

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL**

**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**Los polinomios de Bernstein y su aplicación como funciones base en el método de Galerkin**

Tesis para optar el título profesional de:  
**Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática**

Presentado por:  
**Bach. Michael Rojas Espinoza**

Asesor:  
**M Sc. Daúl Andrés Paiva Yanayaco**

**Ayacucho - Perú**

**2023**

## DEDICATORIA

Esta tesis va dedicada a Mi familia, por haber sido mi apoyo en toda mi formación universitaria y a lo largo de toda mi vida.

A todas las personas especiales que me acompañaron en esta etapa muy significativa, aportando a mi formación académica, profesional y como ser humano.

*Michael R.*

# AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento:

- A Dios, por proporcionarme la fuerza de voluntad y permitirme concluir con este trabajo.
- A mi familia, en especial a mi padre Froilán Rojas y a mi madre Alejandrina Espinoza, por haberme dado la oportunidad de educarme en esta prestigiosa universidad y brindarme su apoyo incondicional durante todo el proceso de mi formación personal y profesional.
- También de manera especial a mi asesor M.Sc. Daúl Andrés Paiva Yanayaco, por haberme guiado, no solo en la elaboración de este trabajo de titulación , sino a lo largo de mi carrera universitaria y haberme brindado el apoyo para desarrollarme profesionalmente para seguir cultivando mis valores.
- A mis profesores Enrique Avilés, Guillermo Zela y Martha Nina.
- A mi amigo Walther Cárdenas.
- A la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamnga, por haberme brindado tantas oportunidades y enriquecerme en saberes y conocimientos.

## RESUMEN

La presente investigación estudió las funciones forma, específicamente los polinomios de Bernstein, como funciones que sirven para representar, mediante combinación lineal, ciertas funciones que pueden ser las soluciones de determinado problema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Se utilizaron los métodos espectrales, métodos que aparecen en los años 70, estos métodos son de precisión muy alta y de rápida convergencia a comparación del Método de Elementos Finitos (MEF). Se dieron los aspectos teóricos de los métodos espectrales, formulaciones débiles y fuertes de algunos problemas de EDO. Asimismo, se aproximó una función solución mediante el Método de Galerkin. Se logró comprobar que los polinomios de Bernstein son más fáciles de utilizar a comparación de los polinomios base de Lagrange y de mejor precisión que los Polinomios de Chebyshev.

## Palabras Clave

Métodos espectrales, Polinomios de Bernstein, Método de Galerkin.

## **ABSTRACT**

The present research studied shape functions, specifically Bernstein polynomials, as functions that serve to represent, through linear combination, certain functions that may be those of a certain problem of ordinary or partial differential equations. Spectral methods were used, methods that appeared in the 70s. These methods have very high precision and rapid convergence compared to the Finite Element Method (FEM). The theoretical aspects of spectral methods, weak and strong formulations of some ODE problems were given. Likewise, a solution was approximated by the Galerkin Method. It was possible to verify that the Bernstein polynomials are easier to use compared to the Lagrange base polynomials and of better precision than the Chebyshev polynomials.

## **Keywords**

Spectral methods, Bernstein polynomials, Galerkin's method.

# ÍNDICE GENERAL

<b>Resumen</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice general</b>	<b>viii</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>xii</b>
<b>Introducción</b>	<b>xiv</b>
<b>I. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción de la realidad problemática . . . . .	1
1.2. Delimitación de la investigación . . . . .	2
1.2.1. Espacial . . . . .	2
1.2.2. Social . . . . .	2
1.2.3. Temporal . . . . .	3
1.3. Problema de investigación . . . . .	3
1.3.1. Problema general . . . . .	3
1.3.2. Problema específico . . . . .	3
1.4. Objetivos . . . . .	3
1.4.1. Objetivo general . . . . .	3
1.4.2. Objetivos específicos . . . . .	3
1.5. Hipótesis . . . . .	3
1.5.1. Hipótesis general . . . . .	3
1.5.2. Hipótesis específicas . . . . .	4
1.6. Diseño . . . . .	4
1.6.1. Tipo . . . . .	4
1.6.2. Nivel . . . . .	4
1.6.3. Método para recolección de información . . . . .	5
1.7. Población . . . . .	5

<b>II. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Antecedentes del Problema . . . . .	6
2.1.1. Internacionales . . . . .	6
2.1.2. Nacionales . . . . .	8
2.1.3. Locales . . . . .	8
2.2. Bases teóricas . . . . .	9
2.2.1. Espacios lineales normados . . . . .	9
2.2.2. Aproximación de Weierstrass . . . . .	13
2.3. Marco Conceptual . . . . .	34
2.3.1. Polinomios de Bernstein . . . . .	34
2.3.2. Funciones Forma . . . . .	48
2.3.3. Propiedades de las Funciones Forma . . . . .	49
2.3.4. Polinomios de Lagrange . . . . .	50
2.3.5. Algunos conceptos y Fórmulas en las Ecuaciones diferenciales . . . . .	56
2.4. Aproximación de Funciones lineales por trozos . . . . .	60
2.5. Formulación Variacional . . . . .	73
2.5.1. El Teorema de Proyección . . . . .	73
2.5.2. Formulación Fuerte . . . . .	74
2.5.3. Formulación Débil . . . . .	75
2.5.4. Formulación variacional de problemas de contorno (PVC) . . . . .	76
2.5.5. Problema de Laplace con condiciones tipo Dirichlet– homogéneas . . . . .	82
2.5.6. Una EDP con condiciones tipo Newman . . . . .	83
2.5.7. Una EDP con condiciones tipo Robin . . . . .	85
<b>III. Materiales y Métodos</b>	<b>86</b>
3.1. Método de Galerkin . . . . .	86
<b>IV. Resultados y Discusión</b>	<b>90</b>
4.1. Solución exacta . . . . .	90
4.2. Solución aproximada . . . . .	91
4.2.1. Usando Polinomios de Chebyshev . . . . .	91
4.2.2. Usando Polinomios de Lagrange . . . . .	101
4.2.3. Usando Polinomios de Bernstein . . . . .	106
<b>Conclusiones</b>	<b>111</b>

<b>Recomendaciones</b>	<b>112</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>113</b>
<b>Anexos</b>	<b>117</b>
6.1. Programa Bernstein. . . . .	117
6.2. Programa Aproximación con Bernstein. . . . .	118

## ÍNDICE DE CUADROS

2.1. Valores del error al tomar $B_n(x^2, x)$ por $f(x) = x^2$ . . . . .	47
4.1. Valores obtenidos en los nodos $x_i$ , con la solución exacta y con los métodos Tau, Galerkin y Colocación, considerando solo polinomios de chebyshev. . . . .	100
4.2. Valores exactos en los nodos $x_i$ , y valores con el método de Galerkin usando polinomios de Lagrange y de Bernstein. . . . .	110

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Gráfica que muestra que $\min_{q \in \mathcal{P}_0} \left( \max_{0 \leq x \leq \pi}  \sin x - q  \right) \geq \frac{1}{2}$ . . . . .	14
2.2. Gráfica de $ \sin x - q $ para diferentes valores de $q \in \mathcal{P}_0$ . . . . .	15
2.3. Gráfica que muestra a la función creciente $f$ para $x \in [0, 1]$ . . . . .	20
2.4. Gráfica de la función $M$ . . . . .	20
2.5. Función $ e^x - c_0 $ , para diferentes valores de $c_0$ . Se observa que para $c_0 = \frac{e+1}{2}$ se obtiene el mínimo de los máximos de $ e^x - c_0 $ . . . . .	21
2.6. Función $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5}$ , mostrando sus puntos críticos en $[0, 2]$ . . . . .	23
2.7. Función $ f(x) - c_0 $ para diferentes valores de $c_0$ . . . . .	24
2.8. $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5}$ , y $f'(x) = \frac{4x \cos x}{3} + \frac{4 \sin x}{3} - 1$ , para $x \in [0, 1]$ . . . . .	26
2.9. $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5}$ y su polinomio minimax $R(x) = c_0 + c_1x$ , $x \in [0, 1]$ . . . . .	27
2.10. <b>Polinomios básicos de Bernstein</b> $\beta_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ para diferentes valores de $n$ y para $x \in [0, 1]$ . . . . .	37
2.11. <b>Polinomios</b> , $B_n(\mathbf{f}, x)$ , de $f(x) = \sin(\pi x)$ (color negro) junto a $f(x)$ , para $x \in [0, 1]$ . . . . .	44
2.12. <b>Polinomios básicos de Lagrange</b> , $L_{n,k}(x)$ , en $[0, 1]$ , para $k = 0, 1, \dots, n$ . . . . .	52
2.13. <b>Polinomios de interpolación de Lagrange</b> para $f$ , junto con los errores respectivos. . . . .	55
2.14. Función poligonal $f(x)$ . . . . .	60
2.15. Interpolación lineal. . . . .	61
2.16. <b>Polinomios de Bernstein</b> , para $f$ y $g$ en $x \in [0, 1]$ . . . . .	65
2.17. Puntos de control $(x_i, f_i)$ , poligonal $f(x)$ (convexa) y sus polinomios de Bernstein $B_n(\mathbf{f}, x)$ , para $n = 2, 3, 10, 50$ . . . . .	68
2.18. Puntos de control $(x_i, f_i)$ , poligonal $f(x)$ (cóncava) y los polinomios de Bernstein asociados a $f$ , $B_n(\mathbf{f}, x)$ , para $n = 2, 3, 10, 28, 50$ . . . . .	72
2.19. <b>Funciones esencialmente iguales en <math>L^2([1, +\infty[)</math></b> . . . . .	78

2.20. Soluciones de (2.85). . . . .	79
4.1. Solución fuerte $u(t)$ y débil $v(t)$ . . . . .	99
4.2. Mallado del dominio $[-1, 1]$ . . . . .	101
4.3. Solución fuerte $u(t)$ y débiles: $v(t)$ y $v_L(t)$ . . . . .	105
4.4. Solución fuerte $u(t)$ y débiles: $v(t)$ , $v_L(t)$ y $v_B(t)$ . . . . .	109

# INTRODUCCIÓN

La idea de aproximación que se da en el Análisis Matemático es considerar un objeto y buscar la forma de *acercarnos* a él a través de otros objetos más simples que sean muy parecidos a él. Sabemos que los “objetos” polinomios pueden representar mejor una función continua, por ejemplo ya desde antes, una poderosa herramienta de aproximación de funciones es el Teorema de Taylor. Algunos autores como Kolmogorov y Fomín, Bartle y Rudin, presentan diversos teoremas de aproximación como los de Bernstein, Weierstrass, Stone, Stone–Weierstrass; pero indican lo mismo. (Meda, 2005)

Bernstein introdujo los Polinomios de Bernstein para la demostración del Teorema de Weierstrass: *Dada una función  $f$  definida en  $x \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ , los polinomios de Bernstein de orden  $n$  de la función  $f$  se define como,*

$$B_n^f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f\left(\frac{i}{n}\right) x^i (1-x)^{n-i}$$

Los Polinomios de Bernstein ayudan en la construcción de polinomios densos en el espacio de funciones continuas con dominio en un intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ . No se necesita que la función que se va a aproximar  $f$  sea ni siquiera derivable en algún punto. Sólo se necesita poder evaluarla en una retícula de puntos del dominio, (en una sucesión de particiones del intervalo con normas que tiendan a cero), y para cada  $x \in [0; 1]$  lanzar volados con Probabilidad de águila igual a  $x$ . (Meda, 2005)

En esta tesis estudiamos los polinomios de Bernstein, sus propiedades, su utilidad en la aproximación de funciones, métodos de aproximación como de Galerkin, el uso de funciones base para el método de Galerkin, métodos espectrales y veremos las aplicaciones que dan algunos autores.

El siguiente trabajo se distribuye de la siguiente manera: En el marco conceptual, se verá el espacio de funciones en el sentido de aproximación, es decir a los polinomios de Bernstein. También algunas fórmulas de sus propiedades. Seguidamente, se verán los métodos de aproximación, método de diferencias finitas, métodos espectrales, pseudoespectrales, entre otros.

Por último, veremos la aplicación de los polinomios de Bernstein como funciones de base en el método de Galerkin y el análisis del error respectivo.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

Los modelos matemáticos que tratan de representar fenómenos de la naturaleza están dados en ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Muy pocas de esas ecuaciones diferenciales se pueden resolver analíticamente; y llegar a esa solución a veces es muy complicado. Ante esto, surgen los métodos numéricos, y de acuerdo a la forma de abordarlos tenemos los métodos espectrales y otros, asimismo en cada método se puede tomar una metodología que nos lleve a dar con una solución que sea lo más parecida a la solución que se requiere realmente; por ejemplo, [\(Navarro, 2011\)](#), emplea en los métodos de aproximación, los polinomios de Bernstein para resolver ecuaciones integrales de Volterra.

Los métodos espectrales varían su significado dependiendo dónde se esté aplicando, como el Análisis Funcional o el Procesamiento de Señales. Aquí significarán un método numérico muy preciso para resolver EDP's cuya solución numérica se expresa como una expansión finita de algún conjunto de funciones

básicas. Si escribimos la EDP en función de los coeficientes de esa expansión, el método se conoce como método espectral de Galerkin. Hay otros métodos, conocidos como pseudoespectrales, como el método de colocación espectral, similares a los métodos de diferencias finitas, pues emplea un conjunto de puntos de cuadrícula, que se denominan “puntos de colocación”. Y otros llamados métodos Tau–espectrales, similares a los métodos espectrales de Galerkin, pero difieren en que la expansión no necesariamente debe satisfacer las condiciones de contorno, requiriéndose más ecuaciones. (Costa, 2004)

En este trabajo se darán ejemplos de solución cuya expansión esté dada con funciones base los polinomios de Bernstein.

## **1.2. Delimitación de la investigación**

### **1.2.1. Espacial**

Este trabajo se ubica en la matemática aplicada, específicamente el análisis numérico y las EDP. Asimismo, se comparará el uso de otras bases en el método de Galerkin.

### **1.2.2. Social**

Es un trabajo de aplicación para estudiantes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemáticas e Ingenierías.

### **1.2.3. Temporal**

La bibliografía utilizada es desde 1980, tesis actuales.

## **1.3. Problema de investigación**

### **1.3.1. Problema general**

¿Los Polinomios de Bernstein pueden usarse como funciones base en el método de Galerkin?

### **1.3.2. Problema específico**

¿La solución de una EDO se puede aproximar por métodos espectrales?

## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo general**

Demostrar que los Polinomios de Bernstein se pueden usar como funciones base en el método de Galerkin.

### **1.4.2. Objetivos específicos**

Hallar la solución de una ecuación diferencial por métodos espectrales.

## **1.5. Hipótesis**

### **1.5.1. Hipótesis general**

Los Polinomios de Bernstein se pueden usar como funciones base en el Método de Galerkin.

### 1.5.2. Hipótesis específicas

Por medio de los métodos espectrales con polinomios de Bernstein se puede aproximar la solución de una ecuación diferencial.

## 1.6. Diseño

Diseño experimental, pues, según Kerlinger (2002), sostiene que *generalmente se llama diseño de investigación al plan y a la estructura de un estudio. “Es el plan y estructura de una investigación concebidas para obtener respuestas a las preguntas de un estudio”. En ese sentido, el diseño de investigación señala la forma de conceptuar un problema de investigación y la manera de colocarlo dentro de una estructura que sea guía para la experimentación (bf en el caso de los diseños experimentales)*

### 1.6.1. Tipo

Tipo aplicada, según Zorrilla (1993) “... La investigación aplicada busca el conocer para hacer, para actuar, para construir, para modificar.”.

### 1.6.2. Nivel

(Nivel explicativo) finalidad de explicar el comportamiento de una variable (polinomios de Bernstein) en función de otras (métodos de galerkin) con la relación de (causa–efecto).

### **1.6.3. Método para recolección de información**

Según Hernández Sampieri (2010), *“la investigación se basa en fuentes bibliográficas existentes en libros, tesis, artículos científicos e información por internet”*.

En nuestro caso, la recopilación bibliográfica, consistió en artículos científicos, revistas y libros provenientes de fuentes confiables.

## **1.7. Población**

De acuerdo a la naturaleza de este trabajo, no hay población.

# CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes del Problema

#### 2.1.1. Internacionales

- Szegő, G. (1975), en su trabajo de investigación “Orthogonal Polynomials”,

considera una clase de polinomios llamados de Bernstein y G. Szego:

*Sea  $p(x)$  un polinomio de grado  $l$  y positivo en  $[-1, 1]$ . Entonces los polinomios ortonormales  $P_n(x)$ , que están asociados con las funciones peso*

$$\omega(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \{\rho(x)\}^{-1} & , \quad l < 2n \\ (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \{\rho(x)\}^{-1} & , \quad l < 2(n+1) \\ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}} \{\rho(x)\}^{-1} & , \quad l < 2n+1 \end{cases}$$

los tres casos fueron investigados por S. Bernstein junto con su fórmula asintótica y con estos polinomios generó una familia de funciones que pueden usarse como funciones base.

- Cabada, A., F.J.S.A. y Correa (2012), en su trabajo de investigación “Existence of Solutions of a Nonlocal Elliptic System Vía Galerkin Method”, estudiaron el sistema elíptico, con algunas interrogantes relacionadas a la existencia de su solución, y llegaron a la conclusión de que el método de Galerkin es una herramienta importante utilizado para resolver problemas en un sistema elíptico.
- Garijo D. (2015), en su tesis “Modelos sin malla en Simulación Numérica de Estructuras Aeroespaciales”, hace un estudio formal de la Partición de Unidad de Bernstein en esquemas de Galerkin para la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales parciales en el campo del análisis estructural, permitiéndole concluir que en sus modelos pueden evitarse los mallados de los dominios.
- Cámara J.S (2017), en su tesis “Modelización de Problemas de Fluido-acústica con elementos Espectrales de Orden Elevado y Polinomios de Bernstein”, resuelve problemas a partir del Método de Elementos Espectrales, el cual es similar al Método de Elementos Finitos (MEF), indica además que en el MEF, en general, se utilizan elementos lineales y polinomios de Lagrange, pero que en su trabajo empleará elementos de mayor orden y polinomios de Lagrange así como de Bernstein, a fin de estudiar la utilidad de éstos en la resolución de este tipo de problemas.

### 2.1.2. Nacionales

- Navarro (2011), en su tesis “Ecuaciones en Diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales”, desarrolla algunas formas para aproximar numéricamente las soluciones de las ecuaciones integrales de Volterra usando los polinomios de Bernstein, entre otros, con Matlab.

- Murillo M., F (2016), en su tesis “Polinomios por partes y el Método de Elemento Finito relativo a una malla en el dominio de cálculo”, trabaja con los polinomios por partes definidos en relación a una malla en el dominio de cálculo.

- Barahona M., W.D. (2018), en su investigación “Existencia de Soluciones Débiles de un Sistema Elíptico no local Semilineal”, emplea una metodología que puede aplicarse a otros tipos de ecuaciones diferenciales parciales y/o ordinarias, con diferente condición de frontera y concluye que el Método de Galerkin es de gran aplicabilidad para resolver problemas no locales, en particular para encontrar soluciones débiles de tipo elíptico.

### 2.1.3. Locales

No se ha encontrado trabajos relacionados en el tema.

## 2.2. Bases teóricas

Se ha utilizado libros de: Szegő, G. (1975), Issacson y Keller (1966), tesis y artículos científicos.

### 2.2.1. Espacios lineales normados

En la interpolación de una función se considera polinomios de cierto grado, recordemos la interpolación de Lagrange, donde se tiene que cumplir que dichos polinomios y la función deben de coincidir en algunos puntos. Ahora se verá en otro sentido la aproximación por polinomios.

Un concepto útil en nuestra investigación es la función *norma*.

**2.2.1. Definición.** *Tenemos al espacio lineal  $\mathbf{V}$  sobre un campo  $\mathbb{R}$  de números reales. La función  $\|\cdot\|$  definida en  $\mathbf{V}$  y para la cual en  $f \in \mathbf{V}$  se denota por  $\|f\|$  es llamada una **norma** sobre  $\mathbf{V}$  y satisface las siguientes propiedades:*

- (i)  $\|f\| = 0$  si y sólo si,  $f = 0$  en  $\mathbf{V}$ ;
- (ii)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y todo  $f$  en  $\mathbf{V}$ ;
- (iii)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ ,  $\forall f$  y  $g \in \mathbf{V}$ , (desigualdad triangular)

■

#### Nota.-

El espacio lineal  $\mathbf{V}$  junto con la norma, es llamado un **espacio lineal normado**.

**2.2.1. Ejemplo.** Sea  $\mathbf{V} = C([a, b]) = \{f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$  y sea la norma definida en  $\mathbf{V}$ ,

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (2.1)$$

entonces  $C([a, b])$  junto con la norma anterior es un espacio lineal normado.

Por decir, si  $f(x) = x^2$  y  $[a, b] = [-2, 1]$ , entonces  $\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| =$

$$\max_{x \in [-2, 1]} |x^2| = 4. \quad \blacksquare$$

La norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  dada en (2.1) se le llama **norma infinito** o **norma del máximo**.

**2.2.2. Ejemplo.** Sea  $\omega$  una función definida, positiva, continua e integrable en  $]a, b[$ , entonces el conjunto  $\mathbf{V} = C([a, b])$ , como en el Ejemplo (2.2.1), junto con la norma

$$\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f(x)|^2 \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

es un espacio lineal normado.

Por decir, si  $f(x) = x^2$ ,  $\omega(x) = 1$  y  $[a, b] = [0, 1]$ , entonces  $\|f\|_2 = \left( \int_0^1 |x^2|^2 \cdot 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .  $\blacksquare$

A la norma  $\|\cdot\|_2$  dada en (2.2) se le llama **2-norma** y la función  $\omega$  se le llama **función peso**.

En los cursos de Análisis Matemático se da la comparación de estas dos normas, veamos la siguiente proposición.

**2.2.1. Proposición.** *Dadas las afirmaciones*

(1) *Sea  $\omega$  una función peso de valor real, positiva, continua e integrable en  $]a, b[$ . Entonces para cualquier función  $f \in C([a, b])$ ,*

$$\|f\|_2 \leq \Omega \|f\|_\infty, \quad \text{donde } \Omega = \left( \int_a^b \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) *Dados dos números positivos cualesquiera  $\varepsilon$  (pequeño) y  $M$  (grande), entonces existe una función  $f \in C([a, b])$  tal que*

$$\|f\|_2 < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty > M.$$

■

**Demostración.**-

(1) Por (2.1), se tiene que

$$\forall x \in [a, b] : 0 \leq |f(x)| \leq \|f\|_\infty \implies |f(x)|^2 \leq \|f\|_\infty^2$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left( \int_a^b w(x) |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left( \int_a^b w(x) \|f\|_\infty^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \underbrace{\left( \int_a^b w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{=\Omega} \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Por tanto  $\|f\|_2 \leq \Omega \|f\|_\infty$ .



Si recordamos estas normas sobre elementos  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\mathbf{u}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{i=\{1,2,\dots,n\}} |u_i|$$

se tiene que

$$\frac{\|\mathbf{u}\|_\infty}{\sqrt{n}} \leq \|\mathbf{u}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{u}\|_\infty, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

La relación (2.3) nos indica que ambas normas son intercambiables, pero si actúan sobre el espacio  $C([a, b])$ , la Proposición (2.2.1) nos indica que esta relación (2.3) no es posible y que la elección de una de ellas puede afectar seriamente el resultado de un análisis.

Entonces si un polinomio aproxima a  $f$  en  $[a, b]$  el error  $\|f - p\|$  debe ser muy pequeño, donde la norma puede ser la definida en (2.1) o en (2.2), pero por la Proposición (2.2.1) la idea de pequeñez del error  $\|f - p\|_\infty$  es diferente la del error  $\|f - p\|_2$ .

Con esto, se trata de dar una idea de aproximación con una función norma tal que la propiedad (1) de norma no siempre se va a cumplir, pero las restantes sí, es decir que  $\|\cdot\|$  sea una seminorma.

En otras palabras, la medida de la desviación o error en la aproximación de  $f$  por  $P_n(x)$ , denotada por

$$\|f(x) - P_n(x)\| \quad (2.4)$$

debe satisfacer (2) y (3) ya que la propiedad (1):  $\|f - P_n\| = 0$  no siempre va a implicar que  $f - P_n = 0$ , es aquí donde se tendrán en cuenta clases de equivalencias.

Esta idea de aproximación se ve en el siguiente teorema.

## 2.2.2. Aproximación de Weierstrass

### 2.2.1. Teorema. (de Aproximación de Weierstrass)

Sea  $f$  una función real de valor real, definida y continua en  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , entonces para cualquier  $\epsilon$ , existe un polinomio  $P$  tal que

$$\|f - P\|_{\infty} \leq \epsilon. \quad (2.5)$$

Además si  $\omega$  es una función peso sobre  $]a, b[$ , entonces (2.5) se cumple para la norma  $\|\cdot\|_2$  en  $[a, b]$  con función peso  $\omega$ . ■

El Teorema (2.2.1), (Teorema de Aproximación de Weierstrass), nos indica que cualquier función  $f \in C([a, b])$  se puede aproximar muy bien mediante cualquier elemento del conjunto de todos los polinomios, pero si adicionamos una restricción, por ejemplo que ese conjunto sea de los polinomios de grado  $n$ ,  $\mathcal{P}_n$ , ya no se va a cumplir en general el teorema anterior.

Un caso particular, sea  $f(x) = \sin x \in C([0, \pi])$ . Si  $n = 0$ , entonces para cualquier  $q \in \mathcal{P}_0$  observamos que

$$\|\sin x - q\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq \pi} |\sin x - q| \geq \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Es decir que para  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , no existe  $q \in \mathcal{P}_0$  tal que  $\|\sin x - q\| < \frac{1}{2}$ .

Esto se visualiza en la Figura (2.1), y el comportamiento de  $|\sin x - q|$ , con  $q \in \mathcal{P}_0$ , tomando valores diferentes, ( $q = y$ ), se ven en la Figura (2.2).

Para el caso del conjunto  $\mathcal{P}_n$  se presenta algo similar, para un  $n$  dado.

