

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE
HUAMANGA**

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
ESCUELA DE FORMACIÓN PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

**DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CONCRETO
SIMPLE EN TIEMPO REAL**

ALUMNO: Bach. SAÚL ANYOSA CHUCHÓN

ASESOR: M. Sc. Ing. ADOLFO LINARES FLORES

AYACUCHO – PERÚ

2018

Presentación

La presente tesis se presenta para optar el título profesional de Ingeniero Civil, de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga. Se obtiene una función analítica para la predicción de la Resistencia del Concreto en tiempo real; además se obtiene una base de datos de diseño de mezclas de concreto. Se realizó una Revisión Sistemática de la Literatura como método de investigación. Se muestran varios algoritmos en C++, que abarcan temas de interpolación-extrapolación, modelamiento de datos con la formulación matemática respectiva.

Saúl Anyosa Chuchón

Saulach1@hotmail.com

Escuela Profesional de Ingeniería Civil

Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga

Ayacucho, 2018

Dedicatoria

La presente tesis se los dedico, de manera muy especial, a mi querida esposa Gertrudes por su apoyo incondicional y comprensión.

A mis hijos Saúl Octavio y Valeria Sofía por ser el motivo de seguir adelante en mi proyecto.

A mis padres Alicia y Oswaldo por su apoyo permanente.

A mi asesor de tesis M. Sc. Ing. Adolfo Linares Flores por sus aportes y sabios consejos.

A los profesores de mi alma mater, que me formaron con tesón y conocimiento.

Agradecimientos

- A mi alma mater, la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga
- A los docentes de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil
- A mi asesor de tesis, M. Sc. Ing. Adolfo Linares Flores
- A mi esposa y a mis padres.

Resumen

La presente tesis tiene como objetivo fundamental predecir la Resistencia del Concreto en tiempo real; para lo cual se busca una función analítica de la Resistencia del Concreto que en función de las cantidades y propiedades de los insumos de las mezclas del concreto fresco, que se pueden medir directamente y al instante. Para obtener esta función analítica de la Resistencia del Concreto, se requiere una gran cantidad de datos de mezclas de diseño de concreto; por lo que haciendo uso de las herramientas matemáticas de la interpolación – extrapolación; se han automatizado los gráficos y nomogramas clásicos del Método de Diseño de Mezclas del ACI 211.1, creando una gran base de datos de estas mezclas de concreto para las diversas combinaciones de materiales. Para obtener la función predictiva de la Resistencia del Concreto estos datos han sido modelados con funciones base usando el Método de los Mínimos Cuadrados Lineales Generalizados; con la Solución Por el Uso de la Descomposición del Valor Singular, para evitar los ceros, es decir, las matrices singulares. Muchos algoritmos en C++ se detallan en el presente trabajo.

Índice general

Portada	1
Presentación	2
Dedicatoria	3
Agradecimientos	4
Resumen	5
Índice general	6
Índice de figuras	8
Índice de cuadros	9
1. INTRODUCCIÓN	
1.1. TÍTULO.....	10
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	10
1.2.1. Formulación del problema.....	10
1.2.2. Problema principal.....	10
1.2.3. Problemas secundarios.....	10
1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN.....	10
1.4. IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN.....	11
1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.....	11
1.5.1. Objetivo General.....	11
1.5.2. Objetivos Específicos.....	11
1.6. HIPÓTESIS.....	12
1.6.1. Hipótesis Secundarias.....	12
1.7. VARIABLES E INDICADORES.....	12
1.7.1. Variable Independiente.....	12
1.7.2. Variables Dependientes.....	12
1.8. UNIDAD DE ANÁLISIS.....	12
1.9. METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.....	13
1.9.1. Tipo de Investigación.....	13
1.9.2. Nivel de Investigación.....	13
1.9.3. Diseño de la Investigación.....	13
2. MARCO TEÓRICO	
2.1. Introducción.....	14
2.2. Métodos de Diseño de Mezclas de Concreto.....	18
2.3. Modelamiento de Datos por Mínimos Cuadrados Lineales Generalizados.....	20
2.3.1. Ajustando Datos a una Línea Recta.....	20

2.3.2. Mínimos Cuadrados Lineales Generalizados.....	26
2.3.3. Solución por el Uso de las Ecuaciones Normales.....	27
2.3.4. Solución Por el Uso de la Descomposición del Valor Singular.....	31
2.4. Interpolación y Extrapolación.....	36
2.4.1. Introducción.....	36
2.4.2. Búsqueda con valores correlacionados.....	41
2.4.3. Ejemplo: Interpolación lineal.....	42
2.4.4. Interpolación y extrapolación polinomial.....	42
2.4.5. Interpolación Cúbica Spline.....	43
2.4.6. Función Racional de Interpolación y Extrapolación.....	44
2.4.7. Interpolación Racional Baricéntrica.....	44
2.4.8. Interpolación Bilineal.....	44
2.5. Estudios Directamente Relacionados con la Solución al Problema de la Tesis.....	45
2.5.1. Introducción.....	45
3. MATERIALES Y MÉTODOS	
3.1. Metodología para la obtención de la función de aprendizaje.....	58
3.1.1. Adquisición de datos.....	58
3.1.2. Modelamiento de datos.....	87
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES	
4.1. Presentación de la función de aprendizaje.....	89
4.2. Contrastación de hipótesis.....	89
4.3. Límites para el uso del modelo.....	90
4.4. Conclusiones y Recomendaciones.....	90
5. REFERENCIAS – BIBLIOGRAFÍA.....	93

Índice de figuras

2.1.	Relación agua – material cementante.....	18
2.2.	Volumen del agregado grueso por unidad de volumen del concreto.....	19
2.3.	Demanda de agua aproximada para varios revenimientos y tamaños de agregados triturados para concreto sin aire incluido.....	20
2.4.	Matriz de diseño A para el ajuste por mínimos cuadrados de la combinación lineal de M funciones de base a N puntos de datos	27
2.5.	Conjuntos difusos para la variable de entrada Módulo de Finura.....	53
2.6.	Validación del modelo A.....	57

Índice de cuadros y/o tablas

I.	Revenimientos Recomendados para Varios Tipos de Construcción.....	19
II.	Componentes de la mezcla y rangos de fracciones de volumen.....	49
III.	Conjuntos difusos para el Módulo de finura.....	53
IV.	Diseño de mezclas de concreto por el Método ACI 211.1.....	58

1. INTRODUCCIÓN

1.1. TÍTULO

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CONCRETO SIMPLE EN TIEMPO REAL

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.2.1. Formulación del problema.

Un problema del uso de concreto hidráulico de cemento Portland, es que la Resistencia a la Compresión del Concreto Endurecido se determina a posteriori, es decir, después de haber vaciado las estructuras o elementos estructurales de concreto simple, concreto armado u otro tipo de concreto; cuando el concreto ya endureció, normalmente, después de 28 días, cuando se rompen las probetas de concreto.

¿Qué pasaría si después de haber vaciado una estructura, como un techo aligerado en una vivienda, se comprueba, después de días, como es lo usual, que la resistencia a la compresión del concreto es menor que el especificado en los planos o especificaciones técnicas del proyecto? Habría que demoler la construcción o reforzarlo o vivir en la zozobra por la inseguridad originada por la resistencia del concreto, menor a lo especificado en el diseño.

1.2.2. Problema principal.

La determinación de la Resistencia a la Compresión del concreto se comprueba, después de días, 7 días, 14 días, comúnmente a los 28 días, a posteriori, cuando ya no se puede hacerse prácticamente nada en caso de que esta variable de la resistencia a la compresión fuera menor que lo especificado en el diseño.

1.2.3. Problemas secundarios

- El uso del concreto en las obras civiles, tanto de viviendas como en otras es masiva, sin embargo, especialmente en las viviendas de auto construcción, el control de la calidad del concreto es baja, por lo que no se garantiza la resistencia del concreto a la compresión; lo cual trae aparejado edificaciones inseguras.
- La inexistencia de un método práctico para conocer la resistencia a la compresión con cierto grado de confianza, con datos relevantes y de fácil obtención, sin estar recurriendo al laboratorio.

1.3. JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se justifica, por lo que se pretende obtener una herramienta útil para los ingenieros residentes o supervisores, propietarios o agentes de la obra

en general, de contar con la resistencia a la compresión del concreto en el momento mismo del vaciado, lo que permitirá en el acto corregir deficiencias en esta variable, la más importante del concreto. Esto es beneficioso para todos los agentes que intervienen en la obra, lo que permitirá tener estructuras más seguras, que también repercutiría en la mejora de la seguridad estructural de las edificaciones de la ciudad, es decir, hay un aporte a la sociedad.

1.4. IMPORTANCIA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación es importante porque en la actualidad sólo existen métodos para determinar la resistencia a la compresión del concreto endurecido. Esta información ya no es tan útil como tener la misma información (resistencia a la compresión del concreto) (Abrams, 1920) pero en el mismo instante en que el concreto aún es fresco y puede solucionarse el problema de una resistencia menor. Es decir, lo que coloquialmente se conoce que nadie quiere un periódico de ayer. Cuanto más fresca la información mucho mayor es su utilidad.

1.5. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.5.1. Objetivo General

Una revisión claramente definida y orientada comienza con una pregunta bien delimitada. En las revisiones Cochrane las preguntas son planteadas ampliamente como ‘Objetivos’ de la revisión. *Manual Cochrane de revisiones sistemáticas de intervenciones [:versión 5.1.0 2012, p. 105)*, por lo tanto los objetivos de la presente tesis son:

1. Determinar analíticamente la Resistencia a la compresión del concreto ($f'c$), en tiempo real, en mezclas de concreto en el rango de resistencias de 80 kg/cm² a 366 kg/cm² que serán comparados con resultados de resistencias a la compresión de probetas de concreto en laboratorios autorizados.

1.5.2. Objetivos Específicos

Como se ha observado en la sección de introducción, el diseño de mezclas, desde sus inicios hasta la actualidad, implica el uso de tablas y nomogramas que hacen que sea impracticable hacerles un tratamiento informático, por lo que se requiere revisar los métodos y técnicas de interpolaciones y extrapolaciones en una y dos dimensiones, lo que nos lleva al segundo objetivo, específico:

2. Automatizar el tratamiento de los datos de las tablas y nomogramas del diseño de mezclas, usando técnicas numéricas-computacionales de interpolación y extrapolación de una y más dimensiones.

Para la determinación analítica de la Resistencia Especificada a la

Compresión del Concreto (f_c), debido a la casi infinita combinación de los materiales constituyentes de una mezcla se requieren la ayuda de modelos de tratamiento de datos, lo que nos lleva al tercer objetivo, también específico:

3. Comparar los diferentes Modelos Computacionales de la Resistencia a la Compresión del Concreto, que serán creados, con el fin de dotar del mejor modelo para la predicción de la Resistencia a la Compresión del Concreto.

1.6. HIPÓTESIS

Se supone que conociendo los pesos de los materiales en la preparación de la mezcla del concreto fresco, es decir, cemento, agua, piedra chancada y su tamaño, arena gruesa; es posible determinar con un grado de confianza aceptable, la resistencia a la compresión que tendrá el concreto en estado endurecido.

1.6.1. Hipótesis Secundarias

- Se cuenta con información confiable y de tamaño adecuado para poder obtener una función de aprendizaje o función que correlacione las variables dependientes y se obtenga la resistencia a la compresión del concreto.
- Se supone que la gran cantidad de construcciones de concreto, usan el cemento Portland tipo I y la piedra chancada y que los vaciados se realizan por lo menos con mezcladoras.

1.7. VARIABLES E INDICADORES

1.7.1. Variable Independiente

La variable independiente es la resistencia a la compresión del concreto

1.7.2. Variables Dependientes

Las variables dependientes son las cantidades de materiales que entran en una unidad de mezcla del concreto.

- Peso del cemento.
- Peso del agua.
- Peso del agregado grueso.
- Peso del agregado fino.
- Tamaño máximo nominal del agregado grueso.
- Módulo de Finura del agregado fino.
- Slump o revenimiento del concreto fresco.

1.8. UNIDAD DE ANÁLISIS

La mezcla de los componentes del concreto fresco, para obtener una resistencia a la compresión del mismo en estado endurecido.

1.9. METODOLOGÍA DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

1.9.1. Tipo de Investigación

La investigación es de carácter cuantitativo, inductivo y experimental.

1.9.2. Nivel de Investigación

Es una investigación de tercer nivel, es decir, es predictiva o experimental.

Es una Investigación Predictiva - Prospectiva.

1.9.3. Diseño de la Investigación

Se recolectan datos de resistencia a la compresión del concreto (variable independiente) con las variables dependientes que son: pesos del cemento, agua, piedra chancada y arena gruesa, de diversos laboratorios u obras. En caso de falta de datos se realizarán pruebas de laboratorio para complementar o generar estos datos (training data).

Con los datos obtenidos se realizará una clasificación utilizando algoritmos computacionales que pueden ser el Gaussian Mixture Model, el Support Vector Machines o incluso la Neural Networks; para obtener una función de aprendizaje que nos de la resistencia del concreto a la compresión.

Para contrastación de hipótesis se someterá a prueba de rotura un conjunto de probetas de concreto de diferentes diseños de resistencia a la compresión.

2. Marco teórico

2.1. INTRODUCCIÓN

El concreto es indudablemente el material de construcción más importante y ampliamente utilizado de finales del siglo XX. Sin embargo, los modelos matemáticos que capturan con precisión el comportamiento material particular en todas las condiciones de carga de significación son escasos en el mejor de los casos. Aunque los conceptos y los modelos adecuados han existido durante bastante tiempo, su importancia práctica es baja debido a la atención limitada a los requisitos de la calibración y de la validación y a la escasez de métodos robustos, transparentes y comprensivos para realizar tales tareas, (Wendner et al., 2014).

Para el Marco Teórico de la presente tesis se ha realizado el método de la revisión sistemática de la literatura, que tiene como objetivo reunir toda la evidencia que se corresponda con los criterios de elegibilidad para orientar la investigación (*Manual Cochrane de revisiones sistemáticas de intervenciones [:versión 5.1.0, 2012, p. 12)* en la determinación de la Resistencia a la Compresión del Concreto en Tiempo Real, usando modelos computacionales.

Las actividades en la industria de la construcción son extenuantes y pueden causar problemas de salud en los obreros de la construcción de los edificios, (Jongkol & Chatmuangpak, 2012).

En la práctica de la ingeniería civil, en cuanto se refiere a la ingeniería estructural, una de las variables más importantes es la Resistencia Especificada a la Compresión del Concreto, denominado abreviadamente como $f'c$; los ingenieros o arquitectos desarrollan sus proyectos con una $f'c$ previamente definida que luego debería de ser lograda a través del proporcionamiento de la mezcla. (ACI-318SUS-14, 2014)

El proporcionamiento de la mezcla se refiere al proceso de determinación de las cantidades de los ingredientes del concreto, usando materiales locales, para que se logren las características especificadas. (Kosmatka, Kerkhoff, Panarese, & Tanesi, 2004, p. 185). Es decir, la $f'c$ se toma como dato de entrada, proporcionado por los ingenieros estructurales de diseño o proyectistas, para que con esta resistencia de proyecto se determinen las cantidades, en peso y/o volumen, de cemento portland, agregado fino, agregado grueso, agua y porcentajes de aire atrapado o incorporado que tenga una Resistencia a la Compresión Requerida del Concreto, f_{cr} , mayor que la Resistencia a la Compresión del Concreto $f'c$ especificada; (Kosmatka et al., 2004, p. 195) para garantizar la resistencia mecánica de las diversas estructuras como edificios o puentes. Para conocer realmente la resistencia a la compresión del concreto, $f'c$ en el estado endurecido, lo que se hace es sacar muestras, denominadas probetas de concreto en estado fresco, los cuales se someten a condiciones de humedad al 100% para que se endurezca y luego de 28 días normalmente se realizan ensayos

(ACI-318SUS-14, 2014, p. 508) o como mínimo 7 días.

El problema del enfoque anterior es que se conoce la Resistencia a la Compresión del Concreto de las estructuras a posteriori, cuando el valor de este conocimiento no tiene ya utilidad ya que el concreto en esa fecha ya está endurecido o yerto y ya no se puede incrementar este valor del $f'c$.

La industria del cemento desde sus inicios han sido monopólicos u oligopólicos, por las grandes inversiones en la maquinaria para preparar este ingrediente del concreto; en 1916 la Portland Cement Association, basada en empirismos, da las proporciones relativas de mezclas de concreto en volumen de acuerdo a los tipos o usos de las construcciones, (Portland Cement Association., 1916); se considera que una bolsa de cemento Portland de 94 libras de peso tiene un volumen de 1 pie cúbico. Se dan ejemplos del tipo: Una mezcla 1: 2: 3 significa 1 saco (1 pie cúbico) de cemento Portland, dos pies cúbicos de arena y 3 pies cúbicos de guijarros o piedras rotas. (Portland Cement Association., 1916, p. 12)

En 1920, en colaboración entre el Lewis Institute y la Portland Cement Association, analizaron 50000 briquetas de concreto para hallar la resistencia a la compresión del concreto, la variable dependiente, de diseños de mezclas de concreto que incluyen las variables independientes como son el cemento, el agua, los agregados finos y gruesos, consistencia de la mezcla, contenido y adsorción de humedad de los agregados; para resolver a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Qué mezcla es necesaria para producir concreto de la resistencia adecuada para un trabajo determinado?
2. ¿Con los materiales dados qué proporciones darán el mejor concreto a un costo mínimo?
3. ¿Con diferentes lotes de materiales de características diferentes que es el más adecuado para el propósito?
4. ¿Cuál es el efecto sobre la resistencia del concreto de cambios en la mezcla, consistencia o tamaño y clasificación del agregado? (Abrams, 1920, p. 6)

Este trabajo representa una crítica profunda a los proporcionamientos o mezclas de concreto anteriores, se rompen muchos mitos sobre la resistencia del concreto; este trabajo obtiene los siguientes resultados:

Se obtiene por primera vez una función matemática exponencial que relaciona la resistencia a la compresión del concreto en función de la razón agua/cemento en volumen. Es a través de este artículo, por lo que se determina que el factor más influyente en la resistencia a la compresión del concreto es el agua; hasta antes de esta investigación el agua no era tomada en cuenta; se creía que era el cemento el factor más principal y los agregados que lograban la mayor densidad. El autor afirma: *“Nuestro trabajo experimental ha enfatizado la importancia del*

agua en mezclas de concreto y demostrado que el agua es, de hecho, el ingrediente más importante, ya que variaciones muy pequeñas en el contenido de agua producen variaciones más importantes en la resistencia y otras propiedades del concreto que similares cambios en los otros ingredientes”. (Abrams, 1920, p. 6).

La ecuación de la curva es de la forma,

$$S = \frac{A}{B^x} \quad (1)$$

Donde S es la resistencia a la compresión del concreto y x es la relación entre el volumen de agua y el volumen de cemento en el lote. A y B son constantes cuyos valores dependen de la calidad del cemento utilizado, de la edad del concreto, de las condiciones de curado, etc. (Abrams, 1920, p. 9)

Esta ecuación expresa la ley de resistencia del concreto en lo que se refiere a las proporciones de materiales. Se ve que para los materiales del concreto dados la resistencia depende de solo un factor - la proporción de agua a cemento. Las ecuaciones que se han propuesto en el pasado para este propósito contienen términos que tienen en cuenta factores tales como la cantidad de cemento, las proporciones de agregado fino y grueso, los vacíos en el agregado, etc., pero han omitido uniformemente, el único término que es de suma importancia, es decir, *el agua*. (Abrams, 1920, p. 9)

Para las condiciones de estas pruebas, la ecuación (1) se convierte,

$$S = \frac{14000}{7^x} \quad (2)$$

La relación dada arriba se mantiene mientras el concreto no esté demasiado seco para la máxima resistencia y el agregado no sea demasiado grosero para una cantidad dada de cemento; en otras palabras, siempre y cuando tengamos una mezcla trabajable. (Abrams, 1920, p. 9)

Se obtiene una medida cuantitativa que informa sobre el tamaño de las partículas de los agregados y su gradación o clasificación denominado Módulo de Finura. Para un valor dado del Módulo de Finura, que bajo condiciones de la ratio agua - cemento constante; producen bajo una combinación infinita de diversos tamaños y gradaciones de los agregados, prácticamente la misma resistencia del concreto. Se da una fórmula que relaciona el Módulo de Finura de una partícula con su diámetro. Para los agregados que tienen diversos tamaños de partículas se muestra un Análisis por Tamizado que permite obtener el Módulo de Finura de los Agregados de una manera práctica.

La siguiente expresión muestra la relación entre el módulo de finura y el tamaño de la partícula:

$$m = 7.94 + 3.32 * \log(d) \quad (3)$$

Donde m = módulo de finura

d = diámetro de la partícula en pulgadas. (Abrams, 1920, p. 11)

Para todos los propósitos prácticos y para rangos ordinarios en mezclas de concreto, la relación de resistencia de módulo de finura se puede asumir como lineal. (Abrams, 1920, p. 13)

Se obtiene una fórmula que nos da la cantidad de agua por saco de cemento (de 94 libras de peso y 1 pie cúbico de volumen) que debe entrar en una mezcla dada de condiciones conocidas. La cantidad de agua necesaria para determinadas proporciones y condiciones puede determinarse mediante la fórmula siguiente:

$$x = R * \left[\frac{3}{2}p + \left(\frac{0.30}{1.26^m} + a - c \right) * n \right] \quad (4)$$

Donde x = agua requerida -ración al volumen de cemento en lote (proporción de agua).

R = Consistencia relativa del concreto, o "factor de trabajabilidad". La consistencia normal (consistencia relativa = 1,00) requiere el uso de una cantidad tal de agua mezcladora que causará una caída de 1/2 a 1 pulgada en un cilindro recién moldeado de 6 por 12 pulgadas de una mezcla de aproximadamente 1: 4 al retirar la forma constante, de un tirón hacia arriba. Una consistencia relativa de 1.10 requiere el uso de un 10% más de agua y bajo las condiciones anteriores dará una depresión de aproximadamente 5 a 6 pulgadas.

p = consistencia normal del cemento, relación en peso.

m = Módulo de finura del agregado (un exponente).

n = Volúmenes de agregado mixto a uno de cemento.

a = Absorción del agregado, relación de agua absorbida al volumen de agregado. (Determinado después de la inmersión en agua durante 3 horas Los valores promedio de la piedra caliza triturada y los gujarros se pueden asumir como 0.02, las areniscas porosas pueden llegar a 0.08, el agregado muy ligero y poroso puede llegar a 0.25).

c = Humedad contenida en agregado, relación de agua contenida al volumen de agregado. (Supongamos que es cero para agregado en ambiente seco). (Abrams, 1920, p. 18)

2.2. MÉTODOS DE DISEÑO DE MEZCLAS DE CONCRETO

Abrams, obtiene un método para el Diseño de Mezclas de Concreto, por volumen; en aplicación de las tablas y fórmulas obtenidas que son traducidas en nomogramas para su fácil uso; (Abrams, 1920, p. 24), fácil para su tiempo, ya que ahora habría que transformarlo en una aplicación computacional.

Desde esos años, son dos las instituciones casi monopólicas que orientan la industria y el conocimiento de la construcción con el cemento: La Portland Cement Association y la American Concrete Institute; quienes cada cierto tiempo, normalmente cada 3 años revisan los conocimientos sobre el concreto y se van actualizando. (ACI-318SUS-14, 2014, p. 3). La Portland Cement Association siguiendo con la metodología introducida por Duff Andrew Abrams en 1920, es decir, usando nomogramas o tablas, muestran el diseño de las mezclas de concreto, denominado método ACI 211.1; se sigue usando la relación agua – cemento, pero ahora en peso, descubierto por Abrams, como la variable para explicar la resistencia a la compresión del concreto.

Las tablas y nomogramas para el diseño de las mezclas de concreto normales son: (Kosmatka et al., 2004, p. 192)

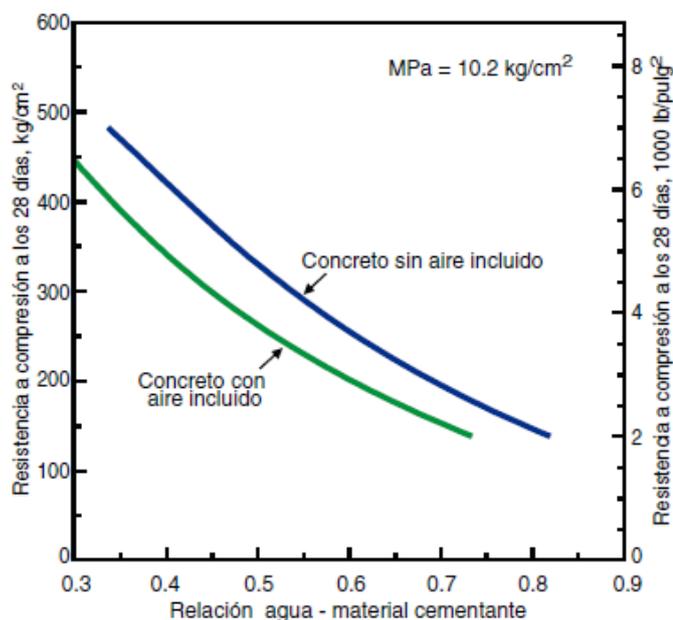


Fig. 2.1. Relación aproximada entre la resistencia a la compresión y relación agua-material cementante para el concreto con agregado grueso de tamaño máximo nominal de 19 mm a 25 mm (3/4 a 1 pulg.). La resistencia se basa en cilindros curados por 28 días en ambiente húmedo, de acuerdo con la ASTM C 33 (AASHTO T 23). Adaptado de la tabla 9-3 del ACI 211.1, ACI 211.3 y Hover 1995.

Tabla I. Revenimientos Recomendados para Varios Tipos de Construcción.

