(\tau)x]d\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_s^t T(\tau+h)xd\tau - \frac{1}{h}\int_s^t T(\tau)xd\tau \\
&= \frac{1}{h}\int_{s+h}^{t+h} T(\tau)xd\tau - \frac{1}{h}\int_s^t T(\tau)xd\tau \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_{s+h}^{t} T(\tau)xd\tau + \int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \int_s^t T(\tau)xd\tau\right], t < t+h \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \int_s^t T(\tau)xd\tau - \int_t^{s+h} T(\tau)xd\tau\right] \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(\tau)xd\tau - \frac{1}{h}\int_s^{s+h} T(\tau)xd\tau,
\end{aligned}$$

tomando límite cuando $h \longrightarrow 0$ y por la parte (b) se tiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_s^t T(\tau)xd\tau = T(t)x - T(s)x.$$

Por otro lado, por la definición de generador se tiene $\int_s^t T(\tau)xd\tau \in D(A)$ y $A\int_s^t T(\tau)xd\tau = T(t)x - T(s)x$.

(d) Sea $x \in D(A)$ y $h > 0$, se tiene

$$\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]T(t)x = \left[\frac{T(t+h)-T(t)}{h}\right]x = T(t)\left[\frac{T(h)-I}{h}\right]x,$$

tomando límite cuando $h \to 0$ (y como T(t) es continua) entonces $T(t)x \in D(A)$ y por otro lado

$$AT(t)x = \frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax.$$

También tenemos, para $0 < h \leq t$ y $M > 0$ tal que $\|T(s)\| \leq M$, $\forall s \in (0,t)$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax &= T(t-h)\left(\frac{T(h)Ax - x}{h}\right) - T(t-h)Ax + \\
&\quad + T(t-h)Ax - T(t-h)T(h)Ax \\
&= T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\right),
\end{aligned}$$

luego, tomando norma se tiene

$$\left\| \frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax \right\| \leq \|T(t-h)\| \left(\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|Ax - T(h)Ax\| \right),$$

$$\leq M \left(\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\| + \|Ax - T(h)Ax\| \right),$$

recuerde que el término $\left\| \frac{T(h)x - x}{h} - Ax \right\|$ *es cero, pues* $x \in D(A)$ *y* $\|Ax - T(h)Ax\|$ *es cero,*

"como T(t) es un C_0*-semigrupo y por la parte (a). se tiene que* $\frac{d^-}{dt}T(t)x$ *y existe* $\frac{d^-}{dt}T(t)x = T(t)Ax$*".*
De esta manera se prueba que $\forall\, t \geq 0$ *y todo* $x \in D(A)$*, se tiene*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

(e) La parte (e) demostraremos con los resultados obtenidos en (b) y (d).

Sea $x \in D(A)$ *y* $s, t \geq 0$ *y por (b) y (d) se tiene que*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau.$$

1.2.17. Cerradura del generador infinitesimal de un C_0- semigrupo

Definición 1.2.26. *Sean (X, Y) espacios de Banach y un operador A:*$D(A) \subseteq X \longrightarrow Y$*, diremos que A es cerrado si dada una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ *verifica*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X \; ; \; \lim_{n\to\infty} Ax_n = y \in Y, \text{ entonces } x \in D(A) \text{ también } Ax = y.$$

Observación 1.2.11. *"Notemos que si A es acotado, entonces también es cerrado. El recíproco, en general no es verdad. Sin embargo; si* $D(A) = X$*, entonces A es acotado, si y sólo si, es cerrado".*

Proposición 1.2.7. *Si A es un generador infinitesimal de un* C_0- *semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$*, entonces* $D(A)$*, dominio de A, es denso en X y A es cerrado. (Felipe Álvarez, 2003).*

prueba:

Para cada $x \in X$*, construyamos una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ *que converge a x.* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* *definamos* $x_n = n\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)xds$. *De la parte de c) del teorema 1.2.9,* $x_n \in D(A)\ \forall\ n > 0$, *y por la parte b) del mismo teorema, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{1}{n}} T(s)xds = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds = T(0)x = Ix = x.$$

Luego, $x_n \to x$ *y* $x \in D(A)$, *Por lo tanto concluimos que* $\overline{D(A)} = X$

La linealidad de A es evidente.

La prueba del operador lineal cerrado, supongamos que $(x_n) \in D(A)$, $x \in X$, $y \in Y$ *tales que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x\ ;\ \lim_{n\to\infty} Ax_n = y,\ probaremos\ que\ x \in D(A)\ \ y\ \ Ax = y.$$

De la parte (e) del teorema 1.2.9, se tiene

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(t)Ax_n ds \tag{1.8}$$

Afirmación $T(t)Ax_n \to T(s)y$, *cuando* $n \to \infty$, *es continua uniformemente en intervalos acotados. Para* $0 < s \leq t$, *se tiene*

$$\begin{aligned}\|T(s)Ax_n - T(s)y\| &= \|T(s)(Ax_n - y)\| \\ &\leq \|T(s)\|\|Ax_n - y\| \\ &\leq Me^{ws}\|Ax_n - y\| \\ &= Mte^{wt}\|Ax_n - y\| \to 0,\ cuando\, n \to \infty.\end{aligned}$$

Donde M, W son constantes de la proposición 1.2.3, usando del resultado anterior y haciendo $n \to \infty$ *en (1.8), se tiene*

$$T(t)x - x = \int_0^t T(t)yds.$$

Dividiendo para $t \geq 0$ *y* $t \to 0$ *y por la (b) del teorema 1.2.9, se tiene*

$$\lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)yds = T(0)y = Iy = y$$

como: $x \in D(A)$ *y* $Ax = y$. *Por lo tanto, A es un operador lineal cerrado.*

"La siguiente proposición nos garantiza la unicidad del semigrupo asociado a un generador infinitesimal para semigrupos fuertemente continuos".

Proposición 1.2.8. *Sean* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *y* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *dos* C_0 *- semigrupos con generadores infinitesimales A y B respectivamente. Entonces A=B, si y sólo si, T(t)= S(t)* $\forall t \geq 0$. *(Felipe Álvarez, 2003).*

prueba:

De la definición del generador infinitesimal inmediatamente se tiene que si T(t)= S(t), $\forall t \geq 0$, *resulta que A=B.*

Supongamos ahora que A=B. Sean $x \in X$ *y* $t \geq 0$.

Definimos la función $\phi_t : [0,t] \longrightarrow X$ *por* $\phi_t(s) = T(t-s)S(s)x$. *Usando la parte(d) del teorema 1.2.9 y por la regla de la cadena,* $\phi_t(s)$ *es diferenciable, por tanto*

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}\phi_t(s) &= \left[\frac{d}{ds}T(t-s)\right]S(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s) \\
&= -AT(t-s)S(s) + T(t-s)BS(s) \\
&= -T(t-s)AS(s) + T(t-s)AS(s) \\
&= 0
\end{aligned}$$

como A=B. Entonces ϕ_t *es constante en [0, t].*

En particular $\phi_t(0) = \phi_t(t)$. *Es decir,* $T(t)x = S(t)x$, $\forall x \in X$. *"Ahora verificaremos, que la propiedad es válida para* $x \in X$. $\forall x \in X$, *tomemos la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $D(A)$ *tal que* $x_n \to x$*".*

Puesto que T(t) y S(t) son continuas, se tiene que $T(t)x_n \to T(t)x$ *y* $S(t)x_n \to S(t)x$ *si* $n \to \infty$.

Por tanto, $T(t)x_n = S(t)x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *luego se sigue T(t)x = S(t)x.*

Finalmente, T(t) = S(t), $\forall t \geq 0$■.

1.2.18. C_0- semigrupo de contracciones

Sea $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*- semigrupo de la proposición 1.2.5 si tiene las siguientes constantes* $w \geq 0$ *y* $M \geq 1$ *tal que* $\|T(t)\| \leq Me^{wt}$ $\forall t \geq 0$.

Si w=0, T(t) es uniformemente acotado y si M=1 se tiene C_0*- semigrupo de contracciones, es decir* $\|T(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$.

En esta sección nos dedicaremos a la caracterización de los generadores infinitesimales de C_0*-semigrupos de contracciones. "Las condiciones para que el operador no acotado sea aproximado por operadores continuos está estrictamente vinculado a las propiedades del conjunto resolvente del operador resolvente de A".*

Definición 1.2.27. *Sea* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert y* $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *un operador lineal; no acotado en* $\mathcal{H}$, *el conjunto resolvente* $\rho(A)$ *de A se define como:*

$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1}$*es invertible y* $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}$ *y al espectro de A como* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. *Para* $\lambda \in \rho(A)$,
$\mathcal{R}(\lambda) = \mathcal{R}(\lambda, \mathcal{A}) = (\lambda I - A)^{-1}$, *es llamado " familia de operadores lineales acotados".*
(García, 2018).

Observación 1.2.12. *"Todo operador A acotado o no, conmuta con el operador resolvente".*
Es decir,

$$A(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}A$$

Definición 1.2.28. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio un espacio de Hilbert. Un operador A es disipativo si*

$$Re\langle AX, X\rangle \leq 0, \forall X \in D(A).$$

(Muñoz-Rivera, 2008).

Definición 1.2.29. *Sea A un operador lineal con $\rho(A) \neq \emptyset$. Definimos para $\lambda \in \rho(A)$ la regularizada de Yosida de A por*

$$A_\lambda = \lambda A\mathcal{R}(\lambda : A) = \lambda^2\mathcal{R}(\lambda : A) - \lambda I$$

Antes de establecer el teorema de Hille - Yosida, "demostraremos la siguiente proposición que nos ayudará en la demostración del teorema de Hille- Yosida".

Proposición 1.2.9. *Sea un operador lineal $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ cerrado tal que $\overline{D(A)} = X$ y que $\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \frac{1}{\lambda}\ \forall\lambda > 0$. Verificando las propiedades,*

a) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x = x$, $\forall x \in X$.

b) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$, $\forall x \in D(A)$.

c) Para cada $\lambda > 0$, A_λ es el generador infinitesimal de "un semigrupo de contracciones" uniformemente continuos $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ en X. Más aún se tiene que, $\forall x \in X$, $\lambda, \mu > 0$

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

(Ullod, 2012).

Prueba:

(a) Sea $x \in \rho(A)$ y $\lambda > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\lambda : A) &= (\lambda I - A)^{-1} \\
(\lambda I - A)\mathcal{R}(\lambda : A) &= I \\
\lambda\mathcal{R}(\lambda : A) - A\mathcal{R}(\lambda : A) &= I \\
\lambda\mathcal{R}(\lambda : A) - I &= A\mathcal{R}(\lambda : A).
\end{aligned}$$

Ahora para $x \in \rho(A)$ y usando la igualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\|\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x - x\| &= \|A\mathcal{R}(\lambda : A)x\| \\
&= \|\mathcal{R}(\lambda : A)Ax\| \\
&= \|\mathcal{R}(\lambda : A)\|.\|Ax\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda}.\|Ax\| \to 0, \text{ cuando } \lambda \to \infty.
\end{aligned}$$

luego, se sigue que $\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x \to x$ cuando $\lambda \to \infty$.
Por otro lado, "sea $x \in X$. Como $\overline{D(A)} = X$, existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con valores en $D(A)$".
Tal que $x_n \to x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ y $L > 0$;
entonces $\|x_n - x\| < \dfrac{\epsilon}{2}$, $\forall n \geq n_\epsilon$, y

$$\|\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x_{n\epsilon} - x\| < \frac{\epsilon}{2}, \forall\lambda > L.$$

Para $\lambda > L$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x - x\| &= \|\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)(x - x_{n\epsilon}) + \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x_{n\epsilon} - x\| \\
&= \|\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)\|.\|x - x_{n\epsilon}\| + \|\lambda\mathcal{R}(\lambda : A)x_{n\epsilon} - x\| \\
&\leq \lambda.\tfrac{1}{\lambda}.\tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

lo que prueba que $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathcal{R}(\lambda : A)x = x$, $\forall x \in X$.

(b) Para cada $\lambda > 0$, de la regularizada de Yosida de A se tiene

$$A_\lambda = \lambda A\mathcal{R}(\lambda : A) = \lambda A(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^2\mathcal{R}(\lambda : A) - \lambda I = \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)A.$$

Si $x \in D(A)$, se tiene

$$A_\lambda x = \lambda A\mathcal{R}(\lambda : A)x = \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)Ax$$

lo que equivale

$$A_\lambda x - Ax = \lambda\mathcal{R}(\lambda : A)Ax - Ax$$

usando la parte (a), y la definición de A_λ,

$$\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax, \forall x \in D(A).$$

(c) Es evidente que A_λ es un operador lineal acotado y por la proposición. 1.2.3, "también es el generador infinitesimal de un semigrupo uniformemente continuo $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$", dado por $T_\lambda(t) = e^{tA_\lambda}$, esto por el teorema 1.2.8 parte (a), y por la hipótesis tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)\| &= \|e^{tA_\lambda}\| \\
&= \left\|e^{t\lambda^2\mathcal{R}(\lambda:A)}e^{-\lambda t}\right\| \\
&= e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t\|\mathcal{R}(\lambda:A)\|} \\
&\leq e^{-\lambda t}e^{\lambda^2 t}\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \\
&\leq e^{-\lambda t}e^{\lambda t} = 1.
\end{aligned}$$

"El resultado anterior demuestra que $\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0- semigrupo de contracciones". Por las definiciones se tiene que $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\lambda}$ y e^{tA_λ} conmutan, y como $t \to T_\lambda x$ es diferenciable, y por la parte (c) de la proposición 1.2.8, tenemos

$$\begin{aligned}
\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &= \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \\
&= \left\|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left[e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right]ds\right\| \\
&\leq \int_0^1 \left\|tA_\lambda e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x - tA_\mu e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right\|ds \\
&\leq \int_0^1 t\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\right\|ds \\
&\leq \int_0^1 t\|A_\lambda x - A_\mu x\|ds \\
\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|\blacksquare.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.13. *Sea* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semigrupo en un espacio de Banach X, tomando los constantes* $w \in \mathbb{R}$ *y* $M \geq 1$ *tal que* $\|S(t)\| \leq Me^{wt}$, $\forall t \geq 0$. *Para el generador* $(A, D(A))$ *se cumple lo siguiente:*

a) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ *tal que* $\mathcal{R}(\lambda) := \int_0^\infty S(s)mds$ *existe* $\forall m \in X$, *entonces* $\lambda \in \rho(A)$ *con*
$R(\lambda, A) = \mathcal{R}(\lambda)$.

b) Si $\mathcal{R}\lambda > w$, *entonces* $\lambda \in \rho(A)$ *y la resolvente viene dada por la integral de (a).*

c) $\|\mathcal{R}(\lambda, A)\| \leq \dfrac{M}{\mathcal{R}\lambda - w}$, $\forall\, \mathcal{R}\lambda > w$.

La parte a) se denomina representación integral del resolvente. "Por supuesto, esta integral se entiende como una integral impropia de Riemann", es decir; (Ullod, 2012).

$$\mathcal{R}(\lambda, A)m = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda s}S(s)mds, \ \ \forall m \in X.$$

Notación: $\mathcal{R}(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)ds$.

Prueba: *(a) Vamos a verlo primero para* $\lambda = 0$. *Sea* $m \in X$ *arbitrario y* $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)-I}{h}R(0)m &= \frac{S(h)-I}{h}\int_0^\infty S(s)mds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty S(s+h)mds - \frac{1}{h}\int_0^\infty S(s)mds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty S(s)mds - \frac{1}{h}\int_0^\infty S(s)mds \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^h S(s)mds
\end{aligned}$$

Tomando $t \to 0^+$ *se tiene* $\mathcal{R}(0)m \in D(A)$, $\forall\, m \in X$, *es decir,* $rang(\mathcal{R}(0)) \subseteq D(A)$ *y además* $A\mathcal{R}(0)$*=-I. Luego para* $m \in D(A)$, *tenemos*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t S(s)mds = \mathcal{R}(0)m$$

y

$$\lim_{t\to\infty} A\int_0^t S(s)mds = \lim_{t\to\infty}\int_0^t S(s)Amds$$

$$= \mathcal{R}(0)Am$$

definamos $V(t)=\int_0^t S(s)mds$, como el operador A cerrado, tenemos

$$\lim_{t\to\infty} V(t)=\mathcal{R}(0)m$$

y

$$\lim_{t\to\infty} AV(t)=\mathcal{R}(0)Am$$

$entonces\ se\ tiene\ que$

$$-Im=A\mathcal{R}(0)m=\mathcal{R}(0)Am.$$

Así, $\mathcal{R}(0)=(-A)^{-1}=\mathcal{R}(0,A)$.

"Ahora probemos que para un $\lambda\in\mathbb{C}$ cualquiera que verifique la hipótesis se realiza el mismo proceso tomando el semigrupo $S(t)=e^{-\lambda t}T(t)$ con generador $B=-\lambda$", D(B)=D(A) y en tal caso se tiene $\mathcal{R}(\lambda)=(-B)^{-1}=(\lambda-A)^{-1}=\mathcal{R}(\lambda,A)$.

(b) Si $\mathcal{R}(\lambda)>0$, veamos que existe

$$\mathcal{R}(\lambda)m=\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)mds$$

para todo $m\in X$. Se observa

$$\|\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)mds\|\leq\int_0^\infty |e^{-\lambda s}|\|S(s)m\|ds$$

$$\leq\int_0^\infty e^{-\mathcal{R}\lambda s}Me^{ws}\|m\|ds$$

$$=M\|m\|\int_0^\infty e^{s(w-\mathcal{R}\lambda)}ds\leq\infty$$

ya que $w-\mathcal{R}(\lambda)<0$, y de esta manera se prueba del resultado de (a).

(c) Si $\mathcal{R}(\lambda)>w$, entonces $\lambda\in\rho(A)$ y así

$$\mathcal{R}(\lambda,A)m=\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)mds.$$

$Luego,$

$$\|\mathcal{R}(\lambda,A)m\|\leq M\|m\|\int_0^\infty e^{s(w-\mathcal{R}\lambda)}ds$$

$$\|\mathcal{R}(\lambda,A)m\|\leq=\frac{M\|m\|}{\mathcal{R}\lambda-w}\ \ \forall\,\lambda>0\blacksquare.$$

1.3. Teorema Hille - Yosida

"El siguiente teorema establece una condición necesaria y suficiente para que un operador no acotado A sea el generador infinitesimal de un semigrupo C_0- de contracciones".