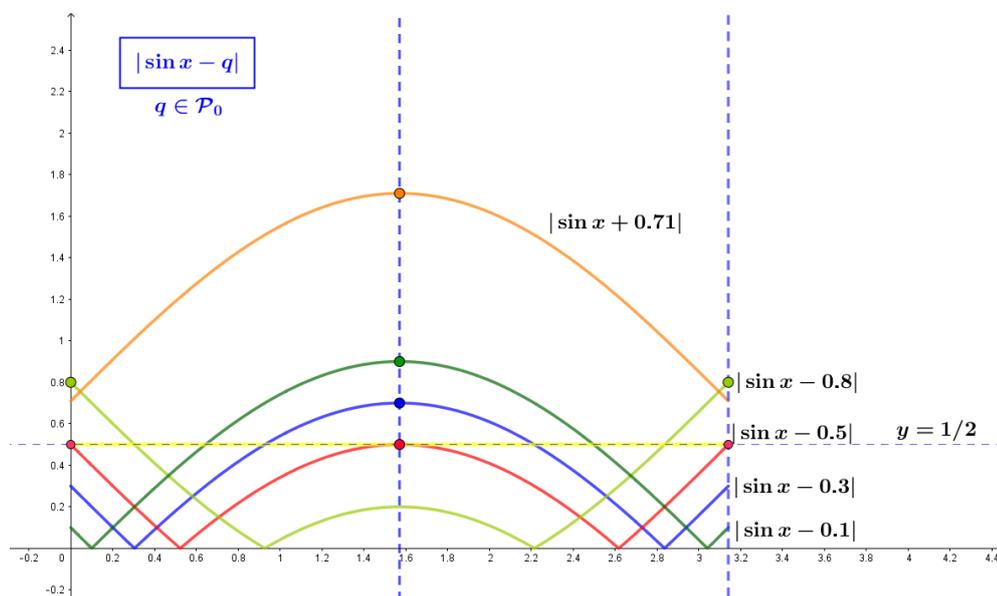
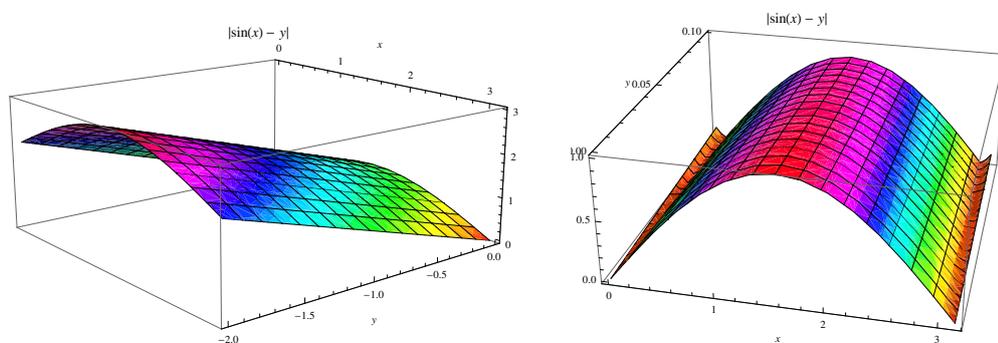
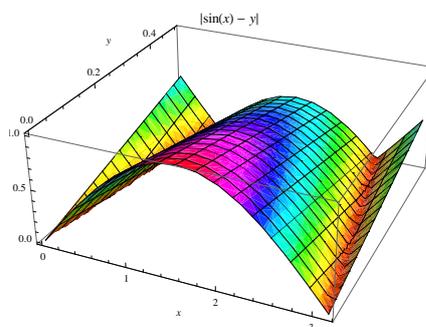
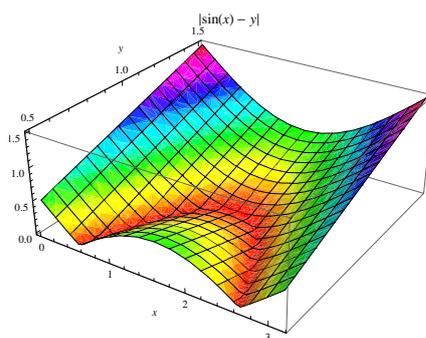


Figura 2.1: Gráfica que muestra que  $\min_{q \in \mathcal{P}_0} \left( \max_{0 \leq x \leq \pi} |\sin x - q| \right) \geq \frac{1}{2}$ .

(a)  $-2 \leq q \leq 0$ (b)  $q = 0$ (c)  $0 \leq q \leq 0.5$ (d)  $0.5 \leq q \leq 1.5$ Figura 2.2: Gráfica de  $|\sin x - q|$  para diferentes valores de  $q \in \mathcal{P}_0$ .

**2.2.2. Teorema.** Sea  $f \in C([a, b])$ , entonces existe un polinomio  $P_n \in \mathcal{P}_n$  de tal manera que

$$\|f - P_n\|_\infty = \min_{Q \in \mathcal{P}_n} \|f - Q\|_\infty \quad (2.7)$$

■

**Demostración.**-

Ver (Süli, E. y Mayers D., 2003) en su libro “An Introduction to Numerical Analysis”, Pág. 228 para la demostración. ■

De acuerdo al Teorema (2.2.1), estamos ante un problema de minimizar un máximo. En la demostración, si  $\bar{c} = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , la función  $M : \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$  definida por

$$M(\bar{c}) = \|f - Q_n\|_\infty, \text{ donde } Q_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad (2.8)$$

es continua en todo  $\mathbb{R}$  y alcanza su mínimo en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Entonces, si  $Q \in \mathcal{P}_n$  es de la forma  $Q_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ , requerimos hallar los coeficientes  $c_i, i = 0, \dots, n$  tal que minimicen la función

$$M(\bar{c}) = \|f - Q\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} c_i x^i \right|$$

sobre  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**2.2.2. Definición.** El *polinomio minimax* es el polinomio de mejor aproximación que minimiza, sobre  $Q \in \mathcal{P}_n$ , el máximo valor absoluto del error  $f(x) - Q(x)$ , sobre  $x \in [a, b]$ . ■

La Definición (2.2.2) es equivalente a decir que si  $P_n \in \mathcal{P}_n$ , polinomio minimax, entonces

$$\|f - P_n\|_\infty = \min_{Q \in \mathcal{P}_n} \|f - Q\|_\infty = \min_{Q \in \mathcal{P}_n} \left( \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Q(x)| \right). \quad (2.9)$$

**2.2.3. Ejemplo.** (Ejemplo tomado del libro de (Süli, E. y Mayers D., 2003) en su libro “An Introduction to Numerical Analysis”, Pág. 230).

Sea  $f \in C([0, 1])$  estrictamente creciente, esto es  $f(0) < f(x_1) < f(x_2) < f(1), \forall x_1, x_2 \in ]0, 1[, 0 < x_1 < x_2 < 1$ . Queremos hallar el polinomio minimax  $P_0 \in \mathcal{P}_0$ , constante, para la función  $f$  sobre  $[0, 1]$ . ■

**Solución.-**

De acuerdo al Teorema (2.2.2), existe ese polinomio  $P_0 \in \mathcal{P}_0$ , además debe ser de la forma  $P_0(x) = c_0$ , con  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Entonces se debe de hallar  $c_0$  de tal manera que se minimice

$$\|f - P_0\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - c_0|$$

es decir, que sea mínimo. En vista de que  $f$  es estrictamente creciente, entonces la función  $f(x) - c_0$  alcanza su mínimo en  $x = 0$  y su máximo en  $x = 1$ , pues

$$x \in [0, 1] \implies f(0) \leq f(x) \leq f(1) \implies f(0) - c_0 \leq f(x) - c_0 \leq f(1) - c_0.$$

Sin embargo, para la función  $|f(x) - c_0|$ , no se sabe dónde está su máximo o su mínimo, pero su máximo ocurre o en  $x = 0$  o en  $x = 1$ , es decir, si tomamos

la función  $M$  y  $\bar{c} = c_0$  tenemos que

$$\begin{aligned} M(\bar{c}) = M(c_0) &= \|f - P_0\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - c_0| \\ &= \max\{|f(0) - c_0|, |f(1) - c_0|\} \end{aligned}$$

**Primer caso:**  $M(c_0) = |f(0) - c_0|$

Aquí,  $|f(1) - c_0| \leq |f(0) - c_0|$ , de donde, por propiedad de valor absoluto, se tiene que

$$\begin{aligned} \left( (f(1) - c_0) + (f(0) - c_0) \right) \left( (f(1) - c_0) - (f(0) - c_0) \right) &\leq 0 \\ (f(1) - c_0 + f(0) - c_0) \underbrace{(f(1) - f(0))}_{>0} &\leq 0 \\ f(0) - c_0 &\leq c_0 - f(1) \end{aligned}$$

Pero  $f(0) - c_0 < f(1) - c_0$ , en consecuencia

$$f(0) - c_0 < 0$$

Y así,

$$M(c_0) = |f(0) - c_0| = c_0 - f(0).$$

Esto es cuando

$$(f(1) - c_0 + f(0) - c_0) \leq 0, \text{ es decir cuando } c_0 \geq \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

**Segundo caso:**  $M(c_0) = |f(1) - c_0|$

Aquí,  $|f(0) - c_0| \leq |f(1) - c_0|$ , por tanto

$$\left( (f(0) - c_0) + (f(1) - c_0) \right) \left( (f(0) - c_0) - (f(1) - c_0) \right) \leq 0$$

$$(f(0) - c_0 + f(1) - c_0) \underbrace{(f(0) - f(1))}_{<0} \leq 0$$

$$(f(0) - c_0 + f(1) - c_0) \geq 0$$

$$c_0 - f(1) \leq f(0) - c_0 < 0 \implies f(1) - c_0 > 0$$

Por lo que,

$$M(c_0) = |f(1) - c_0| = f(1) - c_0.$$

Esto es para cuando

$$(f(0) - c_0 + f(1) - c_0) \geq 0, \text{ es decir cuando } c_0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2}.$$

Entonces la función  $M$  queda definida como:

$$M(c_0) = \begin{cases} f(1) - c_0 & , \quad c_0 < \frac{f(0) + f(1)}{2} \\ c_0 - f(0) & , \quad c_0 \geq \frac{f(0) + f(1)}{2} \end{cases} \quad (2.10)$$

Las gráficas de las funciones  $f(x)$  y  $M$  están representadas en la Figura (2.3) y en la Figura (2.4), respectivamente, el mínimo de  $M$  ocurre en  $c_0 = \frac{f(0) + f(1)}{2}$ .

Por tanto el polinomio minimax (constante) para  $f$ , para toda  $x \in [0, 1]$ , viene a ser

$$P_0(x) = \frac{f(0) + f(1)}{2}. \quad (2.11)$$

Su gráfica está dada en la Figura (2.3) de color rojo discontinua.



Si  $f(x) = e^x$ , para  $x \in [0, 1]$ , tendremos

$$c_0 = \frac{e^0 + e^1}{2} = \frac{1 + e}{2}, \implies P_0(x) = \frac{1 + e}{2}.$$

Además

$$M(c_0) = \begin{cases} e - c_0 & , \quad c_0 < \frac{1 + e}{2} \\ c_0 - 1 & , \quad c_0 \geq \frac{1 + e}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Con esto, } \left\| e^x - \left( \frac{e + 1}{2} \right) \right\| = \max_{x \in [0, 1]} \left| e^x - \left( \frac{e + 1}{2} \right) \right| = \frac{e - 1}{2}.$$

Estos resultados se muestran en la Figura (2.5). ■

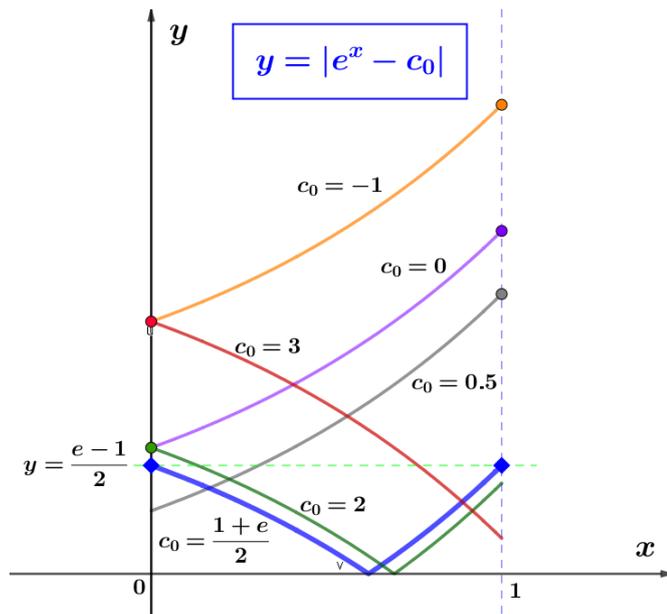


Figura 2.5: Función  $|e^x - c_0|$ , para diferentes valores de  $c_0$ . Se observa que para  $c_0 = \frac{e+1}{2}$  se obtiene el mínimo de los máximos de  $|e^x - c_0|$ .

En el caso general, es decir cuando  $f \in C([a, b])$  no es monótona necesariamente, y si  $x = \mu$  y  $x = \omega$  son dos puntos del intervalo  $[a, b]$  donde

$f$  tiene su máximo y mínimo respectivamente, es decir que  $\forall x \in [a, b], f(\mu) \geq f(x)$  y  $\forall x \in [a, b], f(\omega) \leq f(x)$ , entonces el polinomio minimax de grado 0 para  $f$  en  $[a, b]$  está dado por (recordar (2.11))

$$P_0(x) = \frac{f(\mu) + f(\omega)}{2}. \quad (2.12)$$

Con esto, el polinomio minimax de grado 0 para  $f \in C([a, b])$ , tiene la propiedad de que el error de aproximación  $f - P_0$  tiene sus extremos en dos puntos, en  $x = \mu$  y en  $x = \omega$ , donde

$$f(x) - P_0(x) = f(x) - \left( \frac{f(\mu) + f(\omega)}{2} \right) = \frac{f(x) - f(\mu)}{2} + \frac{f(x) - f(\omega)}{2}$$

es positivo en  $x = \mu$  y negativo en  $x = \omega$ .

El siguiente teorema nos dice que esta propiedad se cumple en general, antes un teorema que nos ayuda a entender el teorema de oscilación.

**2.2.3. Teorema.** (De la Vallée Pousin) Sean  $f \in C([a, b])$  y  $R \in \mathcal{P}_n$ . Supongamos que existen  $x_0 < \dots < x_{n+1}$ ,  $n + 2$  puntos en  $[a, b]$  tal que  $f(x_i) - R(x_i)$  y  $f(x_{i+1}) - R(x_{i+1})$  tienen signos contrarios, para  $i = 0, \dots, n$ , entonces

$$\min_{Q \in \mathcal{P}_n} \|f - Q\|_\infty \geq \min_{i=0,1,\dots,n+1} |f(x_i) - R(x_i)| \quad (2.13)$$

■

**Demostración.**-

Ver (Süli, E. y Mayers D., 2003).

■

**2.2.4. Ejemplo.** Sea  $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5} \in C([0, 2])$ , cuya gráfica se muestra en la Figura (2.6). Los extremos ocurren en:

- $x_0 = \mu = 0.3953590722627735 \implies f(\mu) = 0.20766550052925528$
- $x_1 = \omega = 1.7115491224499995 \implies f(\omega) = 0.9479482712506946$

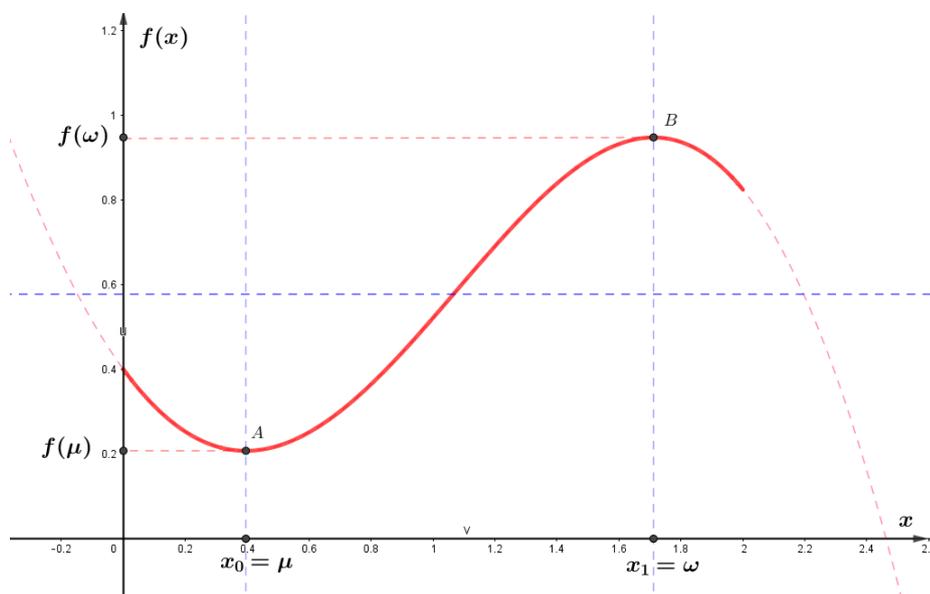


Figura 2.6: Función  $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5}$ , mostrando sus puntos críticos en  $[0, 2]$ .

De acuerdo a (2.12)

$$\begin{aligned} P_0(x) &= \frac{f(\mu) + f(\omega)}{2} = \frac{0.20766550052925528 + 0.9479482712506946}{2} \\ &= c_0 = 0.57780688589975 \end{aligned}$$

El error de aproximación es

$$e(x) = f(x) - R(x) = f(x) - P_0(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5} - 0.57780688589975$$

$y$

$$e(\mu) = -0.3701413853607196$$

$$e(\omega) = 0.3701413853607196$$

De acuerdo al Teorema (2.2.3), tenemos que

$$\min_{Q \in \mathcal{P}_0} \|f - Q\|_\infty \geq \min_{i=0,1} |f(x_i) - R(x_i)| = \min_{i=0,1} |e(x_i)| = 0.3701413853607196$$

La función  $|f(x) - c_0|$ , tomando  $c$  diversos valores, está en la Figura (2.7);

además cuando  $c_0 = \frac{f(\mu) + f(\omega)}{2}$  se obtiene el mínimo de todos los máximos. ■

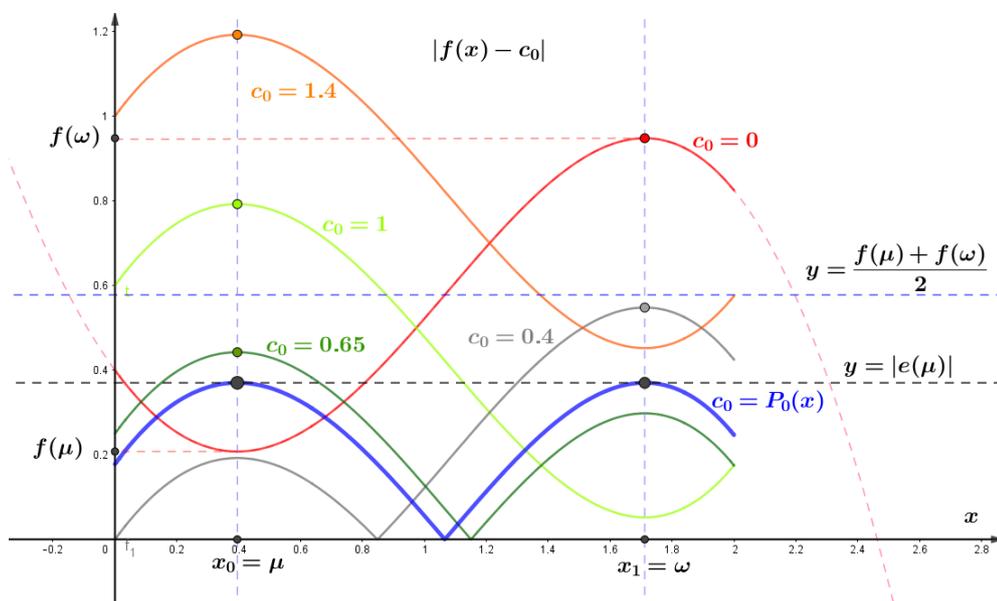


Figura 2.7: Función  $|f(x) - c_0|$  para diferentes valores de  $c_0$ .

El siguiente teorema nos indica que si los valores  $|f(x_i) - R(x_i)|$ , para  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ , son iguales a  $\|f - R\|_\infty$  entonces  $R \in \mathcal{P}_n$  es un polinomio minimax, como se vió en el ejemplo anterior, Ejemplo (2.2.4).

**2.2.4. Teorema.** (Teorema de oscilación)

Sea  $f \in C([a, b])$ . Un polinomio  $R \in \mathcal{P}_n$  es un **polinomio minimax** para  $f$  sobre  $[a, b]$  si y sólo si existen los puntos  $a \leq x_0 < \dots < x_{n+1} \leq b$ , tal que

$$|f(x_i) - R(x_i)| = \|f - R\|_\infty, \quad i = 0, 1, \dots, n + 1 \quad (2.14)$$

y

$$f(x_i) - R(x_i) = -(f(x_{i+1}) - R(x_{i+1})), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.15)$$

■

**Demostración.**-

Ver (Süli, E. y Mayers D., 2003) para efectos de la demostración. ■

Lo que afirma el Teorema (2.2.4) es que el error de aproximación  $f - R$  alcanza su máximo valor absoluto con signos alternados en los puntos  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n + 1$ , estos puntos del Teorema de Oscilación son llamados puntos críticos.

**2.2.5. Ejemplo.** Consideremos  $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5} \in C([0, 1])$ , y sea  $R \in \mathcal{P}_1$ , es decir  $R(x) = c_0 + c_1x$ , con  $c_0, c_1$  reales. La derivada de  $f$  es una función estrictamente creciente, ver Figura (2.8). Aquí  $n = 1$  y de acuerdo al

Teorema (2.2.4),  $R(x)$  será el polinomio minimax si y solo si existe el número  $x_1$ , con  $a = 0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 = 1 = b$  y debe cumplirse (2.15).

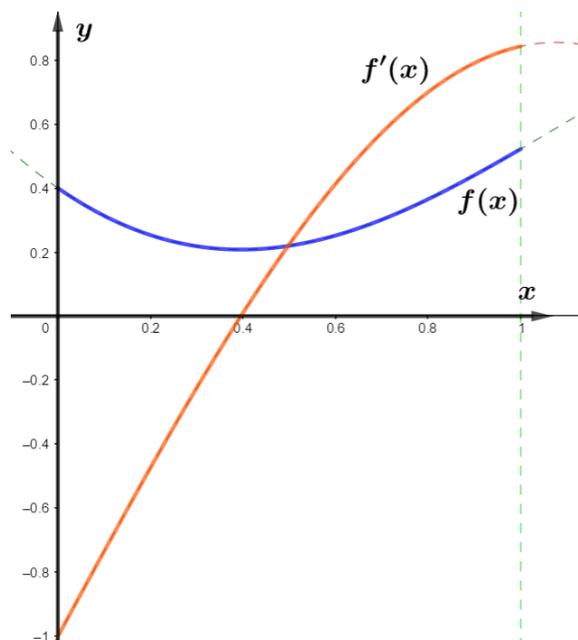


Figura 2.8:  $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5}$ , y  $f'(x) = \frac{4x \cos x}{3} + \frac{4 \sin x}{3} - 1$ , para  $x \in [0, 1]$ .

La diferencia  $f(x) - (c_0 + c_1x)$  alcanza su máximo o en los extremos o donde  $f'(x) - c_1 = 0$ ; puesto que  $f'$  es monótona creciente, solo puede tomar en un solo punto el valor de  $c_1$ . Así, los extremos son puntos críticos y el otro punto crítico está en  $x = d \in ]0, 1[$ . Entonces, considerando  $x_0 = a = 0, x_1 = d, x_2 = b = 1$ , y (2.15) del Teorema (2.2.4) tenemos

$$f(a) - (ac_1 + c_0) = S, f(d) - (dc_1 + c_0) = -S, f(b) - (bc_1 + c_0) = S, f'(d) = c_1$$

de donde

$$c_1 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.1219613130771953, \quad y \quad d = 0.45081289104162875$$

además  $c_0 = 0.2780480114364367$ . Por tanto

$$R(x) = c_0 + c_1 x = 0.2780480114364367 + 0.1219613130771953 x$$

Con lo cual se verifica (2.15),

$$f(a) - (ac_1 + c_0) = S = 0.12195198856356332$$

$$y \ |f(x_i) - R(x_i)| = \|f - R\|_\infty = S = 0.12195198856356332, \quad i = 0, 1, 2.$$

Observamos  $f(x)$  junto a  $R(x)$  en la Figura (2.9); una tangente a  $f$  de pendiente  $c_1$  y una cuerda paralela a dicha tangente que pasa por los extremos.

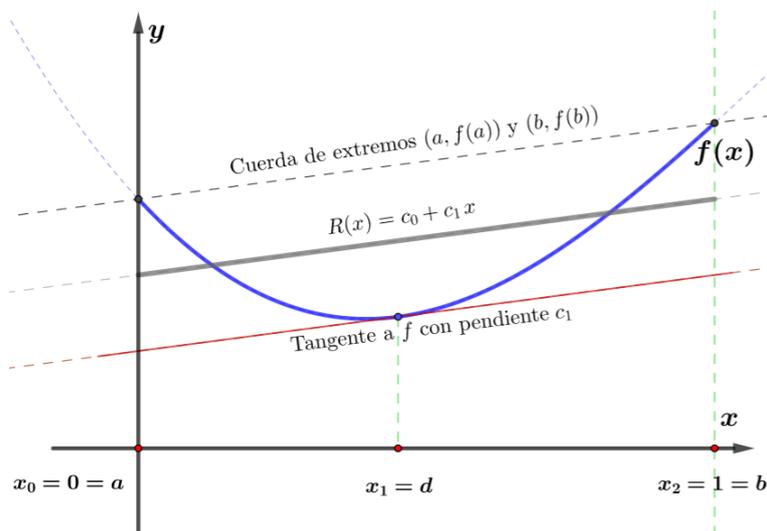


Figura 2.9:  $f(x) = \frac{4}{3}x \sin x - x + \frac{2}{5}$  y su polinomio minimax  $R(x) = c_0 + c_1 x$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Lo que se ha visto es lo que se conoce como la mejor aproximación uniforme, que para el caso general, en  $\mathcal{P}_n$  se sigue el Algoritmo de Remez.

A continuación daremos algunas definiciones relacionadas con espacios producto interior, convergencia, transformaciones bilineales, entre otros.

**2.2.3. Definición.** Supongamos que tenemos un espacio vectorial sobre un campo de escalares  $K$ , denotado por  $\mathbf{V}$ . La aplicación  $\mathbf{a} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow K$  se dice que es una **forma bilineal** si cumple:

$$(1) \mathbf{a}(\alpha u + \beta v, w) = \alpha \mathbf{a}(u, w) + \beta \mathbf{a}(v, w), \quad \forall \alpha, \beta \in K, u, v, w \in \mathbf{V}.$$

$$(2) \mathbf{a}(u, \alpha v + \beta w) = \alpha \mathbf{a}(u, v) + \beta \mathbf{a}(u, w), \quad \forall \alpha, \beta \in K, u, v, w \in \mathbf{V}. \quad \blacksquare$$

**2.2.6. Ejemplo.** Dadas las aplicaciones lineales  $\phi_i : \mathbf{V} \rightarrow K$ ,  $i = 1, 2$ , con  $\mathbf{V}$  un  $K$ -espacio vectorial, entonces la aplicación  $\mathbf{a} : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow K$ , definida mediante

$$\mathbf{a}(u, v) = \phi_1(u) \phi_2(v)$$

es una forma bilineal. \blacksquare

**Prueba.-**

Sean  $\alpha, \beta \in K$  y  $u, v, w \in \mathbf{V}$ , entonces

$$\begin{aligned} \bullet) \mathbf{a}(\alpha u + \beta v, w) &= \phi_1(\alpha u + \beta v) \phi_2(w) = (\alpha \phi_1(u) + \beta \phi_1(v)) \phi_2(w) \\ &= \alpha \phi_1(u) \phi_2(w) + \beta \phi_1(v) \phi_2(w) = \alpha \mathbf{a}(u, w) + \beta \mathbf{a}(v, w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet) \mathbf{a}(u, \alpha v + \beta w) &= \phi_1(u) \phi_2(\alpha v + \beta w) = \phi_1(u) (\alpha \phi_2(v) + \beta \phi_2(w)) \\ &= \alpha \phi_1(u) \phi_2(v) + \beta \phi_1(u) \phi_2(w) = \alpha \mathbf{a}(u, v) + \beta \mathbf{a}(u, w). \end{aligned}$$

Se cumplen las condiciones dadas en la Definición (2.2.3), por tanto, sí es una forma bilineal. ■

**2.2.4. Definición.** Si  $\mathbf{V}$  un espacio funcional vectorial sobre los números reales, una **forma bilineal**

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned} \quad (2.16)$$

se llama *producto escalar* si es simétrica y definida positiva, es decir que verifica

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in \mathbf{V} \\ \langle u, u \rangle &\geq 0, \quad \forall u \in \mathbf{V} \\ \langle u, u \rangle &= 0, \quad \iff u = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

■

La función

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \text{para } u \in \mathbf{V}, \quad (2.18)$$

define una norma sobre el espacio  $\mathbf{V}$ . Si un espacio vectorial está dotado de un producto escalar se le denomina *pre-Hilbert* o *euclídeo*.