Construcción de Concreto	Revenimiento mm (pulg.)	
	Máximo*	Mínimo
Zapatas y muros de cimentación reforzado	75 (3)	25 (1)
Zapatas, cajones y muros de subestructuras sin refuerzo	75 (3)	25 (1)
Vigas y muros reforzados	100 (4)	25 (1)
Columnas de edificios	100 (4)	25 (1)
Pavimentos y losas	75 (3)	25 (1)
Concreto masivo	75 (3)	25 (1)

*Se puede aumentar 25 mm (1 pulg.) para los métodos de consolidación manuales, tales como varillado o picado. Los plastificantes pueden proveer revenimientos mayores. Adaptada del ACI 211.1

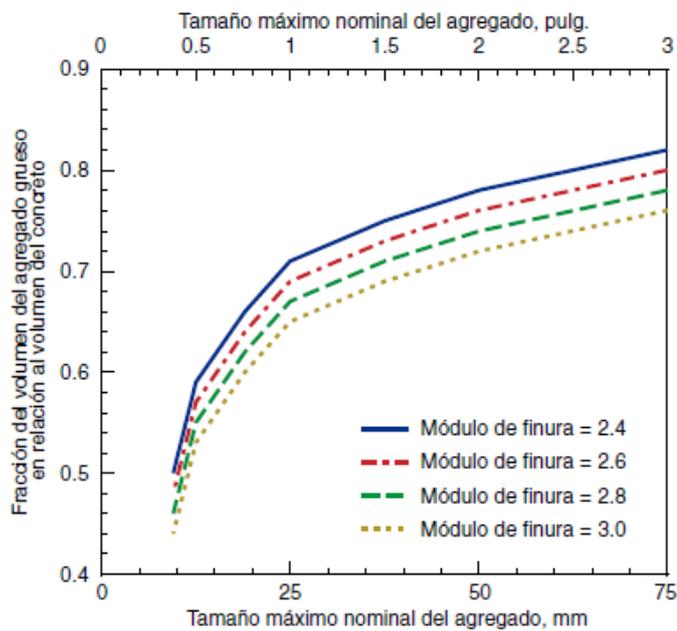


Fig. 2.2. Volumen del agregado grueso por unidad de volumen del concreto. Los volúmenes se basan en agregados en la condición de varillados en seco, como se describe en ASTM C 29 (AASHTO T 19). Para concretos más trabajables, como los concretos bombeables, este volumen se puede reducir hasta 10%. Adaptado de la tabla 9-4, ACI 211.1 y Hover (1995 y 1998)

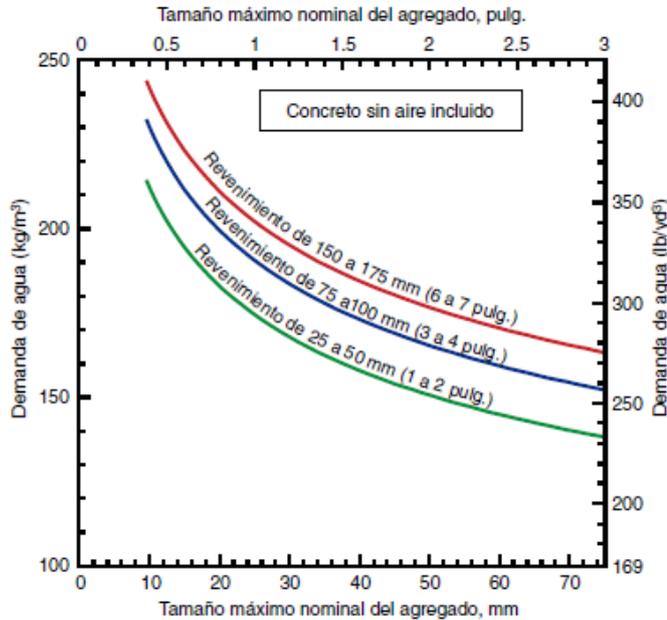


Fig. 2.3. Demanda de agua aproximada para varios revenimientos y tamaños de agregados triturados para concreto sin aire incluido. Adaptado de la tabla 9-5, ACI 211.1 y Hover (1995 y 1998)

Con ayuda de estas tablas y figuras se realizan los proporcionamientos de la mezcla del concreto, usando el método de los volúmenes absolutos parciales cuya suma de volúmenes debe ser la unidad (por ejemplo 1 metro cúbico de concreto). Se muestran ejemplos de proporcionamiento de mezclas de concreto e incluso se da un diagrama de flujo para este fin. (Kosmatka et al., 2004, p. 215)

2.3. MODELAMIENTO DE DATOS POR MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES GENERALIZADOS

2.3.1. Ajustando Datos a una Línea Recta

Un ejemplo concreto hará que las consideraciones de la técnica de los mínimos cuadrados sea más significativa. Consideramos que el problema de la instalación de un conjunto de N puntos de datos (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, N - 1$ a un modelo de línea recta. (Linares Flores, 2015)

$$y(x) = y(x|a, b) = a + b * x \quad (5)$$

Este problema a menudo se llama *regresión lineal*, una terminología que se originó, hace mucho tiempo, en las ciencias sociales. Suponemos que el σ_i es la incertidumbre asociada a cada y_i medida se conoce, y que (valores de la variable dependiente) de la x_i se conocen con exactitud.

Para medir qué tan bien el modelo está de acuerdo con los datos, se utiliza la función de mérito chi-cuadrado, que en este caso es (Linares Flores, 2015)

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y_i - a - b \cdot x_i}{\sigma_i} \right)^2 \quad (6)$$

Si los errores de medición se distribuyen normalmente, entonces esta función de mérito dará estimaciones de parámetros de máxima verosimilitud de a y b; si los errores no se distribuyen normalmente, entonces las estimaciones no son de máxima verosimilitud, pero todavía puede ser útil en un sentido práctico.

La ecuación (6) se minimiza para determinar a y b. En su mínimo, las derivadas de chi-cuadrado (a, b) con respecto a la a, b se hacen cero: (Linares Flores, 2015)

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i - a - b \cdot x_i}{\sigma_i^2} \quad [7]$$

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i \cdot (y_i - a - b \cdot x_i)}{\sigma_i^2}$$

Estas condiciones se pueden reescribir en una forma conveniente si definimos las siguientes sumas: (Linares Flores, 2015)

$$S \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i^2} \quad S_x \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \quad S_y \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i}{\sigma_i^2} \quad [8]$$

$$S_{xx} \equiv \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \quad S_{xy} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2}$$

Con estas definiciones [7] se convierte en

$$a \cdot S + b \cdot S_x = S_y \quad (9)$$

$$a \cdot S_x + b \cdot S_{xx} = S_{xy}$$

La solución de estas dos ecuaciones con dos incógnitas se calcula como (Linares Flores, 2015)

$$\begin{aligned} \Delta &= S \cdot S_{xx} - (S_x)^2 \\ a &= \frac{S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{\Delta} \\ b &= \frac{S \cdot S_{xy} - S_x \cdot S_y}{\Delta} \end{aligned} \quad (10)$$

La ecuación (10) da la solución para los parámetros del modelo que mejor se ajuste a y b .

No hemos terminado, sin embargo. Debemos estimar las incertidumbres probables en las estimaciones de a y b , ya que, obviamente, los errores de medición en los datos deben introducir cierta incertidumbre en la determinación de estos parámetros. Si los datos son independientes, entonces cada uno contribuye su propio bit de incertidumbre de los parámetros. Consideración de propagación de errores muestra que el σ_f^2 varianza en el valor de cualquier función será (Linares Flores, 2015)

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} \right)^2 \quad (11)$$

Para la línea recta, las derivadas de a y b con respecto a y_i pueden ser evaluados directamente de la solución:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{S_{xx} - S_x * x_i}{\sigma_i^2 * \Delta} \quad (12)$$

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{S * x_i - S_x}{\sigma_i^2 * \Delta}$$

Sumando sobre los puntos que en (12), obtenemos

$$\sigma_a^2 = S_{xx} / \Delta \quad (13)$$

$$\sigma_b^2 = S / \Delta$$

que son las varianzas en las estimaciones de a y b , respectivamente. Veremos que también se necesita un número adicional para caracterizar adecuadamente la incertidumbre probable de la estimación de parámetros. Ese número es la covarianza de a y b , y (como veremos más adelante) está dada por

$$Cov(a, b) = -S_x / \Delta \quad (14)$$

El coeficiente de correlación entre la incertidumbre en a y la incertidumbre en b , que es un número entre -1 y 1, se sigue de (14)

$$r_{ab} = \frac{-S_x}{\sqrt{S * S_{xx}}} \quad (15)$$

Un valor positivo de r_{ab} indica que los errores en a y b es probable que tengan el mismo signo, mientras que un valor negativo indica los errores son anticorrelacionados, propensos a tener signos opuestos.

Todavía no hemos terminado. Debemos estimar la bondad de ajuste de los datos al modelo. ¡En ausencia de esta estimación, no tenemos la más mínima indicación de que los parámetros a y b en el modelo tienen ningún sentido en absoluto! La probabilidad Q de que un valor de chi-cuadrado tan pobre como el valor (7) debe ocurrir por casualidad es

$$Q = 1 - \text{Chisqdist}(N-2) .\text{cdf}(\text{chi-cuadrado}) \quad (16)$$

Aquí Chisqdist es nuestro objeto que realiza la función de distribución de chi cuadrado y cdf es su función de distribución acumulativa. Si Q es mayor que, digamos 0,1, entonces la bondad del ajuste, es creíble. Si es mayor que, digamos, 0.001, a continuación, el ajuste puede ser aceptable si los errores son no normal o han sido subestimados moderadamente. Si Q es inferior a 0.001, entonces el modelo y / o procedimiento de estimación de razón puede ser puesto en duda. En este último caso, recurrir a las estimaciones robustas para seguir adelante.

Si usted no sabe los errores de medición de los puntos individuales, σ_i , y está procediendo (peligrosamente) para utilizar la ecuación del chi-cuadrado para la estimación de estos errores, entonces aquí está el procedimiento para la estimación de las incertidumbres probables de los parámetros a y b : conjunto $\sigma_i = 1$ en toda ecuación a (11), y multiplicar σ_a y σ_b , tal como se obtiene de la ecuación (14), por el factor

adicional $\sqrt{\chi^2/(N-2)}$, donde χ^2 se calcula usando los parámetros ajustados a y b . Como se mencionó anteriormente, este procedimiento es equivalente a suponer un buen ajuste, por lo que no obtiene una probabilidad Q independiente de bondad de ajuste. Existe una relación entre el coeficiente de correlación lineal r y una medida de bondad de ajuste, chi-cuadrado (ecuación 7). Para los datos no ponderados (todo $\sigma_i = 1$), esa relación es:

$$\chi^2 = (1 - r^2) \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - \bar{y})^2 \quad [17]$$

Para los datos con diferentes errores σ_i , las ecuaciones anteriores siguen siendo válidas si las sumas en las ecuaciones (American Concrete Institute. Committee 517) se ponderan por $1/\sigma_i^2$.

El siguiente objeto, Fitab, lleva a cabo exactamente las operaciones que hemos discutido. Usted llama a su constructor, ya sea con o sin errores σ_i . Si no se dispone de los σ_i de son conocidos, la rutina asume valores iguales de σ_i para cada punto y supone un buen ajuste, como se discute en los Estimadores de Máxima Verosimilitud.

Las fórmulas (12) son susceptibles de error de redondeo. De acuerdo con ello, volvemos a escribir la siguiente manera: Definir (Linares Flores, 2015)

$$t_i = \frac{1}{\sigma_i} \left(x_i - \frac{S_x}{S} \right), \quad i = 0, 1, \dots, N - 1 \quad [18] \text{ y}$$

$$S_{tt} = \sum_{i=0}^{N-1} t_i^2 \quad (19)$$

Entonces, como se puede verificar por sustitución directa,

$$b = \frac{1}{S_{tt}} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{t_i * y_i}{\sigma_i} \quad (20)$$

$$a = \frac{S_y - S_x * b}{S} \quad [21]$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{S} \left(1 + \frac{S_x^2}{S * S_{tt}} \right) \quad (22)$$

$$\sigma_b^2 = \frac{1}{S_{tt}} \quad (23)$$

$$Cov(a, b) = - \frac{S_x}{S * S_{tt}} \quad (24)$$

$$r_{ab} = \frac{Cov(a, b)}{\sigma_a * \sigma_b} \quad (25)$$

```
struct Fitab {(Linares Flores, 2015)

/** Objeto para el ajuste de una línea recta y = a + bx a un
conjunto de puntos (xi, yi), con o sin errores sigma_i
disponible. Llamar a uno de los dos constructores para
calcular el ajuste. Las respuestas son entonces disponibles
como las variables a, b, siga, sigb, chi2, y q o sigdat.
*/
Int ndata;
Doub a, b, siga, sigb, chi2, q, sigdat;
VecDoub_I &x, &y, &sig;

Fitab(VecDoub_I &xx, VecDoub_I &yy, VecDoub_I &ssig)
: ndata(xx.size()), x(xx), y(yy), sig(ssig), chi2(0.), q(1.),
sigdat(0.) {
/** Constructor. Dado un conjunto de puntos de datos x[0
... ndata-1], y[0 ... ndata-1] con desviaciones
estándar individuales sig [0 ... ndata-1], establece
a, b y su respectiva probable incertidumbres siga y
sigb, el chi-cuadrado, y la probabilidad q de bondad
de ajuste (que el ajuste tendría  $\chi^2$  este grande o
mayor)
*/

Gamma gam;
```

```

    Int i;
    Doub ss=0.,sx=0.,sy=0.,st2=0.,t,wt,sxoss;
    b=0.0;
    for (i=0;i<ndata;i++) {
        wt=1.0/SQR(sig[i]);
        ss += wt;
        sx += x[i]*wt;
        sy += y[i]*wt;
    }
    sxoss=sx/ss;
    for (i=0;i<ndata;i++) {
        t=(x[i]-sxoss)/sig[i];
        st2 += t*t;
        b += t*y[i]/sig[i];
    }
    b /= st2;
    a=(sy-sx*b)/ss;
    siga=sqrt((1.0+sx*sx/(ss*st2))/ss);
    sigb=sqrt(1.0/st2);
    for (i=0;i<ndata;i++) chi2 += SQR((y[i]-a-b*x[i])/sig[i]);
    if (ndata>2) q=gam.gammq(0.5*(ndata-2),0.5*chi2);
}

Fitab(VecDoub_I &xx, VecDoub_I &yy)
: ndata(xx.size()), x(xx), y(yy), sig(xx), chi2(0.), q(1.),
sigdat(0.) {
    /* Constructor. Como el anterior, pero sin errores
    conocidos sig no se utiliza). Las incertidumbres
    SIGSA y SIGB son estimadas asumiendo errores iguales
    para todos los puntos, y que una línea recta es una
    buena opción. q se devuelve como 1,0, la
    normalización de chi2 es la desviación estándar
    unidad en todos los puntos, y sigdat se establece en
    el error estimado de cada punto.
    */
    Int i;
    Doub ss,sx=0.,sy=0.,st2=0.,t,sxoss;
    b=0.0;
    for (i=0;i<ndata;i++) {
        sx += x[i];
        sy += y[i];
    }
    ss=ndata;
    sxoss=sx/ss;
    for (i=0;i<ndata;i++) {
        t=x[i]-sxoss;
        st2 += t*t;
        b += t*y[i];
    }
    b /= st2;
    a=(sy-sx*b)/ss;
    siga=sqrt((1.0+sx*sx/(ss*st2))/ss);
    sigb=sqrt(1.0/st2);
    for (i=0;i<ndata;i++) chi2 += SQR(y[i]-a-b*x[i]);
    if (ndata > 2) sigdat=sqrt(chi2/(ndata-2));
    siga *= sigdat;
    sigb *= sigdat;
}
};

```

2.3.2. Mínimos Cuadrados Lineales Generalizados

Una generalización inmediata de la regresión lineal es encajar un conjunto de puntos de datos (x_i, y_i) a un modelo que no es sólo una combinación lineal de 1 y x (es decir, $a + b*x$), sino más bien una combinación lineal de cualquiera M funciones especificados de x . Por ejemplo, las funciones podrían ser $1, x, x^2, x^{M-1}$, en cuyo caso sus combinaciones lineales generales, (Linares Flores, 2015)

$$y(x) = a_0 + a_1 * x + a_2 * x^2 + \dots + a_{M-1} * x^{M-1} \quad (26)$$

es un polinomio de grado $M - 1$. O, las funciones podrían ser senos y cosenos, en cuyo caso su combinación lineal general es una serie de Fourier. La forma general de este tipo de modelo es

$$y(x) = \sum_{k=0}^{M-1} a_k * X_k(x) \quad (27)$$

donde las cantidades $X_0(x), \dots, X_{M-1}(x)$ son funciones fijas arbitrarias de x , llamadas las funciones de base.

Tenga en cuenta que las funciones $X_k(x)$ pueden ser tremendamente funciones no lineales de x . En esta discusión, "lineal" se refiere sólo a la dependencia del modelo en sus parámetros a_k

Para estos modelos lineales generalizamos la discusión de la sección anterior mediante la definición de una función de mérito

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{y_i - \sum_{k=0}^{M-1} a_k * X_k(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (28)$$

Como antes, σ_i es el error de medición (desviación estándar) del punto de datos i -ésimo, supuesto conocido. Si no se conocen los errores de medición, pueden todos (como se discutió) establecerse en el valor constante $\sigma = 1$.

Una vez más, vamos a elegir como mejores parámetros aquellos que minimizan χ^2 . Hay varias técnicas diferentes disponibles para la búsqueda de este mínimo. Dos de ellos son particularmente útiles, y vamos a discutir tanto en esta sección. Para introducirlos y dilucidar su relación, necesitamos un poco de notación.

Sea \mathbf{A} una matriz cuyos $N * M$ componentes están construidos a partir M de funciones de base evaluados en las N abscisas x_i , y desde los N errores de medición σ_i , por la prescripción

$$A_{ij} = \frac{X_j(x_i)}{\sigma_i} \quad (29)$$

La matriz \mathbf{A} se llama la matriz de diseño del problema de montaje. Nótese que \mathbf{A} en general tiene más filas que columnas, $N \geq M$, ya que debe haber más puntos de datos que los parámetros del modelo que hay que resolver. (¡Puede

ajustar una línea recta a dos puntos, pero no una ecuación de quinto grado muy significativo!) La matriz de diseño se muestra esquemáticamente en la figura 4.

$$\begin{pmatrix} \frac{X_0(x_0)}{\sigma_0} & \frac{X_1(x_0)}{\sigma_0} & \dots & \frac{X_{M-1}(x_0)}{\sigma_0} \\ \frac{X_0(x_1)}{\sigma_1} & \frac{X_1(x_1)}{\sigma_1} & \dots & \frac{X_{M-1}(x_1)}{\sigma_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{X_0(x_{N-1})}{\sigma_{N-1}} & \frac{X_1(x_{N-1})}{\sigma_{N-1}} & \dots & \frac{X_{M-1}(x_{N-1})}{\sigma_{N-1}} \end{pmatrix}$$

Fig. 2.4. Matriz de diseño A para el ajuste por mínimos cuadrados de la combinación lineal de M funciones de base a N puntos de datos. Los elementos de la matriz implican las funciones básicas evaluadas en los valores de la variable independiente en la que se realizan las mediciones y las desviaciones estándar de la variable dependiente medida. Los valores medidos de la variable dependiente no entran en la matriz de diseño.

También se define un vector **b** de longitud N por

$$b_i = \frac{y_i}{\sigma_i} \quad (30)$$

y denotar el vector cuyos M componentes son los parámetros que puedan montarse, a_0, \dots, a_{M-1} , por **a**.

2.3.3. Solución por el Uso de las Ecuaciones Normales

El mínimo de (28) se produce cuando la derivada de χ^2 con respecto a todos los M parámetros a_k se iguala a cero. Especializando la ecuación para el caso del modelo (4.1.2.2) (27), esta condición produce las M ecuaciones (Linares Flores, 2015)

$$0 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - \sum_{j=0}^{M-1} a_j * X_j(x_i)] * X_k(x_i) \quad k = 0, \dots, M - 1 \quad (31)$$

Intercambiando el orden de las sumatorias, podemos escribir (31) como la ecuación matricial

$$\sum_{j=0}^{M-1} \alpha_{kj} * a_j = \beta_k \quad (32)$$

Donde

$$\alpha_{kj} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{X_j(x_i) * X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad o, su equivalente \alpha = \mathbf{A}^T * \mathbf{A} \quad (33)$$

Una matriz de $M * M$, y

$$\beta_k = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad 0, \text{ su equivalente } \boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}^T * \mathbf{b} \quad (34)$$

Un vector de longitud M .

Las ecuaciones (31) o (32) son llamadas las *ecuaciones normales* del problema de los mínimos cuadrados.

Ellos pueden ser resueltos para el vector de parámetros \mathbf{a} por el método estándar del álgebra lineal, especialmente la descomposición LU con sustitución hacia atrás, la descomposición Cholesky o la eliminación de Gauss-Jordan. En forma matricial, las ecuaciones normales se pueden escribir como cualquiera de éstos

$$\boldsymbol{\alpha} * \mathbf{a} = \boldsymbol{\beta} \quad \text{o como} \quad (\mathbf{A}^T * \mathbf{A}) * \mathbf{a} = \mathbf{A}^T * \mathbf{b} \quad (35)$$

La matriz inversa $\mathbf{C} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}$ llamada la matriz de covarianza, está estrechamente relacionada con las incertidumbres probables (o, más precisamente, estándar) de los parámetros \mathbf{a} estimados. Para estimar estas incertidumbres, considere esto

$$a_j = \sum_{k=0}^{M-1} \alpha_{jk}^{-1} * \beta_k = \sum_{k=0}^{M-1} C_{jk} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \frac{y_i X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (36)$$

y que la varianza asociada con la estimación de a_j se puede encontrar a partir de

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=0}^{N-1} \sigma_i^2 \left(\frac{\partial a_j}{\partial y_i} \right)^2 \quad (37)$$

Tenga en cuenta que α_{kj} es independiente de y_i , así

$$\frac{\partial a_j}{\partial y_i} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{C_{jk} * X_k(x_i)}{\sigma_i^2} \quad (38)$$

En consecuencia, nos encontramos con que

$$\sigma^2(a_i) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{M-1} C_{jk} * C_{jl} \left[\sum_{i=0}^{N-1} \frac{X_k(x_i) * X_l(x_i)}{\sigma_i^2} \right] \quad (39)$$

El término final entre paréntesis es la matriz $\boldsymbol{\alpha}$. Dado que esta es la matriz inversa de \mathbf{C} , (4.1.2.14) reduce inmediatamente a

$$\sigma^2(a_i) = C_{jj} \quad (40)$$

En otras palabras, los elementos diagonales de \mathbf{C} son las varianzas (incertidumbres al cuadrado) de los parámetros buscado \mathbf{a} . No debería sorprender al enterarse de que los elementos fuera de la diagonal C_{jk} son las covarianzas entre a_j y a_k .

Ahora vamos a dar una rutina que implementa las fórmulas anteriores para el problema general lineal de mínimos cuadrados, por el método de las ecuaciones normales. Puesto que deseamos calcular no sólo la solución del vector \mathbf{a} , sino

también la matriz de covarianza C , es más conveniente utilizar la eliminación de Gauss-Jordan (rutina `gaussj`) para realizar el álgebra lineal. El recuento de operación en esta solicitud no es más grande que la de la descomposición LU . Si usted no tiene ninguna necesidad de la matriz de covarianza, sin embargo, puede ahorrarse un factor de 3 en el álgebra lineal por el cambio a la descomposición LU , sin el cálculo de la matriz inversa. En teoría, ya que $A^T * A$ es definida positiva, la descomposición de Cholesky es la forma más eficiente para resolver las ecuaciones normales. Sin embargo, en la práctica, la mayor parte del tiempo de cálculo se gastan en bucles a través de los datos para formar las ecuaciones, y el método de la eliminación de Gauss-Jordan es bastante adecuado.

Debemos advertir que la solución de un problema de mínimos cuadrados directamente de las ecuaciones normales es bastante susceptible a errores de redondeo, ya que el número de condición de la matriz de α es el cuadrado del número de condición de A . Una alternativa, y que se prefiere, es la técnica que consiste en la descomposición QR de la matriz de diseño A .

Más adelante en esta sección, discutiremos otras dificultades en el problema de mínimos cuadrados, para el que la cura es la descomposición de valor singular (SVD), de la que se da una aplicación.

```
struct Fitlin {(Linares Flores, 2015)
  /* Objeto para el ajuste de los mínimos cuadrados lineales
  generalizados, resolviendo las ecuaciones
normales,incluyendo
  también la capacidad de mantener los parámetros
  especificados en, valores especificados fijos. Llamar al
  Constructor para enlazar vectores de datos y funciones de
  ajuste. Luego llame a cualquier combinación de funciones,
  gratuitamente y espera y en forma tan a menudo como se
  desee, los conjuntos de ajuste dan las cantidades de salida
  en a, covar y chsq.
  */
  Int ndat, ma;
  VecDoub_I &x,&y,&sig;
  VecDoub (*funcs)(const Doub);
  VecBool ia;

  VecDoub a;
  MatDoub covar;
  Doub chisq;

  Fitlin(VecDoub_I &xx, VecDoub_I &yy, VecDoub_I &ssig, VecDoub
  funks(const Doub))
  : ndat(xx.size()), x(xx), y(yy), sig(ssig), funks(funks) {
    /* Constructor. Vincula referencias a las matrices de datos
    xx, yy, ssig, y las funciones suministradas por el usuario
    funks(x) que devuelve un VecDoub que contiene ma funciones
    de
    base evaluados en x = x. Inicializa todos los parámetros
    como libres (no retenidos)
    */
    ma = funks(x[0]).size();
```

```

        a.resize(ma);
        covar.resize(ma,ma);
        ia.resize(ma);
        for (Int i=0;i<ma;i++) ia[i] = true;
    }

void hold(const Int i, const Doub val) {ia[i]=false; a[i]=val;}
void free(const Int i) {ia[i]=true;}
/* Funciones opcionales para la consagración de un parámetro,
   identificados por un valor en el rango de 0, ..., ma-1,
   fija en el valor val, o para liberar un parámetro que se
   consagró previamente fijada, las funciones hold y free
   pueden ser llamados por cualquier número de parámetros
   antes de llamar a la función fit para calcular los valores
   de mejor ajuste para los restantes (no atados) parámetros,
   y el proceso puede repetirse varias veces.
   Alternativamente, se puede establecer el vector booleano ia
   directamente , antes de llamar a la función fit.
*/
void fit() {
    /* Resolver las ecuaciones normales para la minimización
       de  $\chi^2$  para encajar algunos o todos los coeficientes
       a[0, ..., ma-1] de una función que depende linealmente
       de a,  $y = \sum_j a_j * \text{funks}_j(x)$ . Los valores de
       respuesta son establecidos para a[0, ..., ma-1],  $\chi^2 =$ 
       chisq, y la matriz de covarianza covar[0, ..., ma-1
       [0, ..., ma-1]

    */
    Int i,j,k,l,m,mfit=0;
    Doub ym,wt,sum,sig2i;
    VecDoub afunc(ma);
    for (j=0;j<ma;j++) if (ia[j]) mfit++;
    if (mfit == 0) throw("lfit: no parameters to be fitted");
    MatDoub temp(mfit,mfit,0.),beta(mfit,1,0.);
    for (i=0;i<ndat;i++) {
        afunc = funcs(x[i]);
        ym=y[i];
        if (mfit < ma) {
            for (j=0;j<ma;j++)
                if (!ia[j]) ym -= a[j]*afunc[j];
        }
        sig2i=1.0/SQR(sig[i]);
        for (j=0,l=0;l<ma;l++) {
            if (ia[l]) {
                wt=afunc[l]*sig2i;
                for (k=0,m=0;m<=l;m++)
                    if (ia[m]) temp[j][k++] +=
wt*afunc[m];
                beta[j++][0] += ym*wt;
            }
        }
    }
    for (j=1;j<mfit;j++)
        for (k=0;k<j;k++) temp[k][j]=temp[j][k];
    gaussj(temp,beta);
    for (j=0,l=0;l<ma;l++) if (ia[l]) a[l]=beta[j++][0];
    chisq=0.0;
    for (i=0;i<ndat;i++) {
        afunc = funcs(x[i]);
        sum=0.0;

```

```

        for (j=0;j<ma;j++) sum += a[j]*afunc[j];
        chisq += SQR((y[i]-sum)/sig[i]);
    }
    for (j=0;j<mfit;j++)
        for (k=0;k<mfit;k++) covar[j][k]=temp[j][k];
    for (i=mfit;i<ma;i++)
        for (j=0;j<i+1;j++) covar[i][j]=covar[j][i]=0.0;
    k=mfit-1;
    for (j=ma-1;j>=0;j--) {
        if (ia[j]) {
            for (i=0;i<ma;i++)
                SWAP(covar[i][k],covar[i][j]);
            for (i=0;i<ma;i++)
                SWAP(covar[k][i],covar[j][i]);
            k--;
        }
    }
};

```

2.3.4. Solución Por el Uso de la Descomposición del Valor Singular

En algunas aplicaciones, las ecuaciones normales son perfectamente adecuadas para los problemas lineales de mínimos cuadrados. Sin embargo, en muchos otros casos, las ecuaciones normales están muy cerca de una matriz singular. Un elemento pivote cero se pueden encontrar durante la solución de las ecuaciones lineales (por ejemplo, en la rutina gaussj), en el que se no se obtiene alguna solución. O se puede producir un pequeño pivote, en cuyo caso se suele obtener el parámetro a_k equipada con grandes magnitudes que son delicadamente (y de forma inestable) equilibrados para cancelar casi precisamente cuando se evalúa la función ajustada. (Linares Flores, 2015)

¿Por qué ocurre esto comúnmente? Una razón matemática es que el número de condición de la matriz de \mathbf{a} es el cuadrado del número de condición de \mathbf{A} . Pero y una razón adicional es que, más a menudo que a los experimentadores les gustaría admitir, los datos no distinguen claramente entre dos o más de las funciones bases que proporcionan. Si dos de estas funciones, o dos combinaciones diferentes de funciones, pasan a ajustar los datos igual de bien - o igual de mal - entonces la matriz \mathbf{a} , es incapaz de distinguir entre ellos, prolijamente pliega su tienda de campaña y se convierte en una matriz singular. Hay una cierta ironía matemática en el hecho de que los problemas de mínimos cuadrados son tanto sobredeterminados (el número de puntos de datos es más grande que el número de parámetros) y subdeterminado (existen combinaciones ambiguas de parámetros); pero así es como a menudo se da. Las ambigüedades pueden ser extremadamente difíciles de detectar a priori en problemas complicados. (Linares Flores, 2015)

Introduzca la descomposición de valores singulares (SVD). Este sería un buen momento para que revisar las técnicas poderosas para tratar con conjuntos de ecuaciones o matrices que son o bien singulares o bien numéricamente muy cerca del singular, esta técnica es conocida como *descomposición de valores singulares*. En el caso de un sistema sobredeterminado, SVD produce una solución que es la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados. Eso es exactamente lo que queremos. En el caso de un sistema subdeterminado, SVD produce una solución cuyos valores (para nosotros, de la a_k) son más pequeños en el sentido de mínimos cuadrados. Eso también es lo que queremos: Cuando

alguna combinación de función de base es irrelevante para el ajuste, esa combinación será conducido a un valor más pequeño, inofensivo, que empuja hasta la cancelación delicadamente de infinitos.

