

Homeomorfismos hiper-expansivos y una adaptación para flujos en hiper-espacios

por MARGOTH SIMON TACURI

Fecha de entrega: 03-sep-2024 03:08p.m. (UTC-0500)

Identificador de la entrega: 2405804116

Nombre del archivo: TESIS.pdf (744.82K)

Total de palabras: 18111

Total de caracteres: 76354

1
**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN
CRISTÓBAL DE HUAMANGA**
**FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y
CIVIL**
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS

**Homeomorfismos hiper-expansivos y una adaptación para
flujos en hiper-espacios**

PRESENTADO POR:

Tesista. Bach. Margoth SIMON TACURI.
Asesor. Mg. Víctor Alcides COAQUIRA CARDENAS.
Co-asesor. Dr. Nelson BERROCAL HUAMANÍ.

1
Para optar el título profesional de:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

AYACUCHO-PERÚ

Febrero, 2024

Este trabajo está dedicado a todas las niñas que sueñan con convertirse en científicas.

No te angusties por las cosas que
generan preocupación, desorden y
ansiedad. Una sola cosa es
necesaria: Elevar tu espíritu y amar
a Dios.

Padre Pío de Pietrelcina

AGRADECIMENTOS

- En primer lugar agradezco a Dios por todo lo brindado en mi vida y por su misericordia y perdón continuo.
- ¹ Agradezco a la UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA y a la FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL, por brindarme la oportunidad de formarme profesionalmente.
- Agradezco a la ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS, a los profesores y funcionarios, por colaborar con mi formación y por los servicios prestados.
- Agradezco a mi asesor, Víctor Alcides Coaquira Cardenas, por las correcciones, incentivo y por su enseñanza de diversos cursos, en fin por la persona accesible que es.
- Agradezco a mi co-asesor, Nelson Berrocal Huamaní, por su tiempo y apoyo en este trabajo.
- Agradezco a mis padres y hermanos por su amor, apoyo y comprensión.
- ¹ Finalmente agradezco a todos que de alguna forma contribuyeron para la realización de este trabajo.

RESUMEN

En el presente trabajo se pretende dar a conocer algunas herramientas fundamentales en el estudio de la caoticidad de los sistemas dinámicos sobre hiper-espacios, como son las propiedades de expansividad e hiper-expansividad. El objetivo principal es desarrollar la teoría de homeomorfismos hiper-expansivos y formalizar una teoría de hiper-expansividad para flujos definidos en hiper-espacios, siguiendo la línea de los artículos Artigue (2013) y Bauer and Sigmund (1975). Como objetivos específicos, caracterizaremos los homeomorfismos hiper-expansivos con un número finito de órbitas, demostrando que todo espacio métrico que admite un homeomorfismo expansivo es finito. Además, estudiaremos el concepto de minimalidad para flujos hiper-expansivos y demostraremos que los conjuntos minimales son órbitas periódicas.

Palabras clave: Hiper-expansividad, expansividad, cw-expansividad y minimalidad.

ABSTRACT

In the present work it is intended to present some fundamental tools in the study of the chaoticity of dynamic systems on hyper-spaces, such as the properties of expansiveness and hyper-expansiveness. The main objective is to develop the theory of hyper-expansive homeomorphisms and formalize a theory of hyper-expansiveness for flows defined in hyper-spaces, following the lines of the articles Artigue (2013) and Bauer and Sigmund (1975). As specific objectives, we will characterize hyper-expansive homeomorphisms with a finite number of orbits, proving that every metric space that admits an expansive homeomorphism is finite. Furthermore, we will study the concept of minimality for hyper-expansive flows and we will show that the minimal sets are periodic orbits.