Teorema 1.3.1. ***(Hille - Yosida)***

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador lineal no acotado es generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones, si y solo si,
a) A es cerrado y $\overline{\mathcal{D}(A)}$=$\mathcal{H}$.
b) $\langle 0, \infty\rangle \subset \rho(A)$ y $\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$. (Pazy, 1983).
Prueba del teorema de Hille - Yosida: necesidad
Supongamos que A es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones $(T_\lambda(t))_{t\geq 0}$ en $\mathcal{H}$.
Prueba de (a). *Por la proposición 1.2.7, "A es un operador cerrado y su dominio es denso. Por tanto satisface la condición (a) del teorema de Hille - Yosida".*
Prueba de (b). *Dado $\lambda > 0$, presentamos a $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ como candidato definido en el teorema 1.2.13, de la parte (a).*

$$\mathcal{R}(\lambda)x = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\lambda t}T(t)xds, \quad \forall x \in X.$$

"Como $t \longmapsto T(t)x$ es continuo y uniformemente acotado, pues $\|T(t)x\| \leq \|x\|$, la integral de la resolvente se puede extender como una integral de Riemann" y también define a un operador lineal acotado que verifica

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(\lambda)x\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right\| \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|T(t)x\|dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|x\|,\end{aligned}$$

así, se tiene que $\mathcal{R}(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$ y que $\|\mathcal{R}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ $\forall\lambda > 0$. Por otro lado, para $\lambda > 0$, $x \in X$

y $h > 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\mathcal{R}(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(h)T(t)xdt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}[T(t+h)x - T(t)x]dt \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_h^\infty e^{-\lambda(t)}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[e^{\lambda h}\int_0^\infty e^{-\lambda(t)}T(t)xdt - e^{\lambda h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
&= \frac{e^{\lambda h - 1}}{h}\int_0^\infty T(t)xdt - \frac{e^{\lambda t}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt,
\end{aligned}$$

cuando $h \to 0$ la parte derecha converge a $\lambda\mathcal{R}(\lambda)x - x$. Así, $\forall x \in X$ y $\forall \lambda > 0$, $\mathcal{R}(\lambda)x \in D(A)$ y que $A\mathcal{R}(\lambda)x - x = \lambda\mathcal{R}(\lambda)x - x$; es decir,

$$(\lambda I - A)\mathcal{R}(\lambda)x = x. \tag{1.9}$$

Para que $\mathcal{R}(\lambda)$ sea la inversa de $\lambda I - A$, "falta ver qué pasa cuando opera por la parte izquierda". Para $x \in D(A)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(\lambda)Ax &= \int_0^\infty e^{\lambda t}T(t)Axdt \\
&= \int_0^\infty e^{\lambda t}AT(t)xdt, \\
&= A\int_0^\infty e^{\lambda t}T(t)xdt, \\
&= A\mathcal{R}(\lambda)x,
\end{aligned}$$

En la última igualdad usamos lo siguiente $T(t)Ax = AT(t)x$, $\forall x \in D(A)$. Puesto que A es cerrado, y de la convergencia de la integral impropia anterior tenemos $\int_0^\infty e^{-\lambda t}AT(t)xdt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = A\mathcal{R}(\lambda)x$. Luego $\mathcal{R}(\lambda)$ y A conmutan sobre $D(A)$, junto con (3.1) entonces

$$\mathcal{R}(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \ \ \forall x \in D(A). \tag{1.10}$$

De las ecuaciones (1.9) y (1.10) vemos que $\mathcal{R}(\lambda)$ es la inversa de $\lambda I - A$.

Por lo tanto, $\langle 0, +\infty\rangle \subset \rho(A)$ y $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ $\forall \lambda > 0$■.

Prueba del teorema de Hille - Yosida: suficiencia

Ahora supongamos que (a) y (b) se cumplen. Sea $(T(t))_{t\geq 0}$ *y* A_λ *como en la proposición 1.2.9,* $\forall x \in D(A)$, *tenemos la siguiente desigualdad para* $\lambda > 0$ *y* $\mu > 0$

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \\ &\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t\|A_\lambda x - Ax\| + t\|A_\mu x - Ax\|, \end{aligned}$$

por la proposición 1.2.9, $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ *convergente en X, si* $\lambda \to \infty$ *y converge uniformemente sobre intervalos acotados [0,T]. "Como* $D(A)$ *es denso en X y* $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de contracciones", así concluimos que* $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ *es convergente,* $\forall x \in X$.

En efecto:

sea $x \in X$, $t \in [0,a]$ *con* $a > 0$*; fijando* $y \in D(A)$ *y* $\lambda_0 > 0$, *tales que* $\|x - y\| < \epsilon$ *y*

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \|e^{tA_\lambda(x-y) - e^{tA_\lambda}y + e^{tA_\mu}y + e^{tA_\mu}y - e^{tA_\mu}x}\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda}(x-y)\| + \|e^{tA_\lambda}y - e^{tA_\mu}y\| + \|e^{tA_\mu}y - e^{tA_\mu}y\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda}\|\|x-y\| + \epsilon + \|e^{tA_\lambda}\|\|x-y\| \\ &< 2\|x-y\| + \epsilon = 3\epsilon, \end{aligned}$$

como $\epsilon > 0$, *con ello se prueba la afirmación.*

Definamos la familia de operadores $(T(t)_{t\geq 0}$, *para* $x \in X$ *por*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{1.11}$$

Es evidente que T(t) es un operador lineal en X, $\forall t \geq 0$. *Tenemos que T(0)= I,*
$\|T(t)x\| = \left\|\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x\right\| \leq \|x\|$,
significa que $T(t)x \leq 1$, $\forall t \geq 0$ *en consecuencia,* $(e^{tA_\lambda})_{t\geq 0}$ *es de contracción.*

A continuación se prueba que $(T(t))_{t\geq 0}$ *es un* C_0 *- semigrupo en X y que A es su generador infinitesimal. por otro lado vemos que T(0)x=x,* $\forall x \in X$. *Para probar T(t+s)=T(t)T(s), sean* $x \in X$ *y* $s, t \geq 0$, *entonces* $T(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x$.

De la igualdad,

$$\begin{aligned} \|e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x - T(s)T(t)x\| &= \|e^{sA_\lambda}x(e^{tA_\lambda}x - T(t)x) + e^{sA_\lambda}T(t)x - T(s)T(s)x\| \\ &\leq \|\|e^{sA_\lambda}\|\|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| + \|e^{sA_\lambda}T(t)x - T(s)T(t)x\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda}x - T(t)x\| + \|e^{sA_\lambda}T(t)x - T(s)T(t)x,\| \end{aligned}$$

cuando $\lambda \to \infty$ se tiene $e^{sA_\lambda}e^{tA_\lambda}x \to T(s)T(t)x$, lo cual prueba que T(s+t)= T(s)T(t). Ahora, como $e^{tA_\lambda}x$ converge uniformemente para $t \in [0,a]$, $a > 0$; vemos que T(t)x es una función continua en $[0,a]$. Por lo tanto, " $(T(t))_{t\geq 0}$ es un C_0 - semigrupo de contracciones".
Para terminar la prueba, bastará probar que A es el generador de $(T(t))_{t\geq 0}$.
Para $x \in D(A)$ y $t > 0$, se tiene la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\|e^{sA_\lambda}A_\lambda x - T(s)Ax\| &= \|e^{sA_\lambda} - e^{sA_\lambda}Ax + e^{sA_\lambda} - T(s)Ax\| \\
&= \|e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax) + (e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\
&\leq \|e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\
&\leq \|e^{sA_\lambda}\|\|A_\lambda x - Ax\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\| \\
&\leq \|A_\lambda x - Ax\| + \|(e^{sA_\lambda} - T(s))Ax\|,
\end{aligned}$$

*cuando $\lambda \to \infty$, se sigue que $e^{sA_\lambda}A_\lambda x$ "converge uniformemente para **s** en intervalos acotados para T(t)Ax". Usando la ecuación (1.11) y el teorema 1.2.12 parte (e), se tiene*

$$\begin{aligned}
\frac{T(t)x - x}{t} &= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda} - x) \\
&= \frac{1}{t}\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{tA_\lambda}A_\lambda x ds,
\end{aligned}$$

$de\ donde\ concluimos,\ para$

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^\infty T(s)Axds. \tag{1.12}$$

Sea B el generador infinitesimal de $(T(t))_{t\geq 0}$. Entonces la convergencia $T_\lambda A_\lambda x \to T(t)Ax$, es uniforme en intervalos acotados para t. "Para $t \to 0$ en (1.12), se tiene que $x \in D(B)$ y que $Bx = Ax$". Por otro lado $A \subset B$, $D(B) \subset X \longrightarrow X$ es una extensión de A, y $D(A) \subset D(B)$. Pero por hipótesis, $1 \in \rho(A)$ y por la condición necesaria $1 \in \rho(B)$, tenemos que $(I - A)D(A) = X = (I - B)D(A)$, asimismo $(I - B)D(A) = X = (I - B)D(B)$, luego $D(B) = (I - B)^{-1}X = \mathcal{D}(A)$, esto significa que A=B en X.
Por lo tanto, " A es el generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo de contracciones" $\blacksquare$.

1.3.1. Teorema de Lummer - Phillips

A continuación, presentaremos otra caracterización de los generadores infinitesimales de los C_0 - semigrupos de contracciones, el teorema de Lummer - Phillips el cual resulta de mucha utilidad en espacios de Hilbert y otros espacios como los espacios L^p, "lo cúal será utilizado para obetener la existencia y unicidad de soluciones de los modelos disipativos y será de mucha importancia para las secciones siguientes".

Definición 1.3.1. *Sea X un espacio de Banach real o complejo y X^* su dual topológico. El valor de $x^* \in X^*$ en $x \in X$ está dado por $\langle x^*, x\rangle$ o $\langle x, x^*\rangle$. Definimos el conjunto dual $F(x) \subseteq X^*$ por*

$$F(x) = \{x^* \in X^* : Re\langle x^*, x\rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},$$

"por el teorema de Hahn - Banach, $\forall x \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $\langle x, f\rangle = \|x\|$ y $\|f\|_* = 1$". Entonces $x^* = \|x\|$ y se tiene $\|x\| = \|x^*\|_*$ y también se cumple $\langle x, x^*\rangle = \|x\|\langle x, f\rangle = \|x\|^2$, en consecuencia, $\forall x \in X$, $F(x) \neq \emptyset$. (Raposo, 2012).

Definición 1.3.2. *Un operador $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ es disipativo, si para todo $x \in D(A)$ existe $x^* \in F(x)$ tal que*

$$Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0. \text{ (Raposo, 2012).}$$

Observación 1.3.1. *En espacios de Hilbert, "una consecuencia del teorema de representacion de Riesz y de la convexidad estricta es que $x \in F(x)$ es el único elemento en el conjunto de dualidad"; es decir, en un espacio de Hilbert un operador lineal A es disipativo si $Re(\langle Ax, x\rangle) \leq 0$ $\forall x \in D(A)$. "Esta identidad se suele utilizar como definición del operador disipativo en un espacio de Hilbert".*

Ejemplo 1.3.1. *Consideremos el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = L^2([0,1]; \mathbb{R})$ y el operador $A : D(A) \subseteq \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ donde $A(x) = \frac{d}{dt}x$ y $D(A) = \{x \in H^1([0,1]; \mathbb{R}) : x(0) = 1\}$. Entonces,*

$$Re\langle Ax, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \int_0^1 x(t)\frac{d}{dt}x(t)dt = -\frac{1}{2}(x(0))^2 = 0$$

Proposición 1.3.1. *Un operador $E : D(E) \subseteq X \longrightarrow X$ es disipativo, si $\forall\, m \in D(E)$ y $\forall \lambda > 0$ se verifica lo siguiente*

$$\|(\lambda I - E)m\| \geq \lambda\|m\|.$$ *(Raposo, 2012)*

Prueba:

Supongamos que E es disipativo y sea $m \in D(E)$. Si m=0, la desigualdad es inmediata.

Ahora probemos para $m \neq 0$ y $\lambda > 0$, sea $m^* \in F(m)$ tal que $Re\langle Em, m^*\rangle \leq 0$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - E)m\| &= \|\lambda m - Em\|\|x^*\| \\
&\geq |\langle \lambda m - Em, m^*\rangle| \\
&\geq Re\langle \lambda m - Em, m^*\rangle \\
&= Re\langle Em, m^*\rangle - Re\langle Em, m^*\rangle \\
&= \lambda\|m\|^2 - Re\langle Em, m^*\rangle \\
&= \lambda\|m\|^2
\end{aligned}$$

$de\ donde,$

$$\|(\lambda I - A)m\| \geq \lambda\|m\|.$$

Recíprocamente, sea $m \in D(E)$ y supongamos que para $\lambda > 0$ (donde $m \neq 0$)
$\|\lambda m - Em\| \geq \lambda\|m\|$.

Sea $y_\lambda^* \in F(\lambda m - Em)$ y $z_\lambda^* = \dfrac{y_\lambda^*}{\|y_\lambda^*\|_*}$, entonces $\|z_\lambda^*\| = 1$ y

$$\begin{aligned}
\lambda\|m\| &\leq \|\lambda m - Em\| \\
&= \langle \lambda m - Em, z_\lambda^*\rangle \\
&= \lambda\langle m, z_\lambda^*\rangle - \langle Em, z_\lambda^*\rangle \\
&= \lambda Re\langle m, z_\lambda^*\rangle - Re\langle Em, z_\lambda^*\rangle \\
&\leq \lambda\|m\| - Re\langle Em, z_\lambda^*\rangle
\end{aligned}$$

$luego,$

$$Re\langle Em, z_\lambda^*\rangle \leq 0 \tag{1.13}$$

y

$$Re\langle m, z_\lambda^*\rangle \geq \|m\| - \tfrac{1}{\lambda}\|Em\|. \tag{1.14}$$

Como la sucesión $(z_\lambda^*)_{\lambda\in\mathbb{N}}$ está contenida en una bola unitaria en X^*, y es compacta para la topología débil *, "entonces existe una subsucesión (que estamos denotando por $(z_\lambda^*)_{\lambda\in\mathbb{N}}$) que converge a un cierto z^* para ésta topología". Al pasar al límite (1.13) y (1.14) tenemos $Re\langle Em, z^*\rangle \leq 0$ y

$Re\langle m, z^*\rangle \geq \|m\|$.

pero como

$Re\langle m, z^*\rangle \leq |\langle m, z^*\rangle| \leq \|m\|$,

entonces $\langle m, z^*\rangle = \|m\|$ y $\|z^*\| = 1$.

Tomando $m^* = \|m\|z^*$, tenemos que $m^* \in F(m)$ es decir, $\langle m, z^*\rangle = \|m\|^2 = \|m^*\|^2$ y $Re\langle Em, z^*\rangle \leq 0$. Se tiene, $\forall m \in D(E)$ existe $m^* \in F(m)$ tal que $Re\langle Em, m^*\rangle \leq 0$.

Por lo tanto, E es disipativo $\blacksquare$.

Proposición 1.3.2. *Sea $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador disipativo. Si $Im(\lambda_0 I - A) = X$ para algún λ_0, se verifica*

a) A es cerrado.

b) $Im(\lambda_0 I - A) = X$, $\forall\lambda > 0$. (Felipe Álvarez, 2003).

Prueba:

(a) Como $Im(\lambda_0 I - A) = X$ y $\|(\lambda_0 I - A)x\| \geq \lambda_0\|x\|$, $\forall\, x \in D(A)$; entonces se tiene $\lambda_0 \in \rho(A)$. "Luego $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ es un operador lineal acotado y por lo tanto cerrado", de donde $\lambda_0 I - A$ y A resultan cerrados.

(b) Consideremos el conjunto

$\Lambda = \{\lambda > 0 : Im(\lambda I - A) = X\}$ vamos a probar que Λ es un conjunto abierto y también cerrado.

Es claro que $\Lambda \neq \emptyset$, pues $\lambda_0 \in \Lambda$,

Λ es abierto en $\langle 0, \infty\rangle$.

En efecto:

sea $\lambda \in \Lambda$. Como $Im(\lambda I - A) = X$ y $\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda\|x\|$ para todo $x \in D(A)$, se tiene que $\lambda \in \rho(A)$, el cual es abierto, luego existe $\delta > 0$ tal que $\langle\lambda - \delta, \lambda + \delta\rangle \subseteq \Lambda$.

Λ es cerrado en $\langle 0, \infty\rangle$.

En efecto:

sea $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \lambda > 0$. Para cada $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in D(A)$ tal que $\lambda_n x_n - Ax_n = y$.

Luego $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|\lambda_n x_n - Ax_n\| = \tfrac{\|y\|}{\lambda_n} \leq k$$

para algún $k > 0$.

Además,

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &\leq \frac{1}{\lambda_m}\|\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m}\|-(\lambda_m x_m - Ax_m) + (\lambda_n x_n - Ax_n) + (\lambda_m - \lambda_n)x_n\| \\
&= \frac{1}{\lambda_m}\|-y + y + (\lambda_m - \lambda_n)x_n\| \\
&= \tfrac{\|x_n\|}{\lambda_m}|\lambda_n - \lambda_m| \\
&\leq k|\lambda_n - \lambda_m|,
\end{aligned}$$

"como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, también lo es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto converge a algún $x \in X$". Entonces se tiene, $Ax_n \to \lambda x - y$ cuando $n \to \infty$. Puesto que A es cerrado, $x \in D(A)$ y $(\lambda I - A)x = y$ entonces podemos concluir que $\lambda \in \Lambda$.

Además, $\langle 0, \infty\rangle$ es conexo, por lo tanto $\Lambda = \langle 0, \infty\rangle$ $\blacksquare$.

Observación 1.3.2. *"Si A es un operador lineal, $\lambda \in \rho(A)$ entonces $\lambda I - A$ y A son operadores cerrados".*

Teorema 1.3.2. *Sea X un espacio de Banach y A un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en X. Si $0 \in \rho(A)$, entonces A es el generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo de contracciones.*

Demostración. *Ver (Renardy, 1993) Teorema 2.12.3, pág. 88.*

Teorema 1.3.3. *Si A es un generador infinitesimal de un semigrupo diferenciable para todo $x \in X$ el problema de valor inicial tiene solución única cuando $x_0 \in D(\mathcal{A})$.*

Demostración. *(Pazy, 1983), teorema 1.4, página 104.*

Teorema 1.3.4. ***(Lumer Phillips)***

Sea A un operador lineal con dominio denso $D(A)$ en el espacio de Banach X.

a) Si A es disipativo y existe $\lambda_0 > 0$ tal que Im($\lambda_0 I - A$) = X, entonces A es un generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo f de contracciones en X.

b) Si A es generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo de contracciones sobre X, entonces

Im($\lambda_0 I - A$) = X, $\forall\lambda > 0$ y A es disipativo. También se tiene, $\forall x \in D(A)$ y $\forall$ $x^* F(x)$, se verifica $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$. *(Pazy, 1983).*

Prueba:

(a) Por la proposición 1.3.2, A es cerrado y $\langle 0, \infty\rangle \subseteq \rho(A)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y siendo A un operador cerrado, tenemos $\lambda x - Ax = y$, por lo tanto $Im(\lambda I - A) = X$ $\forall\lambda > 0$.

Por otro lado utilizando la proposición 1.3.1, el operador $(\lambda I - A)^{-1}$ es continuo y

$\|x\| \leq \dfrac{1}{\lambda}\|(\lambda I - A)x\|$, *para todo $x \in D(A)$,*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x\| = \frac{\|x\|}{\lambda}$$

por tanto, $\|\mathcal{R}(\lambda : A)\| \leq \dfrac{1}{\lambda}$. $\forall\lambda > 0$.

Por hipótesis, el $\overline{D(A)} = X$ es denso entonces por el teorema de Hille - Yosida se concluye que A es un generador infinitesimal del C_0- semigrupo de contracción.

(b) Para mostrar que A es dispativo, "supongamos que A es el generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo". Además por Hille - Yosida se cumple $\langle 0, \infty\rangle \subseteq \rho(A)$ y por tanto, $Im(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

Sea $x \in D(A)$ y $x^* \in F(x)$ se tiene

$$\langle T(t)x, x^*\rangle \leq \|T(t)x\|\|x^*\|_*\|x\|^2$$

en consecuencia,

$$Re\langle T(t)x - x, x^*\rangle = Re\langle T(t)x, x^*\rangle - \|x\|^2 \leq 0$$

realizando la división por $t > 0$ al último resultado y pasando al límite cuando $t \to 0$, se obtiene

$$Re\langle Ax, x^*\rangle = Re\langle \lim_{t\to 0}\frac{T(t)x - x}{t}, x^*\rangle \leq 0 \blacksquare.$$

CAPITULO II: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Tipo de investigación

Según (Hernandez, 2006) el tipo de investigación en esencia, se trata de la forma que puede adoptar un estudio de acuerdo a ciertos aspectos que lo definen, podemos mencionar los objetivos del estudio, la profundidad, la manipulación de las variables y el tipo de inferencia, los tipos de investigación según su metodología son: Según su objetivo (básica o aplicada), profundidad (exploratoria, descriptiva y explicativa) y según los datos (cualitativa - cuantitativa), etc.