En términos de la matriz de diseño \mathbf{A} (ecuación 29) y el vector \mathbf{b} (ecuación 10), la minimización de χ^2 en (28) se puede escribir como (Linares Flores, 2015)

$$\text{busque } \mathbf{a} \text{ que minimice } \chi^2 = |\mathbf{A} * \mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \quad (41)$$

Vemos que este es precisamente el problema que las rutinas en el objeto SVD están diseñados para resolver. La solución, que se da por la ecuación (2.6.12), se puede reescribir de la siguiente manera: Si \mathbf{U} y \mathbf{V} entran en la descomposición SVD de \mathbf{A} según la ecuación (2.6.1), calculado por SVD, a continuación, dejar que los vectores $\mathbf{U}_{(i)}$ $i = 0, \dots, M-1$ denotan las columnas de \mathbf{U} (cada uno un vector de longitud N), y deja que los vectores $\mathbf{V}_{(i)}$ $i = 0, \dots, M-1$ denotan las columnas de \mathbf{V} (cada uno un vector de longitud M). A continuación, la solución (2.6.12) del problema de mínimos cuadrados (4.1.2.16) se puede escribir como

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{U}_{(i)} * \mathbf{b}}{w_i} \right) \mathbf{V}_{(i)} \quad (42)$$

donde los w_i son, como §2.6, los valores singulares calculados por SVD.

La ecuación (42) dice que los parámetros equipada \mathbf{a} son combinaciones lineales de las columnas de \mathbf{V} , con coeficientes obtenidos mediante la formación de productos puntos de las columnas de \mathbf{U} con el vector de datos ponderada (10). A pesar de que está fuera de nuestro alcance de probar aquí, resulta que los errores estándar (vagamente, "probables") en los parámetros de ajuste también son combinaciones lineales de las columnas de \mathbf{V} . De hecho, la ecuación (42) se puede escribir en una forma de mostrar estos errores como

$$\mathbf{a} = \left[\sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{U}_{(i)} * \mathbf{b}}{w_i} \right) * \mathbf{V}_{(i)} \right] \pm \frac{1}{w_0} \mathbf{V}_{(0)} \text{Error! Marcador no definido.} \pm \dots \pm \frac{1}{w_{M-1}} \mathbf{V}_{(M-1)} \quad (43)$$

Aquí cada \pm seguido de una desviación estándar. El hecho sorprendente es que, descompuesto de esta manera, las desviaciones estándar son todos independientes entre sí (no correlacionada). Por lo tanto, se pueden sumar a la moda de la raíz cuadrada de la media. Lo que está pasando es que el vector $\mathbf{V}_{(i)}$ son los principales ejes del elipsoide de error de los parámetros ajustados \mathbf{a} .

De ello se desprende que la varianza en la estimación de un parámetro a_j está dada por

$$\sigma^2(a_j) = \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{w_i^2} [V_{(j)}]_j^2 = \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{V_{ji}}{w_i} \right)^2 \quad (44)$$

cuyo resultado debe ser idéntica a (39). Al igual que antes, no debe ser sorprendente en la fórmula para las covarianzas, aquí se dan sin pruebas,

$$Cov(a_j, a_k) = \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{V_{ji} * V_{ki}}{w_i^2} \right) \quad (45)$$

Hemos introducido este apartado señalando que las ecuaciones normales pueden fallar por encontrarse con un pivote cero. Aún sin embargo, no hemos mencionado cómo la SVD supera este problema. La respuesta es: Si algún valor singular w_i es cero, su recíproco en la ecuación (43) se debe establecer en cero, no en infinito. Esto corresponde a la adición de los parámetros equipada \mathbf{a} a un múltiplo de cero, en lugar de algún múltiplo de un gran número aleatorio, de cualquier combinación lineal de funciones de base que están degeneradas en el ajuste.

Por otra parte, si un valor singular w_i es distinto de cero, pero muy pequeño, también debe definir su recíproco a cero, ya que su valor aparente es probablemente un artefacto de error de redondeo, no es un número significativo. Una respuesta plausible a la pregunta "¿cómo pequeño es pequeño?" es editar de esta forma todos los valores singulares cuya relación con el mayor valor singular es inferior a N veces la precisión ϵ de la máquina. (Esta es una recomendación más conservadora que el por defecto, en el que se escala como $N^{1/2}$).

Hay otra razón para la edición incluso de valores singulares adicionales, los suficientemente grandes tal que error de redondeo no es una pregunta. La descomposición de valor singular le permite identificar las combinaciones lineales de variables que acaba de pasar y no contribuir mucho a reducir el χ^2 de su conjunto de datos. La edición de estos a veces puede reducir los errores de error probables en sus coeficientes de forma significativa, al tiempo que aumenta el χ^2 mínimo sólo insignificamente.

En general, se recomienda que siempre utilice técnicas SVD en lugar de utilizar las ecuaciones normales. La única desventaja significativa de SVD es que requiere más espacio de almacenamiento de orden $N * M$ de la matriz de diseño y su descomposición. El almacenamiento también se requiere para la matriz \mathbf{V} de $M * M$, pero esto es en lugar de la matriz del mismo tamaño para los coeficientes de las ecuaciones normales; Sin embargo, su gran ventaja, que (en teoría) no puede fallar, más que compensa la desventaja de velocidad.

El siguiente objeto, `Fitsvd`, tiene una interfaz casi idéntica a `Fitlin`, de arriba. Un parámetro opcional adicional en el constructor establece el umbral para la edición de valores singulares.

```
struct Fitsvd {(Linares Flores, 2015)
  /* Clase para los mínimos cuadrados lineales generalizados,
  ajustados mediante la descomposición de valor singular.
  Llame al constructor con los vectores de datos de
  vinculación y las funciones de ajuste. A continuación,
  llame en forma que fijó la cantidad de salida a, covar y
  chisq
  */
  Int ndat, ma;
  Doub tol;
  VecDoub_I *x, &y, &sig; // (¿Por qué es x un puntero? Está
explicado abajo)
  VecDoub (*funcs)(const Doub); // Los valores de salida.
  VecDoub a; // a es el vector de coeficientes
encajados,
```

```

    MatDoub covar;          // covar es su matriz de covarianza,
    Doub chisq;            //y chisq es el valor de chi-cuadrado
para el ajuste.

```

```

Fitsvd(VecDoub_I &xx, VecDoub_I &yy, VecDoub_I &ssig,
VecDoub funks(const Doub), const Doub TOL=1.e-12)
: ndat(yy.size()), x(&xx), xmd(NULL), y(yy), sig(ssig),
funcs(funks), tol(TOL) {}
/* Constructor. Vincula referencias a las matrices de datos xx
, yy, y ssig, y las funciones suministradas por el usuario
el valor por defecto en SVD.
*/

void fit() {
    /* Resuelve por la descomposición de valor singular la
    minimización De  $\chi^2$  que se ajusta para los coeficientes de
    a[0 ... ma-1] de una función que depende linealmente de a.
     $y = \sum_i a_i * \text{[funks]}_i(x)$  . El conjunto de respuesta
    establecidos para a[0 ... ma-1],  $\text{chisq} = \chi^2$ , y la matriz
    de covarianza covar[0 ... ma-1][0 ... ma-1].
    */
    Int i,j,k;
    Doub tmp,thresh,sum;
    if (x) ma = funks((*x)[0]).size();
    else ma = funcsmid(row(*xmd,0)).size();
    a.resize(ma);
    covar.resize(ma,ma);
    MatDoub aa(ndat,ma);
    VecDoub b(ndat),afunc(ma);
    for (i=0;i<ndat;i++) {
        if (x) afunc=funcs((*x)[i]);
        else afunc=funcsmid(row(*xmd,i));
        tmp=1.0/sig[i];
        for (j=0;j<ma;j++) aa[i][j]=afunc[j]*tmp;
        b[i]=y[i]*tmp;
    }
    SVD svd(aa);
    thresh = (tol > 0. ? tol*svd.w[0] : -1.);
    svd.solve(b,a,thresh);
    chisq=0.0;
    for (i=0;i<ndat;i++) {
        sum=0.;
        for (j=0;j<ma;j++) sum += aa[i][j]*a[j];
        chisq += SQR(sum-b[i]);
    }
    for (i=0;i<ma;i++) {
        for (j=0;j<i+1;j++) {
            sum=0.0;
            for (k=0;k<ma;k++) if (svd.w[k] > svd.tsh)
                sum +=
svd.v[i][k]*svd.v[j][k]/SQR(svd.w[k]);
            covar[j][i]=covar[i][j]=sum;
        }
    }
}
/* A partir de aquí, el código de los encajes
multidimensionales, que se discutirá más tarde
*/

MatDoub_I *xmd;

```

```

VecDoub (*funcsmd)(VecDoub_I &);

Fitsvd(MatDoub_I &xx, VecDoub_I &yy, VecDoub_I &ssig,
VecDoub funks(VecDoub_I &), const Doub TOL=1.e-12)
: ndat(yy.size()), x(NULL), xmd(&xx), y(yy), sig(ssig),
funcsmd(funks), tol(TOL) {}
/* Constructor para encajes multidimensionales. Exactamente el
mismo que el constructor anterior, excepto que ahora xx es una matriz
cuyas filas son los puntos de datos multidimensionales y funks
ahora es una función de un punto de datos multidimensional
(como un VecDoub).
*/

VecDoub row(MatDoub_I &a, const Int i) {
    Int j,n=a.ncols();
    VecDoub ans(n);
    for (j=0;j<n;j++) ans[j] = a[i][j];
    return ans;
}
};

```

Para problemas casi o degenerados, si quieres probar diferentes umbrales de valor singular, se llama al constructor Fitsvd una vez. A continuación, tantas veces como quieras, "llegar a" y aumentar tol, a continuación, llamar encaja de nuevo y examinar el valor resultante de chisq (y opcionalmente también la matriz de covarianza). Sigue adelante, siempre y cuando chisq no aumenta demasiado.

EJEMPLOS

Tenga en cuenta que algunos problemas aparentemente no lineales se pueden expresar de manera que son lineales. Por ejemplo, un modelo exponencial con dos parámetros a y b, (Linares Flores, 2015)

$$y(x) = a * e^{-b*x} \quad (46)$$

puede ser reescrita como

$$\log[y(x)] = c - b * x \quad (47)$$

que es lineal en los parámetros c y b. (Por supuesto, usted debe ser consciente de que estas transformaciones no tienen exactamente los errores de Gauss en errores de Gauss.)

También esté atento a funciones "sin parámetros", como en

$$y(x) = a * e^{(-b*x+d)} \quad (48)$$

Aquí los parámetros a y d son, de hecho son, indistinguibles. Este es un buen ejemplo de que las ecuaciones normales serán exactamente singulares, y donde SVD se encuentra un valor singular cero. SVD entonces hace una elección de mínimos cuadrados para el establecimiento de un equilibrio entre la a y d (o, más bien, sus equivalentes en el modelo lineal calculado tomando los logaritmos). Sin embargo - y esto es cierto siempre SVD devuelve un valor singular cero - que es mejor aconseja averiguar analíticamente donde la degeneración está entre sus funciones de base, y luego hacer supresiones apropiados en el conjunto base.

ENCAJES MULTIDIMENSIONALES

Si está midiendo una sola variable y en función de más de una variable - por ejemplo, un vector de variables \mathbf{x} - entonces sus funciones de base serán funciones de un vector, $X_0(\mathbf{x}), \dots, X_{M-1}(\mathbf{x})$. La función de mérito χ^2 es ahora. (Linares Flores, 2015)

$$\chi^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{y_i - \sum_{k=0}^{M-1} a_k X_k(\mathbf{x}_i)}{\sigma_i} \right]^2 \quad (49)$$

Toda la discusión anterior pasa a través de cambios, con x reemplazados por \mathbf{x} . De hecho, anticipamos esto en la codificación de Fitsvd, lo que puede hacer que un encaje multidimensional lineal general sea tan fácilmente como un unidimensional.

Aquí está ahora: El segundo constructor, sobrecargado, en Fitsvd sustituye un `xx` matriz para lo que antes era un vector. Las filas de la matriz son los puntos de datos `ndat`. El número de columnas es la dimensionalidad del espacio (es decir, de \mathbf{x}). Del mismo modo, las funciones suministradas por el usuario `funks` ahora toma un argumento vector, un \mathbf{x} . Un ejemplo sencillo (ajuste de una función cuadrática a los datos en dos dimensiones) podría ser

Asegúrese de que el argumento de la función de usuario tiene exactamente el tipo `"VecDoub_I &"` (y no, por ejemplo, `"VecDoub &"` o `"VecDoub_I"`), ya que los estrictos compiladores de C++ son muy exigentes con esto.

Los dos constructores en Fitsvd comunican para adaptarse si los puntos de datos son unidimensionales o multidimensionales estableciendo ya sea `xmd` o `x` a `NULL`. Esto explica la rareza que `x` se une a los datos del usuario como un puntero, mientras `y` y `sig` estaban consolidados como referencias. (¡Sí, sabemos que esto es un poco de un truco!)

Para problemas casi o degenerados, si quieres probar diferentes umbrales de valor singular, se llama al constructor Fitsvd una vez. A continuación, tantas veces como quieras, "llegar a" y aumentar `tol`, a continuación, llamar encaja de nuevo y examinar el valor resultante de `chisq` (y opcionalmente también la matriz de covarianza). Sigue adelante, siempre y cuando `chisq` no aumenta demasiado.

2.4. INTERPOLACIÓN Y EXTRAPOLACIÓN

2.4.1. Introducción.

El Método ACI para el proporcionamiento y diseño de mezclas de concreto se utilizan profusamente tablas de datos tabulados y gráficos; que al tratar de utilizarlos en modelos computacionales automáticos los debemos transformar en procedimientos de interpolación y extrapolación.

A veces sabemos el valor de una función $f(x)$ en un conjunto de puntos x_0, x_1, \dots, x_{N-1} (Digamos, con $x_0 < \dots < x_{N-1}$), Pero no tenemos una expresión analítica para $f(x)$ que nos permite calcular su valor en un punto arbitrario. Por ejemplo, los $f(x_i)$ podrían resultar de alguna medición física o de cálculos numéricos largos que no pueden ser emitidos en una forma funcional simple. A menudo, los x_i están igualmente espaciados, pero no necesariamente.

La tarea ahora es estimar $f(x)$ para un arbitrario x , en cierto sentido, dibujando una curva suave a través (y tal vez más allá) del x_i . Si el x deseado está entre el más grande y el más pequeño de los x_i , el problema se llama *interpolación*; si x está fuera de ese rango, se llama *extrapolación*, que es considerablemente más peligrosa (como muchos analistas de inversiones anteriores pueden dar fe), (Abramowitz, 1964).

Los esquemas de interpolación y extrapolación deben modelar la función, entre o más allá de los puntos conocidos, por alguna forma funcional plausible. La forma debe ser suficientemente general para poder aproximar grandes clases de funciones que puedan surgir en la práctica. De lejos los más comunes entre las formas funcionales utilizadas son polinomios. Las funciones racionales (cocientes de polinomios) también resultan extremadamente útiles. Las funciones trigonométricas, los senos y los cosenos, dan lugar a la *interpolación trigonométrica* y a los métodos de Fourier relacionados, (Stoer, 2002)

Existe una extensa literatura matemática dedicada a teoremas acerca de qué tipo de funciones pueden ser bien aproximadas mediante las funciones de interpolación. Estos teoremas son, por desgracia, casi completamente inútiles en el trabajo cotidiano: si sabemos lo suficiente sobre nuestra función para aplicar un teorema de cualquier poder, normalmente no estamos en el lamentable estado de tener que interpolar sobre una tabla de sus valores!

La interpolación está relacionada con, pero distinta de, la *aproximación de la función*. Esa tarea consiste en encontrar una función aproximada (pero fácilmente computable) para usar en lugar de una más complicada. En el caso de la interpolación, se le asigna la función f en puntos que no sean de su elección. Para el caso de la aproximación de función, se le permite calcular la función f en cualquier punto deseado con el propósito de desarrollar su aproximación.

Uno puede encontrar fácilmente funciones patológicas que hacen una burla de cualquier esquema de interpolación. Consideremos, por ejemplo, la función

$$f(x) = 3x^2 + \frac{1}{\pi^4} \ln[(\pi - x)^2] + 1 \quad [50]$$

Que se comporta bien en todas partes, excepto en $x = \pi$, muy ligeramente singular en $x = \pi$, y asume todos los valores positivos y negativos. Cualquier interpolación basada en los valores $x = 3.13, 3.14, 3.15, 3.16$, seguramente

obtendrá una respuesta muy errónea para el valor $x = 3.1416$, ¡aunque un gráfico que traza esos cinco puntos parece realmente muy suave! (Inténtalo.)

Debido a que las patologías pueden esconderse en cualquier lugar, es altamente deseable que una rutina de interpolación y extrapolación proporcione una estimación de su propio error. Tal estimación de error nunca puede ser infalible, por supuesto. Podríamos tener una función que, por razones conocidas sólo por su creador, despega salvajemente e inesperadamente entre dos puntos tabulados. La interpolación siempre presupone cierto grado de suavidad para la función interpolada, pero dentro de este marco de presunción pueden detectarse desviaciones de la suavidad.

Conceptualmente, el proceso de interpolación tiene dos etapas: (1) Ajustar (una vez) una función de interpolación a los puntos de datos proporcionados. (2) Evalúe (tantas veces como desee) esa función de interpolación en un punto de destino x .

Sin embargo, este método de dos etapas no suele ser la mejor manera de proceder en la práctica. Típicamente es computacionalmente menos eficiente y más susceptible al error de redondeo que los métodos que construyen una estimación funcional $f(x)$ directamente de los N valores tabulados cada vez que se desee. Muchos esquemas prácticos comienzan en un punto próximo $f(x_i)$, y luego agregan una secuencia de (esperamos) las correcciones decrecientes, como la información de otros cercanos $f(x_i)$ se incorpora. El procedimiento típicamente toma operaciones $O(M^2)$, donde $M \ll N$ es el número de puntos locales utilizados. Si todo se comporta bien, la última corrección será la más pequeña, y puede usarse como un límite informal (aunque no riguroso) en el error. En esquemas como este, también podríamos decir que hay dos etapas, pero ahora son: (1) Encuentra la posición de partida correcta en la tabla (x_i o i). (2) Realice la interpolación usando M valores cercanos (por ejemplo, centrados en x_i), (Knuth, 1997).

En el caso de la interpolación polinómica, a veces sucede que los coeficientes del polinomio de interpolación son de interés, a pesar de que su uso en la evaluación de la función de interpolación debe ser mal visto.

La interpolación local, usando M puntos de vecino más cercano, da valores interpolados $f(x)$ que no tienen, en general, derivadas continuas primera o más alta. Esto sucede porque, cuando x cruza los valores tabulados x_i , el esquema de interpolación conmuta cuáles son los puntos tabulados los "locales". (Si se permite que tal interruptor ocurra en cualquier otro lugar, entonces habrá una discontinuidad en la función interpolada en ese punto. Mala idea!)

En situaciones donde la continuidad de las derivadas es una preocupación, se debe utilizar la interpolación "más rígida" proporcionada por una función llamada spline. Una spline es un polinomio entre cada par de puntos de tabla,

pero uno cuyos coeficientes se determinan "ligeramente" no localmente. La no localidad está diseñada para garantizar la suavidad global en la función interpolada hasta cierto orden de derivada. Las splines cúbicas son las más populares. Ellos producen una función interpolada que es continua a través de la segunda derivada. Las splines tienden a ser polinomios más estables, con menos posibilidad de oscilación salvaje entre los puntos tabulados.

El número M de puntos utilizado en un esquema de interpolación, menos 1, se llama el orden de la interpolación. Aumentar el orden no necesariamente aumenta la precisión, especialmente en la interpolación polinomial. Si los puntos añadidos están distantes del punto de interés x , el polinomio de orden superior resultante, con sus puntos restringidos adicionales, tiende a oscilar salvajemente entre los valores tabulados. Esta oscilación puede no tener ninguna relación con el comportamiento de la función "verdadera". Por supuesto, la adición de puntos cercanos al punto deseado normalmente ayuda, pero una malla más fina implica una tabla de valores más grande, que no siempre está disponible.

Para la interpolación polinomial, resulta que la peor disposición posible de los x_i es que estén igualmente espaciados. Desafortunadamente, ésta es con mucho la forma más común en que se recogen o presentan los datos tabulados. La interpolación polinómica de orden alto sobre datos equidistantes está mal condicionada: pequeños cambios en los datos pueden dar grandes diferencias en las oscilaciones entre los puntos. La enfermedad es particularmente mala si se está interpolando sobre los valores de una función analítica que tiene polos en el plano complejo que se encuentra dentro de una región ovalada cierto cuyo eje mayor es el intervalo de puntos M . Pero incluso si tiene una función sin polos cercanos, el error de redondeo puede, en efecto, crear polos cercanos y causar errores de interpolación grandes. Estos problemas desaparecen si se le permite elegir un conjunto óptimo de x_i . Pero cuando le entregan una tabla de valores de función, esa opción no está disponible.

Por las razones mencionadas, es una buena idea ser cauteloso acerca de la interpolación de alto orden. Podemos apoyar con entusiasmo la interpolación polinómica con 3 o 4 puntos; Somos quizá tolerantes de 5 o 6; Pero rara vez vamos más alto que eso a menos que haya un control bastante riguroso de los errores estimados. La mayoría de los métodos de interpolación de este capítulo se aplican por piezas usando M puntos a la vez, de modo que el orden es un valor fijo $M - 1$, no importa cuán grande sea N . Como se ha mencionado, las splines son un caso especial en el que se requiere que la función y las diversas derivaciones sean continuas de un intervalo al siguiente, pero el orden se mantiene fijo en un valor pequeño (normalmente 3).

Se discute la interpolación de funciones racionales. En muchos casos, pero no en todos, la interpolación de funciones racionales es más robusta, permitiendo que los órdenes superiores proporcionen mayor precisión. El algoritmo estándar, sin

embargo, permite que los polos en el eje real o cerca en el plano complejo. (Esto no es necesariamente malo: puede estar tratando de aproximar una función con estos polos.) Un método más reciente, la interpolación racional baricéntrica suprime todos los polos cercanos. Este es el único método en este capítulo para el cual podríamos alentar la experimentación con alto orden (digamos, > 6). La interpolación racional baricéntrica compite muy favorablemente con splines: su error es a menudo más pequeño, y la aproximación resultante es infinitamente lisa (a diferencia de splines).

Los métodos de interpolación a continuación son también métodos de extrapolación. Una aplicación importante, es su uso en la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. Allí, se toma mucho cuidado con el monitoreo de errores. De lo contrario, los peligros de la función de extrapolación, normalmente se vuelven locos cuando el argumento x está fuera del rango de valores tabulados por más (y con frecuencia significativamente menor) que el espaciado típico de los puntos tabulados.

La interpolación puede realizarse en más de una dimensión, por ejemplo, para una función $f(x, y, z)$. La interpolación multidimensional se realiza a menudo mediante una secuencia de interpolaciones unidimensionales, pero también hay otras técnicas aplicables a los datos dispersos. Discutimos los métodos multidimensionales.

Preliminares: Búsqueda en una tabla ordenada

Queremos definir un objeto de interpolación que conoce todo acerca de la interpolación excepto una cosa: ¿cómo interpolar realmente? Entonces podemos conectar matemáticamente diferentes métodos de interpolación en el objeto para obtener diferentes objetos compartiendo una interfaz de usuario común. Una tarea clave común a todos los objetos en este marco es encontrar su lugar en la tabla de x_i , dada una determinada x en la que se desea la evaluación de la función. Vale la pena hacer un esfuerzo para hacerlo eficientemente; De lo contrario puede pasar más tiempo buscando en la tabla que haciendo la interpolación real.

Nuestro objeto de nivel más alto para la interpolación unidimensional es una clase base abstracta que contiene sólo una función destinada a ser llamada por el usuario: `interp(x)` devuelve el valor de la función interpolada en x . La clase base "promete", declarando una función virtual `rawinterp(jlo, x)`, que cada clase derivada de interpolación proporcionará un método de interpolación local cuando se le da un punto de inicio local apropiado en la tabla, un offset `jlo`. Interfaz entre `interp` y `rawinterp` debe ser un método para calcular `jlo` de x , es decir, para buscar en la tabla. De hecho, utilizaremos dos de estos métodos.

Formalmente, el problema es éste: Dado un arreglo de abscisas x_j , $j = 0, \dots, N - 1$, con las abscisas aumentando monótonamente o que disminuye

monótonamente, y dado un entero $M \leq N$, y un número x , Encontrar un entero j_{lo} tal que x esté centrado entre las M abscisas $x_{j_{lo}}, \dots, x_{j_{lo} + M - 1}$. Por centrado queremos decir que x se encuentra entre x_m y x_{m+1} en la medida de lo posible, donde

$$m = j_{lo} + \left\lceil \frac{M-2}{2} \right\rceil \quad [51]$$

Por "en la medida de lo posible" queremos decir que j_{lo} nunca debe ser menor que cero, ni $j_{lo} + M - 1$ ser mayor que $N - 1$.

En la mayoría de los casos, cuando todo está dicho y hecho, es difícil hacer mejor que la *bisección*, que encontrará el lugar correcto en la tabla en aproximadamente $\log_2 N$ intentos.

La rutina de localización anterior accede a la matriz de valores $xx []$ a través de un puntero almacenado por la clase base. Este método bastante primitivo de acceso, evitando el uso de una clase vectorial de nivel superior como `VecDoub`, es aquí preferible por dos razones: (1) Suele ser más rápido; y (2) para la interpolación bidimensional, más tarde necesitaremos apuntar directamente en una fila de una matriz. El peligro de esta elección de diseño es que asume que los valores consecutivos de un vector se almacenan consecutivamente, y de manera similar para valores consecutivos de una sola fila de una matriz.

2.4.2. Búsqueda con valores correlacionados

La experiencia muestra que en muchas, quizás incluso en la mayoría de las aplicaciones, las rutinas de interpolación se llaman con abscisas casi idénticas en búsquedas consecutivas. Por ejemplo, puede estar generando una función que se usa en el lado derecho de una ecuación diferencial: La mayoría de los integradores de ecuaciones diferenciales, requieren evaluaciones del lado derecho en puntos que saltan de un lado a otro un poco, pero cuya tendencia se mueve lentamente en la dirección de la integración.

En tales casos es inútil hacer una bisección completa, ab initio, en cada llamada. Mucho más deseable es dar a nuestra clase base un poco de inteligencia: si ve dos llamadas que están "cerradas", anticipa que la próxima llamada también será. Por supuesto, no debe ser demasiado grande una pena si se anticipa mal.