Keyword: Hyper-expansiveness, expansiveness, cw-expansiveness and minimalism.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	III
Abstract	IV
Introducción	1
1. Marco Teórico	5
1.1. Antecedentes	5
1.2. Materiales y Métodos	6
1.2.1. Hipótesis de investigación	6
1.2.2. Tipo de Investigación	7
1.2.3. Nivel de Investigación	7
1.2.4. Diseño de Investigación	8
1.3. Preliminares	8
1.3.1. Topología	8
1.3.2. Métrica de Hausdorff	10
1.3.3. Dinámica topológica	12
1.3.4. La Herradura de Smale	22
1.3.5. Expansividad y estabilidad	24
2. Homeomorfismos hiper-expansivos	32

2.1. Homeomorfismos hiper-expansivos	32
2.2. Shift de dos símbolos	38
3. Flujos Hiper-expansivos	40
3.1. Introducción	40
3.2. Flujos expansivos	42
3.3. Flujos Hiper-expansivos	43
4. Resultado, Discusión y Conclusión	50
4.1. Resultado	50
4.2. Discusión	57
4.3. Conclusión y Sugerencia	58
Bibliografía	62

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1.	Conjunto Omega limite $\omega(x)$	15
1.2.	Conjunto no errante	17
1.3.	S^1	21
1.4.	La herradura de Smale	23
1.5.	p es asintóticamente estable	30
1.6.	existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n_k}(q)$	31
2.1.	$f^n b \rightarrow p$ y $f^{-n}(a) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$,	35
2.2.	$x \in \Omega(f)$, es decir, $f^n(B_{\varepsilon_0}(x)) \cap B_{\varepsilon_0}(x) = \emptyset$	37
2.3.	$B_\delta(q) \subset W^s(q) \cap W_\varepsilon^s(q)$	37
3.1.	Hiper-expansividad	44
4.1.	existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n_k}(q)$	51
4.2.	$f^n b \rightarrow p$ y $f^{-n}(a) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$	54

INTRODUCCIÓN

La teoría de los sistemas dinámicos surge de la necesidad de construir un modelo que relacione el estado actual con el estado inicial. En particular, la dinámica compacta se preocupa por lo que sucede cuando consideramos

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ veces}},$$

donde $f : X \rightarrow X$ es una aplicación continua con X un espacio métrico compacto. Por ejemplo, dado un punto $x \in X$ podemos investigar la órbita de este punto: ¿Tiene puntos de acumulación? ¿Es finita o infinita? ¿Es denso en el espacio? Entre otras cuestiones. También es parte del estudio del comportamiento de un sistema dinámico el comprender y comparar iteraciones de condiciones iniciales cercanas. En algunas situaciones, las condiciones iniciales cercanas pueden tener futuros dinámicos muy similares (órbitas futuras). Estas condiciones iniciales forman el conjunto

$$W_\varepsilon^s(x) := \{y \in X \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

conocido como el *conjunto estable local*. Análogamente, queremos entender el comportamiento pasado de condiciones iniciales próximas, es decir, el conjunto

$$W_\varepsilon^u(x) := \{y \in X \mid d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\},$$

conocido con el nombre de *conjunto inestable local*. Una propiedad topológica que captura la idea de caos es la *expansividad*, donde diferentes condiciones iniciales, incluso si son cercanas, tienen trayectorias futuras o pasadas diferentes. El estudio de los homeomorfismos expansivos se inició en 1950 cuando Williams (1950) definió estos sistemas con el nombre de homeomorfismos inestables. En este primer artículo se demostraron algunas propiedades generales relacionadas con las trayectorias asintóticas, la cardinalidad del conjunto de puntos periódicos y las potencias de los homeomorfismos expansivos. Existen algunas variaciones de expansividad que la generaliza, como, por ejemplo, la *cw-expansividad*, introducida por Kato (1993). Es importante destacar que este último concepto trabaja con conjuntos continuos (compactos y conexos) : f es un homeomorfismo *cw-expansivo* si existe $\delta > 0$ tal que si C es un continuo (compacto y conexo) tal que $\text{diam} f^n(C) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces C es un único punto. La *cw-expansividad* ha suscitado varias cuestiones en relación a continuos, en particular, entender las órbitas de continuos próximos. Así, Artigue (2013) introduce un concepto más fuerte que la expansividad, denominada de *hiper-expansividad*, que estudia el comportamiento de la órbita de dos continuos suficientemente próximos.

Para el caso de tiempo continuo, Bowen and Walters (1972) introdujeron una definición de flujo expansivos que, aplicada en espacios métricos compactos arbitrarios, les permitió demostrar algunas propiedades compartidas con los flujos de Anosov. Una primera forma de explorar el mundo más allá de la expansividad sería considerar flujos con alguna variación de la expansividad, como la *cw-expansividad*. Esta última fue definida por Arbieto et al. (2017), y observamos que los flujos expansivos implican la *cw-expansividad*. Siguiendo esta línea, surge una cuestión inmediata: introducir un concepto más fuerte que la expansividad, similar a lo hecho en el caso discreto. Por lo tanto, en este trabajo tenemos como objetivo definir los flujos *hiper-expansivos* y observar sus características y propiedades.