Según (Bermeo, 2011), sostiene "la investigación básica es parte de un marco teórico y permanece en él. Su finalidad es formular nuevas teorías o modificar las existentes, e incrementar los conocimientos científicos o filosóficos sin contrastarlos con aspectos prácticos".

De acuerdo a esta definición nuestro caso en el trabajo de investigación, reúne condiciones para ser calificado como una investigación de tipo básica, se partió de un marco teórico y la formulación del hipótesis de la investigación como respuesta al problema planteado, de esta manera arribar a las conclusiones.

En los últimos años los modelos matemáticos, relacionados con procesos dependientes del tiempo ha capturado la atención de los científicos, en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales que representan fenómenos físicos tales como: mezcla de materiales termoviscoelásticos, ecuación de la onda con amortiguamiento, etc. En nuestro caso tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales parciales asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt dada por:

$$
(\divideontimes)\begin{cases}
\rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}u_{xxt} - b_{12}w_{xxt} + \alpha(u-w) + \alpha_1(u_t - w_t) \\
-k_1\theta_{xx} - \beta_1\theta = 0,\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty); \\
\rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}u_{xxt} - b_{22}w_{xxt} - \alpha(u-w) - \alpha_1(u_t - w_t) \\
-k_2\theta_{xx} - \beta_2\theta = 0,\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty); \\
c\theta_t - k\theta_{xx} + k_1 u_{xxt} + k_2 w_{xxt} + \beta_1 u_t + \beta_2 w_t = 0;\ (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty). \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{\textit{(Condiciones iniciales)}} \\
u(x,0) = u_0, u_t(x,t) = u_1, w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \theta(x,0) = \theta_0; x \in (0,L). \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{\textit{(Condiciones de frontera)}} \\
u(0,t) = u(L,t) = 0, w(0,t) = w(L,t) = 0, \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0; t \in (0,\infty).
\end{cases}
$$

Nuestro estudio es la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, esto es, en el capítulo 3 en la sección 3.1.1 demosetraremos la existencia y unicidad de la solución del sistema $(\divideontimes)$.

2.2. Nivel de investigación

Según (Hernandez, 2006), los niveles de investigación son: aplicativo, predectivo, relacional, exploratorio, descriptivo y explicativo. Las investigaciones explicativas se caracterizan por estudiar de forma puntual un fenómeno que no se había estudiado antes, y que no se había explicado bien con anterioridad.

• *De acuerdo a esta definición en nuestro caso, el estudio de la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, no está explicado detalladamente en un trabajo anterior. En ese sentido donde existe una pequeña cantidad de información en el marco teórico proporcionamos el conocimiento teórico y detalles sobre el desarrollo del estudio. Por ello el trabajo de investigación tiene el nivel explicativo.*

2.3. Diseño de investigación

Según (Arias, 2006) en cuanto a los tipos de investigación, existen muchos modelos y diversas clasificaciones: según el nivel, diseño y propósito. Según (Ñaupas P., 2014) se clasifica *por su diseño en: documental, experimental y de campo. Según (Martins, 2012) y (Ñaupas P., 2014) es un proceso basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos obtenidos y registrados en diversas fuentes documentales: impresas, audiovisuales o electrónicas. Su propósito es el aporte de nuevos conocimientos.*

• De acuerdo a esta definición en nuestro caso recopilamos y seleccionamos información a través de la lectura de documentos, libros, revistas científicas, bibliografías, etc. Así para cumplir con el objetivo de la investigación. Por ello el diseño de investigación utilizado en el presente trabajo es documental.

2.4. Población y muestra

• Población

Según (Arias, 2006), la población (o población objetivo), "es un conjunto finito o infinito de elementos con características comunes para los cuales serán extensivas las conclusiones de la investigación" además, según (Ñaupas P., 2014), se acostumbra a diferenciar dos tipos de población: población objetivo que es la población total pero no disponible, la población accesible que es la disponible y la que sirve a la investigación.

De acuerdo a esta definición en nuestro caso la investigación es netamente abstracto, por ello no existe la población en la que interactuan; cabe aclarar que, nuestro estudio esta inmerso dentro del espacio de Hilbert y espacio de Banach; espacios abstractos con sus características que no concuerda con la definición metodológica de la población

$*$ Un espacio vectorial normado completo se dice un espacio de Banach; es decir.

X= { Si para todo $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ de Cauchy, existe $x \in X$ / $x_n \longrightarrow x\}$ (Dieudonné, 1981).

$*$ El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$:

$\mathcal{H}$ = { Si para todo $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}$ de Cauchy, existe $x \in \mathcal{H}$ / $x_n \longrightarrow x\}$. (Yosida, 1973).

• ***Muestra***

Según (Arias, 2006), la muestra es un subconjunto representativo y finito que se extrae de algunas variables o fenómenos de la población; por tanto, refleja las características que definen la población de la cual fue extraída, lo cual nos indica que es representativa; según (Arias, 2006), una muestra representativa "es aquella que por su tamaño y características similares a las del conjunto, permite hacer inferencias o generalizar los resultados al resto de la población con un margen de error conocido".

Según (Hernández Sampiere, 2014), resalta que en una investigación no siempre se tiene una muestra, como es el caso en un censo en donde se incluye "todos los casos (personas, animales, plantas, objetos) del universo o la población".

• *De acuerdo a las definiciones anteriores, no existe la muestra, pues en nuestro estudio no se puede inferir o generalizar los resultados. Puesto que no existe la población.*

2.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Según (Useche M., 2020), en el proceso proceso de investigación científica se utiliza técnicas tales como: la entrevista, observación, revisión documental, encuesta, fichas y otros.

Instrumento: *(Useche M., 2020), lo define como el "conjunto de preguntas o ítems acerca de un problema determinado, objeto propio de la investigación, cuyas respuestas se han de contestar por escrito.*

De acuerdo a la definición anterior el instrumento utilizado para la recolección de datos fue ficha de registro o de demostración.

Técnica *: (Useche M., 2020), tomando en cuenta la diversidad de criterios, la recopilación de las técnicas de recolección de datos mayormente utilizadas, con los instrumentos que corresponden a cada una de ellas, a saber: encuesta, entrevista, sesión en profundidad, observación y revisión documental.*

Por la definición anterior, en la investigación se utiliza la técnica de revisión documentaria o bibliográfica, pues en este trabajo recopilamos y seleccionamos información a través de la lectura de documentos, libros, revistas científicas, bibliografías, páginas web, paper, etc.

2.6. Técnicas de procesamiento y análisis de datos

El procesamiento se realizo de la siguiente manera.

1. *Se tiene la ecuación diferencial parcial.*

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}u_{xxt} - b_{12}w_{xxt} + \alpha(u-w) + \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_1\theta_{xx} - \beta_1\theta = 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty); \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}u_{xxt} - b_{22}w_{xxt} - \alpha(u-w) - \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_2\theta_{xx} - \beta_2\theta = 0,\ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty); \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + k_1 u_{xxt} + k_2 w_{xxt} + \beta_1 u_t + \beta_2 w_t = 0;\ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty). \\ \qquad\qquad\qquad\textit{\textbf{(Condiciones iniciales)}} \\ u(x,0) = u_0, u_t(x,t) = u_1, w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \theta(x,0) = \theta_0; x \in (0,L). \\ \qquad\qquad\qquad\textit{\textbf{(Condiciones de frontera)}} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, w(0,t) = w(L,t) = 0, \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0; t \in (0,\infty). \end{cases}$$

2. *A partir de la ecuación anterior, se construye el problema de Cauchy abstracto.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U \\ U(0) = U_0, \forall t > 0. \end{cases}$$

donde $\mathcal{A}$ es un operador diferencial no acotado.

3. *La prueba de la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy abstracta; consiste en demostrar, que el operador $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo de contracciones. Mediante técnicas y teoremas matemáticas se demuestra que $D(\mathcal{A})$ es denso en $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ es disipativo; es decir, el producto interno de la parte real debe ser negativo; luego, $0 \in \rho(\mathcal{A})$ para ello se verifica que $\mathcal{A}$ es inversible y $\mathcal{A}^{-1}$ es acotado.*

2.7. Variables e indicadores

VARIABLES	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSIÓN	INDICADORES
VARIABLE INDEPENDIENTE: Condiciones de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin-Voigt	El presente trabajo nos permite realizar un estudio científico básico, desde el punto de vista teórico y práctico	1. $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ 2. $\mathcal{A}$ es disipativo 3. $0 \in \rho(\mathcal{A})$ 4. $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal	1. Uso de análisis funcional 2. Uso de espacios de Sóbolev 3. Uso del espacio de Hilbert
VARIABLE DEPENDIENTE	**DEFINICIÓN OPERACIONAL**	**DIMENSIÓN**	**INDICADORES**
Existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt	El trabajo desarrollado está en la línea de investigación de ecuaciones diferenciales parciales, los resultados obtenidos pueden ser aprovechados en el estudio de la estabilidad exponencial del sistema en estudio y por los diferentes áreas como: física, química, ingenieríass, etc.	1. Teorema 1.3.2 2. Teorema 1.2.5 3. Teorema 1.3.3	1. Condiciones adecuadas de los teoremas usados en el presente estudio 2. El dominio donde se realiza las demostraciones

CAPITULO III: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1. Existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt

En este capítulo queremos enfatizar el estudio de forma analítica, de un problema asociada a un sistema lineal para la interacción entre la temperatura y campos de porosidad de tipo Kelvin - Voigt. La teoría de las mezclas porosas ha sido investigada por varios autores: (Quintanilla, 2005), (Ieşan and Nappa, 2008), (Martínez, 1995) y el modelo considerado ha sido tratado por los autores (Ieşan and Quintanilla, 2007), propuesto según (Muñoz R. J., 2011), se tiene un sistema de tres ecuaciones dada por:

$$\begin{cases} \rho_1^o k_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}u_{xxt} - b_{12}w_{xxt} + a_{13}u + a_{14}w + b_{13}u_t + b_{14}w_t \\ -k_1\theta_{xx} - \beta_1\theta = 0;\ (x,t) \in\ (0,L)\times(0,\infty) \\ \rho_2^o k_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} - b_{21}u_{xxt} - b_{22}w_{xxt} - a_{14}u + a_{24}w + b_{23}u_t + b_{24}w_t \\ -k_2\theta_{xx} - \beta_2\theta = 0;\ (x,t) \in\ (0,L)\times(0,\infty) \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + k_1u_{xxt} + k_2w_{xxt} + \beta_1u_t + \beta_2w_t = 0;\ (x,t) \in\ (0,L)\times(0,\infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

A continuación describimos el problema.

Para estudiar la existencia y unicidad en la interación entre la temperatura y campos de porosidad definida en el intervalo (0, L) tenemos los siguientes datos. x ∈ (0, L), t∈ $(0,\infty)$*, la función u=u(x,t) y w=w(x,t) representan el campo de fricción en el tiempo* ***t*** *y* $\theta(x,t)$ *representa la diferencia de temperatura entre el estado real y de referencia. Los 24 parámetros del sistema (3.1) son:*

$\rho_1^o, k_i, K_i, \beta_i, a_{ij}, b_{ij}$, con i=1,2; j= 1, ..., 4; $a_{12} = a_{21}, a_{23} = a_{14}$ y c, k, representan coeficientes constitutivos. Sin embargo; con los supuestos de la simetría, podemos hacer algunas simplificaciones como: $\rho_1^o k_1 = \rho_1$ y $\rho_2^o k_2 = \rho_2$.

En segundo lugar, asumiremos la simetría de $B = b_{ij}$ por tanto, $b_{12} = b_{21}$.

Tercero, asumimos las siguientes relaciones de simetría que simplifican los coeficientes constitutivos $\xi^1 = \xi^2 = -\xi^3$; es decir, $\alpha = a_{13} = a_{24} = -a_{14}$. Finalmente, las tasas del campo de porosidad lo resumiremos en los parámetros $\alpha_1 = b_{13} = -b_{14} = -b_{23} = b_{24}$.

En el presente trabajo de investigación, las ecuaciones que gobiernan son los campos u, w y θ en ausencia de cargas corporales están dadas por el sistema,

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}u_{xxt} - b_{12}w_{xxt} + \alpha(u-w) + \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_1\theta_{xx} - \beta_1\theta = 0; \ \ (x,t) \in \ (0,L) \times (0,\infty) \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} - a_{22}w_{xx} - b_{21}u_{xxt} - b_{22}w_{xxt} - \alpha(u-w) - \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_2\theta_{xx} - \beta_2\theta = 0; \ \ (x,t) \in \ (0,L) \times (0,\infty) \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + k_1 u_{xxt} + k_2 w_{xxt} + \beta_1 u_t + \beta_2 w_t = 0; \ \ (x,t) \in \ (0,L) \times (0,\infty). \end{cases} \tag{3.2}$$

Estudiaremos el sistema (3.2) con las siguientes “condiciones iniciales”:

$u(x,0) = u_0$, $u_t(x,0) = u_1$, $w(x,0) = w_0$, $w_t(x,0) = w_1$ *y* $\theta(x,0) = \theta_0$, $x \in$ *(0,L)*

y las “condiciones de frontera”:

$u(0,t) = u(L,t) = 0$, $w(0,t) = w(L,t) = 0$ *y* $\theta(0,t) = \theta(0,L) = 0$, *t* $\in (0,\infty)$.

A continuación tenemos el sistema de estudio con condición inicial y de frontera.

$$\begin{cases} \rho_1 u_{tt} - a_{11}u_{xx} - a_{12}w_{xx} - b_{11}u_{xxt} - b_{12}w_{xxt} + \alpha(u-w) + \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_1\theta_{xx} - \beta_1\theta = 0; \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty); \\ \rho_2 w_{tt} - a_{12}u_{xx} + a_{22}w_{xx} - b_{12}u_{xxt} - b_{22}w_{xxt} - \alpha(u-w) - \alpha_1(u_t - w_t) \\ -k_2\theta_{xx} - \beta_2\theta = 0; \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty); \\ c\theta_t - k\theta_{xx} + k_1 u_{xxt} + k_2 w_{xxt} + \beta_1 u_t + \beta_2 w_t = 0, \ (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty). \\ u(x,0) = u_0, u_t(x,t) = u_1, w(x,0) = w_0, w_t(x,0) = w_1, \theta(x,0) = \theta_0; \\ x \in (0,L) \quad ...\textit{\textbf{(Condiciones iniciales)}} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, w(0,t) = w(L,t) = 0, \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0; \\ t \in (0,\infty) \quad ...\textit{\textbf{(Condiciones de frontera).}} \end{cases} \tag{3.3}$$

Podemos ver que el sistema (3.3) es equivalente al sistema (0.1)

Asumiremos que $\rho_1, \rho_2, c, K, \alpha$ *y* α_2 *son constantes positivas. Considerando el acoplamiento tenemos* $(\beta_1^2+\beta_2^2)(k_1^2+k_2^2) \neq 0$. *La matriz* $A = a_{ij}$ *es simétrica y definida positiva,* $B = b_{ij} \neq 0$ *es simétrica y definida no negativa; es decir,* $a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, b_{11} \geq 0, b_{11}b_{22} - b_{12}^2 \geq 0$.

A partir de la ecuación (3.3) tenemos la siguiente ecuación equivalente.

$$\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}u_t + b_{12}w_t + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(u_t - w_t) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta \\ w_{tt} = \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}u_t + b_{22}w_t + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(u_t - w_t) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta \\ \theta_t = \dfrac{1}{c}(k\theta - k_1u_t - k_2w_t)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}u_t - \dfrac{\beta_2}{c}w_t. \end{cases} \tag{3.4}$$

"La teoría de semigrupos se desarrolla a partir de ecuaciones de primer orden en el tiempo. Para esto es necesario convertir el modelo anterior a un sistema de primer orden". En tal sentido consideremos la siguiente notación vectorial,

Denotemos $U(t) = U(x,t)$

$$U(t) = U(x,t) = \begin{pmatrix} u = u(x,t) \\ w = w(x,t) \\ v = v(x,t) \\ \eta = \eta(x,t) \\ \theta = \theta(x,t) \end{pmatrix} ; \textit{derivando se tiene } \frac{d}{dt}U(t) = \frac{d}{dt}U(x,t) = \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \\ v_t \\ \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix}.$$

En el transcurso del estudio por simplicidad usaremos la notación $U(t)$ *en lugar de* $U(x,t)$.

Por otro la la expresión dada en (3.4) no es un operador autónomo y por lo tanto, no se puede aplicar la teoría de semigrupos directamente. Para ello transformaremos (3.4) en una ecuación autónoma introduciendo nuevos variables,

$$\begin{cases} v = u_t \longrightarrow v_t = u_{tt} \\ \eta = w_t \longrightarrow \eta_t = w_{tt} \ \ \forall t > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Reemplazando la ecuación (3.5) en (3.4) se obtiene la siguiente ecuación.

$$\begin{cases} u_t = v \\ w_t = \eta \\ v_t = \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta \\ \eta_t = \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta \\ \theta_t = \dfrac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}v - \dfrac{\beta_2}{c}\eta. \end{cases} \tag{3.6}$$

Sea $U(t) = (u, w, v, \eta, \theta)^T$*; y su derivada es* $\dfrac{d}{dt}U(t) = (u_t, w_t, v_t, \eta_t, \theta_t)^T$.
Expresando en forma matricial el sistema anterior.

$$\frac{dU(t)}{dt} = \begin{pmatrix} u_t \\ w_t \\ v_t \\ \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \eta \\ \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta \\ \\ \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta \\ \\ \dfrac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}v - \dfrac{\beta_2}{c}\eta. \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Una ecuación equivalente a la ecuación (3.7) es la siguiente.

$$\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \\ v_t \\ \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0u & 0w & Iv & 0\eta & 0\theta \\ 0u & 0w & 0v & I\eta & 0\theta \\ \dfrac{a_{11}}{\rho_1}u_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}u & \dfrac{a_{12}}{\rho_1}w_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_1}w & \dfrac{b_{11}}{\rho_1}v_{xx} - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}v & \dfrac{b_{12}}{\rho_1}\eta_{xx} + \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}\eta & \dfrac{k_1}{\rho_1}\theta_{xx} + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta \\ \\ \dfrac{a_{12}}{\rho_2}u_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}u & \dfrac{a_{22}}{\rho_1}w_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_2}w & \dfrac{b_{12}}{\rho_2}v_{xx} + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}v & \dfrac{b_{22}}{\rho_2}\eta_{xx} - \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}\eta & \dfrac{k_2}{\rho_2}\theta_{xx} + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta \\ \\ 0u & 0w & -\dfrac{k_1}{c}v_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}v & -\dfrac{k_2}{c}\eta_{xx} - \dfrac{\beta_2}{c}\eta & +\dfrac{k}{c}\theta_{xx}. \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Llevando la ecuación (3.8) a un expresión en derivadas parciales.

$$\begin{pmatrix} u_t \\ w_t \\ v_t \\ \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0u & 0w & Iv & 0\eta & 0\theta \\ 0u & 0w & 0v & I\eta & 0\theta \\ (\frac{a_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1})u & (\frac{a_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha}{\rho_1})w & (\frac{b_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_1})v & (\frac{b_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_1})\eta & (\frac{k_1}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\beta_1}{\rho_1})\theta \\ (\frac{a_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1})u & (\frac{a_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_2})w & (\frac{b_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_2})v & (\frac{b_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_2})\eta & (\frac{k_2}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\beta_2}{\rho_2})\theta \\ 0u & 0w & (-\frac{k_1}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_1}{c})v & (-\frac{k_2}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_2}{c})\eta & \frac{k}{c}\partial_x^2\theta. \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Por tanto, de $\dfrac{dU(t)}{dt} = (u_t, w_t, v_t, \eta_t, \theta_t)^T$ *y de la ecuación (3.9) se tiene una expresión nueva y se puede escribir como:*

$$\frac{d}{dt}U(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0u & 0w & Iv & 0\eta & 0\theta \\ 0u & 0w & 0v & I\eta & 0\theta \\ (\frac{a_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1})u & (\frac{a_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha}{\rho_1})w & (\frac{b_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_1})v & (\frac{b_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_1})\eta & (\frac{k_1}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\beta_1}{\rho_1})\theta \\ (\frac{a_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1})u & (\frac{a_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_2})w & (\frac{b_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_2})v & (\frac{b_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_2})\eta & (\frac{k_2}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\beta_2}{\rho_2})\theta \\ 0u & 0w & (-\frac{k_1}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_1}{c})v & (-\frac{k_2}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_2}{c})\eta & \frac{k}{c}\partial_x^2\theta. \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}U} \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dt}U(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \frac{a_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{a_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{b_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_1} & \frac{b_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_1} & \frac{k_1}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\beta_1}{\rho_1} \\ \frac{a_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{a_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_2} & \frac{b_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_2} & \frac{b_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_2} & \frac{k_2}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\beta_2}{\rho_2} \\ 0 & 0 & -\frac{k_1}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_1}{c} & -\frac{k_2}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_2}{c} & \frac{k}{c}\partial_x^2. \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ w \\ v \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix}}_{U} \tag{3.11}$$

Además, de las condiciones iniciales y de frontera tenemos.