El método *hunt* comienza con una posición adivinada en la tabla. Primero "caza", arriba o abajo, en incrementos de 1, luego 2, luego 4, etc., hasta que el valor deseado esté entre corchetes. A continuación, divide en dos en el intervalo entre corchetes. En el peor de los casos, esta rutina se trata de un factor de 2 más lento que el de arriba (si la fase de *hunt* se expande para incluir toda la tabla). En el mejor de los casos, puede ser un factor de $\log_2 n$ más rápido que *locate*, si el punto deseado suele estar muy cerca de la estimación de entrada.

Los métodos *locate* y *hunt* cada actualización de la variable booleana *cor* en la clase base, indicando si las llamadas consecutivas parecen correlacionadas. Esta variable es entonces utilizada por *interp* para decidir si se usa *locate* o *hunt* en la siguiente llamada. Todo esto es invisible para el usuario, por supuesto.

2.4.3. Ejemplo: Interpolación lineal

Usted puede pensar que, en este punto, nos hemos alejado del tema de los métodos de interpolación. Para demostrar que estamos en el buen camino, aquí hay una clase que implementa de manera eficiente la interpolación lineal por trozos.

Se construye un objeto de interpolación lineal declarando una instancia con vectores llenos de abscisas x_i y valores de función $y_i = f(x_i)$,

```
Int n = ...;
VecDoub xx(n), yy(n);
...
Linear_interp myfunc(xx, yy);
```

Detrás de las escenas, el constructor de la clase base se llama con $M = 2$ porque la interpolación lineal usa sólo los dos puntos que entre paréntesis un valor. Además, se guardan punteros a los datos. (Debe asegurarse de que el vector *xx* y *yy* no salgan del alcance mientras *myfunc* está en uso.)

Cuando se desea un valor interpolado, es tan simple como, (Stoer, 2002)

```
Doub x, y;
...
y = myfunc.interp(x);
```

Si tiene varias funciones que desea interpolar, declara una instancia separada de *Linear_interp* para cada una.

Ahora usaremos la misma interfaz para métodos de interpolación más avanzados.

2.4.4. Interpolación y extrapolación polinomial

A través de cualquier dos puntos hay una línea única. A través de cualquiera de los tres puntos hay un cuadrático único. Etcétera. El polinomio de interpolación de grado $M-1$ a través de los puntos M $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_{M-1} = f(x_{M-1})$ se da explícitamente por la fórmula clásica de Lagrange,

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{M-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_{M-1})}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_{M-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_{M-1})}y_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{M-2})}{(x_{M-1}-x_0)(x_{M-1}-x_1)\cdots(x_{M-1}-x_{M-2})}y_{M-1} \quad (52)$$

Hay M términos, cada uno de ellos un polinomio de grado M - 1 y cada uno construido para ser cero en todos los x_i excepto uno, en el cual se construye para ser y_i .

No es terriblemente incorrecto implementar la fórmula de Lagrange directamente, pero tampoco es terriblemente correcto. El algoritmo resultante no da una estimación de error, y también es un poco difícil de programar. Un algoritmo mucho mejor (para construir el mismo, único polinomio de interpolación) es el algoritmo de Neville, estrechamente relacionado y a veces confundido con el algoritmo de Aitken, este último ahora considerado obsoleto. (Stoer, 2002)

La interfaz de usuario para *Poly_interp* es prácticamente la misma que para *Linear_interp*, excepto de un argumento adicional en el constructor, M, el número de puntos utilizados (el orden más uno). Un interpolador cúbico tiene este aspecto: (Stoer, 2002)

```
Int n = ....;  
VecDoub xx(n), yy(n);  
...  
Poly_interp myfunc(xx, yy, 4);
```

Poly_interp almacena una estimación de error dy para la llamada más reciente a su función interp:

```
Doub x, y, err;  
...  
y = myfunc.interp(x);  
err = myfunc.dy;
```

2.4.5. Interpolación Cúbica Spline:

En situaciones donde la continuidad de las derivadas es una preocupación, se debe utilizar la interpolación "más rígida" proporcionada por una función llamada spline. Una spline es un polinomio entre cada par de puntos de tabla, pero uno cuyos coeficientes se determinan "ligeramente" no localmente. La no localidad está diseñada para garantizar la suavidad global en la función interpolada hasta cierto orden de derivada. Las splines cúbicas son las más populares. Ellos producen una función interpolada que es continua a través de la segunda derivada. Las splines tienden a ser polinomios más estables, con menos posibilidad de oscilación salvaje entre los puntos tabulados. (Ueberhuber, 1997)

El uso típico se parece a esto:

```
Int n = ....;  
VecDoub xx(n), yy(n);  
...
```

Spline_interp myfunc(xx, yy);

Y luego, tantas veces como quieras,

Doub x, y;

...

y = myfunc.interp(x);

Tenga en cuenta que no hay estimación de error disponible. (Ueberhuber, 1997)

2.4.6. Función Racional de Interpolación y Extrapolación:

Algunas funciones no son bien aproximadas por polinomios, pero son bien aproximadas por funciones racionales, esto es, por un cociente de polinomios. (Ralston, 1978)

Más explícitamente, suponga:

$$R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_{\mu}(x)}{Q_{\nu}(x)} = \frac{p_0 + p_1x + \dots + p_{\mu}x^{\mu}}{q_0 + q_1x + \dots + q_{\nu}x^{\nu}} \quad (53)$$

2.4.7. Interpolación Racional Baricéntrica

Supongamos que uno intenta utilizar el algoritmo anterior para construir una aproximación global en toda la tabla de valores usando todos los nodos dados. Un inconveniente potencial es que la aproximación puede tener polos dentro del intervalo de interpolación donde el denominador desaparece, incluso si la función original no tiene polos allí.

El truco es hacer que el grado de ambos, denominador y numerador en la ecuación sea N-1.

El algoritmo utiliza la forma baricéntrica de la interpolación racional. (Floater, 2007)

$$R(x) = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{w_i}{x - x_i} y_i}{\sum_{i=0}^{N-1} \frac{w_i}{x - x_i}} \quad (54)$$

2.4.8. Interpolación Bilineal

La interpolación más simple en dos dimensiones es la *interpolación bilineal* en el cuadrado de cuadrícula. Sus fórmulas son: (Johnson, 1982)

$$t \equiv (x_1 - x_{1i}) / (x_{1(i+1)} - x_{1i})$$

$$u \equiv (x_2 - x_{2j}) / (x_{2(j+1)} - x_{2j})$$

(so that t and u each lie between 0 and 1) and

$$y(x_1, x_2) = (1-t)(1-u)y_0 + t(1-u)y_1 + tuy_2 + (1-t)uy_3 \quad (55)$$

Uso *Bilin_interp* es justo lo que usted esperaría:

```
Int m = ..., n = ...;
MatDoub yy(m, n);
VectDoub x1(m), x2(n);
...
Bilin_interp myfunc(x1, x2, yy);
```

Seguido (cualquier número de veces) por

```
Doub x1, x2, y;
...
y = myfunc.interp(x1, x2);
```

2.5. ESTUDIOS DIRECTAMENTE RELACIONADOS CON LA SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE LA TESIS

2.5.1. Introducción.

Para los estudios de esta revisión se creó un formulario de extracción de datos que contiene los siguientes campos: Métodos, Participantes, Intervenciones, Resultados y Notas; además de los metadatos obtenidos automáticamente por el software EndNote X8.0.1. Por lo tanto, a continuación se detallan la extracción y el análisis de los datos de los siguientes estudios:

Abrams, 1920 #82

Reference Type Government Document

Record Number 82

Author Abrams, Duff Andrew

Year 1920

Title Design of concrete mixtures

Secondary Title Bulletin 1, Structural materials research laboratory, Lewis institute, Chicago

Place Published Chicago, **Publisher** Structural Materials Research Laboratory, Lewis Institute

Pages 20 p.

Accession Number 8254890

Call Number TA681 .A3 1920

Keywords Concrete

Notes 21013577 by Duff A. Abrams. diags. 23 cm. "Third printing." "Reprinted from Minutes of the annual meeting of the Portland cement association, held in New York, December, 1918." Cover title.

File Attachments internal-pdf://3093861914/designconcretem00abragoog.pdf

Métodos: Se realizan mezclas de concreto bajo condiciones de laboratorio con el fin de elaborar probetas que serán sometidas a esfuerzos para determinar la resistencia a la

compresión del concreto y luego se obtienen relaciones analíticas entre estas variables. Es decir, se usa el método científico experimental en laboratorio y se usa el análisis matemático para sintetizar los resultados.

Participantes: Se analizan 50000 briquetas de concreto, de diseños de mezclas de concreto que incluyen las variables independientes como son el cemento, el agua, los agregados finos y gruesos, consistencia de la mezcla, contenido y adsorción de humedad de los agregados y la variable dependiente, la resistencia a la compresión del concreto.

Intervenciones: Se realizan mezclas o proporcionamiento de concreto por una combinación de los materiales constituyentes del concreto como son: el cemento, el agua, los agregados finos y gruesos de muy diversas gradaciones; con la finalidad de obtener la resistencia a la compresión del concreto de probetas cilíndricas de concreto de 6 por 12 pulgadas que han sido mantenidas en condiciones de humedad al 100% hasta endurecerse por un periodo de 28 días, fecha en la cual han sido sometidos a esfuerzos de compresión hallando la Resistencia a la Compresión del Concreto.

Resultados:

- Se obtiene por primera vez una función matemática exponencial que relaciona la resistencia a la compresión del concreto en función de la razón agua/cemento en volumen. Es a través de este artículo, por lo que se determina que el factor más influyente en la resistencia a la compresión del concreto es el agua; hasta antes de esta investigación el agua no era tomada en cuenta; se creía que era el cemento el factor más principal y los agregados que lograban la mayor densidad. El autor afirma: Nuestro trabajo experimental ha enfatizado la importancia del agua en mezclas de concreto y demostrado que el agua es, de hecho, el ingrediente más importante, ya que variaciones muy pequeñas en el contenido de agua producen variaciones más importantes en la resistencia y otras propiedades del concreto que similares Cambios en los otros ingredientes.
- Se obtiene una medida cuantitativa que informa sobre el tamaño de las partículas de los agregados y su gradación o clasificación denominado Módulo de Finura. Para un valor dado del Módulo de Finura, que bajo condiciones de la ratio agua - cemento constantes; producen bajo una combinación infinita de diversos tamaños y gradaciones de los agregados, prácticamente la misma resistencia del concreto. Se da una fórmula que relaciona el Módulo de Finura de una partícula con su diámetro. Para los agregados que tienen diversos tamaños de partículas se muestra un Análisis por Tamizado que permite obtener el Módulo de Finura de los Agregados de una manera práctica.
- Se obtiene una fórmula que nos da la cantidad de agua por saco de cemento (de 94 libras de peso y 1 pie cúbico de volumen) que debe entrar en una mezcla dada de condiciones conocidas.
- Se obtiene un método para el Diseño de Mezclas de Concreto, por volumen; en aplicación de las tablas y fórmulas obtenidas que son traducidas en nomogramas para su fácil uso.

Notas: Es el primer artículo científico americano, con base experimental y que además tiene la preocupación del primer autor de esta Revisión Sistemática de la Literatura; ya que Abrams Duff, dice: *Desafortunadamente, ahora no tenemos una base adecuada para los valores absolutos de la resistencia del concreto. Esto, por supuesto, hace*

necesario referirse a pruebas particulares como en la figura 6. Esta condición hace hincapié en la importancia de elaborar una prueba de cemento que nos dará de inmediato la resistencia del concreto para materiales dados, mezclas, etc. Método de prueba de cemento es imposible hacer más que hacer una estimación aproximada en cuanto a la resistencia del concreto de los resultados de las pruebas de briqueta.(Abrams, 1920, p. 23). Esto coincide plenamente con el problema que se quiere solucionar.

Eskandari-Naddaf, 2017 #386

Reference Type Journal Article

Record Number 386

Author Eskandari-Naddaf, H. Kazemi, R.

Year 2017

Title ANN prediction of cement mortar compressive strength, influence of cement strength class

Journal Construction and Building Materials

Volume 138

Pages 1-11

Date May

ISSN 0950-0618

DOI 10.1016/j.conbuildmat.2017.01.132

Accession Number WOS:000397549200001

Abstract An artificial neural network (ANN) study is presented to predict the compressive strength (F_c) of mortar mixtures containing different cement strength classes of CME 32.5, 42.5, and 52.5 MPa. For this purpose, 54 mixtures considering six water/cement ratios (W/C) (0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, and 0.5) and three sand/ cement ratios (S/C) (2.5, 2.75, and 3) along with the abovementioned three types of cement strength classes have been constructed, and the results for a total of 810 specimens have been obtained. A comparative investigation was performed on two conditions of with and Without considering the cement strength class as an input parameter in developed ANN-I and ANN-II models in order to obtain the optimum state. The comparison of the proposed idealized ANN model with two other existing models indicates good precision and accuracy of the developed ANN model in predicting the compressive strength of the mortar and the deficiency of these existing models in situations where cement strength class is present as an input parameter. (C) 2017 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Notes Eskandari-Naddaf, Hamid Kazemi, Ramin 1879-0526 **URL** <Go to ISI>://WOS:000397549200001 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061817301563>

File Attachments internal-pdf://1140394389/ANN prediction of cement mortar compressive st.pdf

Métodos: Se usa el método experimental, se confeccionan morteros cúbicos de cemento - arena. Se usa el modelado de datos de las Redes Neuronales Artificiales para predecir la resistencia de los morteros. (Eskandari-Naddaf & Kazemi, 2017)

Participantes: Se realizan 810 especímenes de morteros de cemento - arena, con tres tipos de cemento de diferentes resistencias a la compresión, tres relaciones agua / cemento, tres relaciones arena / cemento en masa con diferentes valores del aditivo HRWR, las edades a las que se someten a compresión son 3, 7, 14, 21 y 28 días.

Intervenciones: Se diseñan 54 mezclas de morteros que sirven para producir especímenes cúbicos de mortero de cemento - arena; que son sometidos a compresión a los 3, 7, 14, 21 y 28 días, por cada día se tienen tres probetas; con la finalidad de obtener la resistencia a la compresión de los morteros, que luego se comparan con los resultados predichos por la redes neuronales artificiales, usando dos tipos de funciones de aprendizaje, función tangente hiperbolica y logistica. Estos resultados de las RNA se comparan con dos otros métodos de predicción realizados anteriormente.

Resultados:

- Se obtiene que la resistencia a la compresión del cemento influye en la resistencia de los morteros y concretos; y que además en la capa de entrada de las RNA se debe incluir este dato de la resistencia a la compresión del cemento para poder obtener un modelo que mejor se ajusta a los resultados de la resistencia a la compresión del laboratorio, además de las otras relaciones clásicas como la relación agua / cemento como factor determinante para la resistencia a la compresión.
- Se observa que la correlación de la RNA con los datos observados es mejor que los otros 2 métodos anteriores realizados con las mismas especificaciones de las mezclas; además el error de la RNA es menor que los otros 2 métodos (Siddique et al. y Saridemir)

Notas: Además de que se habla del modelo, sólo se muestran los datos de los resultados versus los predichos por el modelo; sin embargo, como sucede en casi todos los estudios de las Redes Neuronales Artificiales, no se muestra el modelo, es decir, la función de aprendizaje.

Simon, 1997 #390

Reference Type Conference Proceedings

Record Number 390

Author Simon, M. J.; Lagergren, E. S.; Snyder, K. A.

Year of Conference 1997

Title Concrete Mixture Optimization Using Statistical Mixture Design Methods

Conference Name High Performance Concrete International Symposium. Proceedings. PCI/FHWA. October 20-22, 1997, New Orleans, LA, 230-244 pp, 1997.

Pages 15

Section 230

File Attachments internal-pdf://0011656779/Concrete Mixture Optimization Using Statistica.pdf

Métodos: Los autores usan el diseño experimental, específicamente el método de diseño y análisis estadístico de experimentos, para la optimización económica de mezclas de concretos de alto desempeño (HPC) que cumplen ciertos requerimientos. Para obtener las funciones de mejor ajuste se usa la técnica de los mínimos cuadrados. Para la optimización se usan las gráficas de contorno y trazas. (Simon, 1997)

Participantes: Se realizaron 39 experimentos de resistencias a la compresión a 1 día, 28 días, slumps o revenimientos, prueba de cloruro rápido a los 42 días (RTC); provenientes de mezclas aleatorias de concretos de alto desempeño en que cada variable dependiente, de las seis (agua, cemento, micro sílice, HRWRA, agregado grueso, agregado fino) son fracciones volumétricas de la unidad (1 m³); estos constituyentes de la mezcla de concreto suman 1, lo que los convierte en variables linealmente dependientes.

Intervenciones: Se realizaron 39 experimentos de resistencias a la compresión a 1 día, 28 días, slumps o revenimientos, prueba de cloruro rápido a los 42 días (RTC); provenientes de mezclas aleatorias de concretos de alto desempeño en que cada variable dependiente, de las seis (agua, cemento, micro sílice, HRWRA, agregado grueso, agregado fino) son fracciones volumétricas de la unidad (1 m³); estos constituyentes de

la mezcla de concreto suman 1, lo que los convierte en variables linealmente dependientes.

Resultados: Se obtienen las siguientes funciones de mejor ajuste:

Una función lineal que explica la resistencia a la compresión del concreto a los 28 días: (Simon, 1997, p. 9)

$$\widehat{y}_1 = -45.22x_1 + 89.15x_2 - 3.81x_3 + 1972x_4 + 38.36x_5 + 87.19x_6 \quad (56)$$

Donde las variables independientes están indicadas en la tabla II.

Tabla II - Componentes de la mezcla y rangos de fracciones de volumen. (Simon, 1997, p. 5)

Componente	ID	Fracción de volumen, mínima	Fracción de volumen, máxima
Agua	x_1	0.16	0.185
Cemento	x_2	0.13	0.15
Microsilica	x_3	0.013	0.027
HRWRA	x_4	0.0046	0.0074
Agregado Grueso	x_5	0.40	0.4424
Agregado Fino	x_6	0.25	0.2924

Una función cuadrática para la resistencia a la compresión del concreto a 1 día: (Simon, 1997, p. 12)

$$\widehat{y}_3 = -1.752E + 05x_1 + 2.573E + 05x_2 - 10723x_3 - 1.732E + 06x_4 + 8632x_5 - 15245x_6 + 6.107E + 05x_1x_6 - 8.118E + 05x_2x_6 + 6.328E + 06x_3x_4 + 6.481E + 06x_4x_6 \quad (57)$$

Una función lineal del revenimiento o slump del concreto: (Simon, 1997, p. 12)

$$\widehat{y}_2 = 85.27x_1 - 94.09x_2 - 133.92x_3 + 955.63x_4 - 8.07x_5 + 6.69x_6 \quad (58)$$

Y una función del logaritmo de la prueba rápida del cloruro a los 42 días en función lineal de las seis variables constituyentes del concreto: (Simon, 1997, p. 12)

$$\ln(\widehat{y}_4) = 20.34x_1 - 2.99x_2 - 49.68x_3 - 29.65x_4 + 7.96x_5 + 4.15x_6 \quad (59)$$

Utilizando las gráficas de contorno se obtienen los valores de las variables que optimizan el costo de la mezcla que cumple con los requisitos previamente establecidos.

Notas: No toma en cuenta directamente la relación agua / cemento, que es fundamental para el diseño de mezclas de concreto; los resultados pueden ser concordantes ya que, los valores de las variables dependientes, los materiales que entran en la mezcla del concreto se establecen dentro de unos intervalos previamente establecidos por otros métodos o experimentos. (Simon, 1997, p. 5)

Jafari, 2017 #385

Reference Type Journal Article

Record Number 385

Author Jafari, S. Mahini, S. S.

Year 2017

Title Lightweight concrete design using gene expression programming

Journal Construction and Building Materials

Volume 139

Pages 93-100

Date May

ISSN 0950-0618

DOI 10.1016/j.conbuildmat.2017.01.120

Accession Number WOS:000398871300009

Abstract The use of lightweight concrete (LWC) in earthquake resistant buildings is beneficial because of the weight and mass reduction of the structures. LWC has been used in the construction industry for many years and while attempts have been made to develop a practical and reliable code for lightweight concrete design worldwide a satisfactory, practical standard for mix design is required. There are a few standards which present methods for designing the mix of LWC such as ACI 211.2. However, in these standards the proposed compressive strength and density determinations cannot be used for all types of lightweight aggregates. The aim of this study is to provide references for three types of lightweight concretes containing clay and natural (mineral) pumice aggregates with the maximum nominal sizes of 12.7 mm (1/2 in.) and 19.2 mm (3/4 in.) respectively. With this intent, hundred specimens of lightweight concrete were made and then tested in the laboratory using these aggregates. After presenting a standard for proportioning and adjusting proportions of the concrete mix three equations were derived using Gene Expression Programming (GEP) to obtain the compressive strength of a specific mixture. Comparison between the actual properties and their predicted counterparts indicated that the proposed derivations are a useful and reliable practical method for use by practicing engineers when designing lightweight concrete mixes. (C) 2017 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Notes Jafari, Saeed Mahini, Seyed Saeed 1879-0526

URL <Go to ISI>://WOS:000398871300009
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061817301575>

File Attachments internal-pdf://0830755883/Lightweight concrete design using gene express.pdf

Métodos: Se usa el método del ACI 211.2 para el diseño de mezclas de concreto con agregado ligero; se desarrollan 3 ecuaciones para el diseño de concreto usando la Programación de Expresión Genética (GEP), (Jafari & Mahini, 2017)

Participantes: Se realizan más de 100 probetas cúbicas de concreto de tres tipos de agregado grueso ligero: arcilla expandida, piedra pómez de un agregado de tamaño máximo nominal de ½ pulgada y piedra pómez de un agregado de tamaño máximo

nominal de $\frac{3}{4}$ pulgada; el agregado grueso de arcilla es para concreto ligero no estructural, en cambio los usados con piedra pómez son concretos ligeros estructurales.

Intervenciones: Se diseñan más de 100 probetas cúbicas de concreto de agregado grueso ligero, obtenidos de la piedra pómez de dos tamaños máximos nominales: de $\frac{1}{2}$ pulgada y de $\frac{3}{4}$ pulgada, además de agregado grueso ligero obtenido de arcilla expandida; que son curados por 28 días en ambiente húmedo antes de ser sometidos a esfuerzos de compresión; también se obtienen probetas cilíndricas clásicas de 6 pulgadas de diámetro y 12 pulgadas de altura para hallar coeficientes de transformación de resistencias de probetas cúbicas a cilíndricas. Además de estos agregados gruesos ligeros, se usó arena de peso normal, agua y cemento; no se usaron otros ingredientes para la mezcla del concreto, (Jafari & Mahini, 2017, p. 12)

Resultados:

- Se obtiene un modelo matemático de la Resistencia a la Compresión del Concreto, con el agregado grueso ligero de arcilla expandida:

$$f_c = \frac{1}{(2W + 8.35 - S)} + \frac{\sqrt{4.64S}}{C - L} + \frac{C}{\sqrt{C + \frac{CL}{0.95}}} - 8.25 + \frac{1}{(S - (4.15L + C + 7.25))}$$

(60)

Donde f_c es la resistencia a la compresión en MPa a los 28 días; S, W, C, L son los pesos de la arena normal, el agua, el cemento y el agregado grueso ligero (arcilla expandida) en kg respectivamente.

- Se obtiene una función que predice la resistencia a la compresión a los 28 días de las probetas de concreto para el agregado grueso ligero de piedra de pómez de un tamaño máximo nominal de $\frac{1}{2}$ pulgada:

$$f_c = \frac{S + \frac{8W}{L}}{C} + \frac{9.88\sqrt{S}\sqrt{4C}}{C} + \frac{1}{(C - W)} + \frac{C}{3.32(S - C)} + \sqrt{C}$$

(61)

- Se obtiene una función que predice la resistencia a la compresión a los 28 días de las probetas de concreto para el agregado grueso ligero de piedra de pómez de un tamaño máximo nominal de $\frac{3}{4}$ pulgada:

$$f_c = \frac{\left(\frac{S}{L}\right)^5}{6.8} + 2.35 + \frac{1}{C - S} - \frac{C + 8.26}{2.71W} + \sqrt{C + 6.83} + \frac{1}{3S - 6.72W} \quad (62)$$

Notas: Se obtienen tres funciones o modelos que sirven para predecir la resistencia a la compresión del concreto ligero (LWC) sólo para tres tipos de agregado grueso ligero: arcilla expandida; piedra pómez de un tamaño máximo nominal de ½ pulgada y de ¾ pulgada respectivamente.

Neshat, 2012 #375

Reference Type Journal Article

Record Number 375

Author Neshat, Mehdi Adeli, Ali Sepidnam, Ghodrat Sargolzaei, Mehdi

Year 2012

Title Predication of concrete mix design using adaptive neural fuzzy inference systems and fuzzy inference systems

DOI 10.1007/s00170-012-3914-9

Keywords Concrete mix design. ANFIS. Fuzzy expert system . Fuzzy logic. Water. Cement. Slump. Fineness modulus (FM). C.A . F.A

Abstract The aim of this study is to design adaptive neural-fuzzy inference system (ANFIS) model and fuzzy expert system for determination of concrete mix designs and finally compare their results. Idea of these systems based on two surveys: first, ACI structures and principles, second a concrete mix designs dataset that collected via Prof. I-Cheng Yeh. Datasets that loaded in to ANFIS has 552 mix designs and based on ACI mix designs. Moreover, in this study, we have designed fuzzy expert system. Input fields of fuzzy expert system are Slump, Maximum Size of Aggregate (Dmax), Concrete Compressive Strength (CCS), and Fineness Modulus. Output fields are quantities of water, cement, fine aggregate (F.A.) and coarse aggregate (C.A.). In the ANFIS model, we have four layers (four ANFIS models): the first layer takes values of Dmax and Slump and then determines the quantity of Water, the second layer takes values of Water (computed in the past layer) and CCS then measures the value of Cement, the third layer takes values of Dmax and Slump to compute C.A. and the fourth layer takes values of Water, Cement, and C.A. (determined in past layers) and then measures the value of F.A. When these systems were designed and tested, comparison between two systems (FIS and ANFIS) results showed that results of ANFIS model are better than fuzzy expert system's results. In the ANFIS model, for Water output field, training and average testing errors are 0.86 and 0.8. For cement field, training error and average testing error are in the orders of 0.21 and 0.22. Training and average testing error of C.A. are in the orders of 0.0001 and 0.0004 and finally, training and average testing errors of F.A. are in the orders of 0.0049 and 0.0063. Results of fuzzy expert system in comparison to ACI results follow average errors: average error of Water, Cement, C.A., and F.A. are in the orders of 9.5%, 27.6%, 96.5%, and 49%.

File Attachments <internal-pdf://3604177906/Predication of concrete mix design using adapt.pdf>

Métodos: Se usan las técnicas de Inteligencia Artificial basados en la lógica difusa, para crear dos modelos de diseño de mezclas de concreto normal, uno de ellos es el Sistema de inferencia neural difusa adaptativa del inglés adaptive neural fuzzy inference system (ANFIS) y el otro es el Sistema experto borroso del inglés fuzzy expert system (FIS); con la finalidad de compararlos. (Neshat, Adeli, Sepidnam, & Sargolzaei, 2012).

Además muestra en los antecedentes estudios que tratan sobre el diseño de mezclas de concreto que han usado estas técnicas de lógica difusa, sistemas expertos difusos y ANFIS, además de modelos de predicción de la Resistencia del concreto usando ANFIS, que son muy exactos, (Tefamariam, 2007)

Participantes: Se utilizan como encuestas o fuentes de datos las estructuras y las relaciones del Método ACI 211.1 para el diseño de mezclas de concreto normales y la base de datos de 552 diseños de mezcla basados en diseños de mezcla ACI, que fueron recogidos por el Prof. I-Cheng Yeh. (Neshat et al., 2012).