A continuación, delinearemos la estructura de la evolución de nuestro trabajo. El primer capítulo se centrará en el marco teórico, mientras que los capítulos subsiguientes abordarán los resultados, conclusiones y/o recomendaciones. Por consiguiente, comenzaremos a exponer el Capítulo 1.

¹ Con el objetivo de proporcionar contexto, la primera sección estará dedicado a mencionar los resultados que forman parte de los antecedentes, la segunda sección describimos los materiales y métodos y en la tercera sección mencionaremos definición y conceptos básicos de la dinámica topológica. En el capítulo 2, presentaremos a los homeomorfismos Hiper-expansivos, donde un resultado principal para este tipo de homeomorfismos es la existencia de un numero finito de órbitas periódicas, y que todo punto no errante es atractor o repulsor.

En el capítulo 3 nos centraremos en desarrollar el objetivo principal de nuestro trabajo, que consiste en desarrollar los flujos hiper-expansivos. Para definir este concepto nuevo, empezamos a fijar ciertos conjuntos:

- $\mathcal{R} = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ homeomorfismos tal que } h(0) = 0\}.$
- $\mathcal{H}(A) = \{\alpha : A \rightarrow \mathcal{R} : \exists x_\alpha \in A \text{ con } \alpha(x_\alpha) = id_{\mathbb{R}} \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(\cdot)(t) \in C^0(A, \mathbb{R})\}.$
- Para $\alpha \in \mathcal{H}(A)$ y $t \in \mathbb{R}$, definamos $\mathcal{X}_\alpha^t(A) = \{\phi_{\alpha(x)(t)}(x) : x \in A\}$. Cuando $\alpha(x) = I_d$ para todo $x \in A$, denotaremos a $\mathcal{X}_{I_d}^t(A)$ simplemente por $\mathcal{X}^t(A)$.

La hiper-expansividad fue definida de la siguiente forma:

Definición. Un flujo (X, ϕ) definido en un espacio métrico X es llamado *hiper-expansivo* si $(2^X, \phi)$ es expansivo, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$d_H(\mathcal{X}^t(B), \mathcal{X}_\alpha^t(A)) \leq \delta \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } A, B \in 2^X$$

entonces $A \subset \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)} B$.

Es importante destacar que la adaptación de la hiper-expansividad para flujos es más sutil que la hiper-expansividad para homeomorfismos, debido a la dirección del flujo y a la posibilidad de tener un conjunto de reparametrizaciones. Demostramos que la hiper-expansividad implica la expansividad. Sin embargo, es importante señalar que la implicancia inversa no es verdadero. De hecho, mostramos que el flujo suspensión de la Herradura de Smale es expansiva pero no hiper-expansivo. Además, probamos que todo conjunto minimal está contenido en un segmento de órbita y que este tipo de flujos posee al menos una órbita periódica. Finalmente, con todo

lo descrito, establecemos el siguiente Teorema.

Teorema. Sea (X, ϕ) um flujo hiper-expansivo. Para cualquier $x \in X$ existe un punto periódico $p \in X$ tal que $Orb(p) \subset \omega(x)$.

El Capítulo 4 describirá ¹ los resultados, discusiones y conclusiones.

CAPÍTULO 1

MARCO TEÓRICO

1.1. Antecedentes

Este presente trabajo de tesis se ha desarrollado en el marco de los siguientes proyectos de investigación:

Internacionales.

De acuerdo al trabajo de Hiraide (1990), en su artículo ³ “Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov”, observa que un objetivo importante en la dinámica topológica es comprender el comportamiento global de los homeomorfismos expansivos, cuyo punto clave es determinar las propiedades topológicas de los conjuntos estables. En consecuencia, en este trabajo de tesis investigaremos sobre los conjuntos estables e inestables de flujos hiper-expansivos, relacionando con los resultados de los artículos mencionados.