**2.2.5. Definición.** Una sucesión de funciones  $\{u_k\}_{k=0}^{\infty}$  en un espacio euclídeo, se dice que es de *Cauchy* si

$$\lim_{\min\{m,n\} \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = 0. \quad (2.19)$$

■

**2.2.6. Definición.** Si  $\mathbf{H}$  es un espacio vectorial con producto escalar se dice que es un espacio de **Hilbert** si es completo con respecto a la norma asociada. Esto equivale a que toda sucesión de Cauchy de  $\mathbf{H}$  es convergente. ■

La Definición (2.2.6) es importante porque se va a representar a una función como una combinación lineal infinita, y la convergencia tiene que estar asegurada.

**2.2.7. Definición.** Sea  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  un abierto. Se define el espacio  $L^1(\mathcal{U})$  : espacio de funciones integrables en  $\mathcal{U}$ . Igualmente se define el espacio

$$L^p(\mathcal{U}) = \{f \text{ (medible)} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, |f|^p \in L^1(\mathcal{U})\}$$

donde  $0 < p < \infty$ , el espacio  $L^p(\mathcal{U})$  es un espacio vectorial con norma inducida

$$\|f\|_{L^p(\mathcal{U})} = \left( \int_{\mathcal{U}} |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.20)$$

■

En la Definición (2.2.7), cuando  $p = 2$ , tenemos el espacio

$$L^2(\mathcal{U}) = \left\{ f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ medible} / \int_{\mathcal{U}} (f)^2 dx < \infty \right\} \quad (2.21)$$

con producto escalar

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathcal{U}} f(x) g(x) dx.$$

Entonces  $L^2(\mathcal{U})$  es un espacio de Hilbert.

**2.2.8. Definición.** *Un espacio vectorial normado y completo se le llama **espacio de Banach**.* ■

**2.2.7. Ejemplo.** *Algunos espacios de Hilbert y de Banach.*

•) **El espacio vectorial**  $\mathbb{R}^n$ , formado por las  $n$ -tuplas  $u = (u_1, \dots, u_n)$ , con  $u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  es un espacio de **Hilbert** con el producto escalar usual

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$$

La norma es la norma euclidiana, sin embargo hay otras normas,

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \\ \|u\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \\ \|u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \{|u_i|\}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

•) **Espacio**  $\ell^p$ , definidos sobre el espacio vectorial de las sucesiones reales:

$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ , para  $p \in [1, \infty[$ ,

$$\ell^p = \left\{ x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} / \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty \right\}.$$

Estos son espacios de Banach, con norma

$$\|x\|_p = \|x\|_{\ell^p} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p}, \quad \forall x = \{x_n\} \in \ell^p.$$

Para  $p = 2$ , el espacio  $\ell^2$  es un espacio de Hilbert, y para  $p = \infty$ , el espacio  $\ell^\infty$  es de Banach. ■

La convergencia fuerte y débil son necesarias para las sucesiones de funciones que vamos a emplear.

**2.2.9. Definición.** En un espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$ , el término **convergencia fuerte** se entiende por la convergencia con respecto a la norma asociada al producto escalar. Es decir,

$\{u_n\} \subset \mathbf{H}$  converge fuertemente a  $u \in \mathbf{H}$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \quad (2.22)$$

Denotamos la convergencia fuerte como  $u_n \rightarrow u$ . ■

**2.2.10. Definición.** Dado el espacio de Hilbert  $\mathbf{H}$ , se dice que hay **convergencia débil** si la convergencia se da a nivel de producto escalar, es decir,

$\{u_n\} \subset \mathbf{H}$  converge débilmente a  $u \in \mathbf{H}$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n, v \rangle = \langle u, v \rangle, \quad \text{o} \quad \langle u_n, v \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbf{H}. \quad (2.23)$$

Denotamos la convergencia débil como

$$u_n \rightharpoonup u.$$

■

La convergencia fuerte y débil están relacionadas, como podemos ver en las siguientes afirmaciones, las demostraciones se pueden ubicar en (Rektorys, 1980).

**2.2.2. Proposición.** *Si  $\{u_n\}$  converge fuertemente a  $u$ , entonces también converge débilmente.* ■

Para determinados espacios de Hilbert, lo recíproco de la Proposición (2.2.2) se cumple.

**2.2.3. Proposición.** *En un espacio de Hilbert de dimensión finita, la convergencia fuerte es equivalente a la convergencia débil.* ■

**Demostración.-**

Sea  $\mathbf{H}$  un espacio de Hilbert con  $\dim(\mathbf{H}) = d < \infty$ . Consideremos a  $\{h_1, h_2, \dots, h_d\}$  como una base ortonormal de  $\mathbf{H}$ , es decir  $\langle h_i, h_j \rangle = \delta_i^j$  y todo elemento de  $\mathbf{H}$  se puede representar como combinación lineal de los  $h_i$ . Sean  $u \in \mathbf{H}$  y  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{H}$ , es decir

$$u = \sum_{m=1}^d \langle u, h_m \rangle h_m, \quad u_n = \sum_{m=1}^d \langle u_n, h_m \rangle h_m$$

Si  $u_n$  converge débilmente a  $u$ , es decir

$$\langle u_n, h_m \rangle \longrightarrow \langle u, h_m \rangle, \quad \forall m$$

La anterior convergencia está en el campo de los escalares, por tanto para cualquier  $h_m$  se tendrá también convergencia, pero en  $\mathbf{H}$ , es decir

$$\langle u_n, h_m \rangle h_m \longrightarrow \langle u, h_m \rangle h_m, \quad \forall m$$

Esto implica que

$$\sum_{m=1}^d \langle u_n, h_m \rangle h_m \longrightarrow \sum_{m=1}^d \langle u, h_m \rangle h_m$$

En consecuencia

$$u_n \longrightarrow u.$$

■

## 2.3. Marco Conceptual

### 2.3.1. Polinomios de Bernstein

Una de las aplicaciones importantes de los polinomios de Bernstein es ser la base en la demostración del Teorema de Weierstrass, dado por el ucraniano Sergei Natanovich Bernstein. Como se sabe, la aproximación es otro método que se emplea en análisis numérico además de la interpolación. Bernstein observó que con los polinomios existentes había ciertas falencias en utilizarlos, como el caso del Teorema de Taylor, en el cual una de sus exigencias es que la función sea infinitamente diferenciable, es por ello que introduce los polinomios de Bernstein en la demostración del Teorema de Weierstrass, y es a partir de

ese teorema que la aproximación polinómica es utilizada ampliamente.

Al aproximar una función  $f$  por medio de los polinomios de Bernstein, no se necesita que  $f$  sea siquiera diferenciable en algún punto.

**2.3.1. Definición.** Para  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , los **polinomios básicos de Bernstein** se definen como

$$\beta_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad (2.24)$$

donde el coeficiente, llamado **coeficiente binomial** es,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (2.25)$$

■

***Fórmula del Binomio de Newton.-***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad (2.26)$$

Si en (2.26) hacemos que  $a+b=1$  y  $a=x$ ,  $b=1-x$  tenemos

$$1 = (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=\beta_{n,k}(x)},$$

de donde

$$\sum_{k=0}^n \beta_{n,k}(x) = 1 \quad (2.27)$$

En la Figura (2.10) se observan los polinomios básicos de Bernstein para diferentes grados,  $n$ , y los correspondientes valores de  $k$ . Dichas gráficas se han obtenido con Mathematica.

---

```

B[n, k, x] = Binomial[n, k] x^k (1 - x)^(n - k);
{Plot[{B[6, 0, x], B[6, 1, x], B[6, 2, x], B[6, 3, x], B[6, 4, x], B[6, 5, x], B[6, 6, x]}, {x, -.01, 1.01}, PlotRange -> {-0.05, 1},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Green, Thickness[0.005]}, {Cyan, Thickness[0.005]},
    {Brown, Thickness[0.005]}, {Yellow, Thickness[0.005]}, {Black, Thickness[0.005]}}],
Plot[{B[5, 0, x], B[5, 1, x], B[5, 2, x], B[5, 3, x], B[5, 4, x], B[5, 5, x]}, {x, -.01, 1.01},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Green, Thickness[0.005]}, {Cyan, Thickness[0.005]},
    {Brown, Thickness[0.005]}, {Black, Thickness[0.005]}}],
Plot[{B[4, 0, x], B[4, 1, x], B[4, 2, x], B[4, 3, x], B[4, 4, x]}, {x, -.01, 1.01},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Green, Thickness[0.005]}, {Cyan, Thickness[0.005]},
    {Black, Thickness[0.005]}}], Plot[{B[3, 0, x], B[3, 1, x], B[3, 2, x], B[3, 3, x]}, {x, -.01, 1.01},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Green, Thickness[0.005]}, {Black, Thickness[0.005]}}],
Plot[{B[2, 0, x], B[2, 1, x], B[2, 2, x]}, {x, -.01, 1.01},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Black, Thickness[0.005]}}],
Plot[{B[1, 0, x], B[1, 1, x]}, {x, -.01, 1.01}, PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Black, Thickness[0.005]}}]
{Plot[{B[10, 0, x], B[10, 1, x], B[10, 2, x], B[10, 3, x], B[10, 4, x], B[10, 5, x], B[10, 6, x], B[10, 7, x], B[10, 8, x],
  B[10, 9, x], B[10, 10, x]}, {x, -.01, 1.01}, PlotRange -> {-0.05, 1},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Green, Thickness[0.005]}, {Cyan, Thickness[0.005]},
    {Brown, Thickness[0.005]}, {Yellow, Thickness[0.005]}, {Orange, Thickness[0.005]}, {Pink, Thickness[0.005]},
    {Gray, Thickness[0.005]}, {Purple, Thickness[0.005]}, {Black, Thickness[0.005]}}],
Plot[{B[20, 0, x], B[20, 1, x], B[20, 2, x], B[20, 3, x], B[20, 4, x], B[20, 5, x], B[20, 6, x], B[20, 7, x], B[20, 8, x],
  B[20, 9, x], B[20, 10, x], B[20, 11, x], B[20, 12, x], B[20, 13, x], B[20, 14, x], B[20, 15, x], B[20, 16, x], B[20, 17, x],
  B[20, 18, x], B[20, 19, x], B[20, 20, x]}, {x, -.01, 1.01}, PlotRange -> {-0.05, 1},
  PlotStyle -> {{Red, Thickness[0.005]}, {Blue, Thickness[0.005]}, {Green, Thickness[0.005]}, {Cyan, Thickness[0.005]},
    {Brown, Thickness[0.005]}, {Yellow, Thickness[0.005]}, {Orange, Thickness[0.005]}, {Pink, Thickness[0.005]},
    {Gray, Thickness[0.005]}, {Purple, Thickness[0.005]}, {Pink, Thickness[0.005]}, {Brown, Thickness[0.005]},
    {Dashed, Thickness[0.005]}, {Pink, Thickness[0.005]}, {Yellow, Thickness[0.005]}, {Magenta, Thickness[0.005]},
    {Green, Thickness[0.005]}, {Gray, Thickness[0.005]}, {Purple, Thickness[0.005]}, {Yellow, Thickness[0.005]},
    {Black, Thickness[0.005]}}]

```

---

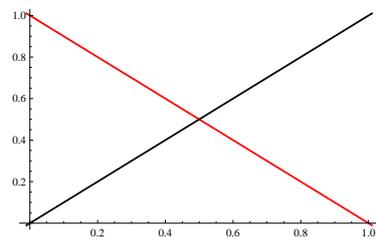
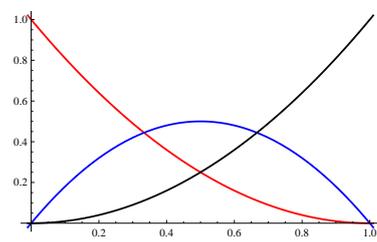
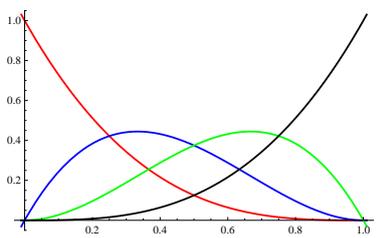
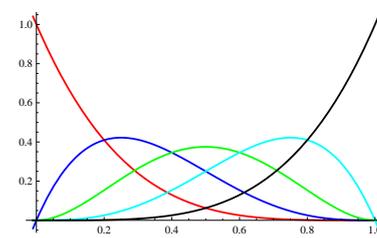
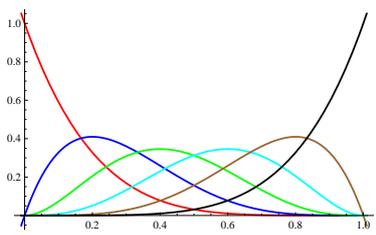
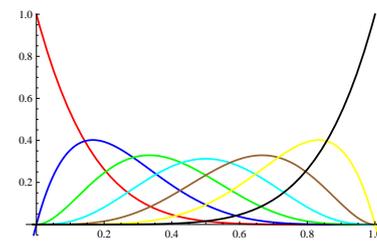
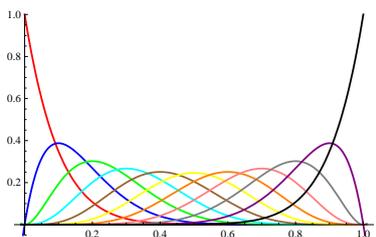
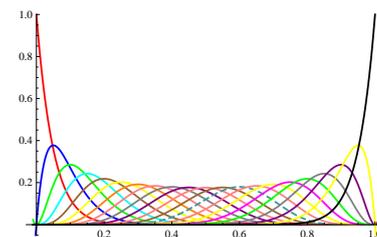
(a)  $n = 1$ (b)  $n = 2$ (c)  $n = 3$ (d)  $n = 4$ (e)  $n = 5$ (f)  $n = 6$ (g)  $n = 10$ (h)  $n = 20$ 

Figura 2.10: Polinomios básicos de Bernstein  $\beta_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$  para diferentes valores de  $n$  y para  $x \in [0, 1]$ .

**Propiedades.-**

Los polinomios básicos de Bernstein,  $\beta_{n,k}(x)$ , definidos en (2.24), para  $x \in [0, 1]$ , forman el conjunto  $\{\beta_{n,k} : k = 0, 1, \dots, n\}_{n \geq 1}$  que es una base de  $\mathbb{P}_n$  llamada base de Bernstein, y posee las siguientes propiedades:

- $0 \leq \beta_{n,k}(x) \leq 1$
- $1 = \sum_{k=0}^n \beta_{n,k}(x)$  (Partición de la Unidad)
- $\sum_{k=0}^n \beta_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n-1,k}(x)$
- $nx = \sum_{k=0}^n k \beta_{n,k}(x)$
- $\sum_{k=0}^n (k^2 - k) \beta_{n,k}(x) = (n^2 - n) x^2$
- $\beta_{n,k}(x) = (1-x)\beta_{n-1,k}(x) + x\beta_{n-1,k-1}(x)$
- $\beta_{n,k}(x) = \beta_{n,n-k}(1-x)$

Las dos últimas propiedades son llamadas *Propiedad de Recurrencia* y de *Simetría*, respectivamente. Además,  $\beta_{n,k}(x) = 0$  para  $k < 0$  o  $k > n$ .

**Nota.-**

Para  $n = 0$ ,

$$\beta_{0,k}(x) = \beta_{0,0}(x) = \binom{0}{0} x^0 (1-x)^0 = 1 \implies \beta'_{0,0}(x) = 0. \quad (2.28)$$

Para  $k = 0$ ,

$$\beta_{n,0}(x) = \binom{n}{0} x^0 (1-x)^n = (1-x)^n \implies \beta'_{n,0}(x) = -n(1-x)^{n-1}. \quad (2.29)$$

Para  $k = n$ ,

$$\beta_{n,n}(x) = \binom{n}{n} x^n (1-x)^0 = x^n \implies \beta'_{n,n}(x) = nx^{n-1}. \quad (2.30)$$

Para  $n = 1$ ,

$$\beta_{1,0}(x) = 1 - x \implies \beta'_{1,0}(x) = -1 \quad (2.31)$$

$$\beta_{1,1}(x) = x \implies \beta'_{1,1}(x) = 1 \quad (2.32)$$

Vemos que (2.31) coincide con (2.29) y (2.32) coincide con (2.30). Además,

$$\beta'_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^{k-1} (1-x)^{n-k-1} (k-nx), \quad (2.33)$$

es decir que  $\beta'_{n,k}(x) = 0$  para  $x = 0$ ,  $x = 1$  o  $x = \frac{k}{n}$ , exceptuando cuando

$n = 0$ ,  $n = 1$ ,  $k = 0$  y  $k = n$ . Por lo que si tenemos una partición del intervalo

$[0, 1]$ :  $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ , para  $x = \frac{k}{n} \in ]0, 1[$ , punto crítico, vemos que

$$\beta''_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^{k-2} (1-x)^{n-k-2} \left( (k-1+(2-n)x)(k-nx) - nx(1-x) \right) \quad (2.34)$$

Por tanto

$$\beta''_{n,k} \left( \frac{k}{n} \right) = -k \binom{n}{k} \left( \frac{k}{n} \right)^{k-2} \left( -\frac{k}{n} \right)^{n-k-1} < 0 \quad (2.35)$$

es decir que  $x = \frac{k}{n}$  corresponde a un máximo y el valor máximo de  $\beta_{n,k}$  en ese

punto es

$$\beta_{n,k}^{\max} = \beta_{n,k} \left( \frac{k}{n} \right) = \binom{n}{k} \left( \frac{k}{n} \right)^k \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^{n-k} \quad (2.36)$$

La relación entre el valor dado en (2.36) y el valor dado en (2.35) es

$$\boxed{\beta_{n,k}^{\max} = -\frac{k(n-k)}{n^3} \beta''_{n,k} \left( \frac{k}{n} \right)} \quad (2.37)$$

**2.3.1. Ejemplo.** De la Definición (2.3.1), tenemos los polinomios básicos de Bernstein, cuyas gráficas están en la Figura (2.10), para  $x \in [0, 1]$ ,

(\*) de grado  $n = 1$ :  $\beta_{1,0}(x) = 1 - x$ ,  $\beta_{1,1}(x) = x$ .

(\*) de grado  $n = 2$ :

$$\beta_{2,0}(x) = (1 - x)^2, \quad \beta_{2,1}(x) = 2x(1 - x), \quad \beta_{2,2}(x) = x^2.$$

(\*) de grado  $n = 3$ :

$$\beta_{3,0}(x) = (1 - x)^3, \quad \beta_{3,1}(x) = 3x(1 - x)^2, \quad \beta_{3,2}(x) = 3x^2(1 - x), \quad \beta_{3,3}(x) = x^3$$

(\*) de grado  $n = 4$ :

$$\beta_{4,0}(x) = (1 - x)^4, \quad \beta_{4,2}(x) = 6x^2(1 - x)^2, \quad \beta_{4,4}(x) = x^4.$$

$$\beta_{4,1}(x) = 4x(1 - x)^3, \quad \beta_{4,3}(x) = 4x^3(1 - x),$$

(\*) de grado  $n = 5$ :

$$\beta_{5,0}(x) = (1 - x)^5, \quad \beta_{5,2}(x) = 10x^2(1 - x)^3, \quad \beta_{5,4}(x) = 5x^4(1 - x),$$

$$\beta_{5,1}(x) = 5x(1 - x)^4, \quad \beta_{5,3}(x) = 10x^3(1 - x)^2, \quad \beta_{5,5}(x) = x^5.$$

■

Ahora daremos la definición del polinomio de Bernstein.

**2.3.2. Definición.** Sea  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua, el  $n$ -ésimo polinomio de Bernstein de  $f$  de grado a lo más  $n$  se define como

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \underbrace{\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{= \beta_{n,k}(x)} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \beta_{n,k}(x) \quad (2.38)$$

■

Recordemos que en (2.38) los  $\beta_{n,k}(x)$  son de grado  $n$ , pero los polinomios  $B_n(\mathbf{f}, x)$  de la Definición (2.3.2) no necesariamente serán de grado  $n$ , pues dependerá de la función  $f$ , como podemos observar

$$\begin{aligned}
 B_n(\mathbf{f}, x) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-k-j} \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j} (-1)^{n-k-j} x^{n-j}
 \end{aligned}$$

El coeficiente principal (para  $j = 0$ ) es

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} \binom{n-k}{j=0} (-1)^{n-k-0} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} (-1)^{n-k}, \quad (2.39)$$

y este coeficiente puede ser cero.

Por ejemplo, si queremos hallar el polinomio  $B_3(\mathbf{f}, x)$  para  $f(x) = \sin(\pi x)$  en  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  tendremos, por (2.39), que el coeficiente principal, el de  $x^3$ , es

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^3 f\left(\frac{k}{3}\right) \binom{3}{k} (-1)^{3-k} &= f\left(\frac{0}{3}\right) \binom{3}{0} (-1)^{3-0} + f\left(\frac{1}{3}\right) \binom{3}{1} (-1)^{3-1} \\
 &\quad + f\left(\frac{2}{3}\right) \binom{3}{2} (-1)^{3-2} + f\left(\frac{3}{3}\right) \binom{3}{3} (-1)^{3-3} \\
 &= -f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) - 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1) \\
 &= -\sin 0 + 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin(\pi) \\
 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} B_3(\mathbf{sin}(\pi x), x) &= \sum_{k=0}^3 \sin\left(\pi \frac{k}{3}\right) \binom{3}{k} x^k (1-x)^{3-k} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}x \end{aligned}$$

Es decir que el polinomio  $B_3(\mathbf{f}, x)$  de  $f(x) = \sin(\pi x)$  no es de grado 3 sino de grado 2.

Algunos otros polinomios de Bernstein para  $f(x) = \sin(\pi x)$ , para  $x \in [0, 1]$ .

- $B_1(\mathbf{f}, x) = \sum_{k=0}^1 \sin\left(\pi \frac{k}{1}\right) \binom{1}{k} x^k (1-x)^{1-k} = \mathbf{0}$
- $B_2(\mathbf{f}, x) = 2x - x^2$
- $B_4(\mathbf{f}, x) = 2\sqrt{2}x - 6(\sqrt{2} - 1)x^2 + 4(2\sqrt{2} - 3)x^3 - 2(2\sqrt{2} - 3)x^4$
- $B_6(\mathbf{f}, x) = 3x + \frac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)x^2 - 10(3\sqrt{3} - 5)x^3 + \frac{15}{2}(7\sqrt{3} - 12)x^4$   
 $-3(15\sqrt{3} - 26)x^5 + (15\sqrt{3} - 26)x^6$
- $B_{10}(\mathbf{f}, x) = 3.09017x - 1.36119x^2 - 3.27453x^3 + 1.18274x^4$   
 $+0.534192x^5 - 0.15935x^6 - 0.015987x^7 + 0.0039293x^8$   
 $+0.000044936x^9 - 8.9872 \times 10^{-6}x^{10}$
- $B_{15}(\mathbf{f}, x) = 3.11868x - 0.954108x^2 - 3.95377x^3 + 1.06048x^4$   
 $+1.03851x^5 - 0.24559x^6 - 0.0834591x^7 + 0.0174477x^8$   
 $+0.0022439x^9 - 0.000414698x^{10} - 0.0000185077x^{11}$   
 $+3.016 \times 10^{-6}x^{12} + 3.181 \times 10^{-8}x^{13} - 4.542 \times 10^{-9}x^{14}$

$$\begin{aligned}
\bullet) B_{20}(\mathbf{f}, x) &= 3.12869x - 0.731868x^2 - 4.28308x^3 + 0.907756x^4 \\
&+ 1.36278x^5 - 0.262706x^6 - 0.154843x^7 + 0.027219x^8 \\
&+ 0.00736734x^9 - 0.00118254x^{10} - 0.000154912x^{11} \\
&+ 0.00002272x^{12} + 1.431 \times 10^{-6}x^{13} - 1.639 \times 10^{-7}x^{14} \\
&+ 5.961 \times 10^{-8}x^{15} + 2.980 \times 10^{-8}x^{16} + 1.490 \times 10^{-8}x^{17} \\
&- 1.863 \times 10^{-9}x^{18} - 8.193 \times 10^{-16}x^{19} + 8.193 \times 10^{-17}x^{20}
\end{aligned}$$

Los polinomios de Bernstein de  $f(x) = \sin(\pi x)$ , a medida que  $n$  aumenta, se aproximan más a  $f(x)$ , ver la Figura (2.11).

Además,  $\|f - B_n(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty \leq 1, \forall n \geq 1$ , y para los polinomios encontrados tenemos

$$\begin{aligned}
\bullet) \|f - B_1(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_1(\mathbf{f}, x)| = 1 \\
\bullet) \|f - B_2(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_2(\mathbf{f}, x)| = 0.5 \\
\bullet) \|f - B_3(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_3(\mathbf{f}, x)| = 0.35048094716167 \\
\bullet) \|f - B_4(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_4(\mathbf{f}, x)| = 0.27144660940673 \\
\bullet) \|f - B_6(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_6(\mathbf{f}, x)| = 0.18780059197604 \\
\bullet) \|f - B_{10}(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_{10}(\mathbf{f}, x)| = 0.11651481632053 \\
\bullet) \|f - B_{15}(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_{15}(\mathbf{f}, x)| = 0.07909414381276 \\
\bullet) \|f - B_{20}(\mathbf{f}, \cdot)\|_\infty &= \max_{x \in [0,1]} |\sin(\pi x) - B_{20}(\mathbf{f}, x)| = 0.05988074937453
\end{aligned}$$

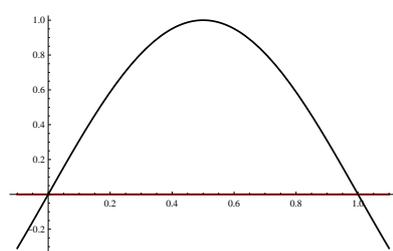
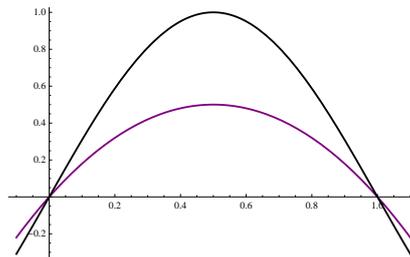
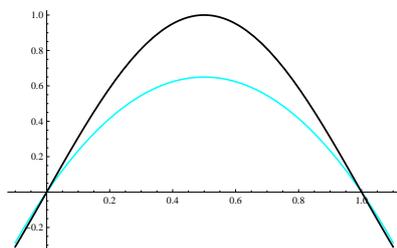
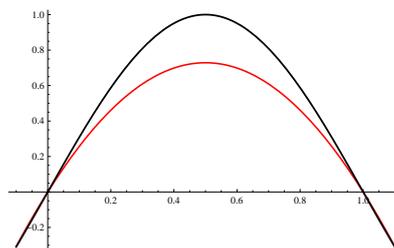
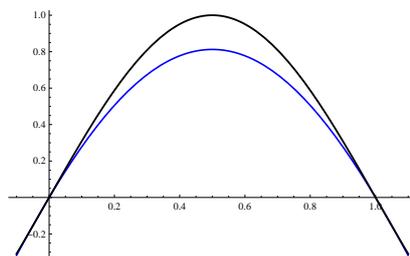
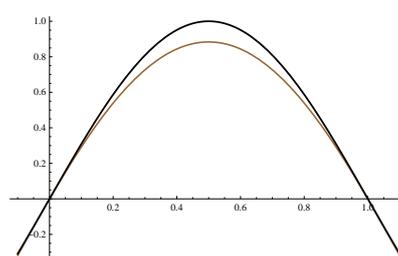
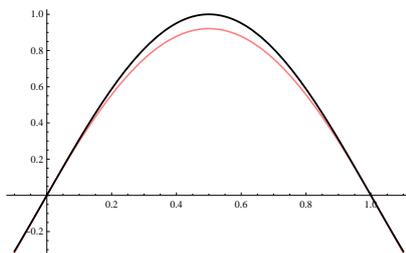
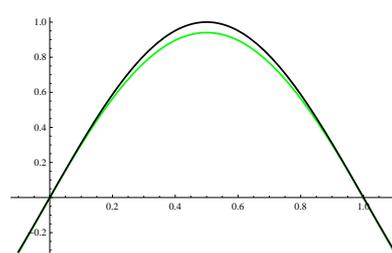
(a)  $B_1$  y  $f$ (b)  $B_2$  y  $f$ (c)  $B_3$  y  $f$ (d)  $B_4$  y  $f$ (e)  $B_6$  y  $f$ (f)  $B_{10}$  y  $f$ (g)  $B_{15}$  y  $f$ (h)  $B_{20}$  y  $f$ 

Figura 2.11: Polinomios,  $B_n(\mathbf{f}, x)$ , de  $f(x) = \sin(\pi x)$  (color negro) junto a  $f(x)$ , para  $x \in [0, 1]$ .