Intervenciones: Para el Sistema experto difuso o borroso los campos de entradas son cuatro: Revenimiento, Tamaño máximo del agregado grueso, Resistencia a la compresión del concreto y el Módulo de finura del agregado fino. Las salidas también tienen cuatro campos: las cantidades en peso, por metro cúbico de concreto; del Agua, Cemento, Agregado grueso y Agregado fino. Igualmente las entradas para el ANFIS son los mismos, sin embargo este sistema sólo acepta una salida; por lo que se diseñan cuatro modelos ANFIS, uno para cada salida.

Tabla III – Conjuntos difusos para el Módulo de finura. (Neshat et al., 2012, p. 5)

Input field	Range	Fuzzy sets
FM	<2.5	Very Low=VL
	2.4–2.8	Low=L
	2.6–3	Medium=M
	>2.85	High=H

En estos sistemas ANFIS y Sistemas expertos difusos, primero se determina las variables de entrada y salida. Hay cuatro variables de entrada y cuatro variables de salida. Después de eso, se diseñan funciones de membresía (MF) de todas las variables. Estas funciones de pertenencia o membresía determinan la pertenencia de objetos a conjuntos difusos, por ejemplo para la variable de entrada Módulo de Finura del agregado fino (Fineness Modulus FM), se tienen los conjuntos difusos siguientes: (Neshat et al., 2012, p. 5)

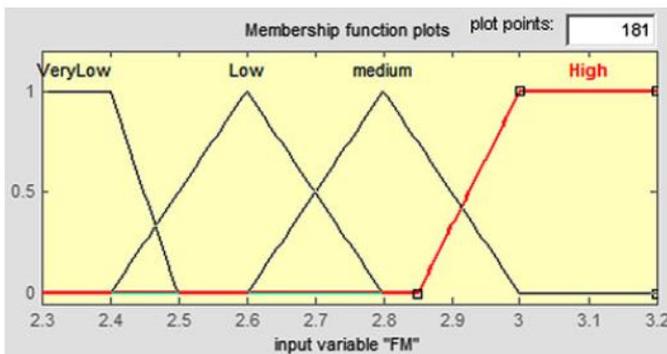


Fig. 2.5. Conjuntos difusos para la variable de entrada Módulo de Finura.

Luego se definen funciones de membresía (MF), que pueden tener formas triangulares, trapezoidales o gaussianos. El campo FM tiene cuatro conjuntos difusos como: "Muy bajo", "Bajo", "Medio" y "Alto". Las funciones de pertenencia de los conjuntos difusos "Muy Bajo" y "Alto" son trapezoidales y las funciones de pertenencia de los conjuntos "Bajo" y "Medio" son triangulares, y se definen matemáticamente como: (Neshat et al., 2012, p. 7)

$$\begin{aligned}
 \mu_{VL}(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} 1 & x < 2.4 \\ \frac{(2.5-x)}{1} & 2.4 \leq x < 2.5 \end{array} \right\} \\
 \mu_L(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x-2.4)}{2} & 2.4 \leq x < 2.6 \\ 1 & x = 2.6 \\ \frac{(2.8-x)}{2} & 2.6 \leq x < 2.8 \end{array} \right\} \\
 \mu_M(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x-2.6)}{2} & 2.6 \leq x < 2.8 \\ 1 & x = 2.8 \\ \frac{(3-x)}{2} & 2.8 \leq x < 3 \end{array} \right\} \\
 \mu_H(x) &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x-2.85)}{0.15} & 2.85 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{63}$$

Además de los conjuntos difusos y las funciones de pertenencia, un FIS requiere de unas reglas de inferencia lógica difusa que los expertos humanos o sistemas expertos no humanos deben de saber dotar; esta es una de las partes más importantes de la inferencia difusa.

Un procedimiento de razonamiento conocido como la regla composicional de la inferencia, permite sacar conclusiones por generalización a partir de la información cualitativa almacenada en la base de conocimiento. Las reglas difusas pueden expresarlo con el lenguaje natural de la siguiente manera: si x es pequeño y y es mediano, entonces z es grande. Las variables x , y y z son de tipo lingüístico. (Neshat et al., 2012, p. 11)

Luego se recurre a lo que se conoce fuzzificación y defuzzificación, el sistema diseñado usa un mecanismo de inferencia bajo el enfoque de Mamdoni. El sistema FIS utiliza una combinación AND lógica de entradas en las reglas difusas.

Por último el FIS se compara con los resultados directos obtenidos en el laboratorio.

Para el modelo ANFIS, que es un sistema de inferencia difusa basado en una red adaptativa de múltiples capas propuesto por Jang. Un ANFIS consta de cinco capas para implementar diferentes funciones de nodo para aprender y afinar parámetros en un FIS usando un modo de aprendizaje híbrido.

Para el diseño de ANFIS, el modelo debe pasar cuatro pasos: (1) cargar datos, (2) generar FIS, (3) entrenar FIS, y (4) probar FIS. Esto se debe hacer 4 veces; una para cada salida: agua, cemento, agregado grueso y agregado fino.

Resultados:

- Se obtienen dos modelos de diseños de mezclas de concreto normal, uno basado en el modelo FIS y el otro en ANFIS; de la comparación realizada de ambos modelos contra lo observado directamente del laboratorio, se concluye que el modelo ANFIS es mejor que el FIS.

Notas: No se muestran los modelos en el estudio, sólo los resultados. Hay errores en cuanto a los errores de las estadísticas de los datos. Estudio considerado como bueno para alcanzar nuestro objetivo principal de investigación.

Tesfamariam, 2007 #398

Reference Type Journal Article

Record Number 398

Author Tesfamariam, S.; Najjaran, H.

Year 2007

Title Adaptive network-fuzzy inferencing to estimate concrete strength using mix design

Journal Journal of Materials in Civil Engineering

Volume 19

Issue 7

Pages 46

DOI 10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:7(550)

Keywords Fuzzy logic, Adaptive neuro-fuzzy inferencing; Compressive strength; Concrete mix proportioning.

Abstract Proportioning of concrete mixes is carried out in accordance with specified code information, specifications, and past experiences. Typically, concrete mix companies use different mix designs that are used to establish tried and tested datasets. Thus, a model can be developed based on existing datasets to estimate the concrete strength of a given mix proportioning and avoid costly tests and adjustments. Inherent uncertainties encountered in the model can be handled with fuzzy based methods, which are capable of incorporating information obtained from expert knowledge and datasets. In this paper, the use of adaptive neuro-fuzzy inferencing system (ANFIS) is proposed to train a fuzzy model and estimate concrete strength. The efficiency of the proposed method is verified using actual concrete mix proportioning datasets reported in the literature, and the corresponding coefficient of determination r^2 range from 0.970-0.999. Further, sensitivity analysis is carried out to highlight the impact of different mix constituents on the estimate concrete strength.

File Attachments <internal-pdf://1570897346/Adaptive network-fuzzy inferencing to estimate.pdf>

Métodos: Se utiliza el modelado difuso o sistema FIS del inglés fuzzy inference systems, para formular seis modelos de predicción de la Resistencia a la compresión del concreto, usando modelos ANFIS.

El ANFIS es esencialmente una red adaptativa de avance de múltiples capas cuya funcionalidad matemática es equivalente a un sistema de inferencia difusa (FIS). La red se compone de una serie de nodos conectados a través de enlaces dirigidos. (Tsfamariam, 2007)

La red ANFIS consta de las cinco capas

Participantes: Los componentes de la mezcla de concreto utilizados en el desarrollo del modelo son similares a los utilizados en Kim et al. (2004) y Kim et al. (2005). Los datos reportados se obtuvieron de las proporciones reales de mezcla de dos empresas, la Compañía A y la Compañía B. Las propiedades básicas de los materiales básicos entre las dos compañías son similares, con la excepción de la arena utilizada. La empresa B utiliza sólo arena natural, mientras que la empresa A mezcla arena natural y arena triturada. (Tsfamariam, 2007)

Los datos de la empresa A y B se combinaron para la formación de modelos bajo la suposición de que los datos son proporcionales. Por lo tanto, los datos finales de entrenamiento para la Compañía A y B consisten en 45 puntos de datos cada uno. Además, se genera un modelo combinado de la Compañía A y B, a partir de ahora denominado Empresa A-B, utilizando un total de 90 puntos de datos de entrenamiento. Se observa que la Compañía A y B tienen diferentes constituyentes de agregado fino. Por lo tanto, para los datos de la Compañía A-B combinados, la arena natural y triturada de la Empresa A se combinan y se representan con una única etiqueta de agregado fino (FA). (Tsfamariam, 2007).

Kim et al. (2004) y Kim et al. (2005) han considerado nueve parámetros de dosificación de mezcla de concreto diferentes para modelar la resistencia a la compresión del concreto a los 28 días. La eficiencia de un modelo dado se puede demostrar utilizando parámetros de entrada mínimos para capturar la salida del modelo deseada. Los parámetros de entrada se dividen en dos grupos, variables absolutas y variables relativas, para evitar la redundancia. El modelo de valor absoluto incluye valores absolutos, los parámetros de entrada implican, cuando es posible, parámetros sin relaciones relativas, por ejemplo, utilizando la unidad de contenido de agua y el contenido unitario de cemento, sin la relación w / c , la resistencia especificada del concreto, la depresión, etc. La entrada del modelo de valor relativo incluye relaciones relativas cuando sea posible (por ejemplo, relación w / c , porcentaje de agregado fino, etc...) (Tsfamariam, 2007)

Intervenciones: La FIS generada para los cinco parámetros de entrada relativos (revenimiento o slump, relación w / c (agua/cemento), FA (agregado fino), CA (agregado grueso), Amix (aditivo)) tiene cuatro reglas. El ANFIS está representado en cinco capas. La capa 1 corresponde a las funciones de pertenencia de tipo gaussiano, por ejemplo para el slump, la función de pertenencia es:

$$\mu_{slump}(x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-4.5386)^2}{14.9938}\right)} \quad (64)$$

Con estas cinco capas se obtiene la Resistencia estimada a la compresión $f'c$.

Resultados: Se obtienen seis modelos ANFIS para la estimación de la Resistencia a la compresión del concreto a los 28 días; Los resultados muestran el resultado de la validación del modelo absoluto de los Modelos A, B y A-B, respectivamente. De manera similar, muestran el resultado de la validación relativa del modelo de los modelos A, B y A-B, respectivamente. Se realiza un ajuste de regresión lineal entre la resistencia real y prevista del concreto. Los coeficientes de determinación r^2 correspondientes al modelo absoluto y relativo son los siguientes: Modelo A (0.999, 0.984), Modelo B (0.970, 0.995) y Modelo A-B (0.999, 0.998).

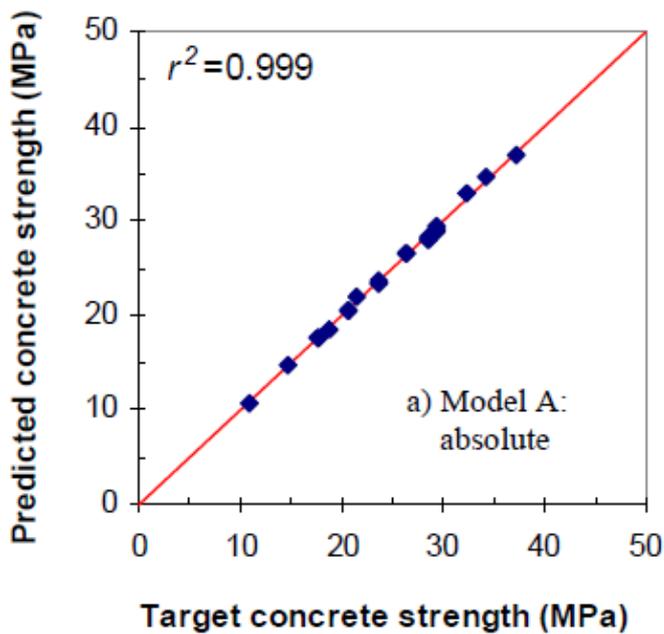


Fig. 2.6. Validación del modelo A.

Notas: Los modelos se dan como resultados, siendo la formulación matemática muy compleja; por lo que son sistemas computacionales.

3. Materiales y métodos

3.1. METODOLOGÍA PARA LA OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DE APRENDIZAJE

3.1.1. Adquisición de datos

Con el Método del ACI 211.1 para el proporcionamiento y diseño de mezclas se han diseñado 1344 mezclas de concreto para agregados secos, además se ha supuesto que la densidad del Agregado Grueso es de 2680 kg/m³, con un Peso Volumétrico seco de 1600 kg/m³, la densidad del Agregado Fino es de 2640 kg/m³, y la densidad del cemento es de 3120 kg/m³.

Tabla IV– Diseño de mezclas de concreto por el Método ACI 211.1

Núm	Fcr	f'c	TMNAG	Cemento	Arena	Grava	MF	Agua	Slump
1	450	366	9.5	544.737	765.329	800	2.4	207	25
2	450	366	9.5	544.737	765.329	800	2.4	207	50
3	450	366	9.5	600	663.128	800	2.4	228	75
4	450	366	9.5	600	663.128	800	2.4	228	100
5	450	366	9.5	639.474	590.127	800	2.4	243	150
6	450	366	9.5	639.474	590.127	800	2.4	243	175
7	450	366	9.5	544.737	513.15	1056	2.6	207	25
8	450	366	9.5	544.737	513.15	1056	2.6	207	50
9	450	366	9.5	600	410.949	1056	2.6	228	75
10	450	366	9.5	600	410.949	1056	2.6	228	100
11	450	366	9.5	639.474	337.948	1056	2.6	243	150
12	450	366	9.5	639.474	337.948	1056	2.6	243	175
13	450	366	9.5	544.737	371.299	1200	2.8	207	25
14	450	366	9.5	544.737	371.299	1200	2.8	207	50
15	450	366	9.5	600	269.098	1200	2.8	228	75
16	450	366	9.5	600	269.098	1200	2.8	228	100
17	450	366	9.5	639.474	196.097	1200	2.8	243	150
18	450	366	9.5	639.474	196.097	1200	2.8	243	175
19	450	366	9.5	544.737	260.971	1312	3	207	25
20	450	366	9.5	544.737	260.971	1312	3	207	50
21	450	366	9.5	600	158.77	1312	3	228	75
22	450	366	9.5	600	158.77	1312	3	228	100
23	450	366	9.5	639.474	85.769	1312	3	243	150
24	450	366	9.5	639.474	85.769	1312	3	243	175
25	450	366	12.5	523.684	848.985	768	2.4	199	25
26	450	366	12.5	523.684	848.985	768	2.4	199	50
27	450	366	12.5	568.421	766.251	768	2.4	216	75
28	450	366	12.5	568.421	766.251	768	2.4	216	100

29	450	366	12.5	600	707.85	768	2.4	228	150
30	450	366	12.5	600	707.85	768	2.4	228	175
31	450	366	12.5	523.684	596.806	1024	2.6	199	25
32	450	366	12.5	523.684	596.806	1024	2.6	199	50
33	450	366	12.5	568.421	514.072	1024	2.6	216	75
34	450	366	12.5	568.421	514.072	1024	2.6	216	100
35	450	366	12.5	600	455.671	1024	2.6	228	150
36	450	366	12.5	600	455.671	1024	2.6	228	175
37	450	366	12.5	523.684	454.955	1168	2.8	199	25
38	450	366	12.5	523.684	454.955	1168	2.8	199	50
39	450	366	12.5	568.421	372.221	1168	2.8	216	75
40	450	366	12.5	568.421	372.221	1168	2.8	216	100
41	450	366	12.5	600	313.821	1168	2.8	228	150
42	450	366	12.5	600	313.821	1168	2.8	228	175
43	450	366	12.5	523.684	344.627	1280	3	199	25
44	450	366	12.5	523.684	344.627	1280	3	199	50
45	450	366	12.5	568.421	261.893	1280	3	216	75
46	450	366	12.5	568.421	261.893	1280	3	216	100
47	450	366	12.5	600	203.492	1280	3	228	150
48	450	366	12.5	600	203.492	1280	3	228	175
49	450	366	19	500	937.508	736	2.4	190	25
50	450	366	19	500	937.508	736	2.4	190	50
51	450	366	19	539.474	864.507	736	2.4	205	75
52	450	366	19	539.474	864.507	736	2.4	205	100
53	450	366	19	568.421	810.973	736	2.4	216	150
54	450	366	19	568.421	810.973	736	2.4	216	175
55	450	366	19	500	685.329	992	2.6	190	25
56	450	366	19	500	685.329	992	2.6	190	50
57	450	366	19	539.474	612.328	992	2.6	205	75
58	450	366	19	539.474	612.328	992	2.6	205	100
59	450	366	19	568.421	558.794	992	2.6	216	150
60	450	366	19	568.421	558.794	992	2.6	216	175
61	450	366	19	500	543.478	1136	2.8	190	25
62	450	366	19	500	543.478	1136	2.8	190	50
63	450	366	19	539.474	470.477	1136	2.8	205	75
64	450	366	19	539.474	470.477	1136	2.8	205	100
65	450	366	19	568.421	416.944	1136	2.8	216	150
66	450	366	19	568.421	416.944	1136	2.8	216	175
67	450	366	19	500	433.15	1248	3	190	25
68	450	366	19	500	433.15	1248	3	190	50
69	450	366	19	539.474	360.149	1248	3	205	75
70	450	366	19	539.474	360.149	1248	3	205	100
71	450	366	19	568.421	306.615	1248	3	216	150
72	450	366	19	568.421	306.615	1248	3	216	175
73	450	366	25	471.053	1035.76	704	2.4	179	25
74	450	366	25	471.053	1035.76	704	2.4	179	50

75	450	366	25	507.895	967.63	704	2.4	193	75
76	450	366	25	507.895	967.63	704	2.4	193	100
77	450	366	25	531.579	923.83	704	2.4	202	150
78	450	366	25	531.579	923.83	704	2.4	202	175
79	450	366	25	471.053	783.585	960	2.6	179	25
80	450	366	25	471.053	783.585	960	2.6	179	50
81	450	366	25	507.895	715.451	960	2.6	193	75
82	450	366	25	507.895	715.451	960	2.6	193	100
83	450	366	25	531.579	671.651	960	2.6	202	150
84	450	366	25	531.579	671.651	960	2.6	202	175
85	450	366	25	471.053	641.735	1104	2.8	179	25
86	450	366	25	471.053	641.735	1104	2.8	179	50
87	450	366	25	507.895	573.601	1104	2.8	193	75
88	450	366	25	507.895	573.601	1104	2.8	193	100
89	450	366	25	531.579	529.8	1104	2.8	202	150
90	450	366	25	531.579	529.8	1104	2.8	202	175
91	450	366	25	471.053	531.406	1216	3	179	25
92	450	366	25	471.053	531.406	1216	3	179	50
93	450	366	25	507.895	463.272	1216	3	193	75
94	450	366	25	507.895	463.272	1216	3	193	100
95	450	366	25	531.579	419.472	1216	3	202	150
96	450	366	25	531.579	419.472	1216	3	202	175
97	450	366	37.5	436.842	875.814	944	2.4	166	25
98	450	366	37.5	436.842	875.814	944	2.4	166	50
99	450	366	37.5	476.316	802.813	944	2.4	181	75
100	450	366	37.5	476.316	802.813	944	2.4	181	100
101	450	366	37.5	500	759.013	944	2.4	190	150
102	450	366	37.5	500	759.013	944	2.4	190	175
103	450	366	37.5	436.842	686.68	1136	2.6	166	25
104	450	366	37.5	436.842	686.68	1136	2.6	166	50
105	450	366	37.5	476.316	613.679	1136	2.6	181	75
106	450	366	37.5	476.316	613.679	1136	2.6	181	100
107	450	366	37.5	500	569.878	1136	2.6	190	150
108	450	366	37.5	500	569.878	1136	2.6	190	175
109	450	366	37.5	436.842	576.351	1248	2.8	166	25
110	450	366	37.5	436.842	576.351	1248	2.8	166	50
111	450	366	37.5	476.316	503.35	1248	2.8	181	75
112	450	366	37.5	476.316	503.35	1248	2.8	181	100
113	450	366	37.5	500	459.55	1248	2.8	190	150
114	450	366	37.5	500	459.55	1248	2.8	190	175
115	450	366	37.5	436.842	434.5	1392	3	166	25
116	450	366	37.5	436.842	434.5	1392	3	166	50
117	450	366	37.5	476.316	361.5	1392	3	181	75
118	450	366	37.5	476.316	361.5	1392	3	181	100
119	450	366	37.5	500	317.699	1392	3	190	150
120	450	366	37.5	500	317.699	1392	3	190	175

121	450	366	50	405.263	978.937	912	2.4	154	25
122	450	366	50	405.263	978.937	912	2.4	154	50
123	450	366	50	444.737	905.936	912	2.4	169	75
124	450	366	50	444.737	905.936	912	2.4	169	100
125	450	366	50	468.421	862.136	912	2.4	178	150
126	450	366	50	468.421	862.136	912	2.4	178	175
127	450	366	50	405.263	789.803	1104	2.6	154	25
128	450	366	50	405.263	789.803	1104	2.6	154	50
129	450	366	50	444.737	716.802	1104	2.6	169	75
130	450	366	50	444.737	716.802	1104	2.6	169	100
131	450	366	50	468.421	673.001	1104	2.6	178	150
132	450	366	50	468.421	673.001	1104	2.6	178	175
133	450	366	50	405.263	679.474	1216	2.8	154	25
134	450	366	50	405.263	679.474	1216	2.8	154	50
135	450	366	50	444.737	606.473	1216	2.8	169	75
136	450	366	50	444.737	606.473	1216	2.8	169	100
137	450	366	50	468.421	562.673	1216	2.8	178	150
138	450	366	50	468.421	562.673	1216	2.8	178	175
139	450	366	50	405.263	537.624	1360	3	154	25
140	450	366	50	405.263	537.624	1360	3	154	50
141	450	366	50	444.737	464.623	1360	3	169	75
142	450	366	50	444.737	464.623	1360	3	169	100
143	450	366	50	468.421	420.822	1360	3	178	150
144	450	366	50	468.421	420.822	1360	3	178	175
145	450	366	75	342.105	1132.54	880	2.4	130	25
146	450	366	75	342.105	1132.54	880	2.4	130	50
147	450	366	75	381.579	1059.54	880	2.4	145	75
148	450	366	75	381.579	1059.54	880	2.4	145	100
149	450	366	75	421.053	986.539	880	2.4	160	150
150	450	366	75	421.053	986.539	880	2.4	160	175
151	450	366	75	342.105	943.406	1072	2.6	130	25
152	450	366	75	342.105	943.406	1072	2.6	130	50
153	450	366	75	381.579	870.406	1072	2.6	145	75
154	450	366	75	381.579	870.406	1072	2.6	145	100
155	450	366	75	421.053	797.405	1072	2.6	160	150
156	450	366	75	421.053	797.405	1072	2.6	160	175
157	450	366	75	342.105	833.078	1184	2.8	130	25
158	450	366	75	342.105	833.078	1184	2.8	130	50
159	450	366	75	381.579	760.077	1184	2.8	145	75
160	450	366	75	381.579	760.077	1184	2.8	145	100
161	450	366	75	421.053	687.076	1184	2.8	160	150
162	450	366	75	421.053	687.076	1184	2.8	160	175
163	450	366	75	342.105	691.227	1328	3	130	25
164	450	366	75	342.105	691.227	1328	3	130	50
165	450	366	75	381.579	618.226	1328	3	145	75
166	450	366	75	381.579	618.226	1328	3	145	100

167	450	366	75	421.053	545.226	1328	3	160	150
168	450	366	75	421.053	545.226	1328	3	160	175
169	450	366	150	297.368	1249.44	848	2.4	113	25
170	450	366	150	297.368	1249.44	848	2.4	113	50
171	450	366	150	326.316	1195.9	848	2.4	124	75
172	450	366	150	326.316	1195.9	848	2.4	124	100
173	450	366	150	381.579	1093.7	848	2.4	145	150
174	450	366	150	381.579	1093.7	848	2.4	145	175
175	450	366	150	297.368	1060.3	1040	2.6	113	25
176	450	366	150	297.368	1060.3	1040	2.6	113	50
177	450	366	150	326.316	1006.77	1040	2.6	124	75
178	450	366	150	326.316	1006.77	1040	2.6	124	100
179	450	366	150	381.579	904.568	1040	2.6	145	150
180	450	366	150	381.579	904.568	1040	2.6	145	175
181	450	366	150	297.368	949.975	1152	2.8	113	25
182	450	366	150	297.368	949.975	1152	2.8	113	50
183	450	366	150	326.316	896.441	1152	2.8	124	75
184	450	366	150	326.316	896.441	1152	2.8	124	100
185	450	366	150	381.579	794.24	1152	2.8	145	150
186	450	366	150	381.579	794.24	1152	2.8	145	175
187	450	366	150	297.368	808.124	1296	3	113	25
188	450	366	150	297.368	808.124	1296	3	113	50
189	450	366	150	326.316	754.59	1296	3	124	75
190	450	366	150	326.316	754.59	1296	3	124	100
191	450	366	150	381.579	652.389	1296	3	145	150
192	450	366	150	381.579	652.389	1296	3	145	175
193	400	316	9.5	481.395	818.926	800	2.4	207	25
194	400	316	9.5	481.395	818.926	800	2.4	207	50
195	400	316	9.5	530.233	722.162	800	2.4	228	75
196	400	316	9.5	530.233	722.162	800	2.4	228	100
197	400	316	9.5	565.116	653.045	800	2.4	243	150
198	400	316	9.5	565.116	653.045	800	2.4	243	175
199	400	316	9.5	481.395	566.747	1056	2.6	207	25
200	400	316	9.5	481.395	566.747	1056	2.6	207	50
201	400	316	9.5	530.233	469.983	1056	2.6	228	75
202	400	316	9.5	530.233	469.983	1056	2.6	228	100
203	400	316	9.5	565.116	400.866	1056	2.6	243	150
204	400	316	9.5	565.116	400.866	1056	2.6	243	175
205	400	316	9.5	481.395	424.896	1200	2.8	207	25
206	400	316	9.5	481.395	424.896	1200	2.8	207	50
207	400	316	9.5	530.233	328.132	1200	2.8	228	75
208	400	316	9.5	530.233	328.132	1200	2.8	228	100
209	400	316	9.5	565.116	259.015	1200	2.8	243	150
210	400	316	9.5	565.116	259.015	1200	2.8	243	175
211	400	316	9.5	481.395	314.568	1312	3	207	25
212	400	316	9.5	481.395	314.568	1312	3	207	50

213	400	316	9.5	530.233	217.804	1312	3	228	75
214	400	316	9.5	530.233	217.804	1312	3	228	100
215	400	316	9.5	565.116	148.687	1312	3	243	150
216	400	316	9.5	565.116	148.687	1312	3	243	175
217	400	316	12.5	462.791	900.511	768	2.4	199	25
218	400	316	12.5	462.791	900.511	768	2.4	199	50
219	400	316	12.5	502.326	822.178	768	2.4	216	75
220	400	316	12.5	502.326	822.178	768	2.4	216	100
221	400	316	12.5	530.233	766.884	768	2.4	228	150
222	400	316	12.5	530.233	766.884	768	2.4	228	175
223	400	316	12.5	462.791	648.331	1024	2.6	199	25
224	400	316	12.5	462.791	648.331	1024	2.6	199	50
225	400	316	12.5	502.326	569.999	1024	2.6	216	75
226	400	316	12.5	502.326	569.999	1024	2.6	216	100
227	400	316	12.5	530.233	514.705	1024	2.6	228	150
228	400	316	12.5	530.233	514.705	1024	2.6	228	175
229	400	316	12.5	462.791	506.481	1168	2.8	199	25
230	400	316	12.5	462.791	506.481	1168	2.8	199	50
231	400	316	12.5	502.326	428.148	1168	2.8	216	75
232	400	316	12.5	502.326	428.148	1168	2.8	216	100
233	400	316	12.5	530.233	372.855	1168	2.8	228	150
234	400	316	12.5	530.233	372.855	1168	2.8	228	175
235	400	316	12.5	462.791	396.152	1280	3	199	25
236	400	316	12.5	462.791	396.152	1280	3	199	50
237	400	316	12.5	502.326	317.82	1280	3	216	75
238	400	316	12.5	502.326	317.82	1280	3	216	100
239	400	316	12.5	530.233	262.526	1280	3	228	150
240	400	316	12.5	530.233	262.526	1280	3	228	175
241	400	316	19	441.86	986.703	736	2.4	190	25
242	400	316	19	441.86	986.703	736	2.4	190	50
243	400	316	19	476.744	917.586	736	2.4	205	75
244	400	316	19	476.744	917.586	736	2.4	205	100
245	400	316	19	502.326	866.9	736	2.4	216	150
246	400	316	19	502.326	866.9	736	2.4	216	175
247	400	316	19	441.86	734.524	992	2.6	190	25
248	400	316	19	441.86	734.524	992	2.6	190	50
249	400	316	19	476.744	665.407	992	2.6	205	75
250	400	316	19	476.744	665.407	992	2.6	205	100
251	400	316	19	502.326	614.721	992	2.6	216	150
252	400	316	19	502.326	614.721	992	2.6	216	175
253	400	316	19	441.86	592.673	1136	2.8	190	25
254	400	316	19	441.86	592.673	1136	2.8	190	50
255	400	316	19	476.744	523.556	1136	2.8	205	75
256	400	316	19	476.744	523.556	1136	2.8	205	100
257	400	316	19	502.326	472.871	1136	2.8	216	150
258	400	316	19	502.326	472.871	1136	2.8	216	175