Thomas (1991), en su artículo “Canonical Coordinates and the Pseudo Orbit Tracing Property”, realizó un estudio sobre diversas propiedades de los flujos definidos en espacios métricos, como son la propiedad de sombreamiento, expansividad y la estructura de producto local. ¹⁰ Este trabajo se relaciona con la investigación planteada, ya que muestra diversas herramientas para abordar múltiples problemas relacionados a la expansividad.

Artigue (2013), en su artículo: “Hyper-expansive Homeomorphism”, se desarrolla la teoría de hiper-expansividad para homeomorfismos y tiene como objetivo principal demostrar que el número de órbitas es finitas y que el conjunto no errante es la unión de puntos repelentes y atrayentes. ¹⁰ Este trabajo es pertinente con la investigación aquí planteada, ya que aborda la teoría base de nuestro trabajo.

Siguiendo en esta línea de investigación Namjip et al. (2020), en su artículo “Topological stability in Hyperspace dynamical systems”, este artículo amplía el concepto de estabilidad topológica de mapas continuos a los correspondientes mapas inducidos y demuestra que un mapa continuo es topológicamente estable si y sólo si su mapa inducido también es topológicamente estable. ¹⁰ Este trabajo también se relaciona con la investigación planteada, como fue descrito en los objetivos, estamos interesados en relacionar la hiper-expansividad con la estabilidad topológica para flujos.

¹ 1.2. Materiales y Métodos

1.2.1. Hipótesis de investigación

Hipótesis general

Se define la hiper-expansividad para flujos en hiper-espacios.

Hipótesis específicos

1. Es importante el estudio teórico de homeomorfismos hiper-expansivos.
2. Todo espacio métrico compacto que admite un homeomorfismo hiper-expansivo es finito.
3. Existe una relación entre los conjuntos minimales y las órbitas periódicas para flujos hiper-expansivos.

1.2.2. Tipo de Investigación

Nuestro trabajo de investigación se centra en el estudio teórico de homeomorfismos hiper-expansivos y en el desarrollo de una teoría para flujos desde el punto de vista topológico sin involucrar a la derivada. Sabemos que para el investigador de ciencias naturales el conocimiento de las propiedades diferenciales de un sistema nunca es inmediato, por lo tanto, este tipo de teorías ofrecen una mayor facilidad en su entendimiento y difusión.

Investigación básica o aplicada.

Tam Malaga et al. (2008) En la publicación "*Tipos, Métodos y Estrategias de Investigación Científica*". Define que la investigación aplicada tiene como objetivo mejorar nuevos conocimientos a través de la investigación estratégica para determinar si pueden ser útilmente aplicados con o sin mayor refinamiento para los propósitos definidos. La información obtenida a través de este tipo de investigación debería también ser aplicable en cualquier lugar y por lo tanto ofrece oportunidades significativas para su difusión.

1.2.3. Nivel de Investigación

El estudio de nuestro trabajo de investigación se realizará en dos etapas. Primero, se analizará e investigará aspectos concretos que ya están establecidos. Básicamente se trata de explorar y entender todos los conceptos y resultados de la teoría de homeomorfismos hiper-expansivos. Segundo, se investigará aspectos concretos que aún no han sido analizados en profundidad. De hecho, realizaremos una exploración o primer acercamiento para la formalización de la teoría de flujos hiper-expansivos. Por lo tanto, se empleará los siguientes niveles de investigación:

Explicativa. El nivel de investigación explicativa se encarga de buscar el por qué de los hechos mediante el establecimiento de responder la causa de los eventos y fenómenos, que condiciones se manifiesta o por qué se relaciona dos o más variables.

Exploratorio. Se plantea cuando se observa un fenómeno que debe ser analizado. Por tanto, su función es el reconocimiento, identificación y exploración o primer acercamiento de un problema.

1.2.4. Diseño de Investigación

El diseño de investigación es la estructura o guía utilizada para la planificación, implementación y análisis del estudio. En particular, la investigación cualitativa suele partir de una pregunta de investigación, que deberá formularse en concordancia con la metodología que se pretende utilizar. la investigación cualitativa se realiza a través de diferentes tipos de datos, tales como entrevistas, imágenes, observación, documentos, libros, audios, entre otros. Por lo tanto, el diseño cuantitativo resalta en este trabajo será:

Descriptiva-Explicativa.

Roberto Hernández and Mendoza Torres (2018) En la publicación “*Métodología de la investigación*” define que la ¹ investigación explicativa se encarga de buscar el por qué de los hechos mediante el establecimiento de responder la causa de los eventos y fenómenos.