$U(0) = [u(0), w(0), v(0), \eta(0), \theta(0)]^T = (u(0), w(0), u_t(0), w_t(0), \theta(0))^T = (u_0, w_0, u_1, w_1, \theta_0)^T,$

donde (T) denota la transpuesta. Por otro lado,

$$U(0) = \begin{pmatrix} u(x,0) \\ w(x,0) \\ v(x,0) \\ \eta(x,0) \\ \theta(x,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ w(0) \\ v(0) \\ \eta(0) \\ \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ v_0 \\ \eta_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = U_0 \qquad \ldots \text{ (*)}$$

Y $\mathcal{A}$ se puede definir formalmente como el operador diferencial,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \frac{a_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{a_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{b_{11}}{\rho_1}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_1} & \frac{b_{12}}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_1} & \frac{k_1}{\rho_1}\partial_x^2 + \frac{\beta_1}{\rho_1} \\ \frac{a_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_1} & \frac{a_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha}{\rho_2} & \frac{b_{12}}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\alpha_1}{\rho_2} & \frac{b_{22}}{\rho_2}\partial_x^2 - \frac{\alpha_1}{\rho_2} & \frac{k_2}{\rho_2}\partial_x^2 + \frac{\beta_2}{\rho_2} \\ 0 & 0 & -\frac{k_1}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_1}{c} & -\frac{k_2}{c}\partial_x^2 - \frac{\beta_2}{c} & \frac{k}{c}\partial_x^2. \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Esto es, del sistema (3.3) y de $(*)$se tiene como el problema de Cauchy abstracto de la forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = \mathcal{A}U(t), \\ U(0) = U_0, \forall t > 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $\mathcal{A}$ es un operador diferencial no acotado.

Observación 3.1.1. *Si el operador $\mathcal{A}$ es acotado, no hay mucho que analizar pues satisface las propiedades de la función exponencial $U(t) = e^{\mathcal{A}t}$ cuya solución es conocida y está dada por $U(t) = U_0 e^{\mathcal{A}t}$.*

Sin embargo cuando el operador $\mathcal{A}$ no es acotado como en nuestro caso, no se conoce un estudio detallado. Esto motiva el uso de la teoría de semigrupos para representar $e^{\mathcal{A}t} = T(t)$.

En lugar de trabajar con el sistema (3.3), vamos a considerar la ecuación (3.13) en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con el dominio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ del operador $\mathcal{A}$, *donde U(t) =* $(u,w,v,\eta,\theta)^T = (u,w,u_t,w_t,\theta)^T$ *y* $U_0 = (u_0,w_0,u_1,w_1,\theta_0)^T$.

Luego multiplicando a la ecuación (3.12) por U se obtiene:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ w \\ v \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \eta \\ \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta \\ \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta \\ \dfrac{1}{c}(k\theta - k_1 v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}v - \dfrac{\beta_2}{c}\eta. \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

En el presente trabajo consideraremos el siguiente espacio de fase.

$\mathcal{H} = H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L)$.

Y el producto interno esta dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} < U_1, U_2 >_{\mathcal{H}} = \left\langle (u_1,w_1,v_1,\eta_1,\theta_1)^T, (u_2,w_2,v_2,\eta_2,\theta_2)^T \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L (a_{11}u_{1x}\bar{u}_{2x} + a_{22}w_{1x}\bar{w}_{2x})dx \\ +c\int_0^L \theta_1\bar{\theta}_2 dx + \int_0^L a_{12}(u_{1x}\bar{w}_{2x} + w_{1x}\bar{u}_{2x})dx &+ \alpha\int_0^L (u_1 - w_1)(\overline{u_2 - w_2})dx \\ +\rho_1\int_0^L v_1\bar{v}_2 dx + \rho_2\int_0^L \eta_1\bar{\eta}_2 dx. \end{aligned}$$

El dominio $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ *del operador* $\mathcal{A}$ *se define de la forma:*

Como $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$,

entonces el dominio $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{U \in \mathcal{H}/AU \in \mathcal{H}\}$, *es decir.*

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{(u,w,v,\eta,\theta)^T \in \mathcal{H}/\mathcal{A}(u,w,v,\eta,\theta)^T \in \mathcal{H}\right\}$$

Como $\mathcal{A}U \in \mathcal{H}$, *entonces*

$$(\blacktriangle)\begin{cases} v \in L^2(0,L), \eta \in L^2(0,L) \\ \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta \in L^2(0,L) \\ \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta \in L^2(0,L) \\ \dfrac{1}{c}(k\theta - k_1 v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}v - \dfrac{\beta_2}{c}\eta \in L^2(0,L). \end{cases}$$

Veamos para cada fila del sistema $(\blacktriangle)$ *y utilizaremos la observación (1.2.5).*

• *Para la primera fila.*

Sean v, η.

Como: $v \in L^2(0, L)$ *y* $\eta \in L^2(0, L)$.

$\Rightarrow v, \eta \in L^2(0, L)$

• *Ahora para la segunda fila.*

Sean $\dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx}$, $-\dfrac{\alpha}{\rho_1}(u - w)$, $-\dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(v - \eta)$, $\dfrac{\beta_1}{\rho_1}(\theta)$.

Como:

$\dfrac{1}{\rho_1}a_{11}u_{xx} \in L^2(0, L), \dfrac{1}{\rho_1}a_{12}w_{xx} \in L^2(0, L), \dfrac{1}{\rho_1}b_{11}v_{xx} \in L^2(0, L), \dfrac{1}{\rho_1}b_{12}\eta_{xx} \in L^2(0, L),$

$\dfrac{1}{\rho_1}k_1\theta_{xx} \in L^2(0, L)$.

$u \in H^2(0, L), v \in H^2(0, L), \eta \in H^2(0, L), \theta \in H^2(0, L)$.

Por otro lado tenemos las condiciones de frontera

$u(0, t) = u(L, t) = w(0, t) = w(L, t) = \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0.$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_1}\left[\underbrace{(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx}}_{u,w,v,\eta,\theta \in H^2(0,L)}\right], -\frac{\alpha}{\rho_1}\underbrace{(u - w)}_{u,v \in L^2(0,L)}, -\frac{\alpha_1}{\rho_1}\underbrace{(v - \eta)}_{v,\eta \in L^2(0,L)}, \frac{\beta_1}{\rho_1}\underbrace{(\theta)}_{\theta \in L^2(0,L)}.$$

Luego, $u \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L), v \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L, w \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L),$

$\eta \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L), \theta \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$*; donde* $v = u_t, \eta = w_t$.

• *También veamos para la tercera fila*

Sean $\dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx}$, $-\dfrac{\alpha}{\rho_2}(u - w)$, $-\dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(v - \eta)$, $\dfrac{\beta_1}{\rho_2}(\theta)$.

Como:

$\dfrac{1}{\rho_2}a_{12}u_{xx} \in L^2(0, L), \dfrac{1}{\rho_2}a_{22}w_{xx} \in L^2(0, L), \dfrac{1}{\rho_2}b_{12}v_{xx} \in L^2(0, L), \dfrac{1}{\rho_2}b_{22}\eta_{xx} \in L^2(0, L),$

$\dfrac{1}{\rho_2}k_2\theta_{xx} \in L^2(0, L)$.

$u \in H^2(0, L), v \in H^2(0, L), \eta \in H^2(0, L), \theta \in H^2(0, L)$.

Por otro lado tenemos las condiciones de frontera

$u(0,t) = u(L,t) = w(0,t) = w(L,t) = \theta(0,t) = \theta(L,t) = 0.$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho_2}\left[\underbrace{(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx}}_{u,w,v,\eta,\theta\in H^2(0,L)}\right], \frac{\alpha}{\rho_2}\underbrace{(u-w)}_{u,w\in L^2(0,L)}, \frac{\alpha_1}{\rho_2}\underbrace{(v-\eta)}_{v,\eta\in L^2(0,L)}, \frac{\beta_2}{\rho_2}\underbrace{(\theta)}_{\theta\in L^2(0,L)}.$$

Se tiene, $u \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), v \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), w \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L),$

$\eta \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), \theta \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$*; donde* $v = u_t, \eta = w_t$.

• *De forma análoga se hace para la última fila.*
Sean $\frac{1}{c}(K\theta - k_1 v - k_2\eta)_{xx}$, $-\frac{\beta_1}{c}v$, $-\frac{\beta_2}{c}\eta \in L^2(0,L)$.
Como:

$\theta \in H^2(0,L)$, $v \in H^2(0,L)$, $\eta \in H^2(0,L)$ *y* $v \in L^2(0,L)$, $\eta \in L^2(0,L)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{c}\left[\underbrace{(k\theta - k_1 v - k_2\eta)_{xx}}_{\theta,v,\eta\in H^2(0,L)}\right], -\frac{\beta_1}{c}\underbrace{(v)}_{v\in L^2(0,L)}, -\frac{\beta_2}{c}\underbrace{(\eta)}_{L^2(0,L)}.$$

Luego, $\theta \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), v \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L), \eta \in H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)$, $v \in L^2(0,L)$ *y* $\eta \in L^2(0,L)$.

Por los resultados obtenidos tenemos el dominio de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = {} & [H_0^1(0,L)\cap L^2(0,L)] \times [H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)] \times [H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)] \\ & \times [H_0^1(0,L)\cap H^2(0,L)] \times [H^2(0,L)\cap L^2(0,L)] \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.1.1. La buena colocación del problema.

3.1.1.1. La existencia - unicidad, dependencia continua.

En esta sección, estudiaremos la existencia y unicidad para la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, de un C_0 *- semigrupo del sistema (3.13) en un espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$.

A continuación se probará, la existencia y la unicidad de la solución del problema de Cauchy dado *en (3.13). Para ello usaremos el teorema 1.3.2, bastará verificar los tres casos:*

Caso I: $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ ***Caso II:*** *$\mathcal{A}$ es disipativo* ***Caso III:*** $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

$\circledast$ ***Caso I:***

Afirmación 1. *"El dominio de $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{H}$":*

Para probar la afirmación 1 se debe tener en cuenta las inmersiones en los espacios de Sóbolev.

Sea E definido en un espacio topológico sobre el campo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$).

a) Se sabe que $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \hookrightarrow H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L) \hookrightarrow H^{-1}(0,L)$.

b) Una familia lineal en E es una aplicación lineal de E en $\mathbb{K}$.

c) Una forma antilineal en E es una aplicación antilineal (o semilineal) de E en $\mathbb{C}$, que f sea antilineal o semilineal significa:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \;\; y \;\; f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x), \; \forall x, y \; \in \; E, \;\; \lambda \in \mathbb{C}.$$

d) Llamaremos $L = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, al espacio de las formas lineales continuas (antilineal) en E, al dual (antidual) de E y lo denotamos por $E^{'}$.

*Si $f \in E^{'}$ el valor del vector **u** será denotada por*

$$f(u) = < f, v >$$

donde $< .,. >$ se denota de acuerdo al caso de la dualidad (antidual respectiva) entre $E^{'}$ y E, algunas veces se denotará

$$f(u) = < f, u >_{E',E} .$$

Notación: *Se denota por $W^{-1,p}(0,L)$ el espacio dual de $W_0^{1,p}(0,L)$ con $(1 \leq p < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ y por $H^{-1}(0,L)$ el espacio dual de $H_0^1(0,L)$.*

Se identificamos $L^2(0,L)$ y su dual, pero no se identifican $H_0^1(0,L)$ y su dual, entonces si tienen las siguientes inclusiones por las inmersiones de Sóbolev

$$H_0^1(0,L) \subset L^2(0,L) \subset H^{-1}(0,L)$$

"con inyecciones continuas y densas".

Si se tiene $(0, L)$ es acotado, entonces se cumple

$$W_0^{1,p}(0, L) \subset L^2(0, L) \subset W^{-1,p}(0, L) \; \forall 1 \leq p < \infty,$$

con inyecciones continuas y densas.

Por otro lado,

Afirmación 1.1. $H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ *es denso en* $H_0^1(0, L)$ *y en* $L^2(0, L)$.

En efecto:

Sea $f \in H_0^1(0, L)$.

Sea $H_0^1(0, L)$ denso en $L^2(0, L)$ y $f_x \in L^2(0, L)$,

entonces $\exists \, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0, L)/g_n \longrightarrow f_x$ en $L^2(0, L)$.

Tomando

$$p_n(x) = \int_0^x g_n(s)ds,$$

entonces

$$p_{nx} = g_n \in H_0^1(0, L) \;\; y \;\; p_n(0) = 0.$$

así $p_n \in H^2(0, L)$ y $p_n(0) = 0$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = L \\ p_n(x) & , \quad 0 \leq x < L \end{cases}$$

Como $f_n = p_n$ c.t.p.

Entonces

$$f_n = p_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esta manera

$$f_n(0) = 0, \; f_n(L) = 0, \; f_{nx} = g_n \quad y \quad f_n \in H^2(0, L)$$

Entonces

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L) \quad y \quad f_{nx} = g_n.$$

Luego

$$\|f_n - f\|_{H_0^1}^2 = \|f_{nx} - f_x\|_{L^2}^2.$$

Es decir

$$\|f_n - f\|^2_{H_0^1} = \|g_n - f_x\|^2_{L^2}.$$

También tenemos que $g_n \longrightarrow f_x$ *en* $L^2(0,L)$*,* $\Rightarrow \|f_n - f\|_{H_0^1} \longrightarrow 0.$

Así obtenemos

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)/f_n \longrightarrow f \text{ en } H_0^1(0,L).$$

Entonces

$$H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \;\; es \;\; denso \;\; en \;\; H_0^1(0,L).$$

Por otro lado.

Afirmación 1.2*.* $H_0^1(0,L)$ *es denso en* $L^2(0,L)$*.*

En efecto:

Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(0,L)/u_n \longrightarrow u \in L^2(0,L)$*.*

Por otro lado, por la parte a) tenemos que $H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^2(0,L)$ *es continua y compacta entonces,* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow u$ *es continua en* $L^2(0,L)$*;*

es decir, $H_0^1(0,L)$ *es denso en* $L^2(0,L)$*.*

Finalmente de las afirmaciones 1.1 y 1.2 tenemos que

$$H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \;\; es \;\; denso \;\; en \;\; H_0^1(0,L) \;\; y \;\; H_0^1(0,L) \;\; es \;\; denso \;\; en L^2(0,L). \tag{3.16}$$

. De la ecuación (3.15) tenemos que el $D(\mathcal{A})$*.*

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) = {} & [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)] \times [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)] \times [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)] \\ & \times [H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)] \times [H^2(0,L) \cap L^2(0,L)]. \end{aligned}$$

Notemos que el $D(\mathcal{A})$ *incluye al producto de las intersecciones de los espacios:*

$*$ $H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$

$*$ $H^2(0,L) \cap L^2(0,L)$.

Por los resultados obtenidos en la ecuación (3.16), se muestra que $D(\mathcal{A})$ *dada en (3.15) es denso en* $\mathcal{H}$*.*

Es decir,

$\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}.$ ■

⊛ ***Caso II***

Afirmación 2. *$\mathcal{A}$ es disipativo:*

En efecto: Dado $U \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, por demostrar que $Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$.

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ \eta \\ \frac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \frac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \frac{\beta_1}{\rho_1}\theta \\ \frac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \frac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \frac{\beta_2}{\rho_2}\theta \\ \frac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \frac{\beta_1}{c}v - \frac{\beta_2}{c}\eta. \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ w \\ v \\ \eta \\ \theta \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L (a_{11}v_x\bar{u}_x + a_{22}\eta_x\bar{w}_x)dx + c\int_0^L \left[\frac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \frac{\beta_1}{c}v - \frac{\beta_2}{c}\eta\right]\bar{\theta}dx \\
&\int_0^L a_{12}(v_x\bar{w}_x + \eta_x\bar{u}_x)dx + \alpha\int_0^L (v-\eta)(\overline{u-w})dx + \\
&\rho_1\int_0^L \left[\frac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \frac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \frac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \frac{\beta_1}{\rho_1}\theta\right]\bar{v}dx + \\
&\rho_2\int_0^L \left[\frac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \frac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \frac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \frac{\beta_2}{\rho_2}\theta\right]\bar{\eta}dx. \\
&= a_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_xdx + a_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_xdx + k\int_0^L \theta_{xx}\bar{\theta}dx - k_1\int_0^L v_{xx}\theta dx - k_2\int_0^L \eta_{xx}\bar{\theta}dx \\
&-\beta_1\int_0^L v\bar{\theta}dx - \beta_2\int_0^L \eta\bar{\theta}dx + a_{12}\int_0^L v_x\bar{w}_xdx + a_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_xdx + \alpha\int_0^L (v-\eta)(\overline{u-w})dx \\
&+a_{11}\int_0^L u_{xx}\bar{v}dx + a_{12}\int_0^L w_{xx}\bar{v}dx + b_{11}\int_0^L v_{xx}\bar{v}dx + b_{12}\int_0^L \eta_{xx}\bar{v}dx + k_1\int_0^L \theta_{xx}\bar{v}dx \\
&-\alpha\int_0^L (u-w)\bar{v}dx - \alpha_1\int_0^L (v-\eta)\bar{v}dx + \beta_1\int_0^L \theta\bar{v}dx + a_{12}\int_0^L u_{xx}\bar{\eta}dx + a_{22}\int_0^L w_{xx}\bar{\eta}dx \\
&+b_{12}\int_0^L v_{xx}\bar{\eta}dx + b_{22}\int_0^L \eta_{xx}\bar{\eta}dx + \alpha\int_0^L (u-w)\bar{\eta}dx + \alpha_1\int_0^L (v-\eta)\bar{\eta}dx \\
&+\beta_2\int_0^L \theta\bar{\eta}dx.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Retomando la expresión dada en (3.17) tendremos,

$$\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = a_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_x + a_{12}\int_0^L v_x\bar{w}_x dx + \alpha\int_0^L v\bar{u}dx - \alpha\int_0^L v\bar{w}dx + a_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_x dx$$

$$+a_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_x dx - \alpha\int_0^L \eta\bar{u}dx + \alpha\int_0^L \eta\bar{w}dx - \int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_x\bar{v}_x dx$$

$$-\alpha\int_0^L (u-w)\bar{v}dx - \alpha_1\int_0^L (v-\eta)\bar{v}dx + \beta_1\int_0^L \theta\bar{v}dx + \alpha\int_0^L (u-w)\bar{\eta}dx$$

$$+\alpha_1\int_0^L (v-\eta)\bar{\eta}dx - \int_0^L (a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_x\bar{\eta}_x dx$$

$$-\int_0^L (k\theta - k_1 v - k_2\eta)_x\bar{\theta}_x dx + \beta_2\int_0^L \theta\bar{\eta}dx - \beta_1\int_0^L v\bar{\theta}dx - \beta_2\int_0^L \eta\bar{\theta}dx. \tag{3.18}$$

Se sabe que $\int_0^L \theta_{xx}\bar{\theta}dx = -\int_0^L \theta_x\bar{\theta}_x dx.$

Y teniendo en cuenta la propiedad de los números complejos, se tiene.