259	400	316	19	441.86	482.345	1248	3	190	25
260	400	316	19	441.86	482.345	1248	3	190	50
261	400	316	19	476.744	413.228	1248	3	205	75
262	400	316	19	476.744	413.228	1248	3	205	100
263	400	316	19	502.326	362.542	1248	3	216	150
264	400	316	19	502.326	362.542	1248	3	216	175
265	400	316	25	416.279	1082.11	704	2.4	179	25
266	400	316	25	416.279	1082.11	704	2.4	179	50
267	400	316	25	448.837	1017.6	704	2.4	193	75
268	400	316	25	448.837	1017.6	704	2.4	193	100
269	400	316	25	469.767	976.132	704	2.4	202	150
270	400	316	25	469.767	976.132	704	2.4	202	175
271	400	316	25	416.279	829.932	960	2.6	179	25
272	400	316	25	416.279	829.932	960	2.6	179	50
273	400	316	25	448.837	765.423	960	2.6	193	75
274	400	316	25	448.837	765.423	960	2.6	193	100
275	400	316	25	469.767	723.953	960	2.6	202	150
276	400	316	25	469.767	723.953	960	2.6	202	175
277	400	316	25	416.279	688.081	1104	2.8	179	25
278	400	316	25	416.279	688.081	1104	2.8	179	50
279	400	316	25	448.837	623.572	1104	2.8	193	75
280	400	316	25	448.837	623.572	1104	2.8	193	100
281	400	316	25	469.767	582.102	1104	2.8	202	150
282	400	316	25	469.767	582.102	1104	2.8	202	175
283	400	316	25	416.279	577.753	1216	3	179	25
284	400	316	25	416.279	577.753	1216	3	179	50
285	400	316	25	448.837	513.244	1216	3	193	75
286	400	316	25	448.837	513.244	1216	3	193	100
287	400	316	25	469.767	471.774	1216	3	202	150
288	400	316	25	469.767	471.774	1216	3	202	175
289	400	316	37.5	386.047	918.795	944	2.4	166	25
290	400	316	37.5	386.047	918.795	944	2.4	166	50
291	400	316	37.5	420.93	849.678	944	2.4	181	75
292	400	316	37.5	420.93	849.678	944	2.4	181	100
293	400	316	37.5	441.86	808.208	944	2.4	190	150
294	400	316	37.5	441.86	808.208	944	2.4	190	175
295	400	316	37.5	386.047	729.66	1136	2.6	166	25
296	400	316	37.5	386.047	729.66	1136	2.6	166	50
297	400	316	37.5	420.93	660.543	1136	2.6	181	75
298	400	316	37.5	420.93	660.543	1136	2.6	181	100
299	400	316	37.5	441.86	619.073	1136	2.6	190	150
300	400	316	37.5	441.86	619.073	1136	2.6	190	175
301	400	316	37.5	386.047	619.332	1248	2.8	166	25
302	400	316	37.5	386.047	619.332	1248	2.8	166	50
303	400	316	37.5	420.93	550.215	1248	2.8	181	75
304	400	316	37.5	420.93	550.215	1248	2.8	181	100

305	400	316	37.5	441.86	508.745	1248	2.8	190	150
306	400	316	37.5	441.86	508.745	1248	2.8	190	175
307	400	316	37.5	386.047	477.481	1392	3	166	25
308	400	316	37.5	386.047	477.481	1392	3	166	50
309	400	316	37.5	420.93	408.364	1392	3	181	75
310	400	316	37.5	420.93	408.364	1392	3	181	100
311	400	316	37.5	441.86	366.894	1392	3	190	150
312	400	316	37.5	441.86	366.894	1392	3	190	175
313	400	316	50	358.14	1018.81	912	2.4	154	25
314	400	316	50	358.14	1018.81	912	2.4	154	50
315	400	316	50	393.023	949.694	912	2.4	169	75
316	400	316	50	393.023	949.694	912	2.4	169	100
317	400	316	50	413.953	908.224	912	2.4	178	150
318	400	316	50	413.953	908.224	912	2.4	178	175
319	400	316	50	358.14	829.676	1104	2.6	154	25
320	400	316	50	358.14	829.676	1104	2.6	154	50
321	400	316	50	393.023	760.559	1104	2.6	169	75
322	400	316	50	393.023	760.559	1104	2.6	169	100
323	400	316	50	413.953	719.089	1104	2.6	178	150
324	400	316	50	413.953	719.089	1104	2.6	178	175
325	400	316	50	358.14	719.348	1216	2.8	154	25
326	400	316	50	358.14	719.348	1216	2.8	154	50
327	400	316	50	393.023	650.231	1216	2.8	169	75
328	400	316	50	393.023	650.231	1216	2.8	169	100
329	400	316	50	413.953	608.761	1216	2.8	178	150
330	400	316	50	413.953	608.761	1216	2.8	178	175
331	400	316	50	358.14	577.497	1360	3	154	25
332	400	316	50	358.14	577.497	1360	3	154	50
333	400	316	50	393.023	508.38	1360	3	169	75
334	400	316	50	393.023	508.38	1360	3	169	100
335	400	316	50	413.953	466.91	1360	3	178	150
336	400	316	50	413.953	466.91	1360	3	178	175
337	400	316	75	302.326	1166.2	880	2.4	130	25
338	400	316	75	302.326	1166.2	880	2.4	130	50
339	400	316	75	337.209	1097.08	880	2.4	145	75
340	400	316	75	337.209	1097.08	880	2.4	145	100
341	400	316	75	372.093	1027.97	880	2.4	160	150
342	400	316	75	372.093	1027.97	880	2.4	160	175
343	400	316	75	302.326	977.066	1072	2.6	130	25
344	400	316	75	302.326	977.066	1072	2.6	130	50
345	400	316	75	337.209	907.949	1072	2.6	145	75
346	400	316	75	337.209	907.949	1072	2.6	145	100
347	400	316	75	372.093	838.832	1072	2.6	160	150
348	400	316	75	372.093	838.832	1072	2.6	160	175
349	400	316	75	302.326	866.738	1184	2.8	130	25
350	400	316	75	302.326	866.738	1184	2.8	130	50

351	400	316	75	337.209	797.621	1184	2.8	145	75
352	400	316	75	337.209	797.621	1184	2.8	145	100
353	400	316	75	372.093	728.504	1184	2.8	160	150
354	400	316	75	372.093	728.504	1184	2.8	160	175
355	400	316	75	302.326	724.887	1328	3	130	25
356	400	316	75	302.326	724.887	1328	3	130	50
357	400	316	75	337.209	655.77	1328	3	145	75
358	400	316	75	337.209	655.77	1328	3	145	100
359	400	316	75	372.093	586.653	1328	3	160	150
360	400	316	75	372.093	586.653	1328	3	160	175
361	400	316	150	262.791	1278.7	848	2.4	113	25
362	400	316	150	262.791	1278.7	848	2.4	113	50
363	400	316	150	288.372	1228.01	848	2.4	124	75
364	400	316	150	288.372	1228.01	848	2.4	124	100
365	400	316	150	337.209	1131.25	848	2.4	145	150
366	400	316	150	337.209	1131.25	848	2.4	145	175
367	400	316	150	262.791	1089.56	1040	2.6	113	25
368	400	316	150	262.791	1089.56	1040	2.6	113	50
369	400	316	150	288.372	1038.88	1040	2.6	124	75
370	400	316	150	288.372	1038.88	1040	2.6	124	100
371	400	316	150	337.209	942.111	1040	2.6	145	150
372	400	316	150	337.209	942.111	1040	2.6	145	175
373	400	316	150	262.791	979.233	1152	2.8	113	25
374	400	316	150	262.791	979.233	1152	2.8	113	50
375	400	316	150	288.372	928.547	1152	2.8	124	75
376	400	316	150	288.372	928.547	1152	2.8	124	100
377	400	316	150	337.209	831.783	1152	2.8	145	150
378	400	316	150	337.209	831.783	1152	2.8	145	175
379	400	316	150	262.791	837.382	1296	3	113	25
380	400	316	150	262.791	837.382	1296	3	113	50
381	400	316	150	288.372	786.696	1296	3	124	75
382	400	316	150	288.372	786.696	1296	3	124	100
383	400	316	150	337.209	689.932	1296	3	145	150
384	400	316	150	337.209	689.932	1296	3	145	175
385	350	266	9.5	431.25	861.356	800	2.4	207	25
386	350	266	9.5	431.25	861.356	800	2.4	207	50
387	350	266	9.5	475	768.897	800	2.4	228	75
388	350	266	9.5	475	768.897	800	2.4	228	100
389	350	266	9.5	506.25	702.855	800	2.4	243	150
390	350	266	9.5	506.25	702.855	800	2.4	243	175
391	350	266	9.5	431.25	609.177	1056	2.6	207	25
392	350	266	9.5	431.25	609.177	1056	2.6	207	50
393	350	266	9.5	475	516.718	1056	2.6	228	75
394	350	266	9.5	475	516.718	1056	2.6	228	100
395	350	266	9.5	506.25	450.676	1056	2.6	243	150
396	350	266	9.5	506.25	450.676	1056	2.6	243	175

397	350	266	9.5	431.25	467.327	1200	2.8	207	25
398	350	266	9.5	431.25	467.327	1200	2.8	207	50
399	350	266	9.5	475	374.867	1200	2.8	228	75
400	350	266	9.5	475	374.867	1200	2.8	228	100
401	350	266	9.5	506.25	308.825	1200	2.8	243	150
402	350	266	9.5	506.25	308.825	1200	2.8	243	175
403	350	266	9.5	431.25	356.998	1312	3	207	25
404	350	266	9.5	431.25	356.998	1312	3	207	50
405	350	266	9.5	475	264.539	1312	3	228	75
406	350	266	9.5	475	264.539	1312	3	228	100
407	350	266	9.5	506.25	198.497	1312	3	243	150
408	350	266	9.5	506.25	198.497	1312	3	243	175
409	350	266	12.5	414.583	941.301	768	2.4	199	25
410	350	266	12.5	414.583	941.301	768	2.4	199	50
411	350	266	12.5	450	866.453	768	2.4	216	75
412	350	266	12.5	450	866.453	768	2.4	216	100
413	350	266	12.5	475	813.62	768	2.4	228	150
414	350	266	12.5	475	813.62	768	2.4	228	175
415	350	266	12.5	414.583	689.122	1024	2.6	199	25
416	350	266	12.5	414.583	689.122	1024	2.6	199	50
417	350	266	12.5	450	614.274	1024	2.6	216	75
418	350	266	12.5	450	614.274	1024	2.6	216	100
419	350	266	12.5	475	561.441	1024	2.6	228	150
420	350	266	12.5	475	561.441	1024	2.6	228	175
421	350	266	12.5	414.583	547.272	1168	2.8	199	25
422	350	266	12.5	414.583	547.272	1168	2.8	199	50
423	350	266	12.5	450	472.424	1168	2.8	216	75
424	350	266	12.5	450	472.424	1168	2.8	216	100
425	350	266	12.5	475	419.59	1168	2.8	228	150
426	350	266	12.5	475	419.59	1168	2.8	228	175
427	350	266	12.5	414.583	436.943	1280	3	199	25
428	350	266	12.5	414.583	436.943	1280	3	199	50
429	350	266	12.5	450	362.095	1280	3	216	75
430	350	266	12.5	450	362.095	1280	3	216	100
431	350	266	12.5	475	309.261	1280	3	228	150
432	350	266	12.5	475	309.261	1280	3	228	175
433	350	266	19	395.833	1025.65	736	2.4	190	25
434	350	266	19	395.833	1025.65	736	2.4	190	50
435	350	266	19	427.083	959.607	736	2.4	205	75
436	350	266	19	427.083	959.607	736	2.4	205	100
437	350	266	19	450	911.176	736	2.4	216	150
438	350	266	19	450	911.176	736	2.4	216	175
439	350	266	19	395.833	773.47	992	2.6	190	25
440	350	266	19	395.833	773.47	992	2.6	190	50
441	350	266	19	427.083	707.428	992	2.6	205	75
442	350	266	19	427.083	707.428	992	2.6	205	100

443	350	266	19	450	658.997	992	2.6	216	150
444	350	266	19	450	658.997	992	2.6	216	175
445	350	266	19	395.833	631.619	1136	2.8	190	25
446	350	266	19	395.833	631.619	1136	2.8	190	50
447	350	266	19	427.083	565.577	1136	2.8	205	75
448	350	266	19	427.083	565.577	1136	2.8	205	100
449	350	266	19	450	517.146	1136	2.8	216	150
450	350	266	19	450	517.146	1136	2.8	216	175
451	350	266	19	395.833	521.291	1248	3	190	25
452	350	266	19	395.833	521.291	1248	3	190	50
453	350	266	19	427.083	455.249	1248	3	205	75
454	350	266	19	427.083	455.249	1248	3	205	100
455	350	266	19	450	406.818	1248	3	216	150
456	350	266	19	450	406.818	1248	3	216	175
457	350	266	25	372.917	1118.8	704	2.4	179	25
458	350	266	25	372.917	1118.8	704	2.4	179	50
459	350	266	25	402.083	1057.16	704	2.4	193	75
460	350	266	25	402.083	1057.16	704	2.4	193	100
461	350	266	25	420.833	1017.54	704	2.4	202	150
462	350	266	25	420.833	1017.54	704	2.4	202	175
463	350	266	25	372.917	866.623	960	2.6	179	25
464	350	266	25	372.917	866.623	960	2.6	179	50
465	350	266	25	402.083	804.984	960	2.6	193	75
466	350	266	25	402.083	804.984	960	2.6	193	100
467	350	266	25	420.833	765.359	960	2.6	202	150
468	350	266	25	420.833	765.359	960	2.6	202	175
469	350	266	25	372.917	724.773	1104	2.8	179	25
470	350	266	25	372.917	724.773	1104	2.8	179	50
471	350	266	25	402.083	663.133	1104	2.8	193	75
472	350	266	25	402.083	663.133	1104	2.8	193	100
473	350	266	25	420.833	623.508	1104	2.8	202	150
474	350	266	25	420.833	623.508	1104	2.8	202	175
475	350	266	25	372.917	614.444	1216	3	179	25
476	350	266	25	372.917	614.444	1216	3	179	50
477	350	266	25	402.083	552.805	1216	3	193	75
478	350	266	25	402.083	552.805	1216	3	193	100
479	350	266	25	420.833	513.18	1216	3	202	150
480	350	266	25	420.833	513.18	1216	3	202	175
481	350	266	37.5	345.833	952.821	944	2.4	166	25
482	350	266	37.5	345.833	952.821	944	2.4	166	50
483	350	266	37.5	377.083	886.779	944	2.4	181	75
484	350	266	37.5	377.083	886.779	944	2.4	181	100
485	350	266	37.5	395.833	847.154	944	2.4	190	150
486	350	266	37.5	395.833	847.154	944	2.4	190	175
487	350	266	37.5	345.833	763.687	1136	2.6	166	25
488	350	266	37.5	345.833	763.687	1136	2.6	166	50

489	350	266	37.5	377.083	697.645	1136	2.6	181	75
490	350	266	37.5	377.083	697.645	1136	2.6	181	100
491	350	266	37.5	395.833	658.019	1136	2.6	190	150
492	350	266	37.5	395.833	658.019	1136	2.6	190	175
493	350	266	37.5	345.833	653.359	1248	2.8	166	25
494	350	266	37.5	345.833	653.359	1248	2.8	166	50
495	350	266	37.5	377.083	587.316	1248	2.8	181	75
496	350	266	37.5	377.083	587.316	1248	2.8	181	100
497	350	266	37.5	395.833	547.691	1248	2.8	190	150
498	350	266	37.5	395.833	547.691	1248	2.8	190	175
499	350	266	37.5	345.833	511.508	1392	3	166	25
500	350	266	37.5	345.833	511.508	1392	3	166	50
501	350	266	37.5	377.083	445.466	1392	3	181	75
502	350	266	37.5	377.083	445.466	1392	3	181	100
503	350	266	37.5	395.833	405.84	1392	3	190	150
504	350	266	37.5	395.833	405.84	1392	3	190	175
505	350	266	50	320.833	1050.38	912	2.4	154	25
506	350	266	50	320.833	1050.38	912	2.4	154	50
507	350	266	50	352.083	984.335	912	2.4	169	75
508	350	266	50	352.083	984.335	912	2.4	169	100
509	350	266	50	370.833	944.71	912	2.4	178	150
510	350	266	50	370.833	944.71	912	2.4	178	175
511	350	266	50	320.833	861.243	1104	2.6	154	25
512	350	266	50	320.833	861.243	1104	2.6	154	50
513	350	266	50	352.083	795.201	1104	2.6	169	75
514	350	266	50	352.083	795.201	1104	2.6	169	100
515	350	266	50	370.833	755.576	1104	2.6	178	150
516	350	266	50	370.833	755.576	1104	2.6	178	175
517	350	266	50	320.833	750.915	1216	2.8	154	25
518	350	266	50	320.833	750.915	1216	2.8	154	50
519	350	266	50	352.083	684.873	1216	2.8	169	75
520	350	266	50	352.083	684.873	1216	2.8	169	100
521	350	266	50	370.833	645.247	1216	2.8	178	150
522	350	266	50	370.833	645.247	1216	2.8	178	175
523	350	266	50	320.833	609.064	1360	3	154	25
524	350	266	50	320.833	609.064	1360	3	154	50
525	350	266	50	352.083	543.022	1360	3	169	75
526	350	266	50	352.083	543.022	1360	3	169	100
527	350	266	50	370.833	503.396	1360	3	178	150
528	350	266	50	370.833	503.396	1360	3	178	175
529	350	266	75	270.833	1192.85	880	2.4	130	25
530	350	266	75	270.833	1192.85	880	2.4	130	50
531	350	266	75	302.083	1126.81	880	2.4	145	75
532	350	266	75	302.083	1126.81	880	2.4	145	100
533	350	266	75	333.333	1060.76	880	2.4	160	150
534	350	266	75	333.333	1060.76	880	2.4	160	175

535	350	266	75	270.833	1003.71	1072	2.6	130	25
536	350	266	75	270.833	1003.71	1072	2.6	130	50
537	350	266	75	302.083	937.671	1072	2.6	145	75
538	350	266	75	302.083	937.671	1072	2.6	145	100
539	350	266	75	333.333	871.629	1072	2.6	160	150
540	350	266	75	333.333	871.629	1072	2.6	160	175
541	350	266	75	270.833	893.385	1184	2.8	130	25
542	350	266	75	270.833	893.385	1184	2.8	130	50
543	350	266	75	302.083	827.343	1184	2.8	145	75
544	350	266	75	302.083	827.343	1184	2.8	145	100
545	350	266	75	333.333	761.3	1184	2.8	160	150
546	350	266	75	333.333	761.3	1184	2.8	160	175
547	350	266	75	270.833	751.534	1328	3	130	25
548	350	266	75	270.833	751.534	1328	3	130	50
549	350	266	75	302.083	685.492	1328	3	145	75
550	350	266	75	302.083	685.492	1328	3	145	100
551	350	266	75	333.333	619.45	1328	3	160	150
552	350	266	75	333.333	619.45	1328	3	160	175
553	350	266	150	235.417	1301.86	848	2.4	113	25
554	350	266	150	235.417	1301.86	848	2.4	113	50
555	350	266	150	258.333	1253.43	848	2.4	124	75
556	350	266	150	258.333	1253.43	848	2.4	124	100
557	350	266	150	302.083	1160.97	848	2.4	145	150
558	350	266	150	302.083	1160.97	848	2.4	145	175
559	350	266	150	235.417	1112.72	1040	2.6	113	25
560	350	266	150	235.417	1112.72	1040	2.6	113	50
561	350	266	150	258.333	1064.29	1040	2.6	124	75
562	350	266	150	258.333	1064.29	1040	2.6	124	100
563	350	266	150	302.083	971.833	1040	2.6	145	150
564	350	266	150	302.083	971.833	1040	2.6	145	175
565	350	266	150	235.417	1002.4	1152	2.8	113	25
566	350	266	150	235.417	1002.4	1152	2.8	113	50
567	350	266	150	258.333	953.964	1152	2.8	124	75
568	350	266	150	258.333	953.964	1152	2.8	124	100
569	350	266	150	302.083	861.505	1152	2.8	145	150
570	350	266	150	302.083	861.505	1152	2.8	145	175
571	350	266	150	235.417	860.545	1296	3	113	25
572	350	266	150	235.417	860.545	1296	3	113	50
573	350	266	150	258.333	812.114	1296	3	124	75
574	350	266	150	258.333	812.114	1296	3	124	100
575	350	266	150	302.083	719.654	1296	3	145	150
576	350	266	150	302.083	719.654	1296	3	145	175
577	300	216	9.5	376.364	907.799	800	2.4	207	25
578	300	216	9.5	376.364	907.799	800	2.4	207	50
579	300	216	9.5	414.545	820.051	800	2.4	228	75
580	300	216	9.5	414.545	820.051	800	2.4	228	100

581	300	216	9.5	441.818	757.374	800	2.4	243	150
582	300	216	9.5	441.818	757.374	800	2.4	243	175
583	300	216	9.5	376.364	655.62	1056	2.6	207	25
584	300	216	9.5	376.364	655.62	1056	2.6	207	50
585	300	216	9.5	414.545	567.872	1056	2.6	228	75
586	300	216	9.5	414.545	567.872	1056	2.6	228	100
587	300	216	9.5	441.818	505.195	1056	2.6	243	150
588	300	216	9.5	441.818	505.195	1056	2.6	243	175
589	300	216	9.5	376.364	513.769	1200	2.8	207	25
590	300	216	9.5	376.364	513.769	1200	2.8	207	50
591	300	216	9.5	414.545	426.021	1200	2.8	228	75
592	300	216	9.5	414.545	426.021	1200	2.8	228	100
593	300	216	9.5	441.818	363.344	1200	2.8	243	150
594	300	216	9.5	441.818	363.344	1200	2.8	243	175
595	300	216	9.5	376.364	403.441	1312	3	207	25
596	300	216	9.5	376.364	403.441	1312	3	207	50
597	300	216	9.5	414.545	315.693	1312	3	228	75
598	300	216	9.5	414.545	315.693	1312	3	228	100
599	300	216	9.5	441.818	253.016	1312	3	243	150
600	300	216	9.5	441.818	253.016	1312	3	243	175
601	300	216	12.5	361.818	985.949	768	2.4	199	25
602	300	216	12.5	361.818	985.949	768	2.4	199	50
603	300	216	12.5	392.727	914.915	768	2.4	216	75
604	300	216	12.5	392.727	914.915	768	2.4	216	100
605	300	216	12.5	414.545	864.773	768	2.4	228	150
606	300	216	12.5	414.545	864.773	768	2.4	228	175
607	300	216	12.5	361.818	733.77	1024	2.6	199	25
608	300	216	12.5	361.818	733.77	1024	2.6	199	50
609	300	216	12.5	392.727	662.736	1024	2.6	216	75
610	300	216	12.5	392.727	662.736	1024	2.6	216	100
611	300	216	12.5	414.545	612.594	1024	2.6	228	150
612	300	216	12.5	414.545	612.594	1024	2.6	228	175
613	300	216	12.5	361.818	591.919	1168	2.8	199	25
614	300	216	12.5	361.818	591.919	1168	2.8	199	50
615	300	216	12.5	392.727	520.885	1168	2.8	216	75
616	300	216	12.5	392.727	520.885	1168	2.8	216	100
617	300	216	12.5	414.545	470.744	1168	2.8	228	150
618	300	216	12.5	414.545	470.744	1168	2.8	228	175
619	300	216	12.5	361.818	481.591	1280	3	199	25
620	300	216	12.5	361.818	481.591	1280	3	199	50
621	300	216	12.5	392.727	410.557	1280	3	216	75
622	300	216	12.5	392.727	410.557	1280	3	216	100
623	300	216	12.5	414.545	360.415	1280	3	228	150
624	300	216	12.5	414.545	360.415	1280	3	228	175
625	300	216	19	345.455	1068.28	736	2.4	190	25
626	300	216	19	345.455	1068.28	736	2.4	190	50

627	300	216	19	372.727	1005.6	736	2.4	205	75
628	300	216	19	372.727	1005.6	736	2.4	205	100
629	300	216	19	392.727	959.637	736	2.4	216	150
630	300	216	19	392.727	959.637	736	2.4	216	175
631	300	216	19	345.455	816.098	992	2.6	190	25
632	300	216	19	345.455	816.098	992	2.6	190	50
633	300	216	19	372.727	753.421	992	2.6	205	75
634	300	216	19	372.727	753.421	992	2.6	205	100
635	300	216	19	392.727	707.458	992	2.6	216	150
636	300	216	19	392.727	707.458	992	2.6	216	175
637	300	216	19	345.455	674.248	1136	2.8	190	25
638	300	216	19	345.455	674.248	1136	2.8	190	50
639	300	216	19	372.727	611.571	1136	2.8	205	75
640	300	216	19	372.727	611.571	1136	2.8	205	100
641	300	216	19	392.727	565.608	1136	2.8	216	150
642	300	216	19	392.727	565.608	1136	2.8	216	175
643	300	216	19	345.455	563.919	1248	3	190	25
644	300	216	19	345.455	563.919	1248	3	190	50
645	300	216	19	372.727	501.242	1248	3	205	75
646	300	216	19	372.727	501.242	1248	3	205	100
647	300	216	19	392.727	455.279	1248	3	216	150
648	300	216	19	392.727	455.279	1248	3	216	175
649	300	216	25	325.455	1158.96	704	2.4	179	25
650	300	216	25	325.455	1158.96	704	2.4	179	50
651	300	216	25	350.909	1100.46	704	2.4	193	75
652	300	216	25	350.909	1100.46	704	2.4	193	100
653	300	216	25	367.273	1062.86	704	2.4	202	150
654	300	216	25	367.273	1062.86	704	2.4	202	175
655	300	216	25	325.455	906.784	960	2.6	179	25
656	300	216	25	325.455	906.784	960	2.6	179	50
657	300	216	25	350.909	848.285	960	2.6	193	75
658	300	216	25	350.909	848.285	960	2.6	193	100
659	300	216	25	367.273	810.679	960	2.6	202	150
660	300	216	25	367.273	810.679	960	2.6	202	175
661	300	216	25	325.455	764.933	1104	2.8	179	25
662	300	216	25	325.455	764.933	1104	2.8	179	50
663	300	216	25	350.909	706.435	1104	2.8	193	75
664	300	216	25	350.909	706.435	1104	2.8	193	100
665	300	216	25	367.273	668.828	1104	2.8	202	150
666	300	216	25	367.273	668.828	1104	2.8	202	175
667	300	216	25	325.455	654.605	1216	3	179	25
668	300	216	25	325.455	654.605	1216	3	179	50
669	300	216	25	350.909	596.106	1216	3	193	75
670	300	216	25	350.909	596.106	1216	3	193	100
671	300	216	25	367.273	558.5	1216	3	202	150
672	300	216	25	367.273	558.5	1216	3	202	175