Población y muestra

Por la naturaleza del presente trabajo, no-estadístico (análisis y manejo de datos), no se presenta población ni muestra.

1.3. Preliminares

Nuestro objetivo en esta sección es presentar algunos resultados que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis.

1.3.1. Topología

A continuación, enunciaremos algunas nociones elementales de topología general que serán indispensables para los próximos capítulos.

⁶**Definición 1.1.** Sean X un conjunto arbitrario e τ una familia de subconjuntos de X . La familia τ es una **topología** en X si

- (i) $\emptyset, X \in \tau$;
- (ii) ⁶ cualquier unión de elementos de τ es un elemento de τ ;
- (ii) ⁶ cualquier intersección de un número finito de elementos de τ es un elemento de τ .

Si τ es una topología en X , el par (X, τ) es un **espacio topológico**.¹ Los elementos de τ son llamados **conjuntos abiertos** de X . Un subconjunto $F \subset X$ es **cerrado** en X si su complemento $F^c = X \setminus F$ es abierto (es decir, si $F^c \in \tau$).

A menudo denotaremos el espacio topológico (X, τ) simplemente por X , sobreentendiendo que la topología τ está definida en X . Al tratar con diferentes topologías en el mismo espacio X , haremos explícita la topología considerada. Observe que los conjuntos X y $\emptyset$ son abiertos y cerrados simultáneamente en cualquier topología definida en X .

Dado un subconjunto $B \subset X$, naturalmente tenemos una topología definida en B , al considerar abiertos los conjuntos $B \cap A$, donde $A \in \tau$. Esta es la *topología inducida* en el conjunto B por la topología τ .

Definición 1.2. Sean τ_1 e τ_2 dos topologías en un conjunto X . Decimos que τ_1 es **menos fina** que τ_2 si $\tau_1 \subset \tau_2$.

¹¹**Definición 1.3.** Sea (X, τ) un espacio topológico no vacío. Decimos que $\mathcal{B} \subset \tau$ es una **base** de la topología τ si todo abierto $U \in \tau$ es una unión (arbitraria) de elementos de $\mathcal{B}$.

Definición 1.4. sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$, un **entorno** de x es un conjunto V_x para el cual existe $U \in \tau$ con $x \in U \subset V_x$. Si $\mathcal{B}$ es una base de τ , una **base de entornos** de x está formada por todos los conjuntos en $\mathcal{B}$ que contienen el punto x .

Definición 1.5. Un conjunto X es un **espacio métrico** si en él se define una **métrica** d , es decir, una función distancia $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ satisfaciendo las siguientes condiciones para cualquier $x, y, z \in X$,

- (i) $d(x, y) = 0$ si y sólo si, $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (desigualdad triangular).

Algunas veces haremos explícita la métrica en X , denotando (X, d) simplemente por X . La métrica d en X puede ser llamada, simplemente, de distancia en X .

Ejemplo 1.6. Sea (M, d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto $A \subset M$ es un conjunto abierto desde que cada punto $a \in A$ es el centro de una bola abierta $B(a, r)$ completamente contenido en A . Es decir, existe $r > 0$ tal que

$$B(a, r) = \{x \in M : d(a, x) < \varepsilon\} \subset A.$$

De esta forma, se define una topología τ en M , donde

$$\mathcal{B} = \{B(a, r) : a \in M \text{ y } r > 0\},$$

es una base para esta topología. <

Sea $A \subseteq X$, un punto $x \in X$ es un ¹¹punto de adherencia de A si $A \cap V_x \neq \emptyset$ para todo entorno V_x . La *clausura*¹ de A es el conjunto de sus puntos de adherencia, y es denotado por $\bar{A}$.

Definición 1.7. Um subconjunto A de un espacio métrico X se dice que es **denso** en X si $\bar{A} = X$.

1.3.2. Métrica de Hausdorff

Los espacios métricos son considerados fuentes de estudio para el análisis matemático, con ello se desprenden diferentes temáticas, entre ellas, la distancia de Hausdorff que corresponde, extiende y ajusta la noción de distancia entre subconjuntos no vacíos compactos en el ambiente de los espacios métricos. Felix Hausdorff, ⁸fue un matemático alemán que esta considerado como uno de los fundadores de la

¹Adherencia, cerradura

topología moderna y que ha contribuido significativamente a la teoría de conjuntos, la teoría descriptiva de conjuntos, la teoría de la medida y entre otras.