$z_1 = a + ib\,;\ \bar{z_1} = a - ib$

$z_2 = c + id\,;\ \bar{z_2} = c - id.$

Entonces si cumple :

$z_1.\bar{z_2} - \overline{z_1\bar{z_2}} = 2i(bc - ad) = 2iIm(z_1.\bar{z_2}).$

$Por\ tanto, z_1.\bar{z_2} - \overline{z_1\bar{z_2}} = 2iIm(z_1.\bar{z_2}).$ $(\bigstar)$

De $(\bigstar)$ *tenemos las igualdades*

$$a_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_x dx - a_{11}\int_0^L \bar{v}_x u_x dx = a_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_x dx - a_{11}\int_0^L \overline{v_x\bar{u}_x} = 2a_{11}i\int_0^L Im(v_x\bar{u}_x)dx.$$

De forma similar para los demás se tiene,

$$a_{12}\int_0^L v_x\bar{w}_x dx - a_{12}\int_0^L \bar{v}_x w_x dx = 2a_{12}i\int_0^L Im(v_x\bar{w}_x)dx,$$

$$a_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_x dx - a_{12}\int_0^L \bar{\eta}_x u_x dx = 2a_{12}i\int_0^L Im(\eta_x\bar{u}_x)dx,$$

$$a_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_x dx - a_{22}\int_0^L \bar{\eta}_x w_x dx = 2a_{22}i\int_0^L Im(\eta_x\bar{w}_x)dx,$$

$$-b_{11}\int_0^L v_x\bar{v}_x dx = -b_{11}\|v_x\|^2_{L^2(0,L),}$$

$$-\alpha\int_0^L u\bar{v}dx + \alpha\int_0^L v\bar{u}dx = 2\alpha i\int_0^L Im(v\bar{u})dx,$$

$$-\alpha_1\int_0^L (v-\eta)\bar{v}dx + \alpha_1\int_0^L (v-\eta)\bar{\eta}dx = -\alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2(0,L)},$$

$$-\alpha\int_0^L \eta\bar{u}dx + \alpha\int_0^L u\bar{\eta}dx = 2\alpha i\int_0^L Im(u\bar{\eta})dx,$$

$$-\alpha\int_0^L w\bar{\eta}dx + \alpha\int_0^L \eta\bar{w}dx = 2\alpha i\int_0^L Im(\eta\bar{w})dx,$$

$$\beta_1\int_0^L \theta\bar{v}dx - \beta_1\int_0^L v\bar{\theta}dx = 2\beta_1 i\int_0^L Im(\theta\bar{v})dx,$$

$$+\beta_2\int_0^L \theta\bar{\eta}dx - \beta_2\int_0^L \eta\bar{\theta}dx = 2\beta_2 i\int_0^L Im(\theta\bar{\eta})dx,$$

$$-b_{12}\int_0^L v_x\bar{\eta}_x dx - b_{12}\int_0^L \bar{v_x}\eta_x dx = -2b_{12}Re\int_0^L v_x\bar{\eta}_x dx,$$

$$-b_{22}\int_0^L \eta_x\bar{\eta}_x = -b_{22}\|\eta_x\|^2_{L^2(0,L),}$$

$$-k_2\int_0^L \theta_x\bar{\eta}_x dx + k_2\int_0^L \eta_x\bar{\theta}_x dx = 2k_2 i\int_0^L Im(\eta_x\bar{\theta}_x)dx,$$

$$-k_1\int_0^L \theta_2\bar{v}_x dx + k_1\int_0^L v_x\bar{\theta}_x dx = 2k_1 i\int_0^L Im(v_x\bar{\theta}_x)dx,$$

$$-k\int_0^L \theta_x\bar{\theta}_x dx = -k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)}.$$

Agrupando convenientemenete la ecuación (3.18), se tiene

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -b_{11}\|v_x\|^2_{L^2(0,L)} - \alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2(0,L)} - 2b_{12}\int_0^L Re(v_x\bar{\eta}_x) - b_{22}\|\eta_x\|^2_{L^2(0,L)}\\
&\quad -k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} + 2a_{11}i\int_0^L Im(v_x\bar{u}_x)dx + 2a_{12}i\int_0^L Im(v_x\bar{w}_x)dx + 2a_{12}i\int_0^L Im(\eta_x\bar{u}_x)dx\\
&\quad +2a_{22}i\int_0^L Im(\eta_x\bar{w}_x)dx + 2\alpha i\int_0^L Im(v\bar{u})dx + 2\alpha i\int_0^L Im(u\bar{\eta})dx + 2\alpha i\int_0^L Im(\eta\bar{w})dx\\
&\quad +2\beta_1 i\int_0^L Im(\theta\bar{v})dx + 2\beta_2 i\int_0^L Im(\theta\bar{\eta})dx + 2k_2 i\int_0^L Im(\eta_x\theta_x)dx\\
&\quad +2k_1 i\int_0^L Im(v_x\theta_x)dx.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Tomando la parte real de la ecuación (3.19), obtenemos.

$$\begin{aligned}Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -b_{11}\|v_x\|^2_{L^2(0,L)} - b_{22}\|\eta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2(0,L)} - k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)}\\
&\quad -2b_{12}\int_0^L Re(v_x\bar{\eta_x})dx\end{aligned}$$

Donde, $\int_0^L v_x\bar{\eta_x}dx$ *representa una área, de un medio poroso en un fluido viscoso con mayor temperatura.*

Por otro lado, $b_{12} > 0$. *Entonces la expresión anterior podemos escribir,*

$$\begin{aligned}Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -b_{11}\|v_x\|^2_{L^2(0,L)} - b_{22}\|\eta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2(0,L)} - k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)}\\
&\quad -2b_{12}Re\int_0^L v_x\bar{\eta_x}dx\end{aligned} \tag{3.20}$$

En vista que no tenemos información sobre los signos de b_{11} *y* k *analizamos los siguientes casos:*

• ***caso a.*** *La matriz*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} \quad \textit{es definida positiva.}$$

Es decir, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$. *En este caso obtenemos.*

$$\begin{aligned}Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{detB}{2b_{22}}\|v_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{detB}{2b_{11}}\|\eta_x\|^2_{L^2(0,L)}\\
-\alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2(0,L)} \leq 0\end{aligned} \tag{3.21}$$

• ***caso b.*** *La matriz B es definida no negativa.*

b.1- $b_{11} > 0$ *implica* $b_{22} = \dfrac{b_{12}^2}{b_{11}}$*, entonces.*

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -k\|\theta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \frac{1}{b_{11}}\|b_{11}v_x + b_{12}\eta_x\|^2_{L^2(0,L)} - \alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2(0,L)} \leq 0 \tag{3.22}$$

b.2- $b_{11} = 0$ *implica* $b_{12} = 0$.

$$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -k\|\theta_x\|^2_{L^2}(0,L) - b_{22}\|\eta_x\|^2_{L^2}(0,L) - \alpha_1\|v-\eta\|^2_{L^2}(0,L) \leq 0 \tag{3.23}$$

. *Finalmente de las expresiones (3.20) - (3.23), se tiene.*

$Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} \leq 0.$

Es decir $\mathcal{A}$ es disipativo ∎.

Finalmente, el caso III.

⊛ ***Caso III.***

Afirmación 3. $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

En efecto:

Para ello mostraremos que $\mathcal{A}$ es inversible y A^{-1} es acotado.

Para mostrar que $\mathcal{A}$ es inversible usaremos el teorema de Lax - Milgram.

Dado$F = (f,g,h,p,q)^T \in \mathcal{H}$ *mostraremos que existe un único* $U = (u,w,v,\eta,\theta)^T \in D(\mathcal{A})$*, tal que* $\mathcal{A}U = F$*;*

$$\begin{cases} v & = f \in H_0^1(0,L) \\ \eta & = g \in H_0^1(0,L) \\ \dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(v-\eta) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta & = h \in L^2(0,L) \\ \dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(v-\eta) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta & = p \in L^2(0,L) \\ \dfrac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}v - \dfrac{\beta_2}{c}\eta & = q \in L^2(0,L). \end{cases} \tag{3.24}$$

Reduciendo las variables en la ecuación (3.24) se obtiene una ecuación equivalente.

$$\begin{cases} (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \alpha(u-w) = F_1 \\ (a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \alpha(u-w) = G_1 \\ (k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} = H_1. \end{cases} \tag{3.25}$$

Donde

$$\begin{aligned} \rho_1 h + \alpha_1(f-g) - \beta_1\theta &= F_1 \in L^2(0,L) \\ \rho_2 p + \alpha_1(f-g) - \beta_2\theta &= G_1 \in L^2(0,L) \\ cq + \beta_1 f + \beta_2 g \qquad &= H_1 \in L^2(0,L). \end{aligned}$$

Integrando de 0 a L, multiplicando por $u \in H_0^1(0,L), w \in H_0^1(0,L), v \in H_0^1(0,L)$ en (3.25), respectivamente y se tiene.

$$\int_0^L \left[(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \alpha(u-w)\right](u)dx = \int_0^L F_1 u dx \tag{3.26}$$

$$\int_0^L \left[(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \alpha(u-w)\right](w)dx = \int_0^L G_1 w dx \tag{3.27}$$

$$\int_0^L (k\theta - k_1 v - k_2\eta)_{xx}\, v dx = \int_0^L H_1 v dx \tag{3.28}$$

Sumando las ecuaciones (3.26), (3.27) y (3.28) se tiene el siguiente expresión.

$$\begin{aligned} & a_{11}\int_0^L u_{xx}udx + a_{12}\int_0^L w_{xx}udx + b_{11}\int_0^L v_{xx}udx + b_{12}\int_0^L \eta_{xx}udx + k_1\int_0^L \theta_{xx}udx \\ & + a_{12}\int_0^L u_{xx}wdx + a_{22}\int_0^L w_{xx}wdx + b_{12}\int_0^L v_{xx}wdx + b_{22}\int_0^L \eta_{xx}wdx + k_2\int_0^L \theta_{xx}wdx \\ & + k\int_0^L \theta_{xx}vdx - k_1\int_0^L v_{xx}vdx - k_2\int_0^L \eta_{xx}vdx - \alpha\int_0^L u.udx + \alpha\int_0^L w.udx + \alpha\int_0^L u.wdx \\ & - \alpha\int_0^L w.wdx = \int_0^L F_1udx + \int_0^L G_1wdx + \int_0^L H_1vdx. \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente expresión equivalente.

$$\begin{aligned} & a_{11}\int_0^L u_xu_xdx + a_{12}\int_0^L w_xu_xdx + b_{11}\int_0^L v_xu_xdx + b_{12}\int_0^L \eta_xu_xdx + k_1\int_0^L \theta_xu_xdx \\ & + a_{12}\int_0^L u_xw_xdx + a_{22}\int_0^L w_xw_xdx + b_{12}\int_0^L v_xw_xdx + b_{22}\int_0^L \eta_xw_xdx + k_2\int_0^L \theta_xw_xdx \\ & + k\int_0^L \theta_xv_xdx - k_1\int_0^L v_xv_xdx - k_2\int_0^L \eta_xv_xdx + \alpha\int_0^L u.udx - \alpha\int_0^L w.udx - \alpha\int_0^L u.wdx \\ & + \alpha\int_0^L w.wdx = -\int_0^L F_1udx - \int_0^L G_1wdx - \int_0^L H_1vdx. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.29), definimos la forma bilineal.

$$
\begin{aligned}
B(.,.) : \left[\left(H_0^1(0,L)\right)^3 \times \left(H_0^1(0,L)\right)^3\right] &\longrightarrow \mathbb{C} \\
((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})) &\longmapsto B\left((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B\left((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\right) = {} & a_{11}\int_0^L u_x\overline{\hat{u}}_x dx + a_{12}\int_0^L w_x\overline{\hat{u}}_x dx + b_{11}\int_0^L v_x\overline{\hat{u}}_x dx + b_{12}\int_0^L \eta_x\overline{\hat{u}}_x dx \\
& + k_1\int_0^L \theta_x\overline{\hat{u}}_x dx + a_{12}\int_0^L u_x\overline{\hat{w}}_x dx + a_{22}\int_0^L w_x\overline{\hat{w}}_x dx + b_{12}\int_0^L v_x\overline{\hat{w}}_x dx \\
& + b_{22}\int_0^L \eta_x\overline{\hat{w}}_x dx + k_2\int_0^L \theta_x\overline{\hat{w}}_x dx + k\int_0^L \theta_x\overline{\hat{v}}_x dx - k_1\int_0^L v_x\overline{\hat{v}}_x dx \\
& - k_2\int_0^L \eta_x\overline{\hat{v}}_x dx + \alpha\int_0^L u\overline{\hat{u}} dx - \alpha\int_0^L w\overline{\hat{u}} dx - \alpha\int_0^L u\overline{\hat{w}} dx + \alpha\int_0^L w\overline{\hat{w}} dx
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

también a partir de la ecuación (3.29), definimos

$$
\begin{aligned}
\varphi : H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) &\longrightarrow \quad \mathbb{C} \\
(\hat{u},\hat{w},\hat{v}) &\longmapsto \varphi(\hat{u},\hat{w},\hat{v}) = -\int_0^L F_1\overline{\hat{u}} dx - \int_0^L G_1\overline{\hat{w}} dx \\
& \qquad -\int_0^L H_1\overline{\hat{v}} dx
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

De la ecuación (3.30), tenemos

a) $B(.,.) : \left[\left(H_0^1(0,L)\right)^3 \times \left(H_0^1(0,L)\right)^3\right] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$((u,w,v),(u,w,v)) \longmapsto B\left((u,w,v),(u,w,v)\right)$$

a.1) Afirmación 1. B(. , .) es coerciva.

i.e.

$$B\left((u,w,v),(u,w,v)\right) \geq M\|\,(u,w,v)\,\|^2_{(H_0^1(0,L))^3}, \quad donde \;\; M > 0.$$

En efecto:

A partir de la ecuación (3.30), tenemos.

$$
\begin{aligned}
B\left((u,w,v),(u,w,v)\right) = {} & a_{11}\int_0^L u_x\bar{u}_x dx + a_{12}\int_0^L w_x\bar{\bar{u}}_x dx + b_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_x dx + b_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_x dx \\
& + k_1\int_0^L \theta_x\bar{u}_x dx + a_{12}\int_0^L u_x\bar{w}_x dx + a_{22}\int_0^L w_x\bar{w}_x dx + b_{12}\int_0^L v_x\overline{\bar{w}}_x dx \\
& + b_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_x dx + k_2\int_0^L \theta_x\bar{w}_x dx + k\int_0^L \theta_x\bar{v}_x dx - k_1\int_0^L v_x\bar{v}_x dx \\
& - k_2\int_0^L \eta_x\bar{v}_x dx + \alpha\int_0^L u\bar{u}dx - \alpha\int_0^L w\bar{u}dx - \alpha\int_0^L u\bar{w}dx + \alpha\int_0^L w\bar{w}dx
\end{aligned} \tag{3.32}
$$

Agrupando convinientemente la ecuación (3.32), se obtiene.

$$a_{11}\int_0^L u_x\bar{u}_x dx = a_{11}\int_0^L |u_x|^2 dx.$$

$$a_{22}\int_0^L w_x\bar{w}_x dx = a_{22}\int_0^L |w_x|^2 dx.$$

$$k_1\int_0^L v_x\bar{v}_x dx = k_1\int_0^L |v_x|^2 dx, \ \ \textit{donde} \ \ (k_1 < 0).$$

$$\alpha\left(\int_0^L |u|^2 + |w|^2\right).$$

$$a_{12}\int_0^L w_x\bar{u}_x dx + a_{12}\int_0^L u_x\bar{w}_x dx = a_{12}\int_0^L w_x\bar{u}_x dx - a_{12}\int_0^L \overline{w_x\bar{u}_x} dx = 0.$$

$$\left(b_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_x dx + b_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_x dx + k_1\int_0^L \theta_x\bar{u}_x dx\right) \in \mathbb{C}.$$

$$\left(b_{12}\int_0^L v_x\bar{w}_x dx + b_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_x dx + k_2\int_0^L \theta_x\bar{w}_x dx\right) \in \mathbb{C}.$$

$$\left(k\int_0^L \theta_x\bar{v}_x dx - k_2\int_0^L \eta_x\bar{v}_x dx\right) \in \mathbb{C}.$$

A continuación tenemos la siguiente expresión.

$$B\left((u,w,v),(u,w,v)\right) = a_{11}\int_0^L |u_x|^2dx + a_{22}\int_0^L |w_x|^2dx + k_1\int_0^L |v_x|^2dx + \alpha\int_0^L \left(|u|^2+|w|^2\right)$$

$$+b_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_xdx + b_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_xdx + k_1\int_0^L \theta_x\bar{u}_xdx + b_{12}\int_0^L v_x\bar{w}_xdx$$

$$+b_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_xdx + k_2\int_0^L \theta_x\bar{w}_xdx + k\int_0^L \theta_x\bar{v}_xdx - k_2\int_0^L \eta_x\bar{v}_xdx$$

$$B\left((u,w,v),(u,w,v)\right) = a_{11}\|u\|^2_{H_0^1} + a_{22}\|w\|^2_{H_0^1} + k_1\|v\|^2_{H_0^1} + \alpha\int_0^L \left(|u|^2+|w|^2\right)$$

$$+b_{11}\int_0^L v_x\bar{u}_xdx + b_{12}\int_0^L \eta_x\bar{u}_xdx + k_1\int_0^L \theta_x\bar{u}_xdx + b_{12}\int_0^L v_x\bar{w}_xdx$$

$$+b_{22}\int_0^L \eta_x\bar{w}_xdx + k_2\int_0^L \theta_x\bar{w}_xdx + k\int_0^L \theta_x\bar{v}_xdx - k_2\int_0^L \eta_x\bar{v}_xdx \tag{3.33}$$

Tomando la parte real de (3.33), tenemos

$$B\left((u,w,v),(u,w,v)\right) \geq a_{11}\|u\|^2_{H_0^1} + a_{22}\|w\|^2_{H_0^1} + k_1\|v\|^2_{H_0^1}.$$

$$B\left((u,w,v),((u,w,v)\right) \geq M\left(\|u\|^2_{H_0^1} + \|w\|^2_{H_0^1} + \|v\|^2_{H_0^1}\right), \quad \textit{donde } \boldsymbol{M} = \textit{mín}\{a_{11},a_{22},k_1\}$$

Es decir,

$$B\left((u,w,v),(u,w,v)\right) \geq M\|\left(u,w,v\right)\|^2_{(H_0^1(0,L))^3}, \quad \textit{donde} \;\; M>0.$$

B (. , .) es coerciva.

a.2) Afirmación 2. B(. , .) es sesquilineal.