673	300	216	37.5	301.818	990.065	944	2.4	166	25
674	300	216	37.5	301.818	990.065	944	2.4	166	50
675	300	216	37.5	329.091	927.388	944	2.4	181	75
676	300	216	37.5	329.091	927.388	944	2.4	181	100
677	300	216	37.5	345.455	889.782	944	2.4	190	150
678	300	216	37.5	345.455	889.782	944	2.4	190	175
679	300	216	37.5	301.818	800.931	1136	2.6	166	25
680	300	216	37.5	301.818	800.931	1136	2.6	166	50
681	300	216	37.5	329.091	738.254	1136	2.6	181	75
682	300	216	37.5	329.091	738.254	1136	2.6	181	100
683	300	216	37.5	345.455	700.648	1136	2.6	190	150
684	300	216	37.5	345.455	700.648	1136	2.6	190	175
685	300	216	37.5	301.818	690.602	1248	2.8	166	25
686	300	216	37.5	301.818	690.602	1248	2.8	166	50
687	300	216	37.5	329.091	627.925	1248	2.8	181	75
688	300	216	37.5	329.091	627.925	1248	2.8	181	100
689	300	216	37.5	345.455	590.319	1248	2.8	190	150
690	300	216	37.5	345.455	590.319	1248	2.8	190	175
691	300	216	37.5	301.818	548.752	1392	3	166	25
692	300	216	37.5	301.818	548.752	1392	3	166	50
693	300	216	37.5	329.091	486.075	1392	3	181	75
694	300	216	37.5	329.091	486.075	1392	3	181	100
695	300	216	37.5	345.455	448.468	1392	3	190	150
696	300	216	37.5	345.455	448.468	1392	3	190	175
697	300	216	50	280	1084.93	912	2.4	154	25
698	300	216	50	280	1084.93	912	2.4	154	50
699	300	216	50	307.273	1022.25	912	2.4	169	75
700	300	216	50	307.273	1022.25	912	2.4	169	100
701	300	216	50	323.636	984.646	912	2.4	178	150
702	300	216	50	323.636	984.646	912	2.4	178	175
703	300	216	50	280	895.795	1104	2.6	154	25
704	300	216	50	280	895.795	1104	2.6	154	50
705	300	216	50	307.273	833.118	1104	2.6	169	75
706	300	216	50	307.273	833.118	1104	2.6	169	100
707	300	216	50	323.636	795.511	1104	2.6	178	150
708	300	216	50	323.636	795.511	1104	2.6	178	175
709	300	216	50	280	785.466	1216	2.8	154	25
710	300	216	50	280	785.466	1216	2.8	154	50
711	300	216	50	307.273	722.789	1216	2.8	169	75
712	300	216	50	307.273	722.789	1216	2.8	169	100
713	300	216	50	323.636	685.183	1216	2.8	178	150
714	300	216	50	323.636	685.183	1216	2.8	178	175
715	300	216	50	280	643.615	1360	3	154	25
716	300	216	50	280	643.615	1360	3	154	50
717	300	216	50	307.273	580.939	1360	3	169	75
718	300	216	50	307.273	580.939	1360	3	169	100

719	300	216	50	323.636	543.332	1360	3	178	150
720	300	216	50	323.636	543.332	1360	3	178	175
721	300	216	75	236.364	1222.01	880	2.4	130	25
722	300	216	75	236.364	1222.01	880	2.4	130	50
723	300	216	75	263.636	1159.34	880	2.4	145	75
724	300	216	75	263.636	1159.34	880	2.4	145	100
725	300	216	75	290.909	1096.66	880	2.4	160	150
726	300	216	75	290.909	1096.66	880	2.4	160	175
727	300	216	75	236.364	1032.88	1072	2.6	130	25
728	300	216	75	236.364	1032.88	1072	2.6	130	50
729	300	216	75	263.636	970.203	1072	2.6	145	75
730	300	216	75	263.636	970.203	1072	2.6	145	100
731	300	216	75	290.909	907.526	1072	2.6	160	150
732	300	216	75	290.909	907.526	1072	2.6	160	175
733	300	216	75	236.364	922.552	1184	2.8	130	25
734	300	216	75	236.364	922.552	1184	2.8	130	50
735	300	216	75	263.636	859.875	1184	2.8	145	75
736	300	216	75	263.636	859.875	1184	2.8	145	100
737	300	216	75	290.909	797.198	1184	2.8	160	150
738	300	216	75	290.909	797.198	1184	2.8	160	175
739	300	216	75	236.364	780.701	1328	3	130	25
740	300	216	75	236.364	780.701	1328	3	130	50
741	300	216	75	263.636	718.024	1328	3	145	75
742	300	216	75	263.636	718.024	1328	3	145	100
743	300	216	75	290.909	655.347	1328	3	160	150
744	300	216	75	290.909	655.347	1328	3	160	175
745	300	216	150	205.455	1327.21	848	2.4	113	25
746	300	216	150	205.455	1327.21	848	2.4	113	50
747	300	216	150	225.455	1281.25	848	2.4	124	75
748	300	216	150	225.455	1281.25	848	2.4	124	100
749	300	216	150	263.636	1193.5	848	2.4	145	150
750	300	216	150	263.636	1193.5	848	2.4	145	175
751	300	216	150	205.455	1138.08	1040	2.6	113	25
752	300	216	150	205.455	1138.08	1040	2.6	113	50
753	300	216	150	225.455	1092.11	1040	2.6	124	75
754	300	216	150	225.455	1092.11	1040	2.6	124	100
755	300	216	150	263.636	1004.37	1040	2.6	145	150
756	300	216	150	263.636	1004.37	1040	2.6	145	175
757	300	216	150	205.455	1027.75	1152	2.8	113	25
758	300	216	150	205.455	1027.75	1152	2.8	113	50
759	300	216	150	225.455	981.785	1152	2.8	124	75
760	300	216	150	225.455	981.785	1152	2.8	124	100
761	300	216	150	263.636	894.037	1152	2.8	145	150
762	300	216	150	263.636	894.037	1152	2.8	145	175
763	300	216	150	205.455	885.897	1296	3	113	25
764	300	216	150	205.455	885.897	1296	3	113	50

765	300	216	150	225.455	839.934	1296	3	124	75
766	300	216	150	225.455	839.934	1296	3	124	100
767	300	216	150	263.636	752.186	1296	3	145	150
768	300	216	150	263.636	752.186	1296	3	145	175
769	250	180	9.5	333.871	943.754	800	2.4	207	25
770	250	180	9.5	333.871	943.754	800	2.4	207	50
771	250	180	9.5	367.742	859.654	800	2.4	228	75
772	250	180	9.5	367.742	859.654	800	2.4	228	100
773	250	180	9.5	391.935	799.583	800	2.4	243	150
774	250	180	9.5	391.935	799.583	800	2.4	243	175
775	250	180	9.5	333.871	691.575	1056	2.6	207	25
776	250	180	9.5	333.871	691.575	1056	2.6	207	50
777	250	180	9.5	367.742	607.475	1056	2.6	228	75
778	250	180	9.5	367.742	607.475	1056	2.6	228	100
779	250	180	9.5	391.935	547.403	1056	2.6	243	150
780	250	180	9.5	391.935	547.403	1056	2.6	243	175
781	250	180	9.5	333.871	549.724	1200	2.8	207	25
782	250	180	9.5	333.871	549.724	1200	2.8	207	50
783	250	180	9.5	367.742	465.624	1200	2.8	228	75
784	250	180	9.5	367.742	465.624	1200	2.8	228	100
785	250	180	9.5	391.935	405.553	1200	2.8	243	150
786	250	180	9.5	391.935	405.553	1200	2.8	243	175
787	250	180	9.5	333.871	439.396	1312	3	207	25
788	250	180	9.5	333.871	439.396	1312	3	207	50
789	250	180	9.5	367.742	355.296	1312	3	228	75
790	250	180	9.5	367.742	355.296	1312	3	228	100
791	250	180	9.5	391.935	295.224	1312	3	243	150
792	250	180	9.5	391.935	295.224	1312	3	243	175
793	250	180	12.5	320.968	1020.51	768	2.4	199	25
794	250	180	12.5	320.968	1020.51	768	2.4	199	50
795	250	180	12.5	348.387	952.434	768	2.4	216	75
796	250	180	12.5	348.387	952.434	768	2.4	216	100
797	250	180	12.5	367.742	904.376	768	2.4	228	150
798	250	180	12.5	367.742	904.376	768	2.4	228	175
799	250	180	12.5	320.968	768.335	1024	2.6	199	25
800	250	180	12.5	320.968	768.335	1024	2.6	199	50
801	250	180	12.5	348.387	700.255	1024	2.6	216	75
802	250	180	12.5	348.387	700.255	1024	2.6	216	100
803	250	180	12.5	367.742	652.197	1024	2.6	228	150
804	250	180	12.5	367.742	652.197	1024	2.6	228	175
805	250	180	12.5	320.968	626.485	1168	2.8	199	25
806	250	180	12.5	320.968	626.485	1168	2.8	199	50
807	250	180	12.5	348.387	558.404	1168	2.8	216	75
808	250	180	12.5	348.387	558.404	1168	2.8	216	100
809	250	180	12.5	367.742	510.347	1168	2.8	228	150
810	250	180	12.5	367.742	510.347	1168	2.8	228	175

811	250	180	12.5	320.968	516.156	1280	3	199	25
812	250	180	12.5	320.968	516.156	1280	3	199	50
813	250	180	12.5	348.387	448.075	1280	3	216	75
814	250	180	12.5	348.387	448.075	1280	3	216	100
815	250	180	12.5	367.742	400.018	1280	3	228	150
816	250	180	12.5	367.742	400.018	1280	3	228	175
817	250	180	19	306.452	1101.28	736	2.4	190	25
818	250	180	19	306.452	1101.28	736	2.4	190	50
819	250	180	19	330.645	1041.21	736	2.4	205	75
820	250	180	19	330.645	1041.21	736	2.4	205	100
821	250	180	19	348.387	997.156	736	2.4	216	150
822	250	180	19	348.387	997.156	736	2.4	216	175
823	250	180	19	306.452	849.101	992	2.6	190	25
824	250	180	19	306.452	849.101	992	2.6	190	50
825	250	180	19	330.645	789.029	992	2.6	205	75
826	250	180	19	330.645	789.029	992	2.6	205	100
827	250	180	19	348.387	744.977	992	2.6	216	150
828	250	180	19	348.387	744.977	992	2.6	216	175
829	250	180	19	306.452	707.25	1136	2.8	190	25
830	250	180	19	306.452	707.25	1136	2.8	190	50
831	250	180	19	330.645	647.179	1136	2.8	205	75
832	250	180	19	330.645	647.179	1136	2.8	205	100
833	250	180	19	348.387	603.126	1136	2.8	216	150
834	250	180	19	348.387	603.126	1136	2.8	216	175
835	250	180	19	306.452	596.922	1248	3	190	25
836	250	180	19	306.452	596.922	1248	3	190	50
837	250	180	19	330.645	536.85	1248	3	205	75
838	250	180	19	330.645	536.85	1248	3	205	100
839	250	180	19	348.387	492.798	1248	3	216	150
840	250	180	19	348.387	492.798	1248	3	216	175
841	250	180	25	288.71	1190.05	704	2.4	179	25
842	250	180	25	288.71	1190.05	704	2.4	179	50
843	250	180	25	311.29	1133.99	704	2.4	193	75
844	250	180	25	311.29	1133.99	704	2.4	193	100
845	250	180	25	325.806	1097.95	704	2.4	202	150
846	250	180	25	325.806	1097.95	704	2.4	202	175
847	250	180	25	288.71	937.876	960	2.6	179	25
848	250	180	25	288.71	937.876	960	2.6	179	50
849	250	180	25	311.29	881.809	960	2.6	193	75
850	250	180	25	311.29	881.809	960	2.6	193	100
851	250	180	25	325.806	845.766	960	2.6	202	150
852	250	180	25	325.806	845.766	960	2.6	202	175
853	250	180	25	288.71	796.025	1104	2.8	179	25
854	250	180	25	288.71	796.025	1104	2.8	179	50
855	250	180	25	311.29	739.958	1104	2.8	193	75
856	250	180	25	311.29	739.958	1104	2.8	193	100

857	250	180	25	325.806	703.915	1104	2.8	202	150
858	250	180	25	325.806	703.915	1104	2.8	202	175
859	250	180	25	288.71	685.696	1216	3	179	25
860	250	180	25	288.71	685.696	1216	3	179	50
861	250	180	25	311.29	629.63	1216	3	193	75
862	250	180	25	311.29	629.63	1216	3	193	100
863	250	180	25	325.806	593.587	1216	3	202	150
864	250	180	25	325.806	593.587	1216	3	202	175
865	250	180	37.5	267.742	1018.9	944	2.4	166	25
866	250	180	37.5	267.742	1018.9	944	2.4	166	50
867	250	180	37.5	291.935	958.827	944	2.4	181	75
868	250	180	37.5	291.935	958.827	944	2.4	181	100
869	250	180	37.5	306.452	922.784	944	2.4	190	150
870	250	180	37.5	306.452	922.784	944	2.4	190	175
871	250	180	37.5	267.742	829.764	1136	2.6	166	25
872	250	180	37.5	267.742	829.764	1136	2.6	166	50
873	250	180	37.5	291.935	769.693	1136	2.6	181	75
874	250	180	37.5	291.935	769.693	1136	2.6	181	100
875	250	180	37.5	306.452	733.65	1136	2.6	190	150
876	250	180	37.5	306.452	733.65	1136	2.6	190	175
877	250	180	37.5	267.742	719.436	1248	2.8	166	25
878	250	180	37.5	267.742	719.436	1248	2.8	166	50
879	250	180	37.5	291.935	659.365	1248	2.8	181	75
880	250	180	37.5	291.935	659.365	1248	2.8	181	100
881	250	180	37.5	306.452	623.322	1248	2.8	190	150
882	250	180	37.5	306.452	623.322	1248	2.8	190	175
883	250	180	37.5	267.742	577.585	1392	3	166	25
884	250	180	37.5	267.742	577.585	1392	3	166	50
885	250	180	37.5	291.935	517.514	1392	3	181	75
886	250	180	37.5	291.935	517.514	1392	3	181	100
887	250	180	37.5	306.452	481.471	1392	3	190	150
888	250	180	37.5	306.452	481.471	1392	3	190	175
889	250	180	50	248.387	1111.68	912	2.4	154	25
890	250	180	50	248.387	1111.68	912	2.4	154	50
891	250	180	50	272.581	1051.61	912	2.4	169	75
892	250	180	50	272.581	1051.61	912	2.4	169	100
893	250	180	50	287.097	1015.56	912	2.4	178	150
894	250	180	50	287.097	1015.56	912	2.4	178	175
895	250	180	50	248.387	922.544	1104	2.6	154	25
896	250	180	50	248.387	922.544	1104	2.6	154	50
897	250	180	50	272.581	862.472	1104	2.6	169	75
898	250	180	50	272.581	862.472	1104	2.6	169	100
899	250	180	50	287.097	826.43	1104	2.6	178	150
900	250	180	50	287.097	826.43	1104	2.6	178	175
901	250	180	50	248.387	812.216	1216	2.8	154	25
902	250	180	50	248.387	812.216	1216	2.8	154	50

903	250	180	50	272.581	752.144	1216	2.8	169	75
904	250	180	50	272.581	752.144	1216	2.8	169	100
905	250	180	50	287.097	716.101	1216	2.8	178	150
906	250	180	50	287.097	716.101	1216	2.8	178	175
907	250	180	50	248.387	670.365	1360	3	154	25
908	250	180	50	248.387	670.365	1360	3	154	50
909	250	180	50	272.581	610.293	1360	3	169	75
910	250	180	50	272.581	610.293	1360	3	169	100
911	250	180	50	287.097	574.25	1360	3	178	150
912	250	180	50	287.097	574.25	1360	3	178	175
913	250	180	75	209.677	1244.59	880	2.4	130	25
914	250	180	75	209.677	1244.59	880	2.4	130	50
915	250	180	75	233.871	1184.52	880	2.4	145	75
916	250	180	75	233.871	1184.52	880	2.4	145	100
917	250	180	75	258.065	1124.45	880	2.4	160	150
918	250	180	75	258.065	1124.45	880	2.4	160	175
919	250	180	75	209.677	1055.46	1072	2.6	130	25
920	250	180	75	209.677	1055.46	1072	2.6	130	50
921	250	180	75	233.871	995.389	1072	2.6	145	75
922	250	180	75	233.871	995.389	1072	2.6	145	100
923	250	180	75	258.065	935.318	1072	2.6	160	150
924	250	180	75	258.065	935.318	1072	2.6	160	175
925	250	180	75	209.677	945.132	1184	2.8	130	25
926	250	180	75	209.677	945.132	1184	2.8	130	50
927	250	180	75	233.871	885.061	1184	2.8	145	75
928	250	180	75	233.871	885.061	1184	2.8	145	100
929	250	180	75	258.065	824.989	1184	2.8	160	150
930	250	180	75	258.065	824.989	1184	2.8	160	175
931	250	180	75	209.677	803.282	1328	3	130	25
932	250	180	75	209.677	803.282	1328	3	130	50
933	250	180	75	233.871	743.21	1328	3	145	75
934	250	180	75	233.871	743.21	1328	3	145	100
935	250	180	75	258.065	683.139	1328	3	160	150
936	250	180	75	258.065	683.139	1328	3	160	175
937	250	180	150	182.258	1346.84	848	2.4	113	25
938	250	180	150	182.258	1346.84	848	2.4	113	50
939	250	180	150	200	1302.79	848	2.4	124	75
940	250	180	150	200	1302.79	848	2.4	124	100
941	250	180	150	233.871	1218.69	848	2.4	145	150
942	250	180	150	233.871	1218.69	848	2.4	145	175
943	250	180	150	182.258	1157.7	1040	2.6	113	25
944	250	180	150	182.258	1157.7	1040	2.6	113	50
945	250	180	150	200	1113.65	1040	2.6	124	75
946	250	180	150	200	1113.65	1040	2.6	124	100
947	250	180	150	233.871	1029.55	1040	2.6	145	150
948	250	180	150	233.871	1029.55	1040	2.6	145	175

949	250	180	150	182.258	1047.38	1152	2.8	113	25
950	250	180	150	182.258	1047.38	1152	2.8	113	50
951	250	180	150	200	1003.32	1152	2.8	124	75
952	250	180	150	200	1003.32	1152	2.8	124	100
953	250	180	150	233.871	919.223	1152	2.8	145	150
954	250	180	150	233.871	919.223	1152	2.8	145	175
955	250	180	150	182.258	905.525	1296	3	113	25
956	250	180	150	182.258	905.525	1296	3	113	50
957	250	180	150	200	861.473	1296	3	124	75
958	250	180	150	200	861.473	1296	3	124	100
959	250	180	150	233.871	777.372	1296	3	145	150
960	250	180	150	233.871	777.372	1296	3	145	175
961	200	130	9.5	295.714	976.041	800	2.4	207	25
962	200	130	9.5	295.714	976.041	800	2.4	207	50
963	200	130	9.5	325.714	895.216	800	2.4	228	75
964	200	130	9.5	325.714	895.216	800	2.4	228	100
965	200	130	9.5	347.143	837.484	800	2.4	243	150
966	200	130	9.5	347.143	837.484	800	2.4	243	175
967	200	130	9.5	295.714	723.861	1056	2.6	207	25
968	200	130	9.5	295.714	723.861	1056	2.6	207	50
969	200	130	9.5	325.714	643.037	1056	2.6	228	75
970	200	130	9.5	325.714	643.037	1056	2.6	228	100
971	200	130	9.5	347.143	585.305	1056	2.6	243	150
972	200	130	9.5	347.143	585.305	1056	2.6	243	175
973	200	130	9.5	295.714	582.011	1200	2.8	207	25
974	200	130	9.5	295.714	582.011	1200	2.8	207	50
975	200	130	9.5	325.714	501.186	1200	2.8	228	75
976	200	130	9.5	325.714	501.186	1200	2.8	228	100
977	200	130	9.5	347.143	443.454	1200	2.8	243	150
978	200	130	9.5	347.143	443.454	1200	2.8	243	175
979	200	130	9.5	295.714	471.682	1312	3	207	25
980	200	130	9.5	295.714	471.682	1312	3	207	50
981	200	130	9.5	325.714	390.858	1312	3	228	75
982	200	130	9.5	325.714	390.858	1312	3	228	100
983	200	130	9.5	347.143	333.126	1312	3	243	150
984	200	130	9.5	347.143	333.126	1312	3	243	175
985	200	130	12.5	284.286	1051.55	768	2.4	199	25
986	200	130	12.5	284.286	1051.55	768	2.4	199	50
987	200	130	12.5	308.571	986.124	768	2.4	216	75
988	200	130	12.5	308.571	986.124	768	2.4	216	100
989	200	130	12.5	325.714	939.938	768	2.4	228	150
990	200	130	12.5	325.714	939.938	768	2.4	228	175
991	200	130	12.5	284.286	799.374	1024	2.6	199	25
992	200	130	12.5	284.286	799.374	1024	2.6	199	50
993	200	130	12.5	308.571	733.945	1024	2.6	216	75
994	200	130	12.5	308.571	733.945	1024	2.6	216	100

995	200	130	12.5	325.714	687.759	1024	2.6	228	150
996	200	130	12.5	325.714	687.759	1024	2.6	228	175
997	200	130	12.5	284.286	657.523	1168	2.8	199	25
998	200	130	12.5	284.286	657.523	1168	2.8	199	50
999	200	130	12.5	308.571	592.094	1168	2.8	216	75
1000	200	130	12.5	308.571	592.094	1168	2.8	216	100
1001	200	130	12.5	325.714	545.908	1168	2.8	228	150
1002	200	130	12.5	325.714	545.908	1168	2.8	228	175
1003	200	130	12.5	284.286	547.195	1280	3	199	25
1004	200	130	12.5	284.286	547.195	1280	3	199	50
1005	200	130	12.5	308.571	481.766	1280	3	216	75
1006	200	130	12.5	308.571	481.766	1280	3	216	100
1007	200	130	12.5	325.714	435.58	1280	3	228	150
1008	200	130	12.5	325.714	435.58	1280	3	228	175
1009	200	130	19	271.429	1130.91	736	2.4	190	25
1010	200	130	19	271.429	1130.91	736	2.4	190	50
1011	200	130	19	292.857	1073.18	736	2.4	205	75
1012	200	130	19	292.857	1073.18	736	2.4	205	100
1013	200	130	19	308.571	1030.85	736	2.4	216	150
1014	200	130	19	308.571	1030.85	736	2.4	216	175
1015	200	130	19	271.429	878.736	992	2.6	190	25
1016	200	130	19	271.429	878.736	992	2.6	190	50
1017	200	130	19	292.857	821.004	992	2.6	205	75
1018	200	130	19	292.857	821.004	992	2.6	205	100
1019	200	130	19	308.571	778.667	992	2.6	216	150
1020	200	130	19	308.571	778.667	992	2.6	216	175
1021	200	130	19	271.429	736.885	1136	2.8	190	25
1022	200	130	19	271.429	736.885	1136	2.8	190	50
1023	200	130	19	292.857	679.153	1136	2.8	205	75
1024	200	130	19	292.857	679.153	1136	2.8	205	100
1025	200	130	19	308.571	636.816	1136	2.8	216	150
1026	200	130	19	308.571	636.816	1136	2.8	216	175
1027	200	130	19	271.429	626.557	1248	3	190	25
1028	200	130	19	271.429	626.557	1248	3	190	50
1029	200	130	19	292.857	568.825	1248	3	205	75
1030	200	130	19	292.857	568.825	1248	3	205	100
1031	200	130	19	308.571	526.488	1248	3	216	150
1032	200	130	19	308.571	526.488	1248	3	216	175
1033	200	130	25	255.714	1217.97	704	2.4	179	25
1034	200	130	25	255.714	1217.97	704	2.4	179	50
1035	200	130	25	275.714	1164.09	704	2.4	193	75
1036	200	130	25	275.714	1164.09	704	2.4	193	100
1037	200	130	25	288.571	1129.45	704	2.4	202	150
1038	200	130	25	288.571	1129.45	704	2.4	202	175
1039	200	130	25	255.714	965.795	960	2.6	179	25
1040	200	130	25	255.714	965.795	960	2.6	179	50

1041	200	130	25	275.714	911.912	960	2.6	193	75
1042	200	130	25	275.714	911.912	960	2.6	193	100
1043	200	130	25	288.571	877.273	960	2.6	202	150
1044	200	130	25	288.571	877.273	960	2.6	202	175
1045	200	130	25	255.714	823.944	1104	2.8	179	25
1046	200	130	25	255.714	823.944	1104	2.8	179	50
1047	200	130	25	275.714	770.061	1104	2.8	193	75
1048	200	130	25	275.714	770.061	1104	2.8	193	100
1049	200	130	25	288.571	735.422	1104	2.8	202	150
1050	200	130	25	288.571	735.422	1104	2.8	202	175
1051	200	130	25	255.714	713.616	1216	3	179	25
1052	200	130	25	255.714	713.616	1216	3	179	50
1053	200	130	25	275.714	659.733	1216	3	193	75
1054	200	130	25	275.714	659.733	1216	3	193	100
1055	200	130	25	288.571	625.093	1216	3	202	150
1056	200	130	25	288.571	625.093	1216	3	202	175
1057	200	130	37.5	237.143	1044.79	944	2.4	166	25
1058	200	130	37.5	237.143	1044.79	944	2.4	166	50
1059	200	130	37.5	258.571	987.058	944	2.4	181	75
1060	200	130	37.5	258.571	987.058	944	2.4	181	100
1061	200	130	37.5	271.429	952.419	944	2.4	190	150
1062	200	130	37.5	271.429	952.419	944	2.4	190	175
1063	200	130	37.5	237.143	855.656	1136	2.6	166	25
1064	200	130	37.5	237.143	855.656	1136	2.6	166	50
1065	200	130	37.5	258.571	797.924	1136	2.6	181	75
1066	200	130	37.5	258.571	797.924	1136	2.6	181	100
1067	200	130	37.5	271.429	763.285	1136	2.6	190	150
1068	200	130	37.5	271.429	763.285	1136	2.6	190	175
1069	200	130	37.5	237.143	745.328	1248	2.8	166	25
1070	200	130	37.5	237.143	745.328	1248	2.8	166	50
1071	200	130	37.5	258.571	687.596	1248	2.8	181	75
1072	200	130	37.5	258.571	687.596	1248	2.8	181	100
1073	200	130	37.5	271.429	652.957	1248	2.8	190	150
1074	200	130	37.5	271.429	652.957	1248	2.8	190	175
1075	200	130	37.5	237.143	603.477	1392	3	166	25
1076	200	130	37.5	237.143	603.477	1392	3	166	50
1077	200	130	37.5	258.571	545.745	1392	3	181	75
1078	200	130	37.5	258.571	545.745	1392	3	181	100
1079	200	130	37.5	271.429	511.106	1392	3	190	150
1080	200	130	37.5	271.429	511.106	1392	3	190	175
1081	200	130	50	220	1135.7	912	2.4	154	25
1082	200	130	50	220	1135.7	912	2.4	154	50
1083	200	130	50	241.429	1077.97	912	2.4	169	75
1084	200	130	50	241.429	1077.97	912	2.4	169	100
1085	200	130	50	254.286	1043.33	912	2.4	178	150
1086	200	130	50	254.286	1043.33	912	2.4	178	175