Sean (X, d) un espacio métrico, $A, B \subseteq X$ subconjuntos no vacíos y $x \in X$. Definamos la distancia del punto x al conjunto A como:

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\},$$

y la distancia de los conjuntos A y B como:

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B \text{ y } x \in A\}.$$

Sea

$$2^X = \{A \subseteq X : A \text{ es compacto y no vacío}\},$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$, llamaremos de ε -entorno de $A \subseteq 2^X$ al conjunto $V_\varepsilon(A)$ definido por

$$V_\varepsilon(A) = \{y \in X : d(y, A) \leq \varepsilon\}.$$

Cuando sea necesario denotaremos a $V_\varepsilon(A)$ por $V(\varepsilon, A)$.

Definición 1.8. Sea $\varepsilon > 0$. Si $A, B \in 2^X$, entonces define $d_H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty]$ por

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : B \subseteq V_\varepsilon(A) \text{ y } A \subseteq V_\varepsilon(B)\}$$

En el siguiente teorema mostraremos que d_H es una métrica y llamaremos a d_H de métrica de Hausdorff. Observemos que la métrica de Hausdorff mide cuán lejos están uno de otro dos subconjuntos compactos de X .

Teorema 1.9. La función $d_H : 2^X \times 2^X \rightarrow [0, \infty]$ es una métrica para 2^X .

Demostración. Mostremos la desigualdad triangular

$$(*) \quad d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C).$$

Sea $\eta > 0$ y $\delta = \eta/2$. De acuerdo con la definición d_H tenemos que:

$$(1) \quad A \subset V(d_H(A, B) + \delta, B),$$

(2) $B \subset V(d_H(B, C) + \delta, C)$.

Sea $a \in A$. Por (1), existe $b \in B$ tal que

$$d(a, b) < d_H(A, B) + \delta.$$

Por (2), existe $c \in C$ tal que

$$d(b, c) < d_H(B, C) + \delta.$$

Por lo tanto, de acuerdo con la definición de δ , tenemos que

$$d(a, c) < d_H(A, B) + d_H(B, C) + \eta.$$

Así, como $a \in A$ es un punto arbitrario de A tenemos que

$$A \subset V(d_H(A, B) + d_H(B, C) + \eta, C), \quad (1.1)$$

Con un similar argumento tenemos que

$$C \subset V(d_H(A, B) + d_H(B, C) + \eta, A), \quad (1.2)$$

Dado que η fue un número arbitrario. $\square$

1.3.3. Dinámica topológica

Sea (X, d) un espacio métrico, $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo y $x \in X$. Llamaremos de órbita de x al conjunto $\mathcal{O}(x)$ definido por

$$\mathcal{O}(x) = \{\dots, f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots\}.$$

De manera particular, llamaremos de órbita positiva y órbita negativa del punto $x \in X$ a los conjuntos

$$\mathcal{O}^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} \quad \text{y} \quad \mathcal{O}^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots\},$$

respectivamente. Un punto $p \in X$ se dice **periódico** si existe $k \geq 1$ tal que $f^k(p) = p$. Se llama **periodo** de p al mínimo $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(p) = p$. En el caso que $f(p) = p$, llamaremos a p de punto fijo.

Definición 1.10. Sea $\varepsilon > 0$ e $x \in X$. Llamamos de **conjunto estable local** e **inestable local** de x a los conjuntos $W_\varepsilon^s(x)$ y $W_\varepsilon^u(x)$ respectivamente, definidas por:

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ para todo } n \leq 0\}.$$

Definición 1.11. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Llamamos de **conjunto estable** e **inestable** de x a los conjuntos $W^s(x)$ y $W^u(x)$ respectivamente, definidas por:

$$W^s(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(x) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow -\infty\}.$$

Conjuntos minimales

Decimos que un conjunto $A \subseteq X$ es f -invariante si $f(A) = A$. A menudo llamaremos al conjunto f -invariante simplemente de invariante, sobreentendiendo que el sistema dinámico con el que trabajamos es con respecto a f .