En efecto:

Sean $u, w, v, \eta \in H_0^1(0, L)$ *y* $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{C}$.

$$B(\mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v, \eta^*) = \int_0^L (\mu_1 u_x + \mu_2 w_x + \mu_3 v_x)\eta_x^* dx$$

$$B(\mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v, \eta^*) = \int_0^L (\mu_1 u_x \eta_x^*) dx + \int_0^L \mu_2 w_x \eta_x^* dx + \int_0^L \mu_3 v_x \eta_x^* dx$$

$$B(\mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v, \eta^*) = \mu_1 (\int_0^L u_x \eta_x^* dx) + \mu_2 (\int_0^L w_x \eta_x^* dx) + \mu_3 (\int_0^L v_x \eta_x^* dx).$$

$$B(\mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v, \eta^*) = \mu_1 B(u, \eta_x^*) + \mu_2 B(w, \eta_x^*) + \mu_3 B(v, \eta_x^*).$$

Por otro lado,

$$B(u, w) = \int_0^L u_x \eta_x^* dx = \int_0^L \eta_x^* u_x dx$$
$$\int_0^L \overline{\eta_x^* \bar{u}_x} dx = \overline{\int_0^L \eta^* \bar{u}_x} = \overline{B(w, u)}.$$

Es decir,

$$B(u, w) = \overline{B(w, u)}.$$

Luego tenemos

$$B(\eta^*, \mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v) = \overline{B(\mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v, \eta^*)}$$

$$B(\eta^*, \mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v) = \overline{\mu_1 B(u, \eta^*) + \mu_2 B(w, \eta^*) + \mu_3 B(v, \eta^*)}$$

$$B(\eta^*, \mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v) = \bar{\mu_1} \overline{B(u, \eta^*)} + \bar{\mu_2} \overline{B(w, \eta^*)} + \bar{\mu_3} \overline{v, B(v, \eta^*)}$$

$$B(\eta^*, \mu_1 u + \mu_2 w + \mu_3 v) = \bar{\mu_1} B(\eta^*, u) + \bar{\mu_2} B(\eta^*, w) + \bar{\mu_3} B(\eta^*, v).$$

Por lo tanto,

B(. , .) es sesquilineal.

a.3) Afirmación 3. B(. , .) es continua.

i.e $|(B(u, w, v), (\hat{u}, \hat{w}, \hat{v}))| \leq C \|(u, w, v)\|_{(H_0^1)^3} . \|(\hat{u}, \hat{w}, \hat{v})\|_{(H_0^1)^3}, \quad C > 0.$

En efecto:

De la ecuación (3.30) se tiene.

$$B(.,.):\left[\left(H_0^1(0,L)\right)^3\times\left(H_0^1(0,L)\right)^3\right]\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v}))\longmapsto B\left((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\right)$$

$$\begin{aligned}|B\left((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\right)| = {} & |a_{11}\int_0^L u_x\overline{\hat{u}}_x dx + a_{12}\int_0^L w_x\overline{\hat{u}}_x dx + b_{11}\int_0^L v_x\overline{\hat{u}}_x dx \\ & +a_{12}\int_0^L u_x\overline{\hat{w}}_x dx + a_{22}\int_0^L w_x\overline{\hat{w}}_x dx + b_{12}\int_0^L v_x\overline{\hat{w}}_x dx \\ & +k\int_0^L u_x\overline{\hat{v}}_x dx - k_1\int_0^L v_x\overline{\hat{v}}_x dx - k_2\int_0^L w_x\overline{\hat{v}}_x dx \\ & +b_{12}\int_0^L \eta_x\overline{\hat{u}}_x dx + k_1\int_0^L \theta_x\overline{\hat{u}}_x dx + b_{22}\int_0^L \eta_x\overline{\hat{w}}_x dx \\ & +k_2\int_0^L \theta_x\overline{\hat{w}}_x dx + \alpha\int_0^L u\overline{\hat{u}} dx - \alpha\int_0^L w\overline{\hat{u}} dx \\ & -\alpha\int_0^L u\overline{\hat{w}} dx + \alpha\int_0^L w\overline{\hat{w}} dx.|\end{aligned}$$

Donde se asume que las funciones θ y η son constantes, $\alpha = 0$.

$$\begin{aligned}|B\left((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\right)| \le {} & a_{11}\int_0^L |u_x\overline{\hat{u}}_x| dx + a_{12}\int_0^L |w_x\overline{\hat{u}}_x| dx + b_{11}\int_0^L |v_x\overline{\hat{u}}_x| dx \\ & +a_{12}\int_0^L |u_x\overline{\hat{w}}_x| dx + a_{22}\int_0^L |w_x\overline{\hat{w}}_x| dx + b_{12}\int_0^L |v_x\overline{\hat{w}}_x| dx \\ & +k\int_0^L |u_x\overline{\hat{v}}_x| dx + k_2\int_0^L |w_x\overline{\hat{v}}_x| + k_1\int_0^L |v_x\overline{\hat{v}}_x| dx.\end{aligned}$$

$$\overset{H\ddot{o}lder}{\leq} a_{11}\left(\int_0^L |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{u}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + a_{12}\left(\int_0^L |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{u}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+b_{11}\left(\int_0^L |v_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{u}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + a_{12}\left(\int_0^L |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{w}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+a_{22}\left(\int_0^L |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{w}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + b_{12}\left(\int_0^L |v_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{w}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+k\left(\int_0^L |u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{v}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + k_2\left(\int_0^L |w_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{v}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+k_1\left(\int_0^L |v_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^L |\overline{\hat{v}}_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \ldots(\blacklozenge)$$

y como

$|\overline{\hat{u}}_x| = |\hat{u}_x|, \quad |\overline{\hat{w}}_x| = |\hat{w}_x|, \quad |\overline{\hat{v}}_x| = |\hat{v}_x|,$ *entonces de* $(\blacklozenge)$

$$|B\left((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\right) \leq a_{11}\|u\|_{H_0^1}\|\hat{u}\|_{H_0^1} + a_{12}\|w\|_{H_0^1}\|\hat{u}\|_{H_0^1} + b_{11}\|v\|_{H_0^1}\|\hat{u}\|_{H_0^1}$$

$$+a_{12}\|u\|_{H_0^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1} + a_{22}\|w\|_{H_0^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1} + b_{12}\|v\|_{H_0^1}\|\hat{w}\|_{H_0^1}$$

$$+k\|u\|_{H_0^1}\|\hat{v}\|_{H_0^1} + k_2\|w\|_{H_0^1}\|\hat{v}\|_{H_0^1} + k_1\|v\|_{H_0^1}\|\hat{v}\|_{H_0^1}.$$

$$\leq (a_{11}\|u\|_{H_0^1} + a_{12}\|w\|_{H_0^1} + b_{11}\|v\|_{H_0^1})\|\hat{u}\|_{H_0^1}$$

$$+(a_{12}\|u\|_{H_0^1} + a_{22}\|w\|_{H_0^1} + b_{12}\|v\|_{H_0^1})\|\hat{w}\|_{H_0^1}$$

$$+(k\|u\|_{H_0^1} + k_2\|w\|_{H_0^1} + k_1\|v\|_{H_0^1})\|\hat{v}\|_{H_0^1}.$$

$$\leq c_1(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1})\|\hat{u}\|_{H_0^1}$$
$$+c_2(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1})\|\hat{w}\|_{H_0^1}$$
$$+c_3(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1})\|\hat{v}\|_{H_0^1}$$

donde

$c_1 = máx\{a_{11}, a_{12}, b_{11}\}$

$c_2 = máx\{a_{12}, a_{22}, b_{12}\}$

$c_3 = máx\{k, k_1, k_2\}.$

$c_* = máx\{c_1, c_2, c_3\}$

Entonces

$$|B((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v}))| \leq c_* \left[(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1})(\|\hat{u}\|_{H_0^1} + \|\hat{w}\|_{H_0^1} + \|\hat{v}\|_{H_0^1})\right].$$

Usando $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$*, se tiene*

$$|B((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v}))| \leq c_* \underbrace{\left(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1}\right)}_{\leq 3\left(\|u\|^2_{H_0^1} + \|w\|^2_{H_0^1} + \|v\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{1}{2}}} \underbrace{\left(\|\hat{u}\|_{H_0^1} + \|\hat{w}\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1}\right)}_{\leq 3\left(\|\hat{u}\|^2_{H_0^1} + \|\hat{w}\|^2_{H_0^1} + \|\hat{v}\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$|B((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v}))| \leqslant 9c_* \left(\|u\|^2_{H_0^1} + \|w\|^2_{H_0^1} + \|v\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\hat{u}\|^2_{H_0^1} + \|\hat{w}\|^2_{H_0^1} + \|\hat{v}\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$|B((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v}))| \leq \underbrace{9c_*}_{C} \|(u,w,v)\|_{(H_0^1(0,L))^3} \|(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\|_{(H_0^1(0,L))^3}.$$

$$|B((u,w,v),(\hat{u},\hat{w},\hat{v}))| \leq C\|(u,w,v)\|_{(H_0^1(0,L))^3} \|(\hat{u},\hat{w},\hat{v})\|_{(H_0^1(0,L))^3}, \quad C > 0.$$

Por lo tanto B(. , .) es continuo.

Así obtenemos que B(. , .) es coerciva, sesquilineal y continua.

De la ecuación (3.31), se tiene la siguiente definición

b)

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) \times H_0^1(0,L) &\longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ (u,w,v) \qquad\qquad &\longmapsto \varphi(u,w,v) = -\int_0^L F_1 \bar{u} dx - \int_0^L G_1 \bar{w} dx \\ &\qquad - \int_0^L H_1 \bar{v} dx. \end{aligned}$$

b.1) Afirmación 1 φ es semilineal

En efecto:

Sean $u_1, u_2, u_3 \in H_0^1(0,L), \varphi \in H^{-1}(0,L)$ y $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{C}$.

$$\langle \varphi, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 \rangle = -\int_0^L F_1(\overline{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3})dx - \int_0^L G_1(\overline{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3})dx$$

$$-\int_0^L H_1(\overline{\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3})dx.$$

$$= -\int_0^L F_1\overline{\beta_1 u_1}dx - \int_0^L F_1\overline{\beta_2 u_2}dx - \int_0^L F_1\overline{\beta_3 u_3}dx - \int_0^L G_1\overline{\beta_1 u_1}dx.$$

$$-\int_0^L G_1\overline{\beta_2 u_2}dx - \int_0^L G_1\overline{\beta_3 u_3}dx - \int_0^L H_1\overline{\beta_1 u_1}dx - \int_0^L H_1\overline{\beta_2 u_2}dx$$

$$-\int_0^L H_1\overline{\beta_3 u_3}dx.$$

$$= -\bar{\beta}_1\int_0^L F_1\bar{u}_1dx - \bar{\beta}_2\int_0^L F_1\bar{u}_2dx - \bar{\beta}_3\int_0^L F_1\bar{u}_3dx - \bar{\beta}_1\int_0^L G_1\bar{u}_1dx$$

$$-\bar{\beta}_2\int_0^L G_1\bar{u}_2dx - \bar{\beta}_3\int_0^L G_1\bar{u}_3dx - \bar{\beta}_1\int_0^L H_1\bar{u}_1dx - \bar{\beta}_2\int_0^L H_1\bar{u}_2dx$$

$$-\bar{\beta}_3\int_0^L H_1\bar{u}_3dx.$$

$$= -\bar{\beta}_1 \langle \varphi, u_1 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} - \bar{\beta}_2 \langle \varphi, u_2 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} - \bar{\beta}_3 \langle \varphi, u_3 \rangle_{H^{-1}xH_0^1}$$

$$-\bar{\beta}_1 \langle \varphi, u_1 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} - \bar{\beta}_2 \langle \varphi, u_2 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} - \bar{\beta}_3 \langle \varphi, u_3 \rangle_{H^{-1}xH_0^1}$$

$$-\bar{\beta}_1 \langle \varphi, u_1 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} - \bar{\beta}_2 \langle \varphi, u_2 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} - \bar{\beta}_3 \langle \varphi, u_3 \rangle_{H^{-1}xH_0^1}.$$

$$\langle \varphi, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} = \bar{\beta}_1 \langle \varphi, u_1 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} + \bar{\beta}_2 \langle \varphi, u_2 \rangle_{H^{-1}xH_0^1} + \bar{\beta}_3 \langle \varphi, u_3 \rangle_{H^{-1}xH_0^1}.$$

Por lo tanto, φ es semilineal.

b.2) Afirmación 2 φ es continua.

En efecto:

Sea

$$|<\varphi,u,w,v>| = \left|-\int_0^L F_1\bar{u}dx\right| + \left|-\int_0^L G_1\bar{w}dx\right| + \left|-\int_0^L H_1\bar{v}dx\right|.$$

como

$$\left|\int_0^L F_1\bar{u}dx\right| \leq \int_0^L |F_1\bar{u}|dx$$

$$\left|\int_0^L G_1\bar{w}dx\right| \leq \int_0^L |G_1\bar{w}|dx$$

$$\left|\int_0^L H_1\bar{v}dx\right| \leq \int_0^L |H_1\bar{v}|dx,$$

entonces,

$$|<\varphi,u,w,v>| \leq \int_0^L |F_1\bar{u}|dx + \int_0^L |G_1\bar{w}|dx + \int_0^L |H_1\bar{v}|dx.$$

$$\leq \left(\int_0^L |F_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\bar{u}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L |G_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\bar{w}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\int_0^L |H_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |\bar{v}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

como $|\bar{u}| = |u|, \quad |\bar{w}| = |w|, \quad |\bar{v}| = |v|$, *entonces*

$$|<\varphi,u,w,v>| \leq \left(\int_0^L |F_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |u|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^L |G_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |w|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left(\int_0^L |H_1|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^L |v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$|<\varphi,u,w,v>| \overset{Hölder}{\leq} \|F_1\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + \|G_1\|_{L^2}\|w\|_{L^2} + \|H_1\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Usando la desigualdad de Poincaré tenemos

$$\|F_1\|_{L^2}\|u\|_{L^2} + \|G_1\|_{L^2}\|w\|_{L^2} + \|H_1\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq M\left(\|v\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1}\right)$$
$$donde\ M = \text{máx}\{K_1\|F_1\|_{L^2}, K_2\|G_1\|_{L^2}, K_3\|H_1\|_{L^2}\}$$
$$|<\varphi, u, w, v>| \leq M(\|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1} + \|v\|_{H_0^1}) \leq 3\left(\|u\|^2_{H_0^1} + \|w\|^2_{H_0^1} + \|v\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|<\varphi, u, w, v>| \overset{Poincaré}{\leq} 3M\left(\|u\|^2_{H_0^1} + \|w\|^2_{H_0^1} + \|v\|^2_{H_0^1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|<\varphi, u, w, v>| \leq \underbrace{3M}_{N}\|(u, w, v)\|_{(H_0^1(0,L))^3}$$

$$|<\varphi, u, w, v>|_{H^{-1}xH_0^1} \leq N\|(u, w, v)\|_{(H_0^1)^3}$$

Así obtenemos,

$$\left|<\varphi, u, w, v>_{H^{-1}xH_0^1}\right| \leq N\left(\|v\|_{H_0^1} + \|u\|_{H_0^1} + \|w\|_{H_0^1}\right), \quad N > 0.$$

En resumen a partir de las ecuaciones (3.29), (3.30) y (3.31) tenemos
$B((u, w, v), (\hat{u}, \hat{w}, \hat{v})) = \varphi(u, w, v)$, $\forall(u, w, v) \in H_0^1(0, L)$.
Por el teorema de Lax - Milgram tenemos que existe un único
$U = (u, w, v, \eta, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$, *y retomando las expresiones de (3.24) - (3.31) se tiene,*

$$\int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_x\bar{u}_x dx = -\int_0^L F_1\bar{u}dx, \forall u \in H_0^1(0, L)$$

$$\int_0^L (a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_x\bar{w}_x dx = -\int_0^L G_1\bar{w}dx, \forall w \in H_0^1(0, L)$$

$$\int_0^L (k\theta - k_1v - k_2\eta)_x\bar{v}_x dx \qquad = -\int_0^L H_1\bar{v}dx, \forall v \in H_0^1(0, L).$$

entonces

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} = F_1\\
&(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} = G_1\\
&(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} \qquad\qquad\quad = H_1\\
&Es\ decir,\\
&(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} = \rho_1 h + \alpha_1(f-g) - \beta_1\theta\\
&(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} = \rho_2 p - \alpha_1(f-g) - \beta_2\theta\\
&(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} \qquad\qquad\quad = cq + \beta_1 f + \beta_2 g.
\end{aligned}
$$

Como $(F_1, G_1, H_1) \in [L^2(0,L)xL^2(0,L)xL^2(0,L)]$, *entonces*

$$(u, w, v, \eta, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$$

y considerando v = f y $\eta = g$, *se tiene la siguiente expresión*

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(f-g) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta = h\\
\dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(f-g) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta = p\\
\dfrac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}f - \dfrac{\beta_2}{c}g \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = q.
\end{cases}
$$

Entonces

$\exists!\ (u, w, v, \eta, \theta)^T \in [H_0^1(0,L) \cap L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \cap L^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)$
$\times\ H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L) \times H_0^1(0,L) \cap H^2(0,L)]$

y

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{\rho_1}(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \dfrac{\alpha}{\rho_1}(u-w) - \dfrac{\alpha_1}{\rho_1}(f-g) + \dfrac{\beta_1}{\rho_1}\theta = h\\
\dfrac{1}{\rho_2}(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}v + b_{22}\eta + k_2\theta)_{xx} + \dfrac{\alpha}{\rho_2}(u-w) + \dfrac{\alpha_1}{\rho_2}(f-g) + \dfrac{\beta_2}{\rho_2}\theta = p\\
\dfrac{1}{c}(k\theta - k_1v - k_2\eta)_{xx} - \dfrac{\beta_1}{c}f - \dfrac{\beta_2}{c}g \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = q.
\end{cases}
$$

Por lo tanto, $\exists!\ U = (u, w, v, \eta, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$ *tal que* $\mathcal{A}U = F$*; es decir,*

$\mathcal{A}$ ***es inversible*** $\blacksquare$.

b.3) Afirmación 3. $\mathcal{A}^{-1}$ ***es acotado***

i.e.

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}, \quad C > 0.$$

En efecto:

Como $\mathcal{A}$ es inversible, tenemos que $\forall F \in \mathcal{H} \;\; \exists! U \in D(\mathcal{A})/AU = F$.