1087	200	130	50	220	946.564	1104	2.6	154	25
1088	200	130	50	220	946.564	1104	2.6	154	50
1089	200	130	50	241.429	888.832	1104	2.6	169	75
1090	200	130	50	241.429	888.832	1104	2.6	169	100
1091	200	130	50	254.286	854.193	1104	2.6	178	150
1092	200	130	50	254.286	854.193	1104	2.6	178	175
1093	200	130	50	220	836.235	1216	2.8	154	25
1094	200	130	50	220	836.235	1216	2.8	154	50
1095	200	130	50	241.429	778.504	1216	2.8	169	75
1096	200	130	50	241.429	778.504	1216	2.8	169	100
1097	200	130	50	254.286	743.864	1216	2.8	178	150
1098	200	130	50	254.286	743.864	1216	2.8	178	175
1099	200	130	50	220	694.385	1360	3	154	25
1100	200	130	50	220	694.385	1360	3	154	50
1101	200	130	50	241.429	636.653	1360	3	169	75
1102	200	130	50	241.429	636.653	1360	3	169	100
1103	200	130	50	254.286	602.014	1360	3	178	150
1104	200	130	50	254.286	602.014	1360	3	178	175
1105	200	130	75	185.714	1264.87	880	2.4	130	25
1106	200	130	75	185.714	1264.87	880	2.4	130	50
1107	200	130	75	207.143	1207.14	880	2.4	145	75
1108	200	130	75	207.143	1207.14	880	2.4	145	100
1109	200	130	75	228.571	1149.41	880	2.4	160	150
1110	200	130	75	228.571	1149.41	880	2.4	160	175
1111	200	130	75	185.714	1075.74	1072	2.6	130	25
1112	200	130	75	185.714	1075.74	1072	2.6	130	50
1113	200	130	75	207.143	1018.01	1072	2.6	145	75
1114	200	130	75	207.143	1018.01	1072	2.6	145	100
1115	200	130	75	228.571	960.273	1072	2.6	160	150
1116	200	130	75	228.571	960.273	1072	2.6	160	175
1117	200	130	75	185.714	965.409	1184	2.8	130	25
1118	200	130	75	185.714	965.409	1184	2.8	130	50
1119	200	130	75	207.143	907.677	1184	2.8	145	75
1120	200	130	75	207.143	907.677	1184	2.8	145	100
1121	200	130	75	228.571	849.945	1184	2.8	160	150
1122	200	130	75	228.571	849.945	1184	2.8	160	175
1123	200	130	75	185.714	823.558	1328	3	130	25
1124	200	130	75	185.714	823.558	1328	3	130	50
1125	200	130	75	207.143	765.826	1328	3	145	75
1126	200	130	75	207.143	765.826	1328	3	145	100
1127	200	130	75	228.571	708.094	1328	3	160	150
1128	200	130	75	228.571	708.094	1328	3	160	175
1129	200	130	150	161.429	1364.46	848	2.4	113	25
1130	200	130	150	161.429	1364.46	848	2.4	113	50
1131	200	130	150	177.143	1322.13	848	2.4	124	75
1132	200	130	150	177.143	1322.13	848	2.4	124	100

1133	200	130	150	207.143	1241.3	848	2.4	145	150
1134	200	130	150	207.143	1241.3	848	2.4	145	175
1135	200	130	150	161.429	1175.33	1040	2.6	113	25
1136	200	130	150	161.429	1175.33	1040	2.6	113	50
1137	200	130	150	177.143	1132.99	1040	2.6	124	75
1138	200	130	150	177.143	1132.99	1040	2.6	124	100
1139	200	130	150	207.143	1052.17	1040	2.6	145	150
1140	200	130	150	207.143	1052.17	1040	2.6	145	175
1141	200	130	150	161.429	1065	1152	2.8	113	25
1142	200	130	150	161.429	1065	1152	2.8	113	50
1143	200	130	150	177.143	1022.66	1152	2.8	124	75
1144	200	130	150	177.143	1022.66	1152	2.8	124	100
1145	200	130	150	207.143	941.839	1152	2.8	145	150
1146	200	130	150	207.143	941.839	1152	2.8	145	175
1147	200	130	150	161.429	923.15	1296	3	113	25
1148	200	130	150	161.429	923.15	1296	3	113	50
1149	200	130	150	177.143	880.813	1296	3	124	75
1150	200	130	150	177.143	880.813	1296	3	124	100
1151	200	130	150	207.143	799.989	1296	3	145	150
1152	200	130	150	207.143	799.989	1296	3	145	175
1153	150	80	9.5	258.75	1007.32	800	2.4	207	25
1154	150	80	9.5	258.75	1007.32	800	2.4	207	50
1155	150	80	9.5	285	929.666	800	2.4	228	75
1156	150	80	9.5	285	929.666	800	2.4	228	100
1157	150	80	9.5	303.75	874.201	800	2.4	243	150
1158	150	80	9.5	303.75	874.201	800	2.4	243	175
1159	150	80	9.5	258.75	755.139	1056	2.6	207	25
1160	150	80	9.5	258.75	755.139	1056	2.6	207	50
1161	150	80	9.5	285	677.487	1056	2.6	228	75
1162	150	80	9.5	285	677.487	1056	2.6	228	100
1163	150	80	9.5	303.75	622.022	1056	2.6	243	150
1164	150	80	9.5	303.75	622.022	1056	2.6	243	175
1165	150	80	9.5	258.75	613.288	1200	2.8	207	25
1166	150	80	9.5	258.75	613.288	1200	2.8	207	50
1167	150	80	9.5	285	535.637	1200	2.8	228	75
1168	150	80	9.5	285	535.637	1200	2.8	228	100
1169	150	80	9.5	303.75	480.171	1200	2.8	243	150
1170	150	80	9.5	303.75	480.171	1200	2.8	243	175
1171	150	80	9.5	258.75	502.96	1312	3	207	25
1172	150	80	9.5	258.75	502.96	1312	3	207	50
1173	150	80	9.5	285	425.308	1312	3	228	75
1174	150	80	9.5	285	425.308	1312	3	228	100
1175	150	80	9.5	303.75	369.843	1312	3	243	150
1176	150	80	9.5	303.75	369.843	1312	3	243	175
1177	150	80	12.5	248.75	1081.62	768	2.4	199	25
1178	150	80	12.5	248.75	1081.62	768	2.4	199	50

1179	150	80	12.5	270	1018.76	768	2.4	216	75
1180	150	80	12.5	270	1018.76	768	2.4	216	100
1181	150	80	12.5	285	974.389	768	2.4	228	150
1182	150	80	12.5	285	974.389	768	2.4	228	175
1183	150	80	12.5	248.75	829.443	1024	2.6	199	25
1184	150	80	12.5	248.75	829.443	1024	2.6	199	50
1185	150	80	12.5	270	766.582	1024	2.6	216	75
1186	150	80	12.5	270	766.582	1024	2.6	216	100
1187	150	80	12.5	285	722.21	1024	2.6	228	150
1188	150	80	12.5	285	722.21	1024	2.6	228	175
1189	150	80	12.5	248.75	687.592	1168	2.8	199	25
1190	150	80	12.5	248.75	687.592	1168	2.8	199	50
1191	150	80	12.5	270	624.731	1168	2.8	216	75
1192	150	80	12.5	270	624.731	1168	2.8	216	100
1193	150	80	12.5	285	580.359	1168	2.8	228	150
1194	150	80	12.5	285	580.359	1168	2.8	228	175
1195	150	80	12.5	248.75	577.264	1280	3	199	25
1196	150	80	12.5	248.75	577.264	1280	3	199	50
1197	150	80	12.5	270	514.403	1280	3	216	75
1198	150	80	12.5	270	514.403	1280	3	216	100
1199	150	80	12.5	285	470.031	1280	3	228	150
1200	150	80	12.5	285	470.031	1280	3	228	175
1201	150	80	19	237.5	1159.62	736	2.4	190	25
1202	150	80	19	237.5	1159.62	736	2.4	190	50
1203	150	80	19	256.25	1104.16	736	2.4	205	75
1204	150	80	19	256.25	1104.16	736	2.4	205	100
1205	150	80	19	270	1063.48	736	2.4	216	150
1206	150	80	19	270	1063.48	736	2.4	216	175
1207	150	80	19	237.5	907.444	992	2.6	190	25
1208	150	80	19	237.5	907.444	992	2.6	190	50
1209	150	80	19	256.25	851.979	992	2.6	205	75
1210	150	80	19	256.25	851.979	992	2.6	205	100
1211	150	80	19	270	811.304	992	2.6	216	150
1212	150	80	19	270	811.304	992	2.6	216	175
1213	150	80	19	237.5	765.594	1136	2.8	190	25
1214	150	80	19	237.5	765.594	1136	2.8	190	50
1215	150	80	19	256.25	710.128	1136	2.8	205	75
1216	150	80	19	256.25	710.128	1136	2.8	205	100
1217	150	80	19	270	669.454	1136	2.8	216	150
1218	150	80	19	270	669.454	1136	2.8	216	175
1219	150	80	19	237.5	655.265	1248	3	190	25
1220	150	80	19	237.5	655.265	1248	3	190	50
1221	150	80	19	256.25	599.8	1248	3	205	75
1222	150	80	19	256.25	599.8	1248	3	205	100
1223	150	80	19	270	559.125	1248	3	216	150
1224	150	80	19	270	559.125	1248	3	216	175

1225	150	80	25	223.75	1245.02	704	2.4	179	25
1226	150	80	25	223.75	1245.02	704	2.4	179	50
1227	150	80	25	241.25	1193.25	704	2.4	193	75
1228	150	80	25	241.25	1193.25	704	2.4	193	100
1229	150	80	25	252.5	1159.97	704	2.4	202	150
1230	150	80	25	252.5	1159.97	704	2.4	202	175
1231	150	80	25	223.75	992.841	960	2.6	179	25
1232	150	80	25	223.75	992.841	960	2.6	179	50
1233	150	80	25	241.25	941.074	960	2.6	193	75
1234	150	80	25	241.25	941.074	960	2.6	193	100
1235	150	80	25	252.5	907.795	960	2.6	202	150
1236	150	80	25	252.5	907.795	960	2.6	202	175
1237	150	80	25	223.75	850.991	1104	2.8	179	25
1238	150	80	25	223.75	850.991	1104	2.8	179	50
1239	150	80	25	241.25	799.223	1104	2.8	193	75
1240	150	80	25	241.25	799.223	1104	2.8	193	100
1241	150	80	25	252.5	765.944	1104	2.8	202	150
1242	150	80	25	252.5	765.944	1104	2.8	202	175
1243	150	80	25	223.75	740.662	1216	3	179	25
1244	150	80	25	223.75	740.662	1216	3	179	50
1245	150	80	25	241.25	688.895	1216	3	193	75
1246	150	80	25	241.25	688.895	1216	3	193	100
1247	150	80	25	252.5	655.615	1216	3	202	150
1248	150	80	25	252.5	655.615	1216	3	202	175
1249	150	80	37.5	207.5	1069.87	944	2.4	166	25
1250	150	80	37.5	207.5	1069.87	944	2.4	166	50
1251	150	80	37.5	226.25	1014.41	944	2.4	181	75
1252	150	80	37.5	226.25	1014.41	944	2.4	181	100
1253	150	80	37.5	237.5	981.128	944	2.4	190	150
1254	150	80	37.5	237.5	981.128	944	2.4	190	175
1255	150	80	37.5	207.5	880.738	1136	2.6	166	25
1256	150	80	37.5	207.5	880.738	1136	2.6	166	50
1257	150	80	37.5	226.25	825.273	1136	2.6	181	75
1258	150	80	37.5	226.25	825.273	1136	2.6	181	100
1259	150	80	37.5	237.5	791.994	1136	2.6	190	150
1260	150	80	37.5	237.5	791.994	1136	2.6	190	175
1261	150	80	37.5	207.5	770.41	1248	2.8	166	25
1262	150	80	37.5	207.5	770.41	1248	2.8	166	50
1263	150	80	37.5	226.25	714.945	1248	2.8	181	75
1264	150	80	37.5	226.25	714.945	1248	2.8	181	100
1265	150	80	37.5	237.5	681.665	1248	2.8	190	150
1266	150	80	37.5	237.5	681.665	1248	2.8	190	175
1267	150	80	37.5	207.5	628.559	1392	3	166	25
1268	150	80	37.5	207.5	628.559	1392	3	166	50
1269	150	80	37.5	226.25	573.094	1392	3	181	75
1270	150	80	37.5	226.25	573.094	1392	3	181	100

1271	150	80	37.5	237.5	539.815	1392	3	190	150
1272	150	80	37.5	237.5	539.815	1392	3	190	175
1273	150	80	50	192.5	1158.97	912	2.4	154	25
1274	150	80	50	192.5	1158.97	912	2.4	154	50
1275	150	80	50	211.25	1103.5	912	2.4	169	75
1276	150	80	50	211.25	1103.5	912	2.4	169	100
1277	150	80	50	222.5	1070.22	912	2.4	178	150
1278	150	80	50	222.5	1070.22	912	2.4	178	175
1279	150	80	50	192.5	969.833	1104	2.6	154	25
1280	150	80	50	192.5	969.833	1104	2.6	154	50
1281	150	80	50	211.25	914.368	1104	2.6	169	75
1282	150	80	50	211.25	914.368	1104	2.6	169	100
1283	150	80	50	222.5	881.088	1104	2.6	178	150
1284	150	80	50	222.5	881.088	1104	2.6	178	175
1285	150	80	50	192.5	859.505	1216	2.8	154	25
1286	150	80	50	192.5	859.505	1216	2.8	154	50
1287	150	80	50	211.25	804.039	1216	2.8	169	75
1288	150	80	50	211.25	804.039	1216	2.8	169	100
1289	150	80	50	222.5	770.76	1216	2.8	178	150
1290	150	80	50	222.5	770.76	1216	2.8	178	175
1291	150	80	50	192.5	717.654	1360	3	154	25
1292	150	80	50	192.5	717.654	1360	3	154	50
1293	150	80	50	211.25	662.189	1360	3	169	75
1294	150	80	50	211.25	662.189	1360	3	169	100
1295	150	80	50	222.5	628.909	1360	3	178	150
1296	150	80	50	222.5	628.909	1360	3	178	175
1297	150	80	75	162.5	1284.51	880	2.4	130	25
1298	150	80	75	162.5	1284.51	880	2.4	130	50
1299	150	80	75	181.25	1229.05	880	2.4	145	75
1300	150	80	75	181.25	1229.05	880	2.4	145	100
1301	150	80	75	200	1173.58	880	2.4	160	150
1302	150	80	75	200	1173.58	880	2.4	160	175
1303	150	80	75	162.5	1095.38	1072	2.6	130	25
1304	150	80	75	162.5	1095.38	1072	2.6	130	50
1305	150	80	75	181.25	1039.91	1072	2.6	145	75
1306	150	80	75	181.25	1039.91	1072	2.6	145	100
1307	150	80	75	200	984.449	1072	2.6	160	150
1308	150	80	75	200	984.449	1072	2.6	160	175
1309	150	80	75	162.5	985.052	1184	2.8	130	25
1310	150	80	75	162.5	985.052	1184	2.8	130	50
1311	150	80	75	181.25	929.586	1184	2.8	145	75
1312	150	80	75	181.25	929.586	1184	2.8	145	100
1313	150	80	75	200	874.121	1184	2.8	160	150
1314	150	80	75	200	874.121	1184	2.8	160	175
1315	150	80	75	162.5	843.201	1328	3	130	25
1316	150	80	75	162.5	843.201	1328	3	130	50

1317	150	80	75	181.25	787.736	1328	3	145	75
1318	150	80	75	181.25	787.736	1328	3	145	100
1319	150	80	75	200	732.27	1328	3	160	150
1320	150	80	75	200	732.27	1328	3	160	175
1321	150	80	150	141.25	1381.54	848	2.4	113	25
1322	150	80	150	141.25	1381.54	848	2.4	113	50
1323	150	80	150	155	1340.86	848	2.4	124	75
1324	150	80	150	155	1340.86	848	2.4	124	100
1325	150	80	150	181.25	1263.21	848	2.4	145	150
1326	150	80	150	181.25	1263.21	848	2.4	145	175
1327	150	80	150	141.25	1192.4	1040	2.6	113	25
1328	150	80	150	141.25	1192.4	1040	2.6	113	50
1329	150	80	150	155	1151.73	1040	2.6	124	75
1330	150	80	150	155	1151.73	1040	2.6	124	100
1331	150	80	150	181.25	1074.08	1040	2.6	145	150
1332	150	80	150	181.25	1074.08	1040	2.6	145	175
1333	150	80	150	141.25	1082.07	1152	2.8	113	25
1334	150	80	150	141.25	1082.07	1152	2.8	113	50
1335	150	80	150	155	1041.4	1152	2.8	124	75
1336	150	80	150	155	1041.4	1152	2.8	124	100
1337	150	80	150	181.25	963.749	1152	2.8	145	150
1338	150	80	150	181.25	963.749	1152	2.8	145	175
1339	150	80	150	141.25	940.224	1296	3	113	25
1340	150	80	150	141.25	940.224	1296	3	113	50
1341	150	80	150	155	899.549	1296	3	124	75
1342	150	80	150	155	899.549	1296	3	124	100
1343	150	80	150	181.25	821.898	1296	3	145	150
1344	150	80	150	181.25	821.898	1296	3	145	175

3.1.2. Modelamiento de datos

Para el modelamiento de los datos se va usar el Método de los Mínimos Cuadrados Lineales Generalizados con la Solución Por el Uso de la Descomposición del Valor Singular. Para esto se necesita definir las funciones base de nuestro modelo, que predecirá la Resistencia del Concreto Especificada para unos valores dados de las cantidades de los insumos de materiales de una mezcla de concreto.

En base a los artículos estudiados podemos plantear una ecuación de predicción de la Resistencia Especificada del Concreto en base a los insumos de la mezcla del concreto, de la siguiente manera:

$$fcr = A * 2.14815643 \frac{Cemento}{Agua} + B * ModuloFinura + C * \left(\frac{Arena}{Cemento} \right) + D * \left(\frac{Grava}{Cemento} \right) + E * TMNAG + F * Slump \quad (65)$$

Esta hipótesis de la Resistencia Especificada del Concreto, no es del todo arbitraria, se basa en los descubrimientos de investigadores, tal como que la

resistencia del concreto depende de la relación agua / cemento de forma exponencial, (Abrams, 1920), las funciones base también se han normalizado para no depender de los valores absolutos de los pesos de los componentes de la mezcla del concreto.

Por lo tanto se trata de encontrar las constantes A , B , C , D , E , y F para lo cual usaremos el algoritmo Solución Por el Uso de la Descomposición del Valor Singular, para los 1344 registros de datos de mezclas de concreto

Usando el algoritmo desarrollado en (Linares Flores, 2015), tenemos:

$$A = 45.5722$$

$$B = 68.5241$$

$$C = -2.96206$$

$$D = -26.2223$$

$$E = 0.492007$$

$$F = -0.126626$$

4. Análisis de resultados y conclusiones

4.1. PRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN DE APRENDIZAJE

La función que predice la Resistencia del Concreto Requerida entonces es:

$$f_{cr} = 45.5722 * 2.14815643 \frac{Cemento}{Agua} + 68.5241 * ModuloFinura - 2.96206 * \left(\frac{Arena}{Cemento} \right) - 26.2223 * \left(\frac{Grava}{Cemento} \right) + 0.492007 * TMNAG - 0.126626 * Slump$$

(66)

Donde:

<i>Cemento:</i>	Peso del Cemento en kg.
<i>Agua:</i>	Peso del agua en kg.
<i>ModuloFinura:</i>	Módulo de Finura o Fineza del Agregado Fino
<i>Arena:</i>	Peso del Agregado Fino en kg.
<i>Grava:</i>	Peso del Agregado Grueso en kg.
<i>TMNAG:</i>	Tamaño Máximo Nominal del Agregado Grueso en mm
<i>Slump:</i>	Revenimiento del concreto fresco en mm
<i>fcr:</i>	Resistencia del Concreto Requerida

La Resistencia del Concreto Especificada $f'c$; se puede calcular, con el valor de f_{cr} conocido de la siguiente manera:

```
double fpc;           // Resistencia promedio especificada
if(fcr < 280.0)
    fpc = fcr - 70.0;
else if(fcr >= 280.0 && fcr <= 490.0)
    fpc = fcr - 84.0;
else fpc = (fcr - 50.0) / 1.1;
```

Con lo que se puede predecir la Resistencia del Concreto Especificada, como se quería.

4.2. CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

Para la contrastación de hipótesis usaremos los datos de diseño de mezclas que se obtienen de la literatura indicada, que serán comparadas con las predichas por el modelo obtenido para los valores de las variables

independientes; por tanto, aquí están los datos observados y predichos por el modelo:

Item	fcr Observados	fcr Generados
1	329 (Rivva López, 1992)	282.061
2	363.3 (Rivva López, 1992)	369.478
3	294 (Rivva López, 1992)	262.032
4	329 (Rivva López, 1992)	341.277
5	370 (Rivva López, 1992)	385.807
6	294 (Rivva López, 1992)	301.801
7	329 (Rivva López, 1992)	286.064
8	364 (Rivva López, 1992)	298.425
9	240 (Pasquel Carbajal, 1993)	239.091

El coeficiente de correlación para estos dos conjuntos de datos es de $R = 0.78333731$

Aquí se tiene una muestra de 15 diseños de mezcla realizados en la región de Ayacucho, por la empresa V.G GEOTECNIA & INGENIERÍA SAC; para el cual, calcularemos también el coeficiente de correlación R.

Número	fcr	f'c	TMNAG	Cemento:	A. F.:	A.G.:	M.F.	Agua.	Slump.
1	245	175	9.5	330.082	949.62	800	2.4	207	25
2	245	175	12.5	317.326	773.975	1024	2.6	199	50
3	245	175	19	326.893	652.988	1136	2.8	205	75
4	245	175	25	307.758	816.352	1032	2.7	193	100
5	245	175	37.5	295.798	504.749	1392	3	185.5	125
6	294	210	12.5	356.279	993.507	768	2.4	199	25
7	294	210	19	340.166	949.404	864	2.5	190	50
8	294	210	25	345.537	713.765	1104	2.8	193	75
9	294	210	37.5	324.052	492.949	1392	3	181	100
10	329	245	9.5	407.118	885.056	800	2.4	207	25
11	329	245	12.5	391.384	711.906	1024	2.6	199	50
12	329	245	19	403.185	589.048	1136	2.8	205	75
13	329	245	25	379.584	630.066	1160	2.9	193	100
14	329	245	37.5	364.833	446.891	1392	3	185.5	125

15 329 245 37.5 355.983 812.935 1040 2.5 181 100

Item fcr Observados fcr Generados

1	245	248.136531
2	245	240.3841508
3	245	248.9209479
4	245	243.1102746
5	245	233.9851991
6	294	281.8056938
7	294	278.6055495
8	294	283.9196429
9	294	273.3612692
10	329	313.0171234
11	329	309.0046814
12	329	318.5263975
13	329	318.3243999
14	329	309.5343893
15	329	298.7439508

El coeficiente de correlación para estos dos conjuntos de datos es de $R = 0.980279934$; que es muy alto.

4.3. LÍMITES PARA EL USO DEL MODELO

El modelo hallado funciona para el intervalo de la Resistencia de Concreto Requerida de $[150, 450]$ Kg/cm² o en términos de la Resistencia de Concreto Especificada entre $[80, 366]$ Kg/cm².

4.4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En relación con los objetivos, general y específicos se tienen las siguientes conclusiones y recomendaciones:

1. Se ha hallado una función que permite determinar en tiempo real la Resistencia del Concreto Requerida y por ende de la Resistencia del Concreto Especificada que se tendría a los 28 días; en función de los insumos y relaciones de la mezcla del concreto fresco.
2. Se ha creado una base de datos de diseño de mezclas de concreto de 1344 registros, esto ha sido posible por la utilización de las herramientas matemáticas de interpolación y/o extrapolación en una y dos dimensiones, en conjunción con los algoritmos computacionales correspondientes.

3. Se ha creado un modelo matemático computacional para la predicción de la Resistencia del Concreto en tiempo real; usando el modelamiento de datos, específicamente el Método de los Mínimos Cuadrados Lineales Generalizados.

5.REFERENCIAS-BIBLIOGRAFÍA

- Abramowitz, M. S., I.A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington: National Bureau of Standards.
- Abrams, D. A. (1920). *Design of concrete mixtures*. Chicago,: Structural Materials Research Laboratory, Lewis Institute.
- Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318SUS-14), (2014). American Concrete Institute. Committee 517. (1992). *Accelerated curing of concrete at atmospheric pressure state of the art (ACI 517.2 R-87) (Revised 1992)*. Detroit: ACI.
- Eskandari-Naddaf, H., & Kazemi, R. (2017). ANN prediction of cement mortar compressive strength, influence of cement strength class. *Construction and Building Materials, 138*, 1-11. doi:10.1016/j.conbuildmat.2017.01.132
- Floater, M. S. H., K. (2007). *Barycentric Rational Interpolation with No Poles and High Rates of Approximation* (Vol. 107).
- Jafari, S., & Mahini, S. S. (2017). Lightweight concrete design using gene expression programming. *Construction and Building Materials, 139*, 93-100. doi:<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2017.01.120>
- Johnson, L. W. R., R. D. (1982). *Numerical Analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.
- Jongkol, P., & Chatmuangpak, A. (2012, 9-12 July 2012). *Evaluation of concrete work strain in buildings construction*. Paper presented at the 2012 Southeast Asian Network of Ergonomics Societies Conference (SEANES).
- Knuth, D. E. (1997). *The Art of Computer Programming* (3 ed. Vol. 3): Addison-Wesley.
- Kosmatka, S. H., Kerkhoff, B., Panarese, W. C., & Tanesi, J. (2004). *Diseño y Control de Mezclas de Concreto*. In P. C. Association (Ed.), *Portland Cement Association*.
- Linares Flores, A. (2015). *Modelación Matemática-Computacional del Sistema de Transporte como Herramienta para su Planificación*. (Maestro en Ciencias con Mención en Ingeniería de Transportes), Universidad Nacional de Ingeniería Civil, Lima - Perú.
- Manual Cochrane de revisiones sistemáticas de intervenciones [:versión 5.1.0. (2012)*. In.
- Neshat, M., Adeli, A., Sepidnam, G., & Sargolzaei, M. (2012). Predication of concrete mix design using adaptive neural fuzzy inference systems and fuzzy inference systems. doi:10.1007/s00170-012-3914-9
- Pasquel Carbajal, E. (1993). *Tópicos de Tecnología del Concreto* (Vol. 17). Lima - Perú: Colegio de Ingenieros del Perú.
- Portland Cement Association. (1916). *Proportioning concrete mixtures and mixing and placing concrete*. Chicago,: Portland Cement Association.
- Ralston, A. R., P. (1978). *A First Course in Numerical Analysis*. New York: Dover.
- Rivva López, E. (1992). *Diseño de Mezclas* (H. S.C.R.L. Ed.). Lima - Perú.
- Simon, M. J. L., E. S.; Snyder, K. A. . (1997). *Concrete Mixture Optimization Using Statistical Mixture Design Methods*. Paper presented at the High Performance Concrete International Symposium. Proceedings. PCI/FHWA. October 20-22, 1997, New Orleans, LA, 230-244 pp, 1997. .
- Stoer, J. B., R. (2002). *Introduction to Numerical Analysis* (3 ed.). New York: Springer.
- Tesfamariam, S. N., H. (2007). Adaptive network-fuzzy inferencing to estimate concrete strength using mix design. *Journal of Materials in Civil Engineering, 19*(7), 46. doi:10.1061/(ASCE)0899-1561(2007)19:7(550)
- Ueberhuber, C. W. (1997). *Numerical Computation: Methods, Software, and Analysis* (Vol. 1). Berlin: Springer.
- Wendner, R., Vorel, J., Smith, J., Hoover, C. G., Bazˇant, Z. k. P., & Cusatis, G. (2014). Characterization of concrete failure behavior: a comprehensive experimental database for the calibration and validation of concrete models. *Materials and Structures*. doi:10.1617/s11527-014-0426-0