Definición 1.12. Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $K \subseteq X$ es **minimal** si

- a) K es cerrado y f -invariante,
- b) K no contiene ningún subconjunto propio no vacío que sea cerrado e invariante.

Para un ejemplo sobre este tipo de conjuntos, basta observar la órbita de un punto periódico. De hecho, si p es periódico con periodo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{O}(p) = \{p, f(p), \dots, f^{n-1}(p)\}$ es cerrado e invariante. Además, no puede contener ningún subconjunto propio cerrado e invariante, caso contrario, contradice el hecho de n ser el periodo de p .

Teorema 1.13. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto invariante $K \subset X$ es llamado *minimal* si, para todo $x \in K$ la órbita $\mathcal{O}^+(x)$ es denso en K .

Demostración. Sea K un conjunto minimal y considerere $x \in K$. Dado que K es compacto y invariante entonces tenemos que $\overline{\mathcal{O}(X)} \subset K$, luego como $\overline{\mathcal{O}(X)}$ es un conjunto cerrado e invariante tenemos que $\overline{\mathcal{O}(X)} = K$. $\square$

Decimos que un conjunto A es ε -denso en B si para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $d(y, x) \leq \varepsilon$.

Observación 1.14. Minimalidad implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n > 0$ tal que para todo $x \in K$ el conjunto $\mathcal{O}_n(x) = \{x, f(x), \dots, f^n(x)\}$ es ε -denso en K . En efecto, suponga por contradicción que existe $\varepsilon > 0$, una sucesión $n_k \rightarrow \infty$ desde que $k \rightarrow \infty$ tal que $\mathcal{O}_{n_k}(x) = \{x, f(x), \dots, f^{n_k}(x)\}$ no es ε -denso en K . Por lo tanto, mostramos que existe $\varepsilon > 0$ e $y \in K$ tal que $d(y, f^n x) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Contradiciendo la minimalidad

Conjunto omega-límite y alpha-límite

Sea $f : M \rightarrow M$ un sistema dinámico discreto y $x \in M$. Definimos el conjunto ω -límite de x como

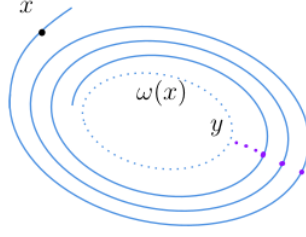
$$\omega(x, f) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } f^{n_k}x \rightarrow y\},$$

Análogamente, definamos el conjunto α -límite de x como

$$\alpha(x, f) = \{y \in M : \exists n_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } f^{n_k}x \rightarrow y\}.$$

Es importante observar que si $p \in X$ es un punto periódico, entonces $\alpha(p) = \omega(p) = \mathcal{O}(p)$. En efecto, sea $y \in \alpha(p)$ y $n_k \rightarrow +\infty$ tal que $f^{n_k}p \rightarrow y$. Como p es periódica, entonces existe un mínimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}p = p$. Por lo tanto, existe $s \in \{1, 2, \dots, n_0\}$ tal que los n_k son de la forma $n_k = n_0 \cdot k + s$. Así, $y = f^s(p) \in \mathcal{O}(p)$. La otra inclusión puede ser obtenida de la misma forma.

Nuestro objetivo precisamente se reexpresa como: encontrar los límites ω y α para cada punto de X . En particular, necesitamos conocer información sobre los

Figura 1.1: Conjunto Omega limite $\omega(x)$

conjuntos $L^+(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \omega(x)}$, $L^-(f) = \overline{\bigcup_{x \in X} \alpha(x)}$ y $L(f) = L^+(f) \cup L^-(f)$, el límite futuro, el límite pasado y el límite de f , respectivamente.

El límite ω de un punto podría ser vacío, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.15. Sea $X = \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$. En este caso, tenemos que $f^n(x) = 2^n x$, lo que implica que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(0) = 0$ y $\omega(0) = \alpha(0) = 0$. Sin embargo, para un punto no nulo x , tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}x = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n x = \infty$, lo que implica que $\alpha(x) = 0$ pero $\omega(x) = \emptyset$. $\triangleleft$

Para evitar estas situaciones, siempre supondremos que X es compacto.

Definición 1.16. Un subconjunto Y de X se dice que es invariante bajo f si $f(Y) = Y$.

Denotaremos por $Per(f)$ al conjunto de todos los puntos periódicos en X .