Polinomios de Bernstein de  $f(x) = 1, x, x^2$ .

- ) Teniendo en cuenta la segunda de las propiedades:

$$1 = \sum_{k=0}^n \beta_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^n 1 \beta_{n,k}(x) = B_n(\mathbf{1}, x)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{1} \implies \boxed{B_n(\mathbf{1}, x) = 1} \quad (2.40)$$

- ) De la tercera de las propiedades:  $nx = \sum_{k=0}^n k \beta_{n,k}(x)$

$$x = \sum_{k=0}^n \underbrace{\left(\frac{k}{n}\right)}_{=f\left(\frac{k}{n}\right)} \beta_{n,k}(x) = B_n(\mathbf{x}, x)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \implies \boxed{B_n(\mathbf{x}, x) = x} \quad (2.41)$$

- ) Para la parábola,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 \implies \boxed{B_n(\mathbf{x}^2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}} \quad (2.42)$$

De (2.42), los polinomios de Bernstein no interpolan a  $f(x)$  sino que la aproximan, es decir

**2.3.1. Teorema.** En  $C([0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ ,  $B_n(\mathbf{f}, \cdot) \rightarrow f, \forall f \in C([0, 1])$ , (convergencia uniforme). ■

Demostración.

Una prueba de esto se ve en (Isaacson and Keller, 1966) p. 185. ■

**2.3.2. Ejemplo.** Sea  $f(x) = x^2 \in C([0, 1])$ , por (2.42) el  $n$ -ésimo polinomio de Bernstein asociado a  $f$  es  $B_n(\mathbf{x}^2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Por el Teorema (2.3.1),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n(\mathbf{f}, \cdot)\|_{\infty} = 0$$

es decir, que para cada  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{Z}$  tal que

$$\|f - B_n(\mathbf{f}, \cdot)\|_{\infty} < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Siendo así,

$$\|f - B_n(\mathbf{f}, \cdot)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(\mathbf{x}^2, x)| = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x(1-x)}{n} \right| = \frac{1}{4n} < \epsilon$$

ó  $n > \frac{1}{4\epsilon}$ . Para  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{4\epsilon} \right\rceil$  el Teorema (2.3.1) se cumple. ( $\lceil a \rceil = k \in \mathbb{Z} / k \geq a$ )

Si damos algunos valores de  $\epsilon$  tendremos el  $n_0 = \left\lceil \frac{1}{4\epsilon} \right\rceil$  a fin de que se cumpla el Teorema (2.3.1), ello se puede comprobar en el Cuadro (2.1):

- )  $\epsilon = 1 \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{4 \times 1} \right\rceil = \lceil 0.25 \rceil = 1, \therefore \forall n \geq 1.$
- )  $\epsilon = 0.2 \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{4 \times 0.2} \right\rceil = \lceil 1.25 \rceil = 2, \therefore \forall n \geq 2.$
- )  $\epsilon = 0.04 \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{4 \times 0.04} \right\rceil = \lceil 6.25 \rceil = 7, \therefore \forall n \geq 7.$
- )  $\epsilon = 0.0255 \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{4 \times 0.0255} \right\rceil = \lceil 9.804 \rceil = 10, \therefore \forall n \geq 10.$
- )  $\epsilon = 0.01195 \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{4 \times 0.01195} \right\rceil = \lceil 209.20502 \rceil = 210, \therefore \forall n \geq 210. \blacksquare$

$n$	$\ f - B_n(\mathbf{f}, \cdot)\ _\infty$ $= \max_{x \in [0,1]}  x^2 - B_n(\mathbf{x}^2, x) $
<b>1</b>	0.250000000000
<b>2</b>	0.125000000000
<b>3</b>	0.083333333333
<b>4</b>	0.062500000000
<b>5</b>	0.050000000000
<b>6</b>	0.041666666667
<b>7</b>	0.035714285714
<b>8</b>	0.031250000000
<b>9</b>	0.027777777778
<b>10</b>	0.025000000000
<b>200</b>	0.001250000000
<b>209</b>	0.001196172249
<b>210</b>	0.001190476190

Cuadro 2.1: Valores del error al tomar  $B_n(\mathbf{x}^2, x)$  por  $f(x) = x^2$ .

**Nota.-**

Para  $f \in C([a, b])$ , el **polinomio  $B_n$ , de Bernstein, asociado a  $f$**  se define por

$$B_n(f, x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^n f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k} \quad (2.43)$$

**2.3.2. Funciones Forma**

Una de las técnicas numéricas importantes de los últimos años es el Método de los Elementos Finitos (MEF), y su proceso involucra el método de Galerkin, aquí las *funciones forma* juegan un papel crucial pues ellas darán información en los nodos. Los polinomios de Lagrange y Bernstein aportan en estas técnicas.

Las funciones de forma son funciones que interpolan y aproximan y la manera de expresarlos es a través de valores nodales. Con ellas se logra formular fácilmente el MEF, además se puede tener un control del grado de precisión de la solución del problema, son conocidas porque su orden del error de aproximación es  $O(h^{p+1})$ . Dos tipos de estas funciones se emplean en el MEF,

- ) las empleadas para la interpolación de la función desconocida en los nodos, denotadas por  $N_i$  y tienen cumplen la propiedad de Delta de Kronecker en el nodo  $j$ ;
- ) las empleadas para la aproximación de la geometría del elemento, llamadas funciones de interpolación de la geometría, denotadas por  $\bar{N}_i$ .

Se usan coordenadas cartesianas  $(x, y)$  o  $(x, y, z)$  y si las expresiones necesitan ser normalizadas se usan coordenadas naturales o locales  $(\xi, \eta)$ .

### 2.3.3. Propiedades de las Funciones Forma

Debido a que las funciones forma se encargan de realizar las interpolaciones y las aproximaciones del MEF, dichas aproximaciones se hacen a partir de los valores en los nodos ya conocidos, valores nodales.

Veamos a aquellas que realizan interpolaciones.

#### *Interpolación Nodal*

- Una forma asociada satisface la propiedad Delta de Kronecker.

$$N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} . \quad (2.44)$$

Es decir, dado el nodo  $x_j$ , la función forma asociada a ese nodo tiene el valor uno en ese nodo  $j$ .

- Otra propiedad es que, la suma de todas las funciones de forma en un elemento es igual a uno, en todo el dominio.

Además, de las propiedades expuestas, también deben cumplir la continuidad, derivabilidad, integrabilidad, completitud, compatibilidad, invarianza y lo de criterio de la parcela.

### 2.3.4. Polinomios de Lagrange

A diferencia de la aproximación, en el método de interpolación se elige una función  $P(x)$ , que interpola a una función  $f(x)$ , de tal manera que pase por un conjunto finito de puntos, reales o complejos, distintos:  $x_0, x_1, \dots, x_n$  y se tenga (Atkison, 1989)

$$f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.45)$$

En la práctica se toma a  $P(x)$  como

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m \quad (2.46)$$

que tiene  $m + 1$  parámetros independientes, y asumiendo  $m = n$  junto con (2.45) se tendrá un sistema de  $n + 1$  ecuaciones y el mismo número de parámetros,

$$c_0 + c_1 x_i + \dots + c_n x_i^n = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.47)$$

La existencia y unicidad de (2.47) se dan el Teorema (2.3.1).

**2.3.2. Teorema.** Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  puntos distintos asociados a las ordenadas  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Entonces, existe un único polinomio  $P(x)$  de grado a lo más  $n$ , que interpola el  $y_i$  en  $x_i$ , para  $i = 0, 1, \dots, n$ . ■

**Demostración.**-

Una prueba de esto se ve en (Atkinson, K.E, 1989). ■

La forma interpolante de Lagrange es

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot L_{n,k}(x), \quad (2.48)$$

donde  $L_{n,k}(x)$  el coeficiente polinomial de Lagrange,  $L_n$  es grado  $\leq n$  y  $k$  es el  $k$ -ésimo punto de interpolación,  $k = \overline{0, n}$ . La formulación general de  $L_{n,k}$  es

$$L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} = \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (2.49)$$

y éstas satisfacen la propiedad de *Delta de Kronecker* en cada  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

$$L_{n,k}(x_i) = \delta_{ki} \quad (2.50)$$

Además, generan el espacio de polinomios de grado  $\leq n$ ,  $\Pi_n$ , y cumplen la propiedad de la *Partición de la Unidad*, PU, de orden 1, es decir,

$$\sum_{k=0}^n L_{n,k}(x) x_k^\alpha = x^\alpha, \quad \alpha = 0, 1 \quad (2.51)$$

Como comprobación, para  $n = 1$ , los puntos son  $x_0$  y  $x_1$ , entonces

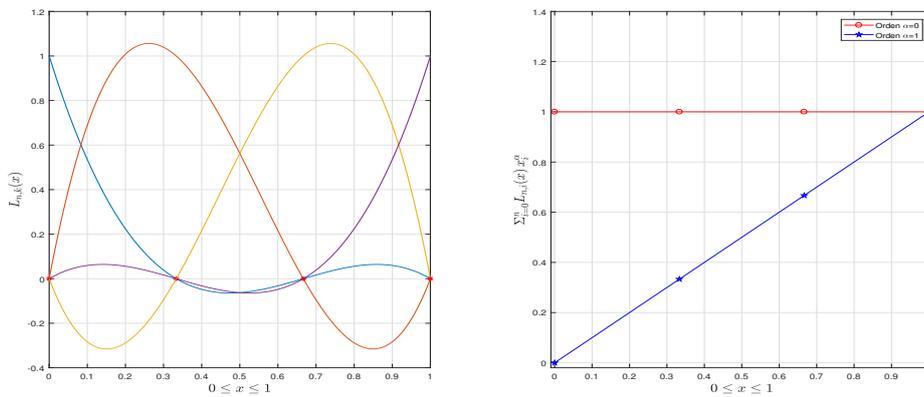
**$\alpha = 0$** :

$$\sum_{k=0}^1 L_{1,k}(x) x_k^{\alpha=0} = L_{1,0}(x) \cdot x_0^0 + L_{1,1}(x) \cdot x_1^0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \mathbf{1} = \mathbf{x}^0$$

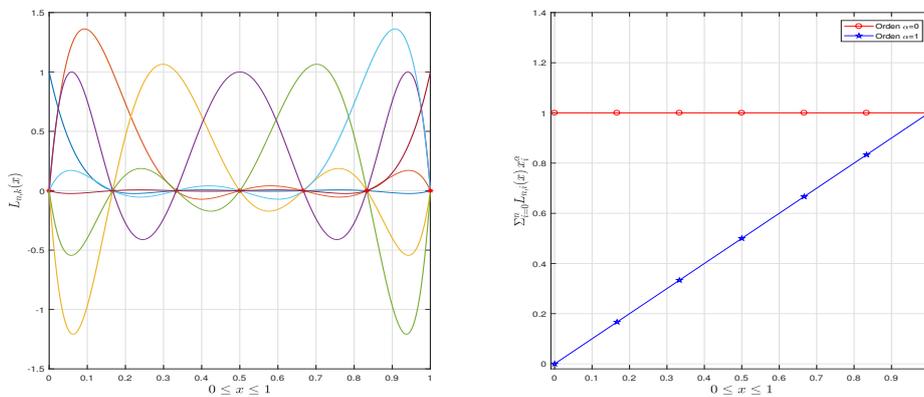
**$\alpha = 1$** :

$$\sum_{k=0}^1 L_{1,k}(x) x_k^{\alpha=1} = L_{1,0}(x) \cdot x_0 + L_{1,1}(x) \cdot x_1 = \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right) x_0 + \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) x_1 = \mathbf{x}^1$$

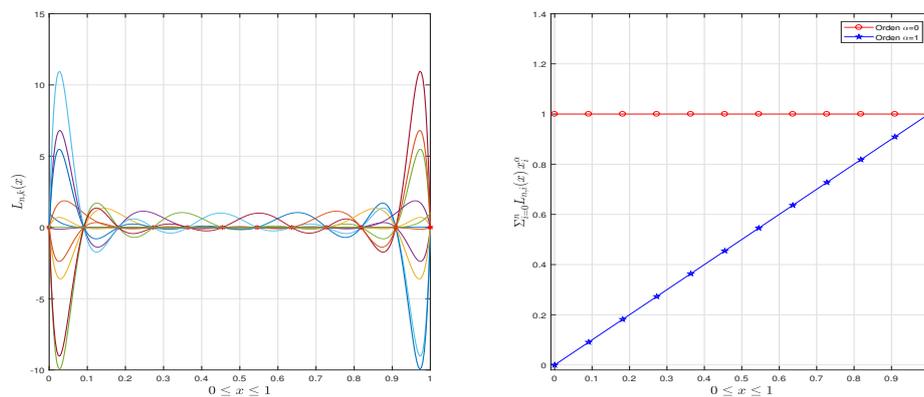
En la Figura (2.12) se visualizan estas funciones base.



(a)  $n = 3$



(b)  $n = 6$



(c)  $n = 11$

Figura 2.12: Polinomios básicos de Lagrange,  $L_{n,k}(x)$ , en  $[0, 1]$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Utilizar estos polinomios es ventajoso en los esquemas de Galerkin por su fácil implementación, sin embargo mientras más nodos  $x_i$  hayan se tendrá un grado mayor de los polinomios. Además cuando el grado del polinomio aumenta hay más variación entre nodos.

La función forma de Lagrange asociada al nodo  $k$  se define como

$$\Phi_L^k = L_{n,k-1}(x), \quad k = 1, \dots, n \quad (2.52)$$

$n$  es el número de nodos de control:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

El error que se comete al utilizar estos polinomios para interpolar una función  $f$ , mediante

$$P_{n,f}(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x) \quad (2.53)$$

se da en el Teorema (2.3.3).

**2.3.3. Teorema.** Sean  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n + 1$  números distintos y sea  $f \in C^{(n+1)}(I)$ , donde  $I$  contiene a los  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Para  $x \in I$  existe un  $\xi(x) \in I$  tal que

$$f(x) - \sum_{k=0}^n f(x_k) L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (2.54)$$

■

**Demostración.**-

Ver (Atkinson, K.E, 1989).

■

Cota de error de (2.54).

Si  $\max_{t \in I} |f^{(n+1)}(t)| = M_{n+1}$ , una cota para el error (2.54) es

$$e_n = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in I} \left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \quad (2.55)$$

**2.3.3. Ejemplo.** Para la función  $f(x) = x^3 e^{-\frac{5x^2}{3}}$ , con  $x \in [0, 2]$ , los polinomios interpolantes de Lagrange junto con las cotas de error respectivas, con nodos igualmente espaciados, son

(\*) de grado  $n = 3$ :

$$P_3(x) = 0.365221x - 0.254955x^2 + 0.0374447x^3$$

$$e_3 \leq \mathbf{0.28092010838556714}$$

(\*) de grado  $n = 6$ :

$$P_6(x) = -0.0671257x + 0.226907x^2 + 1.48998x^3 - 2.66999x^4 \\ + 1.47956x^5 - 0.270456x^6.$$

$$e_6 \leq \mathbf{0.06086591422661818}$$

(\*) de grado  $n = 11$ :

$$P_{11}(x) = -0.00122368x + 0.0126837x^2 + 0.985037x^3 - 0.303262x^4 \\ + 0.145527x^5 - 4.95825x^6 + 9.27003x^7 - 7.55372x^8 \\ + 3.25653x^9 - 0.732716x^{10} + 0.068237x^{11}$$

$$e_{11} \leq \mathbf{0.0010709387500521224}$$

■

Estas aproximaciones se visualizan en la Figura (2.13).

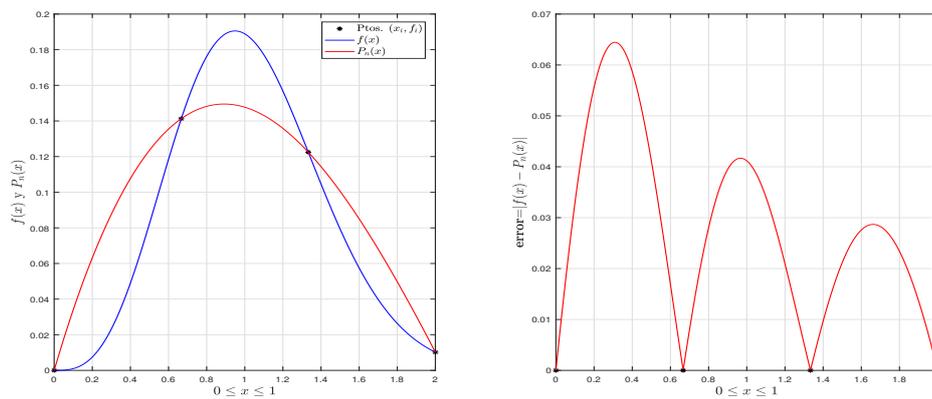
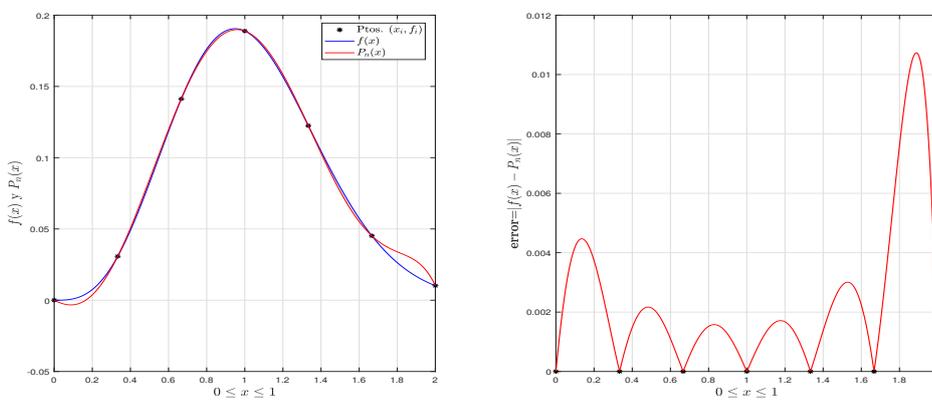
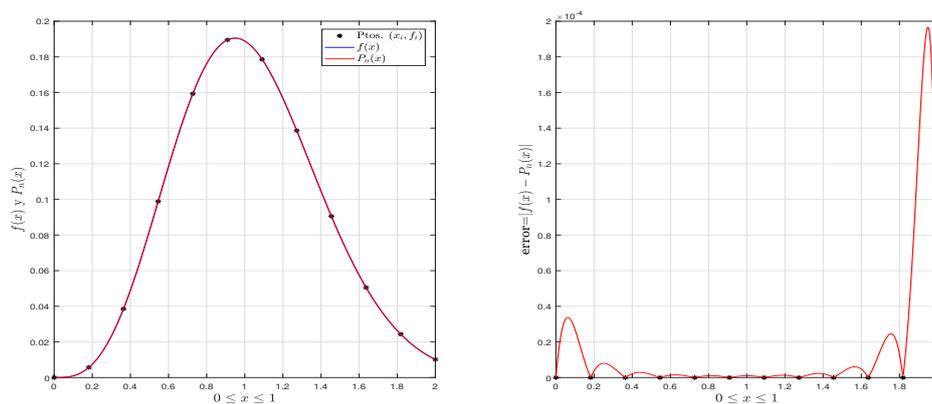
(a)  $n = 3$ (b)  $n = 6$ (c)  $n = 11$ 

Figura 2.13: Polinomios de interpolación de Lagrange para  $f$ , junto con los errores respectivos.

### 2.3.5. Algunos conceptos y Fórmulas en las Ecuaciones diferenciales

El objetivo en la resolución de un problema, es hallar funciones desconocidas, llamadas *variables dependientes*, que satisfacen un conjunto de ecuaciones diferenciales, en un dominio o región y alguna condición de frontera sobre la frontera del dominio.

Algunos conceptos al respecto, (Reddy, J.N, 1993).

**2.3.3. Definición.** Un *dominio*  $\Omega$  es una colección de puntos en el espacio con la propiedad de que si  $P \in \Omega$ , entonces todos los puntos muy cercanos a  $P$  también están en  $\Omega$ . Es decir que un dominio consiste de puntos interiores. Además, si dos puntos cualesquiera del dominio son unidos por una línea recta y todos los puntos de esa recta están en el dominio, se dice que es *convexo*. ■

**2.3.4. Definición.** La *frontera*  $\Gamma$  de un dominio  $\Omega$  es el conjunto de puntos tales que, cualquier vecindad de esos puntos contiene a puntos del dominio y a puntos que no son del dominio. Es decir, los puntos de la frontera no están en el dominio. ■

**2.3.5. Definición.** Una función de varias variables se dice que es de clase  $C^m(\Omega)$  en un dominio  $\Omega$  si todas sus derivadas parciales, hasta el orden  $m$ , inclusive, son continuas en un dominio  $\Omega$ . ■

**2.3.6. Definición.** Una ecuación diferencial describe un *problema de valor de frontera* si la variable dependiente y quizás sus derivadas, toman valores específicos en la frontera. Y si describe un *problema de valor inicial* entonces la variable dependiente y quizás sus derivadas son especificadas inicialmente. ■

**2.3.4. Ejemplo. Problema de valor de frontera:**

$$-\frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) = f, \text{ para } a < x < b \quad (2.56)$$

$$u(a) = u_a, \left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=b} = h_b \quad (2.57)$$

■

**2.3.5. Ejemplo. Problema de valor inicial:**

$$-\gamma \frac{d^2u}{dt^2} + k u = f, \text{ para } 0 < t \leq t_0 \quad (2.58)$$

$$u(0) = u_0, \left( \frac{du}{dt} \right) \Big|_{t=0} = g_0 \quad (2.59)$$

■

**2.3.6. Ejemplo. Problema de valor inicial y de frontera:**

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \gamma \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t), \text{ para } \begin{cases} a < x < b \\ 0 < t \leq t_0 \end{cases} \quad (2.60)$$

$$u(a, t) = u_a(t), \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} = g_0(t), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.61)$$

■

**2.3.7. Definición.** El problema de determinar los valores de la constante  $\lambda$  tal que

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left( k \frac{du}{dx} \right) = \lambda u, & \text{para } a < x < b \\ u(a) = 0, \quad \left( k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (2.62)$$

se denomina *problema de valores propios* asociado con la ecuación diferencial (2.56). ■

### Fórmulas de integración por partes.

Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones en  $x \in \mathbb{R}$ , suficientemente diferenciables, entonces las siguientes fórmulas de *integración por partes* se cumplen:

$$\bullet) \int_a^b g f' dx = - \int_a^b f g' dx + g(b)f(b) - g(a)f(a) \quad (2.63)$$

$$\bullet) \int_a^b g f'' dx = - \int_a^b f' g' dx + g(b)f'(b) - g(a)f'(a) \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \bullet) \int_a^b g f^{iv} dx &= \int_a^b f'' g'' dx + f''(a)g'(a) - f''(b)g'(b) + \\ &+ g(b)f'''(b) - g(a)f'''(a) \end{aligned} \quad (2.65)$$

### **2.3.4. Teorema. Teorema del Gradiente**

Sea  $F(x, y)$  una función escalar de clase  $C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$  entonces se cumple

$$\int \mathbf{grad} F dx dy = \int_{\Omega} \nabla F dx dy = \oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{n}} F ds \quad (2.66)$$

La ecuación (2.66) es llamado el *teorema del gradiente*. ■

### 2.3.5. Teorema. Teorema de la Divergencia

Sea  $\mathbf{G}(x, y)$  una función escalar de clase  $C^0(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$  entonces se cumple

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{G} \, dx \, dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{G} \, dx \, dy = \oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{G} \, ds \quad (2.67)$$

La ecuación (2.67) es llamado el *teorema de la divergencia*. ■

En la fórmula (2.66), del Teorema del Gradiente, si hacemos  $F = wG$ , donde  $w$  y  $G$  son funciones escalares definidas en  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  obtenemos

$$\int_{\Omega} (\nabla G) w \, dx \, dy = - \int_{\Omega} (\nabla w) G \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{n}} w G \, ds \quad (2.68)$$

y usando el teorema de la divergencia, (2.67), haciendo  $\mathbf{G} = (\nabla G) w$ , con  $w$  y  $G$  como antes, obtenemos

$$- \int_{\Omega} (\nabla^2 G) w \, dx \, dy = \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla G \, dx \, dy - \oint_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n} w \, ds \quad (2.69)$$

donde  $\frac{\partial}{\partial n}$  es el *operador derivada normal*,

$$\frac{\partial}{\partial n} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \nabla = n_x \frac{\partial}{\partial x} + n_y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.70)$$

La ecuación (2.68) es equivalente a:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial G}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial G}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} \right) w \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \vec{\mathbf{i}} + \frac{\partial w}{\partial y} \vec{\mathbf{j}} \right) G \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} \left( n_x \vec{\mathbf{i}} + n_y \vec{\mathbf{j}} \right) w G \, ds \quad (2.71)$$

Igualando vectores tenemos

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial x} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x} G \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} n_x w G \, ds \quad (2.72)$$

$$\int_{\Omega} w \frac{\partial G}{\partial y} \, dx \, dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial y} G \, dx \, dy + \oint_{\Gamma} n_y w G \, ds \quad (2.73)$$

## 2.4. Aproximación de Funciones lineales por trozos

Generalmente se tiene una función suave  $f$  la cual necesita ser aproximada por polinomios. Sin embargo, esa función  $f$  puede ser continua a trozos, más aún segmentos de recta, que unidas, forman una poligonal, como en la Figura (2.14).

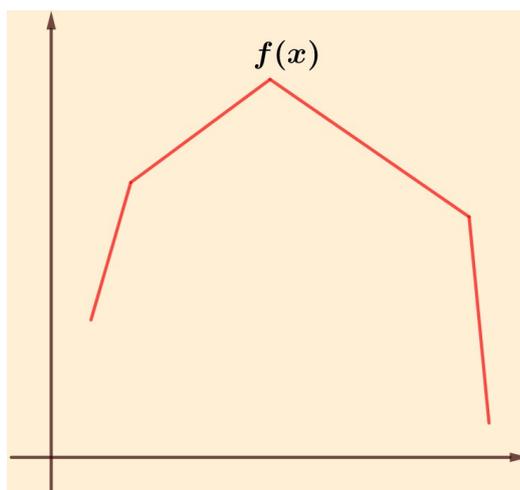


Figura 2.14: Función poligonal  $f(x)$ .