Veamos que,

$$\|U\|_{\mathcal{H}} \leq C\|AU\|_{\mathcal{H}}, \forall U \in D(\mathcal{A}).$$

Sea $U = (u, w, v, \eta, \theta)^T \in D(\mathcal{A})$

Consideremos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\theta\|_{L^2}^2 + \|u-w\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2.$$

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\|u_x\|_{L^2}^2) + \frac{1}{a_{12}}(a_{12}\|w_x\|_{L^2}) + \frac{1}{c}(c\|\theta\|_{L^2}^2) + \frac{1}{\alpha}(\alpha\|u-w\|_{L^2}^2) \tag{3.34}$$

$$+\frac{1}{\rho_1}(\rho_1\|v\|_{L^2}^2)$$

por la desigualdad de poincaré, tenemos

$$\|u_x\|_{L^2} \leq K_1\|u_{xx}\|_{L^2} \tag{3.35}$$

$$\|w_x\|_{L^2} \leq K_2\|w_{xx}\|_{L^2} \tag{3.36}$$

Entonces de las ecuaciones (3.34), (3.35) y (3.36) se tiene la siguiente desigualdad

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq K_1^2\frac{1}{a_{11}}(a_{11}\|u_{xx}\|_{L^2}^2) + K_2^2\frac{1}{a_{12}}(a_{12}\|w_{xx}\|_{L^2}) + \frac{1}{c}(c\|\theta\|_{L^2}^2) + \frac{1}{\alpha}(\alpha\|u-w\|_{L^2}^2) \tag{3.37}$$

$$+\frac{1}{\rho_1}(\rho_1\|v\|_{L^2}^2)$$

y por otro lado

$$\|a_{11}u_{xx} - \alpha(u-w) + \alpha(u-w)\|_{L^2}^2 + \|a_{12}w_{xx} + c\theta - c\theta\|_{L^2}^2 \quad ...(4{,}40) \tag{3.38}$$

De las ecuaciones (3.37) y (3.38) tenemos

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \frac{K_1^2}{a_{11}}\left[\|a_{11}u_{xx} - \alpha(u-w)\|_{L^2} + \|\alpha(u-w)\|_{L^2}\right]^2 + \frac{K_2^2}{a_{12}}\left[\|a_{12}w_{xx} - c\theta\|_{L^2} + \|c\theta\|_{L^2}\right]^2$$

$$+\frac{1}{c}(c\|\theta\|_{L^2}^2) + \frac{1}{\alpha}(\alpha\|u-w\|_{L^2}^2) + \frac{1}{\rho_1}(\rho_1\|v\|_{L^2}^2)$$

Usando $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ *tenemos,*

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{2K_1^2}{a_{11}}[\|a_{11}u_{xx}-\alpha(u-w)\|^2_{L^2}+\|\alpha(u-w)\|^2_{L^2}]+\frac{2K_2^2}{a_{12}}\left[\|a_{12}w_{xx}-c\theta\|^2_{L^2}+\|c\theta\|^2_{L^2}\right]$$

$$+\frac{1}{c}(c\|\theta\|^2_{L^2})+\frac{1}{\alpha}(\alpha\|u-w\|^2_{L^2})+\frac{1}{\rho_1}(\rho_1\|v\|^2_{L^2}).$$

Como $(u,w,v,\eta,\theta)\in L^2(0,L)$ *y* $\alpha>0,\ c>0$ *entonces*

$$\|\alpha(u-w)\|^2_{L^2}=\int_0^L|\alpha|^2|u-w|^2dx\leq\alpha^2\int_0^L|u-w|^2dx=\alpha^2\|u-w\|^2_{L^2},$$

$$\|c\theta\|^2_{L^2}=\int_0^L|c|^2|\theta|^2dx\leq c^2\int_0^L|\theta|^2dx=c^2\|\theta\|^2_{L^2}.$$

Luego,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}}\leq\frac{2K_1^2}{a_{11}}\|a_{11}u_{xx}-\alpha(u-w)\|^2_{L^2}+\frac{2K_1^2\alpha^2}{a_{11}}\|u-w\|^2_{L^2}+\frac{2K_2^2}{a_{12}}\|w_{xx}+c\theta\|^2_{L^2}$$

$$+\frac{2K_2^2c^2}{a_{12}}\|\theta\|^2_{L^2}+\frac{1}{c}(c\|\theta\|^2_{L^2})+\frac{1}{\alpha}(\alpha\|u-w\|^2_{L^2})+\frac{1}{\rho_1}(\rho_1\|v\|^2_{L^2}).$$

$$\leq\frac{2K_1^2}{a_{11}}\|a_{11}u_{xx}-\alpha(u-w)\|^2_{L^2}+\frac{2K_2^2}{a_{12}}\|w_{xx}-c\theta\|^2_{L^2}+(\frac{2K_1^2\alpha^2}{a_{11}}+1)\|u-w\|^2_{L^2}$$

$$+(\frac{2K_2^2c^2}{a_{12}}+1)\|\theta\|^2_{L^2}+\|v\|^2_{L^2}$$

Por la desigualdad de poincaré se tiene

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}}\leq\frac{2K_1^2}{a_{11}}\|a_{11}u_{xx}-\alpha(u-w)\|^2_{L^2}+\frac{2K_2^2}{a_{12}}\|w_{xx}-c\theta\|^2_{L^2}+(\frac{2K_1^2\alpha^2}{a_{11}}+1)\|u_x-w_x\|^2_{L^2}$$

$$+(\frac{2K_2^2c^2}{a_{12}}+1)\|\theta_x\|^2_{L^2}+\|v_x\|^2_{L^2}$$

Tomando $C=\max\left\{\frac{2K_1^2}{a_{11}},\frac{2K_2^2}{a_{12}},\left(\frac{2K_1^2\alpha^2}{a_{11}}+1\right),\left(\frac{2K_2^2c^2}{a_{12}}+1\right)\right\}$ *se tiene.*

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}}\leq C\left[\|a_{11}u_{xx}-\alpha(u-w)\|^2_{L^2}+\|w_{xx}-c\theta\|^2_{L^2}+\|u_x-w_x\|^2_{L^2}+\|\theta_x\|^2_{L^2}+\|v_x\|^2_{L^2}\right]$$

es decir,

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}}\leq C\|\mathcal{A}U\|^2_{\mathcal{H}},\ \forall\, U=(u,w,v,\eta,\theta)^T\in D(\mathcal{A}).$$

Su forma equivalente es

$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall\, U = (u, w, v, \eta, \theta)^T \in D(\mathcal{A}).$

Por lo tanto, $\mathcal{A}^{-1}$ es acotado. .

Hemos demostrado que $\mathcal{A}$ es inversible y que $\mathcal{A}^{-1}$ es acotado, es decir

$$0 \in \rho(\mathcal{A})_{\blacksquare}.$$

Finalmente de los casos: ***Caso I, Caso II y Caso III*** *hemos demostrado que.*

• $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

• $\mathcal{A}$ *es dispativo.*

• $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Luego de verificar los casos anteriores podemos usar el teorema (1.3.2) el cual nos indica que el operador $\mathcal{A}$ es un generador infinitesimal de un C_0 - semigrupo T(t) de contracción en $\mathcal{H}$ que se denota por $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$, $t \geq 0$.

"Tenemos que $\mathcal{A}$ es un generador infinitesimal del C_0 - semigrupo T(t)" y sea

$$\begin{aligned} U : [0, +\infty > &\longrightarrow \mathcal{H} \\ t &\longrightarrow U(t) = T(t)w; \ w \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Por el teorema (1.2.9) tenemos que U es una solución del problema de Cauchy (3.13).

c) Veamos la regularidad de la solución en U.

***c.1) Afirmación 1. U**$\in C(0, \infty, \mathcal{H})$.*

En efecto:

Como T es un semigrupo - C_0, entonces es válido el límite

$$\lim_{h\to 0} T(h)w = w \text{ en } \mathcal{H} \qquad \text{...(4.41)}$$

Por la propiedad de semigrupos, tenemos que

$$T(t_0 + h)w = T(t_0)T(h)w.$$

Aplicando límite

$$\lim_{h\to 0} T(t_0 + h)w = T(t_0) \lim_{h\to 0} T(h)w. \tag{3.39}$$

De (3.39) tenemos

$$\lim_{h\to 0} T(t_0+h)w = T(t_0)w.$$

Entonces, $U \in C(0,\infty,\mathcal{H})$***.***

c.2) Afirmación 2. $U^{'} \in C(0,\infty,\mathcal{H})$.

En efecto:

Sea $w \in D(\mathcal{A})$. *Tenemos*

$$T^{'}(t)w = \lim_{h\to 0} \frac{T(t+h)w - T(t)w}{h}$$

$$T^{'}(t)w = \lim_{h\to 0} \frac{T(t)T(h))w - T(t)w}{h}$$

$$T^{'}(t)w = T(t)\lim_{h\to 0} \frac{T(h)w - w}{h} \tag{3.40}$$

"Como $\mathcal{A}$ es un generador infinitesimal del semigrupo T(t)", tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{T(h)w - w}{h} = \mathcal{A}w \tag{3.41}$$

De (3.40) y (3.41) tenemos $T^{'}(t)w = T(t)\mathcal{A}w$.

Como U(t) = T(t)w, entonces

$$U^{'}(t) = T(t)\mathcal{A}w.$$

Por lo tanto, $U^{'} \in C(0,\infty,\mathcal{H})$.

d) Veamos la regularidad de la solución en $D(\mathcal{A})$***.***

Proposición 3.1.1. *Si* $f_n \longrightarrow f$ *en* $L^2(0,L)$, *entonces*
$\int_0^L f_n \longrightarrow \int_0^L f_n\varphi dx \longrightarrow \int_0^L f\varphi dx, \varphi \in C_0^\infty(0,L)$.

Prueba.

Por la desigualdad de $H\ddot{o}lder$ *tenemos,*

$$\left|\int_0^L (f_n - f)\varphi dx\right| \leq \int_0^L |(f_n - f)\varphi| dx \leq \|f_n - f\|_{L^2}\|\varphi\|_{L^2}$$

y como $f_n \longrightarrow f$ *en* $L^2(0, L)$*, entonces*

$$\int_0^L f_n \varphi dx \longrightarrow \int_0^L f \varphi dx, \varphi \in C_0^\infty(0, L).$$

d.1) Afirmación 1. $\mathcal{A}$ ***es un operador cerrado.***

En efecto:

Sea $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left\{(u_n, w_n, v_n, \eta_n, \theta_n)^T\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(\mathcal{A})$ *converge a* $U = (u, w, v, \eta, \theta)^T \in \mathcal{H}$ *tal que*

$$\mathcal{A}U_n \longrightarrow Y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T.$$

Demostraremos $U \in D(\mathcal{A})$ *y* $\mathcal{A}U = Y$.

Tenemos

$$\begin{aligned}
&U_n \in D(\mathcal{A}) \longrightarrow u_n \in H_0^1(0, L) \cap C_0^1(0, \infty) \text{ y } w_n \in H_0^1(0, L).\\
&(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}u_t + b_{12}w_t)_n \in C(0, \infty) \cap H^2(0, L) \cap L^2(0, L),\\
&(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}u_t + b_{22}w_t)_n \in C(0, \infty) \cap H^2(0, L) \cap L^2(0, L),\\
&\theta_n \in C(0, \infty) \cap C^1(0, \infty) \cap H_0^1(0, L).
\end{aligned}$$

$U_n \longrightarrow U$ *en* $\mathcal{H} \Rightarrow u_n \longrightarrow u$ *en* $H_0^1(0, L)$ *y* $w_n \longrightarrow w$ *en* $L^2(0, L)$.

$\mathcal{A}U_n \longrightarrow Y en\, \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow u_n \longrightarrow y_1 \text{ en } H_0^1(0, L),\\
&\Rightarrow w_n \longrightarrow y_2 \text{ en } H_0^1(0, L),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}u_t + b_{12}w_t + k_1\theta)_{nxx} - \alpha(u - w) + \beta_1 \longrightarrow y_3 \text{ en } L^2(0, L),\\
&(a_{12}u + a_{22}w + b_{12}u_t + b_{22}w_t + k_2\theta)_{nxx} - \alpha(u - w) + \beta_2 \longrightarrow y_4 \text{ en } L^2(0, L),\\
&\theta_n \longrightarrow y_5 \text{ en } L^2(0, L).
\end{aligned}$$

Como $u_n \longrightarrow y_1$ *en* $H_0^1(0, L)$*, entonces* $u_n \longrightarrow y_1$ *en* $L^2(0, L)$.

Como $u_n \longrightarrow u$ *en* $L^2(0, L)$ *y por la unicidad del límite tenemos*

$$u = y_1 \tag{3.42}$$

Como $y_1 \in H_0^1(0, L)$*, entonces*

$$u \in H_0^1(0, L). \tag{3.43}$$

De manera similar, como $U_n \longrightarrow U$ *en* H_0^1.

Entonces $(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nx} \longrightarrow (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_x$ *en* $L^2(0, L)$.

Usando la proposición (1.4.1) tenemos

$$\int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nx}\varphi \longrightarrow dx\int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_x\varphi dx,$$
$$\varphi \in C_0^\infty(0, L) \tag{3.44}$$

Además,

$(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nxx} - \alpha(u - w) + \beta_1\theta \longrightarrow y_2$ *en* $L^2(0, L)$ *y* $w_n \longrightarrow w$ *en* $L^2(0, L)$. *Entonces*

$(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nxx} \longrightarrow y_2 + \alpha(u - w) - \beta_1\theta$ *en* $L^2(0, L)$

y usando nuevamente la proposición (1.4.1) tenemos,

$$\int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nxx}\varphi dx \longrightarrow \int_0^L [y_2 + \alpha(u - w) - \beta_1\theta]\varphi dx,$$
$$\forall\varphi \in C_0^\infty(0, L). \tag{3.45}$$

Como

$(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_n \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$, *entonces*

$$\int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nx}\varphi' dx = \int_0^L [(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{nx}]_x \varphi dx$$
$\forall\varphi \in C_0^\infty(0, L)$

Aplicando límite y usando (3.44) y (3.45) tenemos

$$\int_0^L (a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_x\varphi' dx = \int_0^L [y_2 + \alpha(u - w) - \beta_1\theta]\varphi dx \; \forall\varphi \in C_0^\infty(0, L)$$

Entonces por la definición de la derivada distribucional, tenemos que

$$(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} = y_2 + \alpha(u - w) - \beta_1\theta.$$

Entonces

$$(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} - \alpha(u - w) + \beta_1\theta = y_2 \tag{3.46}$$

$$y$$
$$(a_{11}u + a_{12}w + b_{11}v + b_{12}\eta + k_1\theta)_{xx} \in L^2(0, L). \tag{3.47}$$

Por (3.43) y (3.47) tenemos que $U \in D(\mathcal{A})$.

Por (3.42) y (3.46) tenemos que $\mathcal{A}U = Y$.

Por lo tanto, $\mathcal{A}$ ***es un operador cerrado.***

A continuación para ver que $(D(\mathcal{A}), \|.\|_{D(\mathcal{A})})$ "es un espacio de Banach". Dotamos al dominio de $\mathcal{A}$ con la norma del gráfico, esto es,
$\|v\|^2_{D(\mathcal{A})} = \|v\|^2_{\mathcal{H}} + \|\mathcal{A}v\|^2_{\mathcal{H}}$.

d.2) Afirmación 2.** $(D(\mathcal{A}), \|.\|_{D(\mathcal{A})})$ **es un espacio de Banach.

En efecto:

Sea $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
&\|v_m - v_n\|^2_{D(\mathcal{A})} < \epsilon \,\forall\, m, n \geq n_0. \\
&como\ \|v_m - v_n\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|v_m - v_n\|^2_{D(\mathcal{A})} \\
&y \\
&\|A(v_m - v_n)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|v_m - v_n\|^2_{D(\mathcal{A})}
\end{aligned}$$

"Entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$ y $(\mathcal{A}v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$".
Como $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach, entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $U \in \mathcal{H}$ y $(\mathcal{A}v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $Y \in \mathcal{H}$.
Además como $\mathcal{A}$ es un operador cerrado, tenemos que $U \in D(\mathcal{A})$ y $\mathcal{A}U = Y$.
Luego,

$$\begin{aligned}
&\|v_n - U\|^2_{D(\mathcal{A})} = \|v_n - U\|^2_{U} + \|\mathcal{A}(v_n - U)\|^2_{\mathcal{H}}. \\
&Es\ decir \\
&\|v_n - U\|^2_{D(\mathcal{A})} = \|v_n - U\|^2_{U} + \|\mathcal{A}v_n - Y\|^2_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Entonces, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a U en $D(\mathcal{A})$. Así obtenemos que $D(\mathcal{A})$ es un espacio completo.
***Por lo tanto** $D(\mathcal{A})$ **es un espacio de Banach**.*

Como $(D(\mathcal{A}), \|.\|_{D(\mathcal{A})})$ es un espacio de Banach, tomemos $v \in D(\mathcal{A})$. Así, U es una función continua con la norma de $D(\mathcal{A})$.

d.3) Afirmación 3. U es una función continua con la norma de** $D(\mathcal{A})$**.

En efecto:

$$\lim_{t\to t_0} \mathcal{A}T(t)v = \lim_{t\to t_0} T(t)\mathcal{A}v = T(t_0)\mathcal{A}v = \mathcal{A}T(t_0)v.$$

Por tanto,

$$U \in C \in (0,\infty; D(\mathcal{A})).$$

En resumen

$$Si\ v \in \mathcal{H} \Rightarrow U \in C(0,\infty;\mathcal{H}).$$
$$Si\ v \in D(\mathcal{A}) \Rightarrow U \in C(0,\infty; D(\mathcal{A}) \cap C^1(0.\infty;\mathcal{H})).$$

$U \in C^1(0,\infty,\mathcal{H})$, $v \in D(\mathcal{A})$ *entonces* $\mathcal{A}$ *es un operador infinitesimal de un semigrupo diferenciable para todo* $v \in D(\mathcal{A})$ *y como* $D(\mathcal{A})$ *es un espacio de Banach, entonces usamos el teorema (1.3.3) que nos da la unicidad de la solución.*

U(0)= T(0)v = Iv = v, ahora si tenemos $v = y_0 \in D(\mathcal{A})$ *y usando el teorema (1.3.3) tenemos* $\exists! U \in C(0,\infty,\mathcal{H}) \cap C^1(0,\infty,D(\mathcal{A}))$ *lo cual resuelve el problema de Cauchy (3.13).*

Si $U_0 = (u_0, w_0, u_1, w_1, \theta_0)^T \in D(\mathcal{A})$ *tenemos*

$$u, w \in C^1(0,\infty; H_0^1(0,L)) \cap C^2(0,\infty; L^2(0,L)),$$
$$a_{11}u + a_{12}w + b_{11}u_t + b_{12}w_t + k_1\theta \in C(0,\infty; H^2(0,L)),$$
$$a_{12}u + a_{22}w + b_{12}w_t + b_{22}w_t + k_2\theta \in C(0,\infty; H^2(0,L)),$$
$$\theta \in C(0,\infty; H_0^1(0,L)) \cap C^1(0,\infty; L^2(0,L)),$$
$$k\theta - k_1u_t - k_2w_t \in C(0,\infty; H^2(0,L)).$$

Lo cual resuelve el problema de Cauchy (3.13) ■

CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

4.1. Conclusiones

En el contexto de la existencia y unicidad del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, la prueba es mediante el "C_0 - semigrupo de contracción $\{T(t)\}_{t\geq 0}$". Al principio parecen complicado pues las ecuaciones están dadas en sentido de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), por ello se tranformó mediante operaciones al problema de Cauchy abstracta; esto es, la determinación de las condiciones para "la existencia y unicidad para el problema de Cauchy abstracta" pues este ha sido el motivo de estudio del presente trabajo.