Sean los puntos  $(x_k, f(x_k)) = (x_k, f_k) \in [0, 1]$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , vértices de una poligonal, talque  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$ , como en la Figura (2.15). Para el subintervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  se tienen los puntos  $(x_k, f_k)$  y  $(x_{k+1}, f_{k+1})$ , interpolando

linealmente con polinomios de Lagrange, como en (2.48), tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_k) \cdot \left( \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) + f(x_{k+1}) \cdot \left( \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \\ &= \frac{f(x_k) \cdot (x_{k+1} - x) + f(x_{k+1}) \cdot (x - x_k)}{x_{k+1} - x_k} \end{aligned}$$

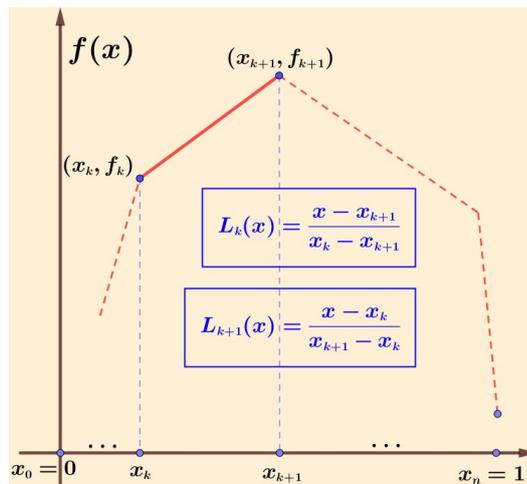


Figura 2.15: Interpolación lineal.

Entonces, podemos aproximar utilizando los polinomios de Bernstein, sin embargo estos polinomios coincide con  $f$  sólo en los extremos. De acuerdo al Teorema (2.2.1), Teorema de Aproximación, existe una aproximación buena y uniforme, es decir que los polinomios de Bernstein nos dan esa buena aproximación. La siguiente Proposición (2.4.1) nos da un comportamiento habitual de los polinomios de Bernstein, su aproximación en forma monótona para funciones poligonales cóncavas.

**2.4.1. Proposición.** Sean las funciones  $f$  y  $g$  definidas sobre el intervalo  $[0, 1]$ , tal que  $\forall x \in [0, 1]$  se tenga  $f(x) \leq g(x)$ , entonces sus aproximaciones

mediante polinomios de Bernstein del mismo grado mantienen la relación de orden, es decir

$$B_n(\mathbf{f}, x) \leq B_n(\mathbf{g}, x), \forall x \in [0, 1].$$

■

**Demostración.**

Una de las propiedades de los polinomios básicos de Bernstein,  $\beta_{n,k}(x)$ , es que

$$0 \leq \beta_{n,k}(x) \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Entonces,  $\beta_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geq 0$  y las aproximaciones de  $f$  y  $g$  por medio de los polinomios de Bernstein de grado  $n$  son respectivamente

$$B_n(\mathbf{f}, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \beta_{n,k}(x)$$

$$B_n(\mathbf{g}, x) = \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \beta_{n,k}(x)$$

Por hipótesis,  $f(x) \leq g(x)$ ,  $\forall x \in [0, 1]$ , esto implica que para  $x = \frac{k}{n}$

$$f\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \leq 0 \longrightarrow (f-g)\left(\frac{k}{n}\right) \leq 0 \implies (f-g)\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \beta_{n,k}(x) \leq 0$$

y así,  $\sum_{k=0}^n (f-g)\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \beta_{n,k}(x) \leq 0 \implies B_n(\mathbf{f}-\mathbf{g}, x) \leq 0$ , y por la linealidad

de  $B_n$  con respecto al primer argumento, se tendrá

$$B_n(\mathbf{f}, x) \leq B_n(\mathbf{g}, x), \forall x \in [0, 1].$$

■

**2.4.1. Ejemplo.** Consideremos las funciones  $f(x) = \frac{x^7 - x}{5}$  y  $g(x) = x e^{-3x}$ , para  $x \in [0, 1]$ , los polinomios de Bernstein para ambas funciones se muestran

a continuación

(\*) Para  $n = 1$ :

$$B_1(\mathbf{f}, x) = 0$$

$$B_1(\mathbf{g}, x) = e^{-3} x$$

(\*) Para  $n = 2$ :

$$B_2(\mathbf{f}, x) = \frac{63}{320} x (x - 1)$$

$$B_2(\mathbf{g}, x) = e^{-3} x^2 - e^{-3/2} x (x - 1)$$

(\*) Para  $n = 3$ :

$$B_3(\mathbf{f}, x) = \frac{14}{3645} x (43x^2 + 9x - 52)$$

$$B_3(\mathbf{g}, x) = e^{-3} x (x + e - ex)^2$$

(\*) Para  $n = 4$ :

$$B_4(\mathbf{f}, x) = \frac{21}{20480} x (9x + 86x^2 + 100x^3 - 195)$$

$$B_4(\mathbf{g}, x) = e^{-3} x (x + e^{3/4} - e^{3/4} x)^3$$

(\*) Para  $n = 5$ :

$$B_5(\mathbf{f}, x) = \frac{84}{78125} x (3x + 43x^2 + 100x^3 + 40x^4 - 186)$$

$$B_5(\mathbf{g}, x) = e^{-3} x (x + e^{3/5} - e^{3/5} x)^4$$

(\*) Para  $n = 6$ :

$$B_6(\mathbf{f}, x) = \frac{7}{46656} x (9x + 172x^2 + 600x^3 + 480x^4 + 72x^5 - 1333)$$

$$B_6(\mathbf{g}, x) = e^{-3} x (x + e^{1/2} - e^{1/2} x)^5$$

■

En la Figura (2.16) se muestran  $f(x)$  y  $g(x)$  junto con sus polinomios de Bernstein,  $B_n(\mathbf{f}, x)$  y  $B_n(\mathbf{g}, x)$  para  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Se observa que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \leq g(x)$  se verifica la Proposición (2.4.1), es decir que se cumple  $B_n(\mathbf{f}, x) \leq B_n(\mathbf{g}, x)$ .

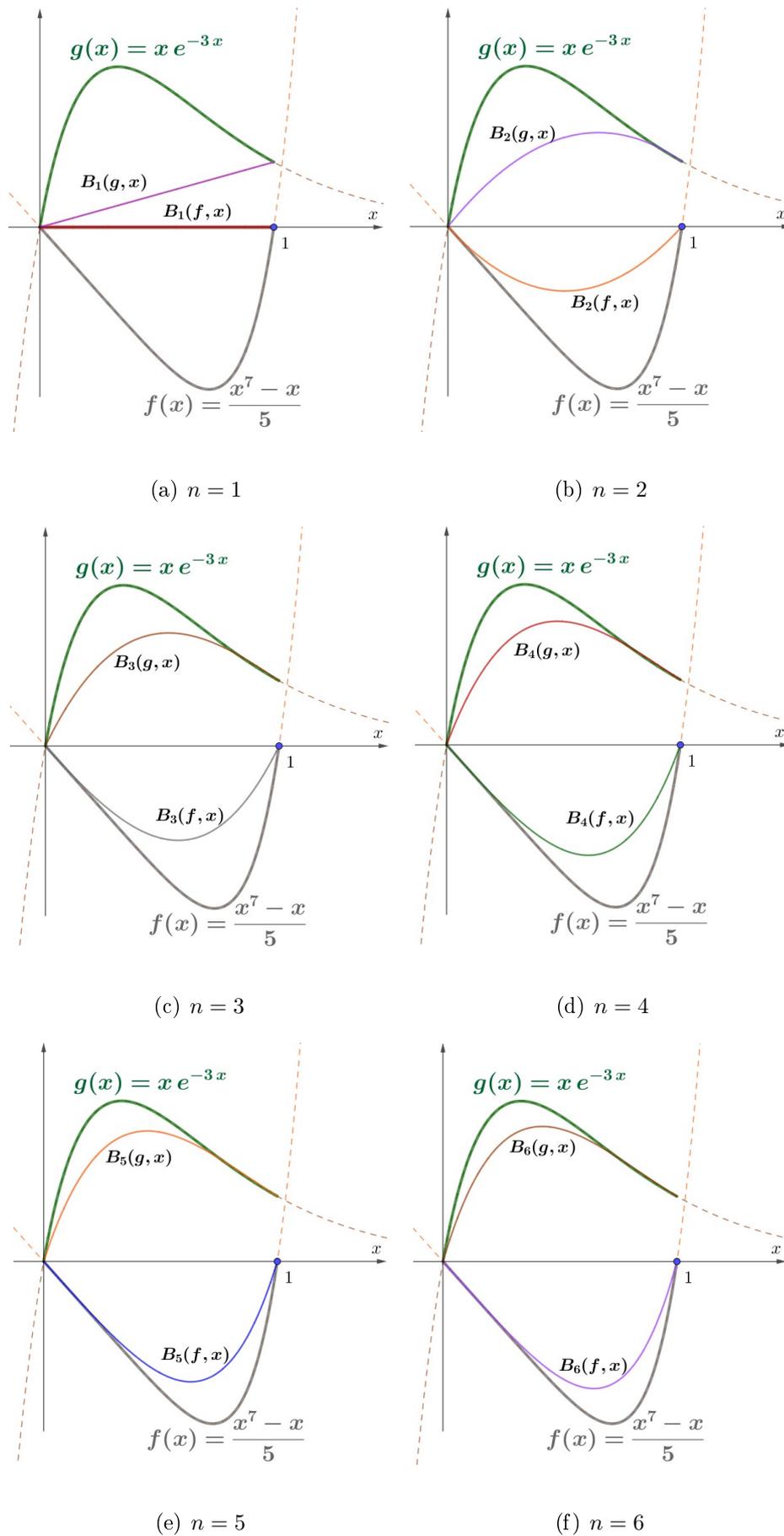


Figura 2.16: Polinomios de Bernstein, para  $f$  y  $g$  en  $x \in [0, 1]$ .

Para funciones poligonales, los puntos  $(x_k, f(x_k))$  se consideran como *puntos de control*, los cuales se pueden mover y se pueden obtener polinomios de Bernstein a nuestra conveniencia. Casteljaou inició con esta idea geométrica. Luego Bernstein le dio énfasis analítico.

**2.4.1. Definición.** Una curva de Bézier de grado  $n$  para los  $n + 1$  puntos de control  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ , cuyas abscisas están en  $[0, 1]$ , se define como

$$P(x) = \sum_{k=0}^n p_k \beta_{n,k}(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.74)$$

donde los  $\beta_{n,k}(x)$  son los polinomios básicos de Bernstein. ■

**2.4.2. Ejemplo.** Ahora consideremos la función poligonal cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(0.2, 4)$ ,  $(0.5, 4.5)$ ,  $(0.6, 4)$  y  $(1, 0)$ . Esta función es convexa y los polinomios de Bernstein serán también convexos. Damos estos polinomios para  $n = 2, 3, 10, 50$ . ■

(\*) Para  $n = 2$ :

$$P(x) = B_2(\mathbf{f}, x) = -9x(x - 1)$$

(\*) Para  $n = 3$ :

$$P(x) = B_3(\mathbf{f}, x) = \frac{2}{3}x(4x^2 - 23x + 19)$$

(\*) Para  $n = 10$ :

$$P(x) = B_{10}(\mathbf{f}, x) = -2x(110x^2 - 385x^3 + 693x^4 - 700x^5 + 380x^6 - 90x^7 + 2x^9 - 10)$$

(\*) Para  $n = 50$ :

$$\begin{aligned}
B_{50}(x) = & \mathbf{a}_1 x z^{49} + \mathbf{a}_2 x^2 z^{48} + \mathbf{a}_3 x^3 z^{47} + \mathbf{a}_4 x^4 z^{46} + \mathbf{a}_5 x^5 z^{45} + \mathbf{a}_6 x^6 z^{44} \\
& + \mathbf{a}_7 x^7 z^{43} + \mathbf{a}_8 x^8 z^{42} + \mathbf{a}_9 x^9 z^{41} + \mathbf{a}_{10} x^{10} z^{40} + \mathbf{a}_{11} x^{11} z^{39} + \mathbf{a}_{12} x^{12} z^{38} \\
& + \mathbf{a}_{13} x^{13} z^{37} + \mathbf{a}_{14} x^{14} z^{36} + \mathbf{a}_{15} x^{15} z^{35} + \mathbf{a}_{16} x^{16} z^{34} + \mathbf{a}_{17} x^{17} z^{33} + \mathbf{a}_{18} x^{18} z^{32} \\
& + \mathbf{a}_{19} x^{19} z^{31} + \mathbf{a}_{20} x^{20} z^{30} + \mathbf{a}_{21} x^{21} z^{29} + \mathbf{a}_{22} x^{22} z^{28} + \mathbf{a}_{23} x^{23} z^{27} + \mathbf{a}_{24} x^{24} z^{26} \\
& + \mathbf{a}_{25} x^{25} z^{25} + \mathbf{a}_{26} x^{26} z^{24} + \mathbf{a}_{27} x^{27} z^{23} + \mathbf{a}_{28} x^{28} z^{22} + \mathbf{a}_{29} x^{29} z^{21} + \mathbf{a}_{30} x^{30} z^{20} \\
& + \mathbf{a}_{31} x^{31} z^{19} + \mathbf{a}_{32} x^{32} z^{18} + \mathbf{a}_{33} x^{33} z^{17} + \mathbf{a}_{34} x^{34} z^{16} + \mathbf{a}_{35} x^{35} z^{15} + \mathbf{a}_{36} x^{36} z^{14} \\
& + \mathbf{a}_{37} x^{37} z^{13} + \mathbf{a}_{38} x^{38} z^{12} + \mathbf{a}_{39} x^{39} z^{11} + \mathbf{a}_{40} x^{40} z^{10} + \mathbf{a}_{41} x^{41} z^9 + \mathbf{a}_{42} x^{42} z^8 \\
& + \mathbf{a}_{43} x^{43} z^7 + \mathbf{a}_{44} x^{44} z^6 + \mathbf{a}_{45} x^{45} z^5 + \mathbf{a}_{46} x^{46} z^4 + \mathbf{a}_{47} x^{47} z^3 + 490 x^{48} z^2 \\
& - 10 x^{49} z
\end{aligned}$$

donde  $z = x - 1$  y

$$\mathbf{a}_1 = -20; \mathbf{a}_2 = +980; \mathbf{a}_3 = -23520; \mathbf{a}_4 = +368480; \mathbf{a}_5 = -4237520;$$

$$\mathbf{a}_6 = +38137680; \mathbf{a}_7 = -279676320; \mathbf{a}_8 = +1718011680; \mathbf{a}_9 = -9019561320;$$

$$\mathbf{a}_{10} = +41089112680; \mathbf{a}_{11} = -\frac{451980239480}{3}; \mathbf{a}_{12} = +\frac{1481075743420}{3};$$

$$\mathbf{a}_{13} = -1454928126260; \mathbf{a}_{14} = +\frac{11629286138120}{3}; \mathbf{a}_{15} = -9378456563000;$$

$$\mathbf{a}_{16} = +20679496721415; \mathbf{a}_{17} = -41687239422535; \mathbf{a}_{18} = +\frac{231085169712320}{3};$$

$$\mathbf{a}_{19} = -130745556547760; \mathbf{a}_{20} = +\frac{612679759171480}{3}; \mathbf{a}_{21} = -\frac{881989543422680}{3};$$

$$\mathbf{a}_{22} = +390499187164240; \mathbf{a}_{23} = -\frac{1436975269762480}{3}; \mathbf{a}_{24} = +542917348162140;$$

$$\mathbf{a}_{25} = -568847728969884; \mathbf{a}_{26} = +534814104159720; \mathbf{a}_{27} = -464585989472080;$$

$$\mathbf{a}_{28} = +372749224111320; \mathbf{a}_{29} = -276042528857480; \mathbf{a}_{30} = +188516848975840;$$

$$\mathbf{a}_{31} = -115542584856160; \mathbf{a}_{32} = +64992703981590; \mathbf{a}_{33} = -33481089929910;$$

$$\mathbf{a}_{34} = +15755807025840; \mathbf{a}_{35} = -6752488725360; \mathbf{a}_{36} = +2625967837640;$$

$$\mathbf{a}_{37} = -922637348360; \mathbf{a}_{38} = +291359162640; \mathbf{a}_{39} = -82178225360;$$

$$\mathbf{a}_{40} = +20544556340; \mathbf{a}_{41} = -4509780660; \mathbf{a}_{42} = +859005840; \mathbf{a}_{43} = -139838160;$$

$$\mathbf{a}_{44} = +19068840; \mathbf{a}_{45} = -2118760; \mathbf{a}_{46} = +184240; \mathbf{a}_{47} = -11760;$$

En la Figura (2.17) se muestran los puntos de control  $(x_i, f_i)$ ,  $f(x)$  y sus polinomios de Bernstein  $B_n(\mathbf{f}, x)$  para grados  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 10$  y  $n = 50$ .

Se puede observar que los polinomios de Bernstein asociados a  $f$  son convexos.

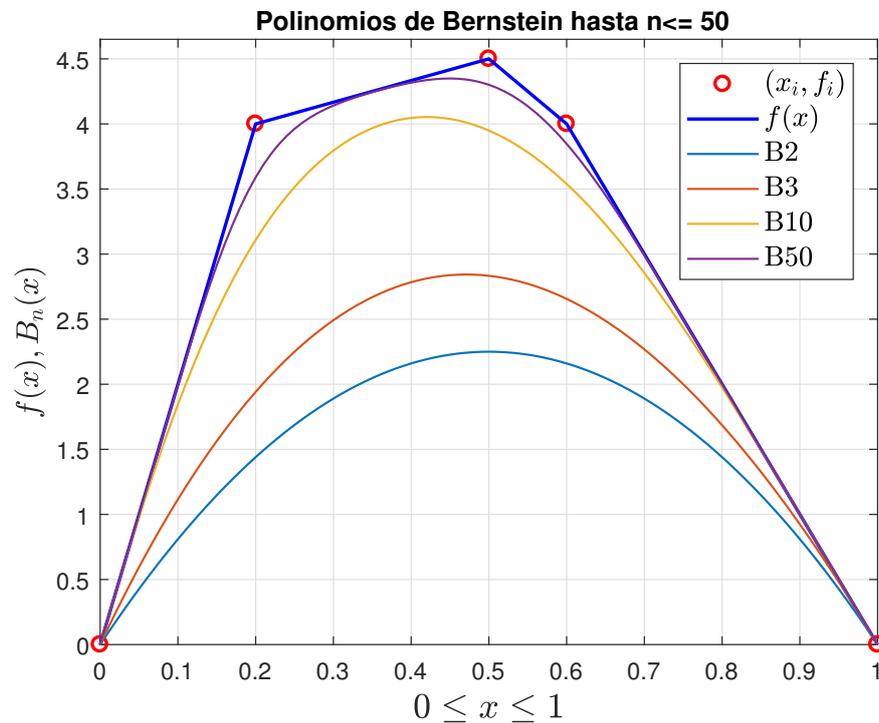


Figura 2.17: Puntos de control  $(x_i, f_i)$ , poligonal  $f(x)$  (convexa) y sus polinomios de Bernstein  $B_n(\mathbf{f}, x)$ , para  $n = 2, 3, 10, 50$ .

**2.4.3. Ejemplo.** Tomemos la función poligonal cóncava  $f(x)$  cuyos vértices son  $(0, 0)$ ,  $(0.4, 2.5)$ ,  $(0.5, 4.5)$ ,  $(0.7, 5)$ ,  $(0.9, 4)$  y  $(1, 0)$ . Los polinomios de Bernstein que presentaremos son para  $n = 2, 3, 10, 28, 50$ . ■

La función poligonal  $f(x)$ , para  $x \in [0, 1]$ , viene dada por

$$f(x) = \frac{25}{4}x + \frac{11}{4}(5x - 2)\mu_{0.4}(x) + \frac{35}{4}(1 - 2x)\mu_{0.5}(x) + \frac{3}{4}(7 - 10x)\mu_{0.7}(x) \\ + \left(\frac{63}{2} - 35x\right)\mu_{0.9}(x)$$

(\*) Para  $n = 2$ :

$$P(x) = B_2(\mathbf{f}, x) = -9x(x - 1)$$

(\*) Para  $n = 3$ :

$$P(x) = B_3(\mathbf{f}, x) = \frac{25}{4}x(x - 1)^2 - \frac{59}{4}x^2(x - 1)$$

(\*) Para  $n = 10$ :

$$P(x) = B_{10}(\mathbf{f}, x) = -\frac{25}{4}x(x - 1)^9 + \frac{225}{4}x^2(x - 1)^8 - 225x^3(x - 1)^7 \\ + 525x^4(x - 1)^6 - 1134x^5(x - 1)^5 + \frac{1995}{2}x^6(x - 1)^4 \\ - 600x^7(x - 1)^3 + \frac{405}{2}x^8(x - 1)^2 - 40x^9(x - 1)$$

(\*) Para  $n = 28$ :

$$B_{28}(x) = \mathbf{b}_1 x w^{27} + \mathbf{b}_2 x^2 w^{26} + \mathbf{b}_3 x^3 w^{25} + \mathbf{b}_4 x^4 w^{24} + \mathbf{b}_5 x^5 w^{23} + \mathbf{b}_6 x^6 w^{22} + \mathbf{b}_7 x^7 w^{21} \\ + \mathbf{b}_8 x^8 w^{20} + \mathbf{b}_9 x^9 w^{19} + \mathbf{b}_{10} x^{10} w^{18} + \mathbf{b}_{11} x^{11} w^{17} + \mathbf{b}_{12} x^{12} w^{16} + \mathbf{b}_{13} x^{13} w^{15} \\ + \mathbf{b}_{14} x^{14} w^{14} + \mathbf{b}_{15} x^{15} w^{13} + \mathbf{b}_{16} x^{16} w^{12} + \mathbf{b}_{17} x^{17} w^{11} + \mathbf{b}_{18} x^{18} w^{10} \\ + \mathbf{b}_{19} x^{19} w^9 + \mathbf{b}_{20} x^{20} w^8 + \mathbf{b}_{21} x^{21} w^7 + \mathbf{b}_{22} x^{22} w^6 + \mathbf{b}_{23} x^{23} w^5 \\ + \mathbf{b}_{24} x^{24} w^4 + \mathbf{b}_{25} x^{25} w^3 + \mathbf{b}_{26} x^{26} w^2 + \mathbf{b}_{27} x^{27} w$$

donde  $w = x - 1$  y

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{25}{4}; b_2 = +\frac{675}{4}; b_3 = -\frac{8775}{4}; b_4 = +\frac{73125}{4}; b_5 = -\frac{219375}{2}; b_6 = +\frac{1009125}{2}; \\
b_7 &= -\frac{3700125}{2}; b_8 = +\frac{11100375}{2}; b_9 = -\frac{55501875}{4}; b_{10} = +\frac{117170625}{4}; \\
b_{11} &= -\frac{210907125}{4}; b_{12} = +\frac{186876495}{2}; b_{13} = -141745320; b_{14} = +180524700; \\
b_{15} &= -171832770; b_{16} = +\frac{569321415}{4}; b_{17} = -\frac{204771645}{2}; b_{18} = +63740820; \\
b_{19} &= -\frac{68328975}{2}; b_{20} = +\frac{30637035}{2}; b_{21} = -5624190; b_{22} = +1722240; \\
b_{23} &= -431730; b_{24} = +\frac{172575}{2}; b_{25} = -13221; b_{26} = +1080; b_{27} = -40;
\end{aligned}$$

(\*) Para  $n = 50$ :

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_1 x z^{49} + a_2 x^2 z^{48} + a_3 x^3 z^{47} + a_4 x^4 z^{46} + a_5 x^5 z^{45} + a_6 x^6 z^{44} + a_7 x^7 z^{43} \\
&+ a_7 x^7 z^{43} + a_8 x^8 z^{42} + a_9 x^9 z^{41} + a_{10} x^{10} z^{40} + a_{11} x^{11} z^{39} + a_{12} x^{12} z^{38} \\
&+ a_{13} x^{13} z^{37} + a_{14} x^{14} z^{36} + a_{15} x^{15} z^{35} + a_{16} x^{16} z^{34} + a_{17} x^{17} z^{33} + a_{18} x^{18} z^{32} \\
&+ a_{19} x^{19} z^{31} + a_{20} x^{20} z^{30} + a_{21} x^{21} z^{29} + a_{22} x^{22} z^{28} + a_{23} x^{23} z^{27} + a_{24} x^{24} z^{26} \\
&+ a_{25} x^{25} z^{25} + a_{26} x^{26} z^{24} + a_{27} x^{27} z^{23} + a_{28} x^{28} z^{22} + a_{29} x^{29} z^{21} + a_{30} x^{30} z^{20} \\
&+ a_{31} x^{31} z^{19} + a_{32} x^{32} z^{18} + a_{33} x^{33} z^{17} + a_{34} x^{34} z^{16} + a_{35} x^{35} z^{15} + a_{36} x^{36} z^{14} \\
&+ a_{37} x^{37} z^{13} + a_{38} x^{38} z^{12} + a_{39} x^{39} z^{11} + a_{40} x^{40} z^{10} + a_{41} x^{41} z^9 + a_{42} x^{42} z^8 \\
&+ a_{43} x^{43} z^7 + a_{44} x^{44} z^6 + a_{45} x^{45} z^5 + a_{46} x^{46} z^4 + a_{47} x^{47} z^3 + 1960 x^{48} z^2 \\
&- 40 x^{49} z
\end{aligned}$$

donde  $z = x - 1$  y

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{25}{4}; a_2 = +\frac{1225}{4}; a_3 = -7350; a_4 = +115150; a_5 = -1324225; \\
a_6 &= +11918025; a_7 = -87398850; a_8 = +536878650; a_9 = -\frac{5637225825}{2}; \\
a_{10} &= +\frac{25680695425}{2}; a_{11} = -51361390850; a_{12} = +182099476650;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{13} &= -576648342725; \mathbf{a}_{14} = +1641229898525; \mathbf{a}_{15} = -4220305453350; \\
\mathbf{a}_{16} &= +9847379391150; \mathbf{a}_{17} = -\frac{83702724824775}{4}; \mathbf{a}_{18} = +\frac{162481759953975}{4}; \\
\mathbf{a}_{19} &= -72214115535100; \mathbf{a}_{20} = +117823030609900; \mathbf{a}_{21} = -195249593582120; \\
\mathbf{a}_{22} &= +292874390373180; \mathbf{a}_{23} = -399760037452720; \mathbf{a}_{24} = +498349506148830; \\
\mathbf{a}_{25} &= -568847728969884; \mathbf{a}_{26} = +553046403165165; \mathbf{a}_{27} = -496998965481760; \\
\mathbf{a}_{28} &= +412686640980390; \mathbf{a}_{29} = -316438996495160; \mathbf{a}_{30} = +223863758158810; \\
\mathbf{a}_{31} &= -145948528239360; \mathbf{a}_{32} = +\frac{350238460345235}{4}; \mathbf{a}_{33} = -48252159016635; \\
\mathbf{a}_{34} &= +\frac{97489055972385}{4}; \mathbf{a}_{35} = -11254147875600; \mathbf{a}_{36} = +4595443715870; \\
\mathbf{a}_{37} &= -1703330489280; \mathbf{a}_{38} = +570578360170; \mathbf{a}_{39} = -171827198480; \\
\mathbf{a}_{40} &= +46225251765; \mathbf{a}_{41} = -11023908280; \mathbf{a}_{42} = +2308578195; \mathbf{a}_{43} = -419514480; \\
\mathbf{a}_{44} &= +65151870; \mathbf{a}_{45} = -8475040; \mathbf{a}_{46} = +736960; \mathbf{a}_{47} = -47040;
\end{aligned}$$

En la Figura (2.18) se muestran los puntos de control  $(x_i, f_i)$ ,  $f(x)$  cóncava y sus polinomios de Bernstein  $B_n(\mathbf{f}, x)$  para grados  $n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 10$ ,  $n = 28$  y  $n = 50$ . Aquí se manifiesta que los polinomios de Bernstein para cierto grado son cóncavas.