- *Se estudió la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.*
  La herramienta más eficiente según lo analizado de los diferentes métodos; es el método de la teoría de semigrupos, este trabajo se ha estudiado con C_0 - semigrupo de contracción $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ generado por el operador A, finalmente podemos decir que este método es eficiente en el estudio de la existencia y unicidad.

- *Se estudió las condiciones necesarias y sufucientes que aseguren la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt, y se probó detalladamente con lemas, proposiciones y teoremas.*

- *Se estudió las condiciones que garantizan la existencia y unicidad de un semigrupo C_0 - $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ en un espacio de Hilbert.*

4.2. Recomendaciones

En el periodo de realización de esta tesis, se encontró algunas cuestiones que no se resolvió y que esperamos desarrollar en futuros trabajos. Enfatizamos las siguientes recomendaciones:

- *Implementar la estabilidad exponencial y un algoritmo que describa la estabilidad exponencial de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidadd en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.*
- *Implementar la base teórica del método de teoría de semigrupos.*
- *Aplicar los estudiados a un problema real.*
- *Implementar condiciones a los parámetros siguientes:* $\rho_1^o, k_i, K_i, \beta_i, a_{ij}, b_{ij}$, *con i=1,2; j= 1, ..., 4; c y k; para garantizar la existencia - unicidad.*

Referencias Bibliográficas

Alejandro A. F., L. A. C. (2005). Teoría, procedimientos de demostración y ejercicios de Análisis Funcional. *FACULTAD DE MATEMÁTICA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN. Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Cuba.*

Alves, M.S., M. R. J. Q. R. (2009a). Exponential decay in a thermoelastic mixture of solids. int. j. solids struct. 46:1659–1666.

Alves, M.S., M. R. J. S. M. V. O. (2009b). Analyticity of semigroups associated with thermoviscoelastic mixtures of solids. j. therm. stress. 12:986–1004.

Arias, F. (2006). Introducción a la investigación científica. 5.

Bermeo, J. (2011). Investigación aplicada al turismo.

Brezis, H. (1983). Análisis Funcional Toería y Aplicaciones. *Masson, Paris.*

Brezis, H. (1984). Análisis Funcional. *Alianza: Madrid.*

Czenky, Agustina M, V. T. L. (2017). Teorema de Lax-Milgram y aplicaciones al método de elementos finitos. *Facultad de Matemática, astronomía, física y computación Universidad Nacional de Córdoba.*

D. Ieşan, Quintanilla, R. (2002). On a theory of interacting continua with memory. 25:1161–1178.

Dieudonné, F. (1981). History of functional analysis. *Reverté.*

Engel, K.J., N. R. (2000). One-parameter semigroups for linear evolution equations (Vol.194), *volume 194. Springer Science and Business Media.*

Felipe Álvarez, J. P. (2003). Introducción a la teoría de semigrupos.

Figueroa, N. J. (1986). Espacios de sobolev h^1 y h^2. Revista proyecciones, *11.*

García, E. P. (2018). c_0 semigrupos para sistemas hiperbólicos port-hamiltonianos y sus aplicaciones.

Hernandez, R. (2006). metodología de la investigación. Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg.*, 6.*

Hernández Sampiere, R., F. c. C. B. M. (2014). Metodología de la investigación. 6.

Hoffman, K. (1979). Álgebra lineal. *Prentice-Hall, New Jersey. Prentice-Hall, New Jersey.*

Huang, F. L. (1985). Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in hilbert spaces. Ann. of Diff. Eqs*, 1:43–56.*

Ieşan, D. and Nappa, L. (2008). On the theory of viscoelastic mixtures and stability. 13:55 – 80.

Ieşan, D. and Quintanilla, R. (2007). A theory of porous thermoviscoelastic mixtures. 30:693 – 714.

J.J. Duistermaat, J. K. (2010). Distributions Theory and Applications. *Birkhauser.*

Kreyszig, E. (1978). Introductory Functional Analysis with aplications. *Wiley and Sons.*

Lima, E. L. (1976). Espacios métricos. *Euclides.*

Martins, F., P. S. (2012). Metodología de investigación cuantitativa. 7.

Martínez, F., Q. R. (1995)). Some qualitative results for the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. 46:263–277.

Muñoz R. J., Sepúlveda M., V. O. (2011). Stabilization of a system modeling temperature and porosity fields in a kelvin–voigt-type mixture.

Muñoz-Rivera, J. E. (2008). Estabilização de Semigrupos e Aplicações. *LNCC, Petrópolis, Brasil.*

Oliveira, C. R. (2012). Introdução á análise funcional. *Rio de Janeiro: IMPA.*

Pazy, A. (1983). Semigroups of linear operators and aplications to partial differential equeations.

Quintanilla, R. (2005). Exponential decay in mixtures with localized dissipative term. appl. math. 18:1381–1388.

Raposo, C. C. A. (2012). Semigrupos aplicados a sistemas dissipativos em edp. 32:20 – 23.

Renardy, M. (1993). On the type of certain c_0*- semigrupos, comunications in partial differential equations. 18.*

Rudin, W. (1973). Functional Analysis. *McGraw-Hill.*

Tamayo, M. (2003). El proceso de la investigación científica. 4.

Ullod, L. A. (2012). Aplicaciones de estimaciones de c_0 *- semigrupos en ecuaciones en derivadas parciales vectoriales.*

Useche M., Beatriz Q., W. A. (2020). Técnicas e instrumentos de recolección de datos cuali-cuantitativos.

Yosida, K. (1973). Functional Analysis. *Springer-Verlag, fourth ed.*

Ñaupas P., H., M. E. N. R. E. V. P. (2014). Metodología de investigación cuantitativa - cualitativa y redacción de tesis. 4.

Anexo1: Matriz de consistencia

PROBLEMA GENERAL	OBJETIVO GENERAL	HIPÓTESIS GENERAL	VARIABLE INDEPENDIENTE
¿Es posible establecer condiciones para la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin-Voigt?	Estudiar las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia, unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin-Voigt.	Existen condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.	Condiciones de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin-Voigt
PROBLEMAS ESPECÍFICO	**OBJETIVO ESPECÍFICO**	**HIPÓTESIS ESPECÍFICO**	**VARIABLE DEPENDIENTE**
1. ¿Es posible establecer condiciones necesarias y suficientes que aseguren la existencia de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo kelvin-Voigt? 2. ¿Bajo que condiciones se garantizará la unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo kelvin-Voigt?	1. Estudiar las condiciones necesarias y sufucientes que garantiza la existencia de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo kelvin-Voigt. 2. Examinar las condiciones que garanatiza la unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo kelvin-Voigt.	1. Existen condiciones para garantizar la existencia de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt. 2. Habrá condiciones que aseguren la unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.	Existencia y unicidad de la solución del sistema asociado a temperatura y porosidad en una mezcla de tipo Kelvin - Voigt.

0.1. Anexo2: Instrumentos de recolección de datos

Teorema 0.1.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{A}$ un operador lineal (no acotado), disipativo y con dominio denso en X. Si $0 \in \rho(\mathcal{A})$, entonces $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones: $T(t) = e^{\mathcal{A}t}$ sobre $\mathcal{H}$.* ***Demostración.*** *Ver (Renardy, 1993) Teorema 2.12.3, pág. 88.*

INSTRUMENTO: Ficha de registro o demostración.

Demostración del método directo.

1. Reconocimiento de los enunciados proposicionales.

p: Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\mathcal{A}$ un operador lineal (no acotado), disipativo.

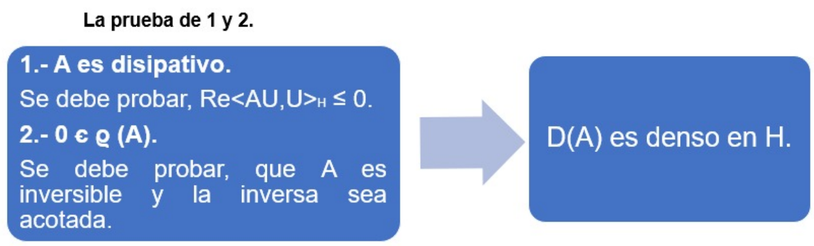
q: Con dominio denso en $\mathcal{H}$.

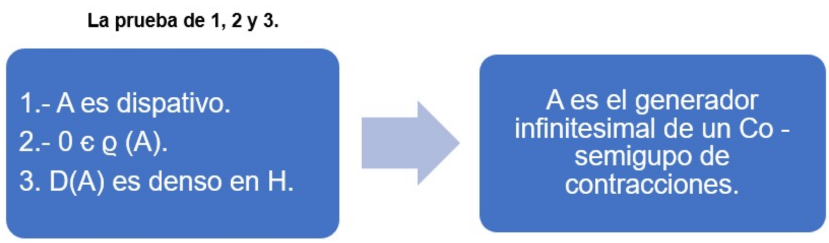
r: Si $0 \in \rho(\mathcal{A})$,

s: $\mathcal{A}$ es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 de contracciones.

2. Demostración directa

Debemos probar que





UNSCH FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

"Año de la unidad, la paz y el desarrollo"

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

ACTA N° 044-2023-FIMGC

En la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **RESOLUCIÓN DECANAL N° 239-2023-FIMGC-D**, siendo los diecinueve días del mes de junio del 2023, a horas 8:00 am.; se reunieron los jurados del acto de sustentación, en el Auditórium virtual google meet del Campus Universitario de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.

Siendo el Jurado de la sustentación de tesis compuesto por el presidente el **Dr. Ing. Efraín Elías PORRAS FLORES,** Jurado el **Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO,** Jurado el **Mg. José Carlos JUÁREZ PULACHE,** Jurado - Asesor el **Mg. Adrián ALLAUCCA PAUCAR** y secretario del proceso el **Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR,** con el objetivo de recepcionar la sustentación de la tesis denominada titulado: **"EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ASOCIADO A TEMPERATURA Y POROSIDAD EN UNA MEZCLA DE TIPO KELVIN-VOIGT",** presentado por el/la Sr./Srta., **Rubén TOMAYLLA MENDIETA,** Bachiller en **Ciencias Físico Matemáticas.**

El Jurado luego de haber recepcionado la sustentación de la tesis y realizado las preguntas, el sustentante al haber dado respuesta a las preguntas, y el Jurado haber deliberado; califica con la nota aprobatoria de **15 (quince).**

En fe de lo cual, se firma la presente acta, por los miembros integrantes del proceso de sustentación.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL
Dr. Efraín Elías Porras Flores
DECANO

Firmado digitalmente por Efrain Elias Porras Flores
Fecha: 2023.07.19 19:33:43 -05'00'

Dr. Ing. Efraín Elías PORRAS FLORES
Presidente

Firmado digitalmente por Daúl Andrés Paiva Yanayaco
Fecha: 2023.07.18 10:20:03 -05'00'

Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO
Jurado

Mg. Adrián ALLAUCCA PAUCAR
Jurado Asesor

Mg. José Carlos JUÁREZ PULACHE
Jurado

Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR
Secretario del Proceso
Departamento Académico de Matemática y Física

C.c.:
Bach. Rubén TOMAYLLA MENDIETA
Jurados (4)
Archivo

FACULTAD DE INGENIERIA DE MINAS, GEOLOGIA Y CIVIL
Av. Independencia S/N
Ciudad Universitaria
Central Tel. 066 312510
Anexo 151

“Año de la unidad, la paz y el desarrollo”

CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 043-2023-FIMGC

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 281-2022-FIMGC- UNSCH-D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

Apellidos y Nombres	:	TOMAYLLA MENDIETA, Rubén
Escuela Profesional	:	CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
Título de la Tesis	:	“EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ASOCIADO A TEMPERATURA Y POROSIDAD EN UNA MEZCLA DE TIPO KELVIN-VOIGT”
Evaluación de la Originalidad	:	24 % Índice de Similitud
Identificador de la entrega	:	2114828812

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 15 de junio del 2023

UNIVERSIDAD NACIONAL DE
SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil

Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR
Verificador de Originalidad de Trabajos de Tesis de Pregrado

Con depósito para Sustentación y Tramites
Cc. Archivo

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ASOCIADO A TEMPERATURA Y POROSIDAD EN UNA MEZCLA DE TIPO KELVIN-VOIGT

INFORME DE ORIGINALIDAD

24%	23%	10%	8%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.unsch.edu.pe Fuente de Internet	5%
2	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	2%
3	hdl.handle.net Fuente de Internet	2%
4	www.dim.uchile.cl Fuente de Internet	2%
5	www.union-matematica.org.ar Fuente de Internet	1%
6	coek.info Fuente de Internet	1%
7	zaguan.unizar.es Fuente de Internet	1%
8	ri.ufs.br Fuente de Internet	1%

9	Alves, M.S.. "Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids", International Journal of Solids and Structures, 20091201 Publicación	1 %
10	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	1 %
11	mym.iimas.unam.mx Fuente de Internet	1 %
12	arquivosweb.lncc.br Fuente de Internet	<1 %
13	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
14	revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
15	www.ppgme.propesp.ufpa.br Fuente de Internet	<1 %
16	www.dspace.uce.edu.ec Fuente de Internet	<1 %
17	Submitted to Universidad Nacional de Trujillo Trabajo del estudiante	<1 %
18	ri.ues.edu.sv Fuente de Internet	<1 %
19	bibliotecadigital.udea.edu.co Fuente de Internet	<1 %

20	cmontoya.mat.utfsm.cl Fuente de Internet	<1 %
21	docplayer.com.br Fuente de Internet	<1 %
22	repositorio.unb.br Fuente de Internet	<1 %
23	dissers.ru Fuente de Internet	<1 %
24	doczz.net Fuente de Internet	<1 %
25	Meléndez Sánchez Josué. "Métodos variacionales y la órbita ocho", TESIUNAM, 2009 Publicación	<1 %
26	vsip.info Fuente de Internet	<1 %
27	Submitted to West University Of Timisoara Trabajo del estudiante	<1 %
28	www.im.ufrj.br Fuente de Internet	<1 %
29	repositorio.unesp.br Fuente de Internet	<1 %
30	bdigital.unal.edu.co Fuente de Internet	<1 %

31	Submitted to Atlantic International University Trabajo del estudiante	<1 %
32	bdtd.biblioteca.ufpb.br Fuente de Internet	<1 %
33	Gabriel Gonçalves União. "Teoria de semigrupos e aplicações a equações impulsivas com retardamento dependendo do estado", 'Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA)', 2015 Fuente de Internet	<1 %
34	pdm.propesp.ufpa.br Fuente de Internet	<1 %
35	repositorio.umsa.bo Fuente de Internet	<1 %
36	G. BAYADA, B. CID, C. VÁZQUEZ. "TWO-SCALE HOMOGENIZATION STUDY OF A REYNOLDS-ROD ELASTOHYDRODYNAMIC MODEL", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2011 Publicación	<1 %
37	netlizama.usach.cl Fuente de Internet	<1 %
38	repositorio.ufpb.br Fuente de Internet	<1 %
	www.ci2ma.udec.cl	

39	Fuente de Internet	<1 %
40	Aguilar Rivera Manuel Antonio. "Teoría de extensiones de operadores simétricos en espacios de Hilbert", TESIUNAM, 2019 Publicación	<1 %
41	mate.dm.uba.ar Fuente de Internet	<1 %
42	Submitted to Universidad de Salamanca Trabajo del estudiante	<1 %
43	www.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
44	Submitted to Universidad Nacional de Educación a Distancia Trabajo del estudiante	<1 %
45	www.sbmac.org.br Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 30 words
Excluir bibliografía	Activo		

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ASOCIADO A TEMPERATURA Y POROSIDAD EN UNA MEZCLA DE TIPO KELVIN-VOIGT

por Rubén Tomaylla Mendieta

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA ASOCIADO A TEMPERATURA Y POROSIDAD EN UNA MEZCLA DE TIPO KELVIN-VOIGT

INFORME DE ORIGINALIDAD

24%	23%	10%	8%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	repositorio.unsch.edu.pe Fuente de Internet	5%
2	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	2%
3	hdl.handle.net Fuente de Internet	2%
4	www.dim.uchile.cl Fuente de Internet	2%
5	www.union-matematica.org.ar Fuente de Internet	1%
6	coek.info Fuente de Internet	1%
7	zaguan.unizar.es Fuente de Internet	1%
8	ri.ufs.br Fuente de Internet	1%

9	Alves, M.S.. "Exponential stability in thermoviscoelastic mixtures of solids", International Journal of Solids and Structures, 20091201 Publicación	1 %
10	cybertesis.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	1 %
11	mym.iimas.unam.mx Fuente de Internet	1 %
12	arquivosweb.lncc.br Fuente de Internet	<1 %
13	docplayer.es Fuente de Internet	<1 %
14	revistasinvestigacion.unmsm.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
15	www.ppgme.propesp.ufpa.br Fuente de Internet	<1 %
16	www.dspace.uce.edu.ec Fuente de Internet	<1 %
17	Submitted to Universidad Nacional de Trujillo Trabajo del estudiante	<1 %
18	ri.ues.edu.sv Fuente de Internet	<1 %
19	bibliotecadigital.udea.edu.co Fuente de Internet	<1 %

20	cmontoya.mat.utfsm.cl Fuente de Internet	<1 %
21	docplayer.com.br Fuente de Internet	<1 %
22	repositorio.unb.br Fuente de Internet	<1 %
23	dissers.ru Fuente de Internet	<1 %
24	doczz.net Fuente de Internet	<1 %
25	Meléndez Sánchez Josué. "Métodos variacionales y la órbita ocho", TESIUNAM, 2009 Publicación	<1 %
26	vsip.info Fuente de Internet	<1 %
27	Submitted to West University Of Timisoara Trabajo del estudiante	<1 %
28	www.im.ufrj.br Fuente de Internet	<1 %
29	repositorio.unesp.br Fuente de Internet	<1 %
30	bdigital.unal.edu.co Fuente de Internet	<1 %

31	Submitted to Atlantic International University Trabajo del estudiante	<1 %
32	bdtd.biblioteca.ufpb.br Fuente de Internet	<1 %
33	Gabriel Gonçalves União. "Teoria de semigrupos e aplicações a equações impulsivas com retardamento dependendo do estado", 'Universidade de Sao Paulo, Agencia USP de Gestao da Informacao Academica (AGUIA)', 2015 Fuente de Internet	<1 %
34	pdm.propesp.ufpa.br Fuente de Internet	<1 %
35	repositorio.umsa.bo Fuente de Internet	<1 %
36	G. BAYADA, B. CID, C. VÁZQUEZ. "TWO-SCALE HOMOGENIZATION STUDY OF A REYNOLDS-ROD ELASTOHYDRODYNAMIC MODEL", Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2011 Publicación	<1 %
37	netlizama.usach.cl Fuente de Internet	<1 %
38	repositorio.ufpb.br Fuente de Internet	<1 %
	www.ci2ma.udec.cl	

39	Fuente de Internet	<1 %
40	Aguilar Rivera Manuel Antonio. "Teoría de extensiones de operadores simétricos en espacios de Hilbert", TESIUNAM, 2019 Publicación	<1 %
41	mate.dm.uba.ar Fuente de Internet	<1 %
42	Submitted to Universidad de Salamanca Trabajo del estudiante	<1 %
43	www.slideshare.net Fuente de Internet	<1 %
44	Submitted to Universidad Nacional de Educación a Distancia Trabajo del estudiante	<1 %
45	www.sbmac.org.br Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 30 words
Excluir bibliografía	Activo		