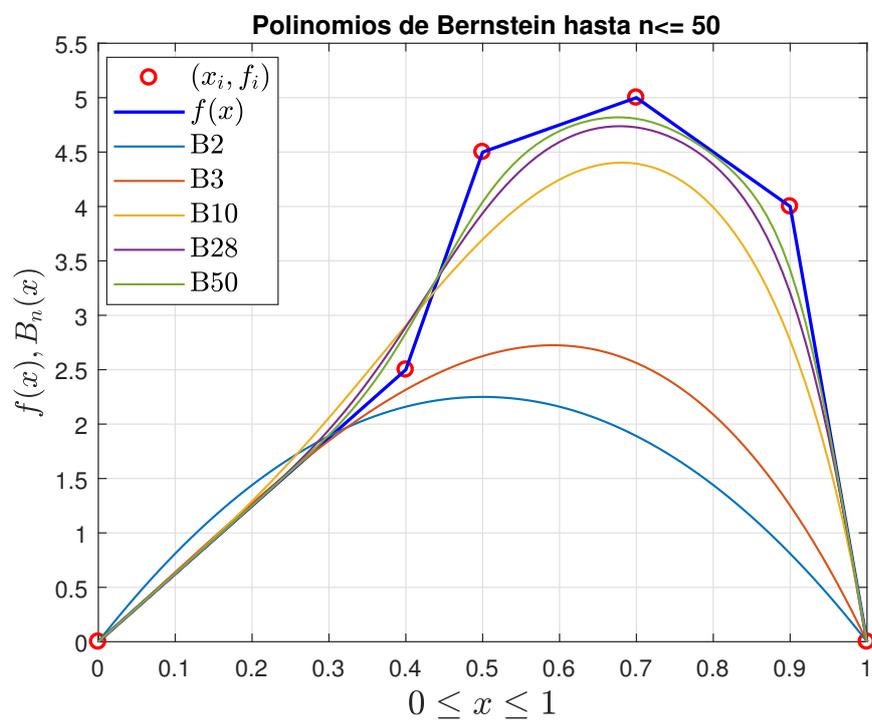


Figura 2.18: Puntos de control  $(x_i, f_i)$ , poligonal  $f(x)$  (cóncava) y los polinomios de Bernstein asociados a  $f$ ,  $B_n(f, x)$ , para  $n = 2, 3, 10, 28, 50$ .

## 2.5. Formulación Variacional

Sea una ecuación diferencial con condiciones de frontera, los métodos espectrales, entonces, aproximan la solución exacta  $u(x)$  por medio de una combinación lineal finita

$$\hat{u}(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i\varphi_i(x).$$

Si se tiene dependencia del tiempo, tendríamos

$$u(x, t) \approx \hat{u}(x, t) = \sum_{i=0}^n a_i(t)\varphi_i(x).$$

El residuo al emplear  $\hat{u}$  por  $u$  es

$$r(x) = u(x) - \hat{u}(x) = u(x) - \sum_{i=0}^n a_i\varphi_i(x).$$

### 2.5.1. El Teorema de Proyección

El teorema de proyección nos da garantía de la existencia de una aproximación  $w$  de  $u$ , es decir que  $\|u - w\|$  sea lo más pequeño que se desee. Es por ello que la idea de ortogonalidad se da en espacios producto interior como  $L^2(\Omega)$ .

Recordemos que, si  $u$  y  $v$  están en  $\mathbf{V}$  (espacio producto interior) y se cumple que  $\langle u, v \rangle = 0$ , entonces

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

**2.5.1. Teorema.** *Sea  $\mathbf{V}$  un espacio producto interior y  $\mathbf{W}$  un subespacio finito dimensional de  $\mathbf{V}$ . Si  $u \in \mathbf{V}$  (Pita, 1991), entonces*

(i)  $\exists! \omega \in \mathbf{W}$ , tal que

$$\|u - \omega\| < \|u - v\|, \quad \forall v \in \mathbf{W}, v \neq \omega.$$

Al elemento  $\omega$  se le denomina la mejor aproximación de  $u$  en  $\mathbf{W}$

(ii)  $\omega$  es la mejor aproximación para  $u$  de  $\mathbf{W}$  siempre y cuando el residual es ortogonal a cualquier elemento de  $\mathbf{W}$ , es decir

$$\forall z \in \mathbf{W} : \langle u - \omega, z \rangle = 0.$$

■

Veamos ahora la formulación matemática llamada formulación fuerte.

### 2.5.2. Formulación Fuerte

El siguiente modelo (2.75), es llamado **formulación fuerte** porque considera todas las exigencias para la función solución como el orden de derivabilidad y el cumplimiento de las condiciones de contorno en todo punto de su dominio.

Sea la ecuación diferencial con condiciones de contorno:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(u) = f, & \text{en } \Omega \\ \mathcal{B}(u) = g, & \text{sobre } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (2.75)$$

donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son operadores diferenciales lineales, y sea una solución aproximada  $\hat{u}$  que está en un subespacio  $\mathbf{V}$  del espacio  $\mathcal{V}$ .

Al sustituir  $\hat{u}$  en la primera de las ecuaciones de (2.75), no siempre se tendrá la igualdad, generando entonces un error llamado **error residual**  $r = r(\hat{u})$ ,

$$r = \mathcal{A}(\hat{u}) - f \quad (2.76)$$

Debemos distribuir el error en todo  $\Omega$  según una función peso  $\omega \in \mathbf{W}$ , este espacio  $\mathbf{W}$  es un espacio adecuado donde el error acumulado se anule en todo el dominio. Esto significa que

$$\int_{\Omega} r \omega d\Omega = 0. \quad (2.77)$$

o en forma similar, de (2.76),

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}(\hat{u}) - f) \omega d\Omega = 0. \quad (2.78)$$

Hay que tener en cuenta que si se cumple (2.78) para toda  $\omega \in \mathbf{W}$  entonces la ecuación diferencial debe satisfacerse en todo su dominio, y si las condiciones de contorno (segunda ecuación de (2.75)), entonces

$$\int_{\Gamma} (\mathcal{B}(\hat{u}) - g) v d\Gamma = 0. \quad (2.79)$$

donde  $v \in \hat{\mathbf{W}}$ : espacio definido en  $\Gamma$ .

De (2.78) y de (2.79) se tiene la identidad

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}(\hat{u}) - f) \omega d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathcal{B}(\hat{u}) - g) v d\Gamma = 0. \quad (2.80)$$

Asumimos que, de la elección adecuada de los espacios  $\mathbf{W}$  y  $\hat{\mathbf{W}}$ , las integrales en (2.80) existen  $\forall \omega \in \mathbf{W}$  y para  $v \in \hat{\mathbf{W}}$ .

### 2.5.3. Formulación Débil

Si a la función desconocida le pedimos un orden de derivabilidad menor y que satisfaga, ya no en cada punto, sino que satisfaga en promedio la ecuación diferencial y condiciones de contorno (2.75), a esta formulación se le denomina

**formulación débil** del problema (2.75). Siendo así, (2.80) se puede escribir como

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}(\hat{u})\mathcal{C}\omega - f\omega) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathcal{B}(\hat{u})\mathcal{C}v - gv) d\Gamma = 0 \quad (2.81)$$

donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son operadores que contienen derivadas de orden menor que las derivadas de que contienen los operadores  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ . A la formulación (2.81) se le llama **Formulación débil**. La formulación débil (2.81) se puede escribir mediante funcionales lineales ( $\mathbf{j}$ ) y formas bilineales ( $\mathbf{a}$ ), es decir

$$\mathbf{a}(\hat{u}, \omega) = \mathbf{j}(\omega), \quad \omega \in \mathbf{W} \quad (2.82)$$

El problema variacional débil será

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \hat{u} \in \mathbf{V} \\ \mathbf{a}(\hat{u}, w) = \mathbf{j}(w), \quad \forall w \in \mathbf{W}. \end{array} \right. \quad (2.83)$$

Veremos a continuación una manera de resolver, aproximadamente, el problema (2.83).

En (Gottlieb y Orszag, 1977) y (Canuto et al., 1988) emplean los métodos espectrales, en los cuales la función solución de (2.75) es una serie de funciones llamadas **base**.

#### 2.5.4. Formulación variacional de problemas de contorno (PVC)

Recordemos algunas definiciones.

**Espacios  $L^p$**

$$L^p = \left\{ f \text{ medible} : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty \right\} \quad (2.84)$$

Para la función  $f(x) = \frac{1}{2x}$  en el conjunto  $\Omega = [1, +\infty[$ , vemos que

$$\int_{\Omega=[1,+\infty[} \left(\frac{1}{2x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} dx = +\infty$$

$$\int_{\Omega=[1,+\infty[} \left(\frac{1}{2x}\right)^2 dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2x}\right)^2 dx = \frac{1}{4}$$

Esto significa que  $\frac{1}{2x} \notin L^1([1, +\infty[)$  pero que  $\frac{1}{2x} \in L^2([1, +\infty[)$ .

En los espacios  $L^p$  los elementos son vistos como clases. Por ejemplo, en  $\Omega = [1, +\infty[$ , las funciones (Ver Figura (2.19))

$$f(x) = \frac{1}{2x} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x = 3 \\ \frac{1}{2x} & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

son distintas, sin embargo para efectos de integración son prácticamente las mismas en  $L^2([1, +\infty[)$ . Es decir que son iguales en casi todo punto (c.t.p)

$$f \stackrel{\text{c.t.p}}{\equiv} g \in L^2([1, +\infty[).$$

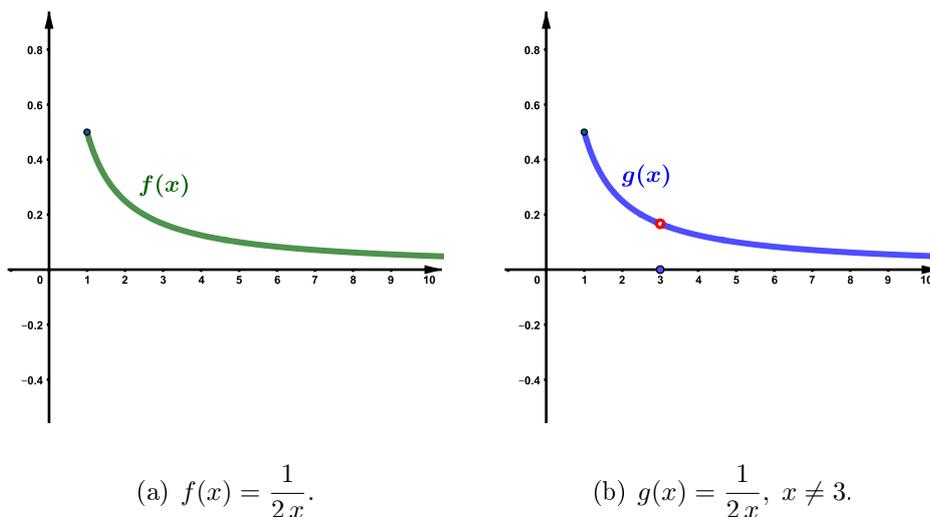


Figura 2.19: Funciones esencialmente iguales en  $L^2([1, +\infty[)$ .

Como se vio en la formulación débil, también es necesario tener claro la idea de derivar débilmente.

### Derivación débil

A fin de que quede clara la idea de debilitar, veamos la siguiente ecuación diferencial (un problema de contorno)

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 4, & x \in ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

Resolviendo, tenemos las soluciones (Ver Figura (2.20))

$$u_1(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}, \quad u_2(x) = \begin{cases} -2x & , 0 < x < \frac{1}{2} \\ 2(x-1) & , \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}.$$

Como podemos observar, ni  $u_1$  ni  $u_2$  tienen derivada primera continua, es decir en el sentido clásico de las ecuaciones diferenciales **no son soluciones**, pues no son derivables. Además no existen funciones en  $C^1(]0, 1[)$  que satisfagan

(2.85). Es por ello que surge la necesidad de buscar soluciones que no sean tan restrictivas. Es aquí que aparece el concepto de **derivada débil**.

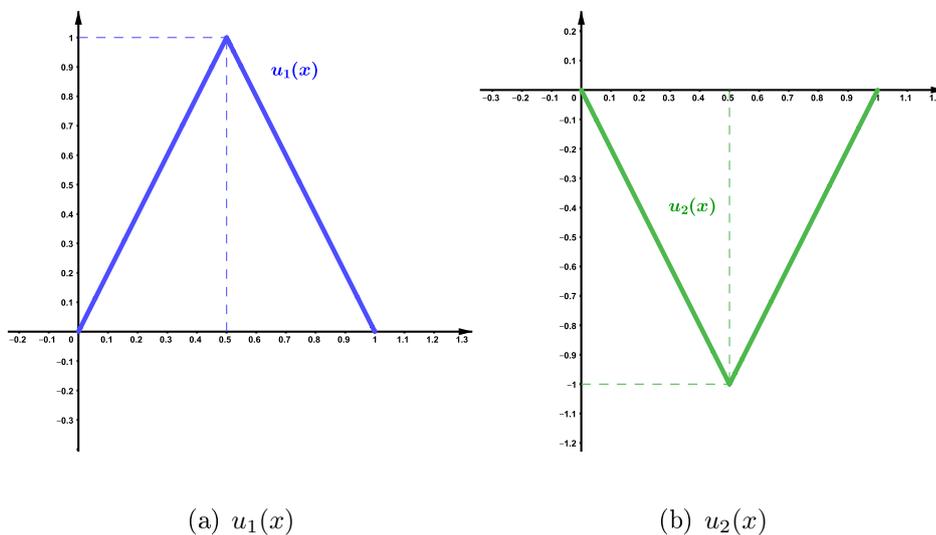


Figura 2.20: Soluciones de (2.85).

Definimos el espacio de las funciones **test**:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{sop } v \text{ es compacto en } \Omega\} \quad (2.86)$$

Se dice que  $g$  es la derivada (**débil**) de  $f$ , si se cumple

$$\int_{\Omega} f v' dx = - \int_{\Omega} g v dx, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.87)$$

Si  $f \in C^1(\Omega)$ , podemos hacer integración por partes a la integral del lado izquierdo de (2.87), y teniendo en cuenta que  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , es decir que se anula en la frontera  $\partial\Omega$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v' dx &= \underbrace{f v}_{=0} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} f' v dx = - \int_{\Omega} f' v dx \\ &\implies g = f'. \end{aligned}$$

pero la ecuación (2.87) se verifica sin que  $f \in C^1(\Omega)$ , es decir que ni siquiera se exige que sea continua, solo que esté en  $L^1$ .

Extendiendo a funciones de varias variables, tenemos la derivada de cualquier orden:

$$\int_{\Omega} \mathbf{f} \partial^{\alpha} \mathbf{v} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} \mathbf{f} \mathbf{v} \quad (2.88)$$

donde

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, \quad \partial^{\alpha} \mathbf{f} = \frac{\partial^{\alpha} \mathbf{f}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

### Espacios de Sobolev

Se define el espacio de Sobolev  $W^{k,m}(\Omega)$ , para  $k \geq 0$  y  $p \in [1, +\infty]$ :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\} \quad (2.89)$$

Algunos casos particulares:

- **$m = 0$** :  $W^{0,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 0\}$

$$|\alpha| \leq 0 \longrightarrow \alpha = \mathbf{0} = (0, \dots, 0) \longrightarrow \partial^{\mathbf{0}} v(x_1, \dots, x_n) = v \in L^p(\Omega)$$

$$\implies \boxed{W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)}. \quad (2.90)$$

- **$m = 1$** :  $W^{1,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 1\}$

$$|\alpha| \leq 1 \longrightarrow \alpha = \mathbf{0} \vee \alpha = \mathbf{e}_i \longrightarrow v, \partial^{\mathbf{e}_i} v(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega).$$

$$\implies \boxed{W^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}}$$

- **$m = 2$** :  $W^{2,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : \partial^{\alpha} v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq 2\}$

$$|\alpha| \leq 2 \longrightarrow \alpha \in \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k\} \longrightarrow \partial^{\alpha} v(x_1, \dots, x_n) \in L^p(\Omega).$$

$$\Rightarrow W^{2,p}(\Omega) = \left\{ v \in \mathbf{V} : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathbf{V}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} \in \mathbf{V}, \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

donde  $\mathbf{V} = L^p(\Omega)$ .

- Cuando  $\mathbf{p} = \mathbf{2}$ : los espacios de Sobolev  $W^{m,2}(\Omega)$  se denotan como  $H^m(\Omega)$ , es decir

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \quad (2.91)$$

Igualmente se tiene el espacio

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (2.92)$$

Veamos ahora la integración por partes, relacionada al teorema de Green.

### Integración por partes

En el sentido débil también se cumple la identidad de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Omega} \Delta u \cdot v. \quad (2.93)$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n : \text{derivada normal}; \Delta u = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right).$$

En los espacios  $L^2$  y los espacios de Sobolev  $H^m$  están definidas las normas:

$$\bullet \text{ En } L^2(\Omega) : \|u\|_0 = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad (2.94)$$

$$\bullet \text{ En } H^m(\Omega) : \|u\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_0. \quad (2.95)$$

Con los espacios vistos y la noción de derivadas débiles, las ecuaciones diferenciales, ordinarias o parciales, se pueden escribir en *forma variacional*. De acuerdo a las condiciones de contorno podemos tener diferentes formulaciones variacionales. Como veremos a continuación.

### 2.5.5. Problema de Laplace con condiciones tipo Dirichlet–homogéneas

$$\begin{cases} -\Delta u = f & , \text{ en } \Omega, \\ u = 0 & , \text{ en } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (2.96)$$

El problema (2.96) es la formulación fuerte del problema de Laplace. ¿Cuál es su *formulación variacional* o formulación débil?

Consideremos una función  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ , es decir que es regular y de soporte compacto, multiplicamos a la ecuación diferencial parcial e integramos:

$$-\Delta u \cdot v = f \cdot v \implies -\int_{\Omega} \Delta u \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

Aplicamos la fórmula de integración por partes (2.93) en la primera integral de la última de las ecuaciones

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

en vista de que la función  $v$  se anula en la frontera, la segunda integral a lo largo de la frontera  $\partial\Omega$  se anula, es decir

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f \cdot v \quad (2.97)$$

En este caso sólo se exige que  $u, v \in H_0^1(\Omega)$  y que  $f \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ .

A la ecuación (2.97) se le llama **Formulación débil del problema de Laplace** (2.96). Considerando formas bilineales y funcionales lineales podemos representar a (2.97) como sigue: Si  $\mathfrak{a}(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$  es una forma bilineal

simétrica y  $\mathbf{j}(v) = \int_{\Omega} f \cdot v$  es un funcional lineal el problema variacional queda como

$$\mathbf{PV} : \begin{cases} \text{Hallar } u \in \mathbf{V} = H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ \mathbf{a}(u, v) = \mathbf{j}(v), \forall v \in \mathbf{V}. \end{cases} \quad (2.98)$$

### 2.5.6. Una EDP con condiciones tipo Newman

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.99)$$

En forma similar que en el caso anterior, multiplicamos a la edp por una función  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  y luego integramos

$$-\Delta u \cdot v + u \cdot v = f \cdot v \implies - \int_{\Omega} (\Delta u \cdot v + u \cdot v) = \int_{\Omega} f \cdot v$$

Mediante integración por partes tenemos

$$\left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \right\} + \int_{\Omega} u \cdot v = \int_{\Omega} f \cdot v$$

$$\implies \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v) = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\partial\Omega} g \cdot v$$

en el último paso se ha hecho uso de la condición de frontera. Para el Problema Variacional (2.98), hacemos

$$\mathbf{a}(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \cdot v), \quad \mathbf{j}(u) = \int_{\Omega} f \cdot v + \int_{\partial\Omega} g \cdot v$$

con  $u, v \in \mathbf{V} = H^1(\Omega)$ .

La existencia de la solución del problema variacional **PV** (2.98) está garantizada si se satisface las condiciones del siguiente teorema.

**2.5.2. Teorema.** (*Lax–Milgram*) Sea  $\mathbf{V}$  un espacio de Hilbert,  $\mathbf{a}$  una forma bilineal continua y coerciva y  $\mathbf{j}$  lineal y continua, entonces el problema variacional  $\mathbf{PV}$  (2.98) tiene una única solución. Además si la forma bilineal  $\mathbf{a}$  es simétrica, entonces la solución  $u$  es tal que minimiza globalmente a la función

$$f(u) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(u, u) - \mathbf{j}(u).$$

■

**Demostración.**-

Ver (Czenky and Villagra, 2017).

■

En el Teorema (2.5.2) las definiciones de *continua*, *coerciva* y *simétrica* significan,  $\forall u, v \in \mathbf{V}$ :

- Se dice que  $\mathbf{a}$  es *simétrica* si  $\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{a}(v, u)$ .
- Se dice que  $\mathbf{a}$  es *continua* si  $|\mathbf{a}(u, v)| \leq \alpha \|u\|_{\mathbf{V}} \|v\|_{\mathbf{V}}$ .
- Se dice que  $\mathbf{a}$  es *coerciva* si  $|\mathbf{a}(u, u)| \geq \beta \|u\|_{\mathbf{V}}^2$ .
- Se dice que  $\mathbf{j}$  es *continua* si  $|\mathbf{j}(u)| \leq \kappa \|u\|_{\mathbf{V}}$ .

**2.5.1. Ejemplo.**  $\mathbf{H}^1(a, b)$  es un espacio normado completo con la norma definida por

$$\|u\|_1^2 = \int_a^b [u^2 + (u')^2] dx.$$

Se define la forma bilineal

$$\mathbf{a} : \mathbf{H}^1 \times \mathbf{H}^1 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \mathbf{a}(u, v) = \int_a^b [u'v' + cuv] dx$$

donde  $c(x)$  es una función positiva acotada con  $c_1 \geq c(x) \geq c_2 > 0$  para  $x \in (a, b)$ .

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(v, v)| &= \left| \int_a^b [(v')^2 + cv^2] dx \right| \geq \left| \int_a^b [(v')^2 + c_2v^2] dx \right| \\ &\geq \alpha \left| \int_a^b [(v')^2 + v^2] dx \right| = \alpha \|v\|_1^2 \end{aligned}$$

con  $\alpha = \min(1, c_2)$ , y así  $\mathbf{a}$  es  $\mathbf{H}^1$ -elíptica. ■

### 2.5.7. Una EDP con condiciones tipo Robin

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (a_1 \nabla u) + a_0 u = f, & \text{en } \Omega, \\ c_1 u + c_2 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.100)$$

Para una función suficientemente regular  $u \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$  la forma débil

$$\int_{\Omega} (a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv) d\Omega - \int_{\partial\Omega} a_1 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v ds = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

es derivada análogamente al caso de condiciones de frontera Neumann.

Usando la condición de frontera tipo Robin, se obtiene la forma débil:

Dada  $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ ,  $g \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$  y  $a_0, a_1 \in \mathbf{L}^\infty(\Omega)$ , encontrar  $u \in \mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$

tal que

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{j}(v), \quad \forall v \in \mathbf{V}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u, v) &= \int_{\Omega} (a_1 \nabla u \cdot \nabla v + a_0 uv) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 c_1}{c_2} uv ds, \\ \mathbf{j}(v) &= \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{a_1 g}{c_2} v ds \end{aligned}$$

# CAPÍTULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS

Para nuestro estudio, se considera una ecuación diferencial ordinaria con condiciones de contorno. Resolveremos utilizando los métodos espectrales. Consideramos primero las aproximaciones tomando en cuenta los polinomios de Chebyshev. Luego, en el método de Galerkin haremos uso de estos polinomios como funciones base y compararemos con los polinomios de Lagrange.

El método de Galerkin es una técnica que se utiliza al emplear el Método de Elementos Finitos; otras técnicas es emplear métodos espectrales, residuos ponderados, de colocación, entre otros, incluso hay métodos de elementos finitos sin malla, que son más ventajosos de los que tienen malla, en éstos, las deformaciones no influyen en la convergencia.

### 3.1. Método de Galerkin

El método de Galerkin es una técnica utilizada en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs) que fue desarrollado por el matemá-

tico ruso Boris Galerkin en 1915 y se ha convertido en un enfoque fundamental en la simulación numérica de fenómenos físicos, su fundamento teórico del método Galerkin se remonta al Principio de Trabajo Virtual.

Se basa en la idea de aproximar la solución exacta de una EDP mediante una combinación lineal de funciones de prueba, también conocidas como *funciones de base*. Estas funciones base se eligen de manera que satisfagan ciertas propiedades, como ser continuas y diferenciables en el dominio de interés.

La aproximación de la solución se obtiene al imponer al residuo, es decir, la diferencia entre la EDP original y la aproximación, que sea ortogonal a todas las funciones de prueba. Esto se logra mediante la integración de la ecuación residual sobre el dominio y aplicando el principio de ortogonalidad.

La principal ventaja del método de Galerkin es su capacidad para manejar geometrías y condiciones de contorno complejas. Además, puede ser utilizado para resolver diferentes tipos de EDPs, incluyendo ecuaciones elípticas, parabólicas e hiperbólicas.

Sin embargo, una desventaja del método de Galerkin es que requiere un gran número de cálculos para obtener una solución precisa, lo que puede ser costoso en términos de tiempo y recursos computacionales. Además, la elección de las funciones de prueba en el espacio de Hilbert puede ser crítica para la

validez y precisión de las soluciones obtenidas.

El método de Galerkin con polinomios de Bernstein se utiliza para aproximar soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) o parciales (EDP). Este método se basa en la idea de aproximar la solución mediante una combinación lineal de polinomios de Bernstein de grado dado, y luego usar esta aproximación para resolver la EDP.

Hay tres clases de métodos, (Costa, 2004), en los que se usan funciones forma para expandir una función:

- Los *Métodos Tau-espectrales*, que exige que  $\hat{u}(x)$  satisfaga las condiciones de frontera del problema y que el residual  $r(x) = u(x) - \hat{u}(x)$  sea ortogonal a tantas funciones base como sea posible.
- Los *Métodos Espectrales*, (Galerkin), hace una combinación lineal de las funciones base en un nuevo espacio en el que todas las funciones satisfacen las condiciones de frontera, también se exige que el residual sea ortogonal a las funciones base.
- Los *Métodos Pseudo-espectrales* o de *Colocación*, lo mismo que el método de Tau, sin embargo el residual se anula en determinados puntos.

Las funciones polinómicas que generalmente se usan son los de Chebyshev, Fourier, Hermite, Legendre, Laguerre (Boyd, 2007).

(Suetake, 2002), propuso introducir una base en la que sus elementos sean funciones polinómicas.

# CAPÍTULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Consideraremos el Problema de Valor de Frontera

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} - 2u = -2, & t \in [-1, 1] \\ u(-1) = 0, u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

De acuerdo a (2.75), el problema (4.1) es la formulación fuerte, donde

$$\mathcal{A} = D^2 + D - 2, \quad f(t) = -2, \quad \Omega = [-1, 1], \quad \Gamma = \{-1, 1\}.$$

### 4.1. Solución exacta

El problema (4.1) lo resolveremos usando operadores:

$$(D^2 + D - 2)[u] = -2$$

La ecuación auxiliar es:

$$r^2 + r - 2 = 0 \quad \longrightarrow \quad (r + 1)(r - 1) = 0 \quad \implies \quad r = -2 \vee r = +1$$

Las soluciones fundamentales son

$$u_1(t) = e^{-2t}, \quad u_2(t) = e^t$$

La solución homogénea asociada es

$$u_c(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$$

La solución particular es  $u_p(t) = 1$ . Por tanto la solución general es

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + 1$$

Determinamos las constantes, usando las condiciones de frontera.

$$u(-1) = 0 \quad : \quad C_1 e^{-2(-1)} + C_2 e^{-1} + 1 = 0 \implies C_1 e^2 + C_2 e^{-1} = -1$$

$$u(+1) = 0 \quad : \quad C_1 e^{-2(+1)} + C_2 e^{+1} + 1 = 0 \implies C_1 e^{-2} + C_2 e = -1$$

De donde

$$C_1 = -\frac{e^2}{1 + e^2 + e^4} = -\frac{\sinh 1}{\sinh 3}, \quad C_2 = -\frac{(e^2 + 1)e}{1 + e^2 + e^4} = -\frac{\sinh 2}{\sinh 3}$$

Por tanto la solución exacta es

$$u(t) = -\frac{\sinh 1}{\sinh 3} e^{-2t} - \frac{\sinh 2}{\sinh 3} e^t + 1. \quad (4.2)$$

## 4.2. Solución aproximada

Para encontrar una solución aproximada  $v(t)$ , tendremos en cuenta que ésta se puede expresar como combinación lineal de las funciones forma o funciones base.

### 4.2.1. Usando Polinomios de Chebyshev

Usaremos polinomios de Chebyshev hasta de grado 4. La solución aproximada será entonces

$$v(t) = a_0 T_0(t) + a_1 T_1(t) + a_2 T_2(t) + a_3 T_3(t) + a_4 T_4(t) = \sum_{i=0}^4 a_i T_i(t) \quad (4.3)$$

Recordemos que los polinomios de Chebyshev siguen la relación

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \geq 1$$

donde  $T_0(t) = 1$ ,  $T_1(t) = t$ . Para  $n \geq 1$  tendremos algunos polinomios de Chebyshev

$$\begin{aligned} T_2(t) &= 2t^2 - 1 \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.4}$$

Evaluamos en  $t = -1$  y  $t = 1$ , para las condiciones de frontera.

$$\begin{array}{ll} T_0(-1) = 1 & T_0(+1) = 1 \\ T_1(-1) = -1 & T_1(+1) = 1 \\ T_2(-1) = 1 & T_2(+1) = 1 \\ T_3(-1) = -1 & T_3(+1) = 1 \\ T_4(-1) = 1 & T_4(+1) = 1 \end{array} \tag{4.5}$$

Derivamos las funciones (4.4) y las expresaremos en función de polinomios de Chebyshev, omitimos el argumento,

$$\left\{ \begin{array}{ll} T'_0 = 0 & \\ T'_1 = 1 & = T_0 \\ T'_2 = 4t & = 4T_1 \\ T'_3 = 12t^2 - 3 & = 6T_2 + 3T_0 \\ T'_4 = 32t^3 - 16t & = 8T_3 + 8T_1 \end{array} \right. \tag{4.6}$$

La derivada de  $v(t)$  es

$$v'(t) = b_0T_0(t) + b_1T_1(t) + b_2T_2(t) + b_3T_3(t) + b_4T_4(t) = \sum_{i=0}^4 b_iT_i(t)$$

Reemplazando las relaciones (4.6) en la derivada de  $v$  y comparando, generamos la siguiente ecuación matricial, es decir,

$$\begin{aligned}
 v' &= a_0 T_0' + a_1 T_1' + a_2 T_2' + a_3 T_3' + a_4 T_4' = \sum_{i=0}^4 b_i T_i(t) \\
 &= a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot T_0 + a_2 \cdot 4T_1 + a_3(6T_2 + 3T_0) + a_4(8T_3 + 8T_1) \\
 &= (a_1 + 3a_3) T_0 + (4a_2 + 8a_4) T_1 + (6a_3) T_2 + (8a_4) T_3 + 0 \cdot T_4
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 = a_1 + 3a_3 \\ b_1 = 4a_2 + 8a_4 \\ b_2 = 6a_3 \\ b_3 = 8a_4 \\ b_4 = 0 \end{array} \right. \implies \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

Llamaremos a la matriz  $5 \times 5$ ,  $A$ , esta matriz relaciona las derivadas entre los polinomios de Chebyshev. Para la segunda derivada de la función aproximación  $v$  la matriz respectiva es  $A^2$ :

$$v'' = (4a_2 + 32a_4) T_0 + (24a_3) T_1 + (48a_4) T_2 + 0 \cdot T_3 + 0 \cdot T_4$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Al reemplazar  $v$  en la ecuación diferencial, se obtiene una función residuo:

$$R(t) = \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} - 2v + 2 = \sum_{i=0}^4 r_i T_i(t)$$

Considerando las matrices  $A$  y  $A^2$  que son lo que se obtuvo en la relación entre la 1ra y 2da derivada de  $v$ , nos queda

$$\begin{aligned}
 R &= (-2a_0 + a_1 + 4a_2 + 3a_3 + 32a_4 + 2)T_0 + (-2a_1 + 4a_2 + 24a_3 + 8a_4)T_1 + \\
 &\quad + (-2a_2 + 6a_3 + 48a_4)T_2 + (-2a_3 + 8a_4)T_3 + (-2a_4)T_4 \quad (4.7) \\
 &= \sum_{i=0}^4 r_i T_i
 \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} &= (A^2 + A - 2I_{5 \times 5}) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 & 32 \\ 0 & -2 & 4 & 24 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Ahora, la función aproximación  $v$  debe satisfacer las condiciones de frontera, es decir

$$v(-1) = 0, \quad v(1) = 0$$

Teniendo en cuenta (4.5),

$$\begin{cases} v(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ v(+1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Escribimos matricialmente (4.9),

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

**(\*) Hallamos los coeficientes  $a_i$  con el Método de Tau**

Aquí las condiciones de frontera deben cumplirse, es decir que (4.10) son las dos primeras ecuaciones a tener en cuenta. Luego, como son cinco variables que hay determinar, los  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 4$ , nos faltan tres ecuaciones. Así que aplicamos la ortogonalidad del residuo

$$\int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot T_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad i = 0, 1, 2. \quad (4.11)$$

El residuo  $R(t)$  está dado en (4.7). Evaluamos la integral dada en (4.11) y asumimos que el residuo es ortogonal a  $T_0$ ,  $T_1$  y  $T_2$ ,

$$\bullet \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = r_0 \pi \implies r_0 = 0 \quad (4.12)$$

$$\bullet \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot T_1(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{r_1}{2} \pi \implies r_1 = 0 \quad (4.13)$$

$$\bullet \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot T_2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{r_2}{2} \pi \implies r_2 = 0 \quad (4.14)$$

Reemplazamos estos valores en las tres primeras ecuaciones de (4.8) y junto con las ecuaciones que se obtuvieron en la frontera (4.10) tenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} r_0 = 0 \\ r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 3 & 32 \\ 0 & -2 & 4 & 24 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 6 & 48 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

La solución del sistema (4.15) es

$$\begin{cases} a_0 = 319/1171 \approx 0.27242, \\ a_1 = -52/1171 \approx -0.04441, \\ a_2 = -300/1171 \approx -0.25619, \\ a_3 = 52/1171 \approx 0.04441, \\ a_4 = -19/1171 \approx -0.01623. \end{cases} \quad (4.16)$$

La solución aproximada (4.3) mediante el método Tau es:

$$\begin{aligned} v(t) &= a_0 T_0(t) + a_1 T_1(t) + a_2 T_2(t) + a_3 T_3(t) + a_4 T_4(t) \\ &= 0.27242 T_0 - 0.04441 T_1 - 0.25619 T_2 + 0.04441 T_3 - 0.01623 T_4 \\ \mathbf{v(t)} &= \mathbf{0.5124 - 0.1776 t - 0.3826 t^2 + 0.1776 t^3 - 0.1298 t^4} \quad (4.17) \end{aligned}$$

**(\*) Hallamos los coeficientes  $a_i$  con el Método de Galerkin.**

Las funciones forma las obtendremos combinando las funciones  $T_i$ , además deben satisfacer las condiciones impuestas, es decir las condiciones de frontera, y la mayor cantidad de éstas sean ortogonales con el residuo  $R(t)$ .

Las funciones base serían  $\psi_0(t) = T_4(t) - T_0(t)$ ,  $\psi_1(t) = T_3(t) - T_1(t)$  y  $\psi_2(t) = T_2(t) - T_0(t)$ , éstas satisfacen las condiciones de frontera

$$\begin{cases} \psi_0(-1) = T_4(-1) - T_0(-1) = 0, & \psi_0(+1) = T_4(+1) - T_0(+1) = 0 \\ \psi_1(-1) = T_3(-1) - T_1(-1) = 0, & \psi_1(+1) = T_3(+1) - T_1(+1) = 0 \\ \psi_2(-1) = T_2(-1) - T_0(-1) = 0, & \psi_2(+1) = T_2(+1) - T_0(+1) = 0 \end{cases}$$

Las funciones base son ortogonales al residuo, es decir:

$$\int_{-1}^1 \frac{R(t) \psi_i(t)}{\sqrt{1-t^2}} dx = 0, \quad i = 0, 1, 2. \quad (4.18)$$

Generamos las ecuaciones:

$$\bullet \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot \psi_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} (r_4 - 2r_0) \implies r_4 = 2r_0, \quad (4.19)$$

$$\bullet \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot \psi_1(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} (r_3 - r_1) \implies r_1 = r_3, \quad (4.20)$$

$$\bullet \quad 0 = \int_{-1}^1 \frac{R(t) \cdot \psi_2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} (r_2 - 2r_0) \implies r_2 = 2r_0. \quad (4.21)$$

Reemplazando en la ecuación matricial (4.8), tenemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 25 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

La solución de (4.22) es:

$$\begin{cases} a_0 = 37/135 \approx 0.27407, \\ a_1 = -1/27 \approx -0.03704, \\ a_2 = -7/27 \approx -0.25926, \\ a_3 = 1/27 \approx 0.03704, \\ a_4 = -2/135 \approx -0.01481. \end{cases} \quad (4.23)$$

La solución aproximada, mediante el método de Galerkin es:

$$\mathbf{v}(t) = 0.51852 - 0.14815 t - 0.4 t^2 + 0.14815 t^3 - 0.11852 t^4 \quad (4.24)$$

(\*) Hallamos los coeficientes  $a_i$  con el Método de Colocación.

Aquí el residuo  $R(t)$  se anula en puntos concretos, específicamente en los nodos de Chebyshev;  $t_i = \cos\left(i \frac{\pi}{4}\right)$ , para  $i = 1, 2, 3$ . El sistema final de ecuaciones que resulta es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -3 & -34 \\ 0 & -1 & 2 & 13 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

La solución de (4.25) es:

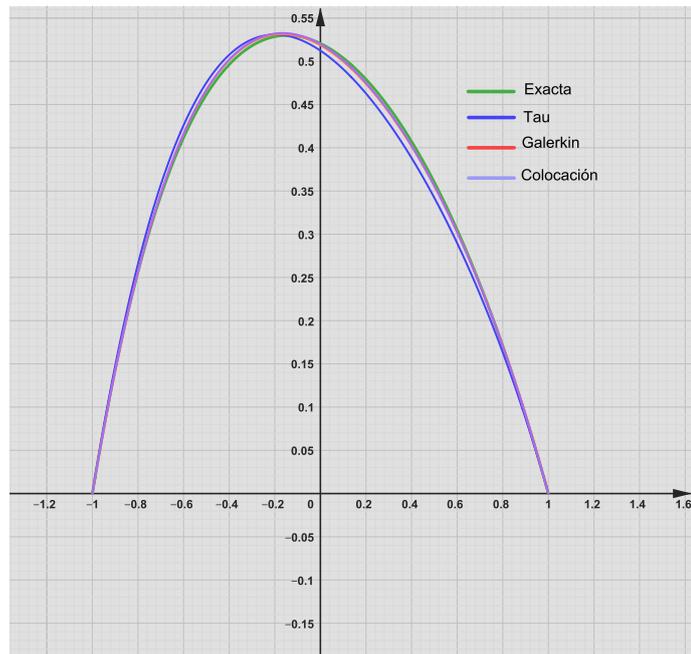
$$\begin{cases} a_0 = 48/175 \approx 0.27429, \\ a_1 = -13/350 \approx -0.03714, \\ a_2 = -13/50 \approx -0.26000, \\ a_3 = 13/350 \approx 0.03714, \\ a_4 = -1/70 \approx -0.01429. \end{cases} \quad (4.26)$$

La solución aproximada, mediante el método de Colocación es:

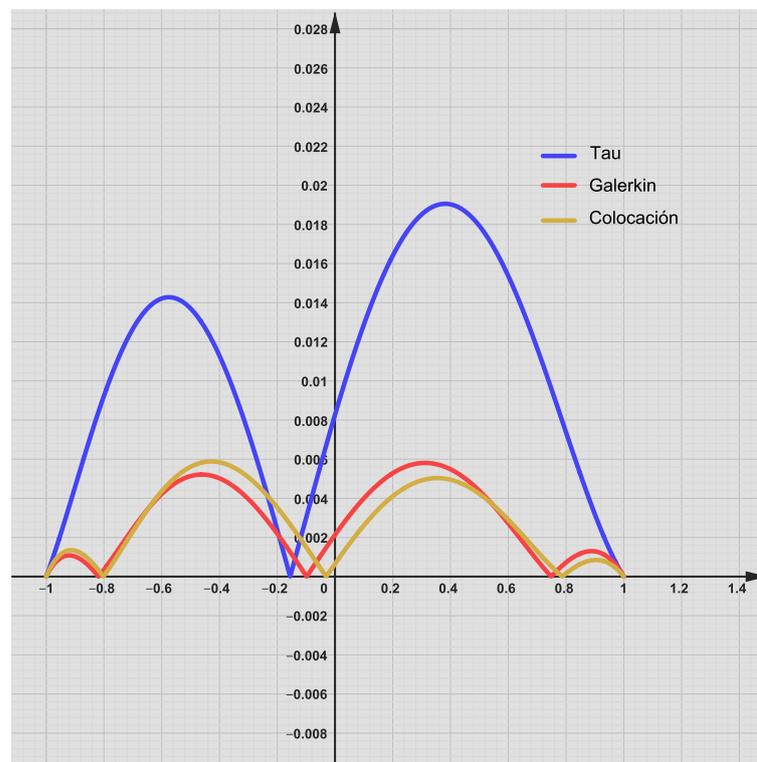
$$v(t) = 0.52 - 0.14857t - 0.40571t^2 + 0.14857t^3 - 0.11429t^4 \quad (4.27)$$

En la Figura (4.1) se muestran, en la primera, las soluciones exacta Figura (4.2) y sus aproximaciones, mediante el método Tau (4.17), con el método de Galerkin (4.24) y con el método de Colocación (4.27). Asimismo, en la segunda gráfica, se muestran los errores al aplicar estos métodos, usando polinomios de Chebyshev.

Además en la Cuadro (4.1) se muestran los valores obtenidos en diversos nodos, al aplicar diferentes métodos espectrales, pero solo considerando como funciones base los polinomios de Chebyshev.



(a) Solución exacta y aproximaciones.



(b) Errores: Tau (azul), Galerkin (rojo) y Colocación (naranja).

Figura 4.1: Solución fuerte  $u(t)$  y débil  $v(t)$ .

$x_i$	Exacta	Tau	Galerkin	Colocación	error <sub>Tau</sub>	error <sub>Galerkin</sub>	error <sub>Coloc</sub>
-1.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
-0.8	0.2562831	0.2655187	0.2566414	0.2563206	0.0092356	0.0003583	0.0000375
-0.6	0.4118245	0.4260403	0.4160494	0.4161833	0.0142158	0.0042249	0.0043588
-0.4	0.4962389	0.5075347	0.5012643	0.5020801	0.0112958	0.0050254	0.0058412
-0.2	0.5285810	0.5309875	0.5307752	0.5321142	0.0024065	0.0021941	0.0035332
0.0	0.5206507	0.5124000	0.0082507	0.5185200	0.0021307	0.5200000	0.0006507
0.2	0.4791692	0.4627891	0.0163800	0.4738856	0.0052836	0.4750633	0.0041059
0.4	0.4071905	0.3881875	0.0190029	0.4017075	0.0054830	0.4022411	0.0049494
0.6	0.3049889	0.2896435	0.0153454	0.3022702	0.0027187	0.3020815	0.0029074
0.8	0.1705831	0.1632211	0.0073619	0.1713070	0.0007240	0.1707443	0.0001612
1.0	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000

Cuadro 4.1: Valores obtenidos en los nodos  $x_i$ , con la solución exacta y con los métodos Tau, Galerkin y Colocación, considerando solo polinomios de chebyshev.

### 4.2.2. Usando Polinomios de Lagrange

Con el Método de Galerkin vamos a realizar un mallado del intervalo  $[-1, 1]$  de cinco nodos equiespaciados con tamaño de paso  $h = \frac{1}{2}$ , de tal manera que la solución aproximada sea un polinomio de grado a lo más 4.

Los nodos serán:

$$a = x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{2}, \quad x_4 = +1 = b.$$

La figura Figura (4.2) muestra el mallado de la región  $[-1, 1]$ .

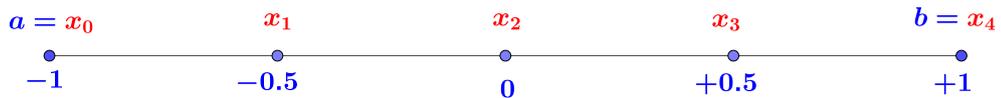


Figura 4.2: Mallado del dominio  $[-1, 1]$ .

De acuerdo a (2.49), los polinomios básicos de Lagrange de grado 4, en los nodos respectivos, serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = \frac{1}{6} x (2x + 1)(x - 1)(2x - 1) \\ L_1(x) = -\frac{4}{3} x (x + 1)(2x - 1)(x - 1) \\ L_2(x) = (x - 1)(x + 1)(2x - 1)(2x + 1) \\ L_3(x) = -\frac{4}{3} x (x + 1)(x - 1)(2x + 1) \\ L_4(x) = \frac{1}{6} x (x + 1)(2x - 1)(2x + 1) \end{array} \right. \quad (4.28)$$

La primera y segunda derivada de estos polinomios son:

$$\left\{ \begin{array}{l} L'_0(x) = \frac{1 - 2x - 12x^2 + 16x^3}{6} \\ L'_1(x) = \frac{4}{3}(-1 + 4x + 3x^2 - 8x^3) \\ L'_2(x) = -10x + 16x^3 \\ L'_3(x) = \frac{4}{3}(1 + 4x - 3x^2 - 8x^3) \\ L'_4(x) = \frac{-1 - 2x + 12x^2 + 16x^3}{6} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} L''_0(x) = -\frac{1}{3} - 4x + 8x^2 \\ L''_1(x) = \frac{16}{3} + 8x - 32x^2 \\ L''_2(x) = -10 + 48x^2 \\ L''_3(x) = \frac{16}{3} - 8x - 32x^2 \\ L''_4(x) = -\frac{1}{3} + 4x + 8x^2 \end{array} \right. \quad (4.29)$$

La solución aproximada tiene la forma

$$v_L(t) = \sum_{i=0}^4 a_i L_i(t) = a_0 L_0(t) + a_1 L_1(t) + a_2 L_2(t) + a_3 L_3(t) + a_4 L_4(t) \quad (4.30)$$

Esta solución debe satisfacer las condiciones de frontera, es decir que

$$\left\{ \begin{array}{l} v_L(-1) = 0 \implies a_0 = 0 \\ v_L(+1) = 0 \implies a_4 = 0 \end{array} \right. \quad (4.31)$$

La *función residuo* que se obtiene al sustituir  $v_L(t)$  en la ecuación diferencial de (4.1) es

$$R_L(t) = v''_L(t) + v'_L(t) - 2v_L(t) + 2 \quad (4.32)$$

Para determinar los valores de  $a_1, a_2$  y  $a_3$ , utilizamos la ortogonalidad del residuo con las funciones base (los polinomios básicos de Lagrange), estamos empleando el método de galerkin,

$$\int_{-1}^1 R_L(t) \cdot L_i(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.33)$$

(\*) **Para**  $L_1(t)$ :  $\int_{-1}^1 R_L(t) \cdot L_1(t) dt = 0$ , genera la ecuación

$$\frac{64}{45} + \frac{7472}{2835}a_0 - \frac{28544}{2835}a_1 + \frac{8416}{945}a_2 - \frac{2176}{567}a_3 + \frac{2672}{2835}a_4 = 0, \quad (4.34)$$

(\*) **Para**  $L_2(t)$ :  $\int_{-1}^1 R_L(t) \cdot L_2(t) dt = 0$ , genera la ecuación

$$\frac{8}{15} - \frac{1006}{945}a_0 + \frac{6304}{945}a_1 - \frac{4136}{315}a_2 + \frac{8416}{945}a_3 - \frac{362}{189}a_4 = 0, \quad (4.35)$$

(\*) **Para**  $L_3(t)$ :  $\int_{-1}^1 R_L(t) \cdot L_3(t) dt = 0$ , genera la ecuación

$$\frac{64}{45} + \frac{304}{567}a_0 - \frac{7808}{2835}a_1 + \frac{6304}{945}a_2 - \frac{28544}{2835}a_3 + \frac{11888}{2835}a_4 = 0. \quad (4.36)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.34), (4.35), (4.36) y las de (4.31), se

obtiene

$$\begin{cases} a_1 = \frac{95949}{206656} \approx 0.46429331836481885, \\ a_2 = \frac{6713}{12916} \approx 0.5197429544750697, \\ a_3 = \frac{74109}{206656} \approx 0.3586104444100341. \end{cases} \quad (4.37)$$

Por tanto la solución aproximada mediante el Método de Galerkin con polinomios de Lagrange es:

$$v_L(t) = 0.46429332 L_1(t) + 0.51974295 L_2(t) + 0.35861044 L_3(t) \quad (4.38)$$

Reemplazando los  $L_i(t)$ , se tiene

$$v_L(t) = -0.115438 t^4 + 0.140911 t^3 - 0.404305 t^2 - 0.140911 t + 0.519743 \quad (4.39)$$

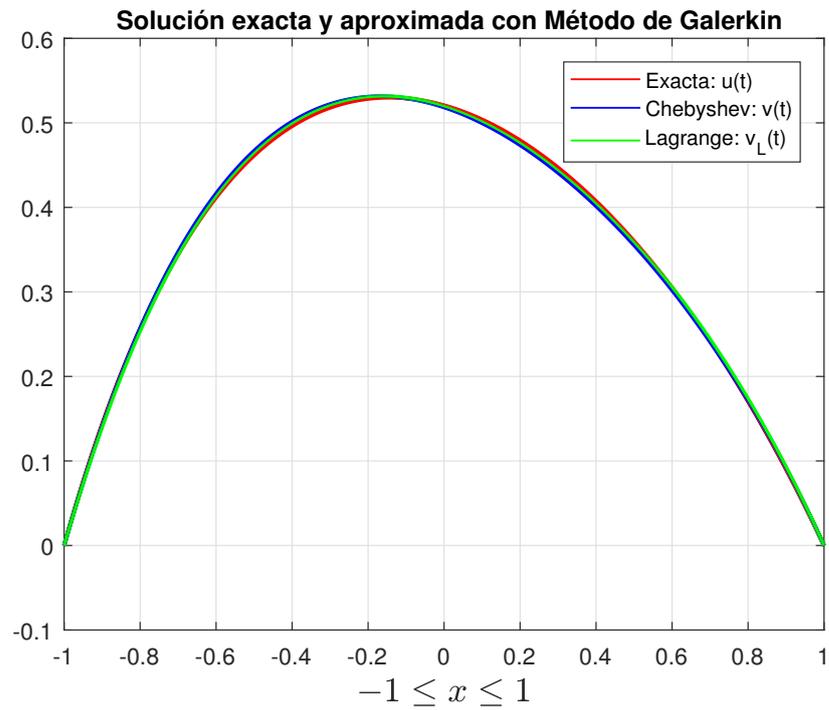
Vemos la Figura (4.3), donde están la solución exacta y las soluciones aproximadas obtenidas mediante el Método de Galerkin considerando Polinomios de Chebyshev y Polinomios de Lagrange (a); asimismo, se muestran los errores absolutos (b). Aquí se puede apreciar que con los polinomios de Lagrange se obtuvo un menor error, es decir se tiene una mejor aproximación.

Si aplicamos la norma en  $L^2$ , los errores con Chebyshev,  $E_T$ , y Lagrange,  $E_L$ , son

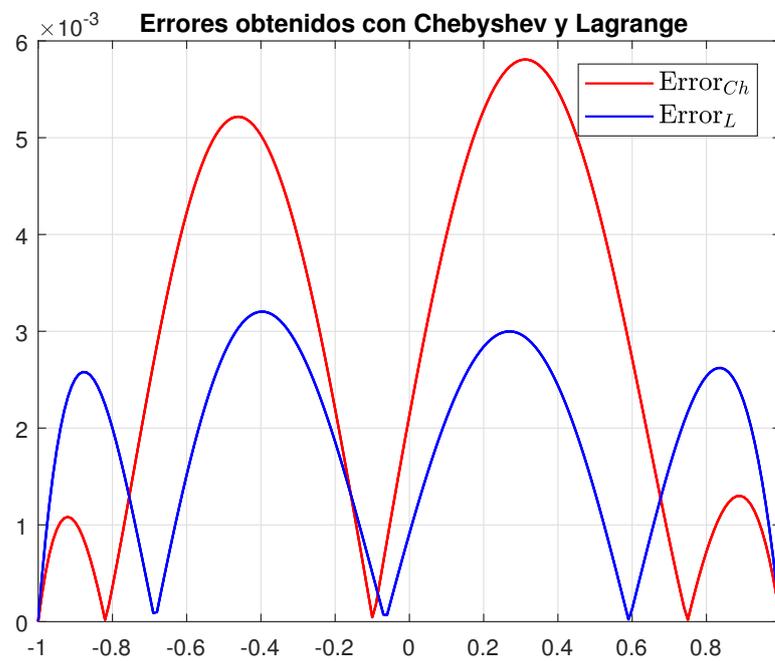
$$E_T = \|u - v\|_{L^2} = \left( \int_{-1}^1 |u - v|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.0048898590 \quad (4.40)$$

$$E_L = \|u - v\|_{L^2} = \left( \int_{-1}^1 |u - v_L|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.0029449928 \quad (4.41)$$

El error de Lagrange representa el 60% del de Chebyshev. Si bien es cierto los polinomios de Chebyshev ofrecen una mejor aproximación como interpolación, en esta caso, en el método de Galerkin al utilizarlos no ha sido muy ventajoso.



(a) Solución exacta y aproximaciones con Chebyshev y Lagrange.



(b) Errores: Con Chebyshev (rojo), Lagrange (azul).

Figura 4.3: Solución fuerte  $u(t)$  y débiles:  $v(t)$  y  $v_L(t)$ .

### 4.2.3. Usando Polinomios de Bernstein

En (2.43) se da la forma de los polinomios de Bernstein, cuando  $x \in [a, b]$ :

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k} \quad (4.42)$$

Para  $n = 4$ , en  $[-1, 1]$  tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{4,0}(x) = \frac{1}{16}(x-1)^4 \\ \beta_{4,1}(x) = \frac{1}{4}(x+1)(1-x)^3 \\ \beta_{4,2}(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2(1-x)^2 \\ \beta_{4,3}(x) = \frac{1}{4}(x+1)^3(1-x) \\ \beta_{4,4}(x) = \frac{1}{16}(x+1)^4 \end{array} \right. \quad (4.43)$$

La primera y segunda derivada de estos polinomios son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta'_{4,0}(x) = \frac{1}{4}(x-1)^3 \\ \beta'_{4,1}(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)(x-1)^2 \\ \beta'_{4,2}(x) = \frac{3}{2}x(x^2-1) \\ \beta'_{4,3}(x) = -\frac{1}{2}(2x-1)(x+1)^2 \\ \beta'_{4,4}(x) = \frac{1}{4}(x+1)^3 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \beta''_{4,0}(x) = \frac{3}{4}(x-1)^2 \\ \beta''_{4,1}(x) = 3x(1-x) \\ \beta''_{4,2}(x) = \frac{3}{2}(3x^2-1) \\ \beta''_{4,3}(x) = -3x(x+1) \\ \beta''_{4,4}(x) = \frac{3}{4}(x+1)^2 \end{array} \right. \quad (4.44)$$

La solución aproximada,  $v_B$ , al usar los polinomios base de Bernstein de grado 4, tiene la forma

$$v_B(t) = \sum_{i=0}^4 a_i \beta_{4,i}(t) = a_0 \beta_{4,0}(t) + a_1 \beta_{4,1}(t) + a_2 \beta_{4,2}(t) + a_3 \beta_{4,3}(t) + a_4 \beta_{4,4}(t) \quad (4.45)$$

Esta solución debe satisfacer las condiciones de frontera, es decir que

$$\begin{cases} v_B(-1) = 0 & \implies a_0 = 0 \\ v_B(+1) = 0 & \implies a_4 = 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

Al sustituir  $v_B(t)$  en la ecuación diferencial de (4.1) se obtiene la *función residuo*:

$$R_B(t) = v_B''(t) + v_B'(t) - 2v_B(t) + 2 \quad (4.47)$$

En (4.46) ya se determinaron los valores  $a_0$  y  $a_4$ , ambos nulos, nos falta determinar los valores de  $a_1, a_2$  y  $a_3$ , para ello emplearemos la ortogonalidad del residuo (4.47) con las funciones base que son los polinomios de Bernstein dados en (4.43), igualmente como en los casos anteriores empleamos el método de Galerkin,

$$\int_{-1}^1 R_B(t) \cdot \beta_{4,i}(t) dt = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.48)$$

(\*) **Para**  $\beta_{4,1}(t)$ :  $\int_{-1}^1 R_B(t) \cdot \beta_{4,1}(t) dt = 0$ , genera la ecuación

$$\frac{4}{5} + \frac{4}{63}a_0 - \frac{296}{315}a_1 - \frac{26}{105}a_2 + \frac{8}{63}a_3 + \frac{62}{315}a_4 = 0, \quad (4.49)$$

(\*) **Para**  $\beta_{4,2}(t)$ :  $\int_{-1}^1 R_B(t) \cdot \beta_{4,2}(t) dt = 0$ , genera la ecuación

$$\frac{4}{5} + \frac{11}{105}a_0 - \frac{10}{21}a_1 - \frac{4}{7}a_2 - \frac{26}{105}a_3 + \frac{41}{105}a_4 = 0, \quad (4.50)$$

(\*) **Para**  $\beta_{4,3}(t)$ :  $\int_{-1}^1 R_B(t) \cdot \beta_{4,3}(t) dt = 0$ , genera la ecuación

$$\frac{4}{5} + \frac{26}{315}a_0 - \frac{32}{315}a_1 - \frac{10}{21}a_2 - \frac{296}{315}a_3 + \frac{40}{63}a_4 = 0. \quad (4.51)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.49), (4.50), (4.51) y las de (4.46), se obtiene

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2506}{3229} \approx 0.776091669247445, \\ a_2 = \frac{5222}{9687} \approx 0.5390729844120987, \\ a_3 = \frac{1596}{3229} \approx 0.49427067203468567. \end{cases} \quad (4.52)$$

En consecuencia, la solución aproximada mediante el Método de Galerkin con polinomios de Bernstein es:

$$v_B(t) = 0.77609167 \beta_{4,1}(t) + 0.53907298 \beta_{4,2}(t) + 0.49427067 \beta_{4,3}(t) \quad (4.53)$$

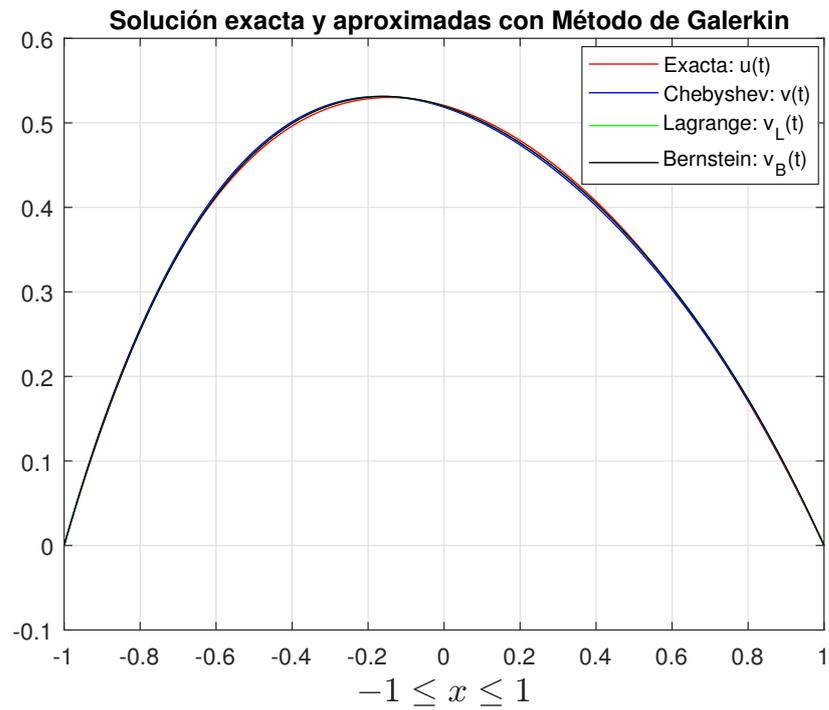
Al sustituir los polinomios de Bernstein  $\beta_{4,i}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dados en (4.43) en (4.53) se tiene

$$v_B(t) = -0.115438 t^4 + 0.140910 t^3 - 0.404305 t^2 - 0.140910 t + 0.519743 \quad (4.54)$$

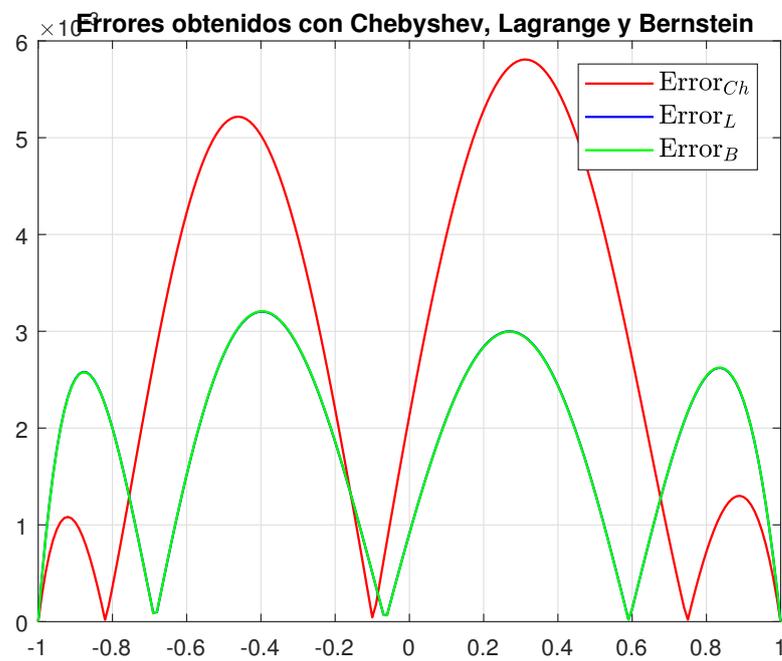
Se muestran las gráficas en la Figura (4.4), de la solución exacta y las soluciones aproximadas obtenidas mediante el Método de Galerkin considerando Polinomios de Chebyshev, Polinomios de Lagrange y Polinomios de Bernstein (a); asimismo, se muestran los errores absolutos (b). Se observa que al utilizar los polinomios de Lagrange y los polinomios de Bernstein se obtiene una mejor aproximación, es más, al considerar estos últimos polinomios, se observa que son prácticamente iguales, ver (b).

Con la norma en  $L^2$ , el error obtenido al emplear los polinomios de Bernstein,  $E_B$ , es

$$E_B = \|u - v_B\|_{L^2} = \left( \int_{-1}^1 |u - v_B|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.0029449913 \quad (4.55)$$



(a) Solución exacta y aproximaciones con Chebyshev, Lagrange y Bernstein.



(b) Errores: Con Chebyshev (rojo), Lagrange (azul) y Bernstein (verde).

Figura 4.4: Solución fuerte  $u(t)$  y débiles:  $v(t)$ ,  $v_L(t)$  y  $v_B(t)$ .

El error de Bernstein representa el 99.99995064 % del error de Lagrange. Son similares, en la práctica, sin embargo la forma de los polinomios de Lagrange, cuatro factores, al realizar las derivadas es un poco más tedioso a comparación de los polinomios de Bernstein.

En el Cuadro (4.2) se muestran los errores al aplicar el método de Galerkin usando como funciones forma a los polinomios de Lagrange y a los de Bernstein; éstos últimos dan un ligera mejora con respecto a los de Lagrange.

$x_i$	Exacta	Lagrange	Bernstein	$\text{error}_{\text{Lagrange}}$	$\text{error}_{\text{Bernstein}}$
-1.0	0.00000000	-0.00000000	-0.00000000	0.00000000	0.00000000
-0.8	0.25628308	0.25428676	0.25428648	0.00199632	0.00199661
-0.6	0.41182450	0.41334226	0.41334188	0.00151776	0.00151737
-0.4	0.49623891	0.49944508	0.49944475	0.00320617	0.00320584
-0.2	0.52858103	0.53044101	0.53044082	0.00185999	0.00185979
0.0	0.52065067	0.51974300	0.51974300	0.00090767	0.00090767
0.2	0.47916916	0.47633119	0.47633138	0.00283797	0.00283778
0.4	0.40719046	0.40475289	0.40475323	0.00243756	0.00243723
0.6	0.30498889	0.30512261	0.30512300	0.00013372	0.00013410
0.8	0.17058305	0.17312203	0.17312232	0.00253898	0.00253927
1.0	0.00000000	-0.00000000	-0.00000000	0.00000000	0.00000000

Cuadro 4.2: Valores exactos en los nodos  $x_i$ , y valores con el método de Galerkin usando polinomios de Lagrange y de Bernstein.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación, se ha comprobado que los polinomios de Bernstein pueden usarse como funciones base para representar mediante una combinación lineal, a cualquier función, sea convexa o cóncava. Asimismo, los polinomios de Lagrange también pueden ser utilizadas como funciones forma, sin embargo, la forma de sus polinomios base, hace que los cálculos sean más tediosos, se pudo comprobar que a más puntos los polinomios base de Lagrange, requieren que se modifique totalmente los cálculos. A comparación de los polinomios de Bernstein, que solo intervienen dos factores en su definición.

En la solución de ecuaciones diferenciales, específicamente una ordinaria, se ha comprobado que los polinomios de Chebyshev, que gozan de ser los más eficientes en la interpolación, en nuestro caso particular, no mostraron una aproximación más precisa a la solución de la EDO que se propuso. Los polinomios de Bernstein como funciones base en el método de Galerkin, proporcionaron una solución ligeramante más cercana a la exacta, de la que proporcionó la base formada por polinomios básicos de Lagrange.

## RECOMENDACIONES

Tener en cuenta el tipo de problema a resolver, ya que dependiendo del tipo de ecuación diferencial, podríamos tener conclusiones distintas a las que se han indicado anteriormente. En la elección de las funciones base, las condiciones de frontera pueden ser utilizadas directamente al trabajar con la formulación débil del problema.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Atkinson, Kendall E. (1989). *An introduction to numerical analysis*. 2da. edición. Jhon Wyley and Sons. University of Iowa.
- [2] Barahona, W. (2018). *Existencia de Soluciones Débiles de un Sistema Elíptico no local Semilíneal*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional Mayor de San Marcos. (Lima-Perú).
- [3] Boyd, J.P. (2007). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, Inc., Second Edition, New York.
- [4] Brezis, H. (1984). *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S. A., Madrid.
- [5] Burden, R. L., Faires, J. D., y Burden, A.M (2017). *Análisis Numérico*. Décima edición, Youngstown State University.
- [6] Cabada, A., F.J.S.A. y Correa, (2012). *Existence of solutions of a Non local Elliptic System via Galerkin Method*. Applied Analysis.
- [7] Cámara M., J.C (2017). *Modelización de Problemas de Fluido-acústica con elementos Espectrales de Orden Elevado y Polinomios de Bernstein*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Universidad de Sevilla.
- [8] Canuto, C; Hussaini, M. Y.; Quarteroni, A.; Zang, T. A. (1988). *Spectral Métodos in Fluid Dynamics*. Springer Series in Computational Physics.
- [9] Correa, F.J.S.A; Lopes, F.P.M. (2007). *Positive solutions for a class of non local elliptic systems*. Comm. Appl. Nonlinear Analysis.

- [10] Correa, F.J.S.A.; Menezes (2004). *Existence of Solution to Nonlocal and Singular Elliptic Problems Vía Galerkin Method*. Universidad Federal de Pará (Brasil).
- [11] Costa, Bruno (2004). *Spectral methods for Partial Differential Equations*. CUBO – A Mathematical Journal, Vol **6**(4), 1–32.
- [12] Czenky, A. M. and Villagra T., L. (2017). *Teorema de Lax-Milgram y aplicaciones al Método de Elementos Finitos*. Reunión Anual de la Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Buenos Aires.
- [13] Fournier, A.R.J., (2003). *Sobolev Space*. Elsevier. Second Edition.
- [14] García Erazo, Hernán Alfredo (2011). *Aplicación del Método de Elementos de Contorno en la Solución de Problemas de elasticidad bidimensional*. Universidad Politécnica Salesiana. Ecuador.
- [15] Gaughan, E. (1972). *Introducción al Análisis*. Madrid, España: Alhambra.
- [16] Gheorghiu, C. I. (2007). *Spectral methods for differential problems*. Casa Cartii de Stiinta Publishing House, Cluj–Napoca.
- [17] Gottlieb, D. y Orszag, S.A. (1977). *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania.
- [18] Hoffman, Kenneth and Kunze, Ray (1971). *Linear Algebra*. Segunda edición. Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A. México.
- [19] Issacson, E. y Keller, H.B (1966). *Analysis of numerical methods*. Dover Publications, Inc., New York.
- [20] Krylov, V.I. (1962). *Approximate Calculation of Integrals*. Macmillan, New York.

- [21] Liu, G. R., Gu, Y.T. (2005). *An introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Springer.
- [22] Mantilla N., I; La Rosa O., L (2004). *Utilización de la interpolación en el Método del Elementos Finitos*. Universidad Nacional de Ingeniería.
- [23] Mathews J. H. y Fink, K. D. (2000). *Métodos Numéricos con MatLab*. Tercera edición. Prentice Hall, Madrid.
- [24] Meda, Ana. (2005). *Interpolar con volados, o los Polinomios de Bernstein*. Sociedad Matemática Mexicana. Miscelánea Matemática 41; 1–12.
- [25] Murillo M., F (2016). *Polinomios por partes y el Método de Elemento Finito relativo a una malla en el dominio de cálculo*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de San Agustín (Arequipa–Perú).
- [26] Navarro Rojas, F. (2011). *Ecuaciones en diferencias de Volterra y aproximación numérica para ecuaciones integrales*. UNMSM, Lima–Perú.
- [27] Pita Ruiz, C. J. (1991). *Álgebra lineal*. México. Editorial McGraw–Hill/Interamericana.
- [28] Rektorys, K. (1980). *Variational Methods in Mathematics*. Science and Engineer–ing, D. Reidel publishing Company.
- [29] Sinan G., C.; Weilin Li (2022). *Approximation with one–bit polynomials in Bernstein form*. arXiv:2112.09183v2 [cs.IT].
- [30] Suetake, Y. (2002). *Element Free Method Based on Lagrange Polyomial*. J. Eng. Mech. ASCE, Vol. **128**(2), 231–239.
- [31] Süli, E. and Mayers D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge. University Press.
- [32] Szegö, G. (1975). *Orthogonal Polynomials*. Volume 23 of Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., fourth edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

- [33] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.I. (2000). *The Finite Element Method. Volume 1: The Basis*. Butterworth – Heinemann, Fifth Edition.

# ANEXOS

## 6.1. Programa Bernstein.

Hay funciones específicas que nos dan información de los polinomios de Bernstein. El siguiente programa nos proporciona éstos polinomios.

### 6.1.0.1. Programa. 1

```
%Polinomios de Bernstein de grado "n"

clc

syms 'x' 'y'

A=input('Ingrese el grado "n" y los extremos de [a,b]: [n,a,b] = ');

n=A(1);a=A(2);b=A(3);

xx=a:0.01:b;

%r=zeros(1,n+1);

%str=string(r);

fprintf('Los polinomios básicos de Bernstein B(n,k)(x) son:\n\n');

for k=0:n

    j=k;

    d={k};
```

```

%str(1,k+1)=char('d')

s=string(d);

%str1=string(str)

y=nchoosek(n,k)*power(x-a,k).*power((b-x),(n-k))/(b-a)^n;

yy=nchoosek(n,k)*power(xx-a,k).*power((b-xx),(n-k))/(b-a)^n;

plot(xx,yy)

fprintf('B(%1.0f,%1.0f)= ',n,k);

disp(y)

%data(:)=k;

%legend(d,'Location','NorthEast'),

hold on

grid on

end

fprintf(' \n');

```

## 6.2. Programa Aproximación con Bernstein.

### 6.2.0.1. Programa. 2

```

%Polinomios básicos de de Bernstein de grado "n" y aproximación de "f"

clc

syms 'x' 'y'

N=input('Ingrese el grado "n" y extremos del intervalo, [n,a,b] = ');
f=input('Ingrese la función: f(x) = ');
m=N(1);a=N(2);b=N(3);
B=sym('B',[m+1,1]);
G=["B0" "B1" "B2" "B3" "B4" "B5" "B6" "B7" "B8" "B9" "B10" "B11"...
   "B12" "B13" "B14" "B15" "B16" "B17" "B18" "B19" "B20" "B21"...
   "B22" "B23" "B24" "B25" "B26" "B27" "B28" "B29" "B30" "B31"...
   "B32" "B33" "B34" "B35" "B36" "B37" "B38" "B39" "B40" "B41"...

```

```

"B42" "B43" "B44" "B45" "B46" "B47" "B48" "B49" "B50" "B51"...
"B52" "B53" "B54" "B55" "B56" "B57" "B58" "B59" "B60"];
g=string([m+1,1]);
xx=a:0.01:b;
fprintf('Los polinomios básicos de Bernstein B(n,k)(x) son:\n\n');
for n=0:m
    if (n==2|n==3|n==4|n==6|n==10|n==15|n==20|n==28|n==50)
        Bb=0;
        fprintf('***** n =%2.0f *****\n',n);
        figure(n+1)
        for k=0:n
            %j=k;
            %d={k};
            y=nchoosek(n,k)*power(x,k).*power((1-x),(n-k));
            Bb=Bb+subs(f,k/n)*y;
            yy=subs(y,xx);
            plot(xx,yy,'linewidth',1);
            hold on
            grid on
            %axis([0 1 0 0.15])
            fprintf('B(%1.0f,%1.0f) = %s\n',n,k,y);
        end
        %end
        B(n+1)=Bb;
        B(1)=1;
        fprintf('-----\n');
        ss=simplify(B(n+1));
        fprintf('Polinomio de Bernstein de grado %2.0f es\n',n);
        fprintf('      B_%2.0f(x) = %s\n',n,ss);
        %disp(ss);
        %fprintf(' \n');
        fprintf('-----\n\n');
        title(['Polinomios básicos de Bernstein, grado n = ' num2str(n)]);
        xlabel('$\leq x \leq 1$', 'interpreter','latex','FontSize',15);
        ylabel('$\beta_{n,k}(x)$', 'interpreter','latex','FontSize',15);
        %axis([0 1 0 0.15])
    end
end
figure(m+2)
%plot([0 0.2 0.5 0.6 1],[0 4 4.5 4 0],'or',xx,subs(f,xx),'-b','linewidth',1.4)
plot([0 0.4 0.5 0.7 0.9 1],subs(f,[0 0.4 0.5 0.7 0.9 1]),'or',xx,subs(f,xx),'-b','linewidth',1.4);
%plot(xx,subs(f,xx),'-b','linewidth',1.4);
legend({'$(x_i,f_i)$','$f(x)$'},'Location','northeast','interpreter','latex','FontSize',12);
hold on
grid on
axis([0 1 0 .4])

```

```
for j=0:m
    g(j+1)=char(G(j+1));
    if (j==2||j==3||j==10||j==28||j==50)
        plot(xx,subs(B(j+1),xx),'linewidth',.9,'DisplayName',g(j+1));
        pause(1)
        hold on
        grid on
    end
    %axis([0 1 0 0.15])
end
title(['Polinomios de Bernstein hasta n<= ' num2str(n)]);
xlabel('$0 \leq x \leq 1$', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 15);
ylabel({'f(x), B_{n}(x)'}, 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 13);
```

**UNSCH**FACULTAD DE  
**INGENIERÍA**  
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

“Año de la unidad, la paz y el desarrollo”

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

### ACTA N° 076-2023-FIMGC

En la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **RESOLUCIÓN DECANAL N° 354-2023-FIMGC-D**, siendo ocho días del mes de setiembre del 2023, a horas 9:30 am.; se reunieron los jurados del acto de sustentación, en el Auditorium virtual google meet del Campus Universitario de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga.

Siendo el Jurado de la sustentación de tesis compuesto por el presidente el **Dr. Ing. Efraín Elías PORRAS FLORES**, Jurado el **Mg. José Carlos JUAREZ PULACHE**, Jurado - Asesor el **Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO** y secretario del proceso el **Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR**, con el objetivo de recepcionar la sustentación de la tesis denominada titulado: **“LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN Y SU APLICACIÓN COMO FUNCIONES BASE EN EL MÉTODO DE GALERKIN”**, presentado por el/la Sr./Srta., **MICHAEL ROJAS ESPINOZA**, Bachiller en **Ciencias Físico Matemáticas**.

El Jurado luego de haber recepcionado la sustentación de la tesis y realizado las preguntas, el sustentante al haber dado respuesta a las preguntas, y el Jurado haber deliberado; califica con la nota aprobatoria de **16 (dieciséis)**.

En fe de lo cual, se firma la presente acta, por los miembros integrantes del proceso de sustentación.



Firmado digitalmente por  
Dr. Ing. Efraín Elías Porras  
Flores  
Fecha: 2023.09.08 19:14:11  
-05'00'

**Dr. Ing. Efraín Elías PORRAS FLORES**  
Presidente

**Mg. José Carlos JUAREZ PULACHE**  
Jurado



Firmado digitalmente  
por PAIVA YANAYACO  
Daul Andres FAU  
20143660754.soft  
Fecha: 2023.09.08  
10:53:17 -05'00'

**Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO**  
Jurado Asesor

**Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR**  
Secretario del Proceso  
Departamento Académico de Matemática y Física



C.c.:  
Bach. MICHAEL ROJAS ESPINOZA  
Jurados (3)  
Archivo



UNSCH

FACULTAD DE  
INGENIERÍA  
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL



“Año de la unidad, la paz y el desarrollo”

## CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

### CONSTANCIA N° 073-2023-FIMGC

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 288-2023-FIMGC-UNSCH-D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

**Apellidos y Nombres** : ROJAS ESPINOZA, Michael  
**Escuela Profesional** : Ciencias Físico Matemáticas  
**Título de la Tesis** : “LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN Y SU APLICACIÓN COMO FUNCIONES BASE EN EL MÉTODO DE GALERKIN”  
**Evaluación de la Originalidad** : 08 % Índice de Similitud  
**Identificador de la entrega** : 2159654599

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 07 de setiembre del 2023



UNIVERSIDAD NACIONAL DE  
SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA  
Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil

**Mg. Ing. Christian LEZAMA CUELLAR**

Verificador de Originalidad de Trabajos de Tesis de Pregrado  
Departamento Académicos de Matemática y Física

Con depósito para Sustentación y Tramites  
Cc. Archivo.



# “LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN Y SU APLICACIÓN COMO FUNCIONES BASE EN EL MÉTODO DE GALERKIN”

*por Michael Rojas Espinoza*

---

**Fecha de entrega:** 07-sep-2023 12:27a.m. (UTC-0500)

**Identificador de la entrega:** 2159654599

**Nombre del archivo:** Tesis\_MICHAEL\_ROJAS\_ESPINOZA\_FISMA.pdf (2.93M)

**Total de palabras:** 21463

**Total de caracteres:** 88820

# “LOS POLINOMIOS DE BERNSTEIN Y SU APLICACIÓN COMO FUNCIONES BASE EN EL MÉTODO DE GALERKIN”

## INFORME DE ORIGINALIDAD

8%

INDICE DE SIMILITUD

8%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

3%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

1	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	1%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	1%
3	albertofest.matcuer.unam.mx Fuente de Internet	1%
4	www.scribd.com Fuente de Internet	<1%
5	amb.unizar.es Fuente de Internet	<1%
6	eprints.uanl.mx Fuente de Internet	<1%
7	repositorio.unsch.edu.pe Fuente de Internet	<1%
8	oa.upm.es Fuente de Internet	<1%

9	<a href="http://webdelprofesor.ula.ve">webdelprofesor.ula.ve</a> Fuente de Internet	<1 %
10	<a href="http://vdocuments.pub">vdocuments.pub</a> Fuente de Internet	<1 %
11	<a href="http://silo.pub">silo.pub</a> Fuente de Internet	<1 %
12	<a href="http://documents.tips">documents.tips</a> Fuente de Internet	<1 %
13	<a href="http://epdf.tips">epdf.tips</a> Fuente de Internet	<1 %
14	<a href="http://group22x.narod.ru">group22x.narod.ru</a> Fuente de Internet	<1 %
15	<a href="http://s2.cuuduongthancong.com">s2.cuuduongthancong.com</a> Fuente de Internet	<1 %
16	Submitted to Universiti Kebangsaan Malaysia Trabajo del estudiante	<1 %
17	<a href="http://qdoc.tips">qdoc.tips</a> Fuente de Internet	<1 %
18	<a href="http://repositorio.uceva.edu.co">repositorio.uceva.edu.co</a> Fuente de Internet	<1 %
19	<a href="http://ar.scribd.com">ar.scribd.com</a> Fuente de Internet	<1 %
20	<a href="http://fernandorevilla.es">fernandorevilla.es</a> Fuente de Internet	<1 %

21 [mriuc.bc.uc.edu.ve](http://mriuc.bc.uc.edu.ve) <1 %  
Fuente de Internet

---

22 Submitted to Heriot-Watt University <1 %  
Trabajo del estudiante

---

23 [webthesis.biblio.polito.it](http://webthesis.biblio.polito.it) <1 %  
Fuente de Internet

---

24 Submitted to Universidad Catolica Los Angeles de Chimbote <1 %  
Trabajo del estudiante

---

Excluir citas Activo

Excluir coincidencias < 30 words

Excluir bibliografía Activo