Proposición 1.17. $Per(f)$ es f invariante.

Demostración. Es inmediato por el hecho de que $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ están en la misma órbita que x . $\square$

Proposición 1.18. $\omega(x)$ es compacto e invariante bajo f .

Demostración. Sea $y \in X - \omega(x)$. Entonces, por definición del ω -límite, y no es un punto de acumulación de la sucesión $f^n(x) n \in \mathbb{N}$, por lo que $\exists U$ vecindad de y , tal que existe $n_0 > 0 : \forall n > n_0$, $f^n(x) \notin U$. Si $y' \in U$, entonces y' tampoco es un punto de acumulación por la misma razón. Por lo tanto, $U \subseteq X - \omega(x)$, lo que implica que $X - \omega(x)$ es abierto. Entonces, $\omega(x)$ es cerrado y, por lo tanto, compacto.

Sea $y \in \omega(x)$. Entonces, existe una subsecuencia $\{f^{n_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a y . Debido a la continuidad de f , la subsecuencia $\{f^{n_k+1}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $f(y)$. Así que $f(y) \in \omega(x)$, lo que implica que $f(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$. Pero f es un homeomorfismo, por lo que $\{f^{n_k-1}(x)\}_{k \in \mathbb{N}-0}$ converge a $f^{-1}(y)$ y luego $f^{-1}(\omega(x)) \subseteq \omega(x)$, lo que implica que $\omega(x) = f(f^{-1}(\omega(x))) \subseteq f(\omega(x))$. Por lo tanto, $\omega(x) = f(\omega(x))$. $\square$

De hecho, $\{\omega(x)\}_{x \in X}$ son los conjuntos mínimos cerrados e invariantes bajo f :

Proposición 1.19. *Sea $Y \subseteq X$ cerrado e invariante bajo f , y $y \in Y$. Entonces $\omega(y) \subseteq Y$.*

Demostración. Sea $y \in Y$ y $y' \in \omega(y)$. Entonces, existe $f^{n_k}(y)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow y'$. Pero tenemos que Y es invariante bajo f , por lo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(y) \in Y$. Por lo tanto, $y' \in Y$, debido a que Y es cerrado. Así que $\omega(y) \subseteq Y$. $\square$

Análogamente, $\alpha(x)$ es compacto e invariante bajo f . Ahora demostraremos que $L^+(f)$, $L^-(f)$ y $L(f)$ también son invariantes bajo f (la compacidad es directa por definición), pero primero necesitamos un lema general.

Lema 1.20. *Si Y es un conjunto invariante bajo f , entonces $\bar{Y}$ es invariante bajo f .*

Demostración. Sea $y \in \bar{Y}$. Existe una secuencia $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de Y que converge a y . Debido a la continuidad de f , $\{f(y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(y)$. Pero Y es invariante bajo f , por lo que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) \in Y$. Entonces, $f(y) \in \bar{Y}$, lo que implica que $f(\bar{Y}) \subseteq \bar{Y}$. Sin embargo, f es un homeomorfismo, por lo que Y también es invariante bajo f^{-1} . Entonces $f^{-1}(\bar{Y}) \subseteq \bar{Y}$, lo que implica que $\bar{Y} = f(f^{-1}(\bar{Y})) \subseteq f(\bar{Y})$. Por lo tanto, $\bar{Y} = f(\bar{Y})$. $\square$

Proposición 1.21. *$L^+(f)$, $L^-(f)$ y $L(f)$ son invariantes bajo f .*

Demostración. Observamos que $\bigcup_{x \in X} \omega(x)$ y $\bigcup_{x \in X} \alpha(x)$ son uniones de conjuntos invariantes bajo f , por lo que son invariantes bajo f . De acuerdo con el lema anterior, $L^+(f)$ y $L^-(f)$ también son invariantes bajo f . Dado que $L(f) = L^+(f) \cup L^-(f)$, entonces también es invariante bajo f . $\square$

Proposición 1.22. *Si $x \in X$ es periódico si y solo si su órbita es finita.*

Demostración. Dado que $\mathcal{O}(x)$ es finita, existe un n tal que $x, f(x), \dots, f^n(x)$ son distintos, pero $f^{n+1}(x)$ es igual a $f^m(x)$ para algún $m \in 0, 1, \dots, n$. En este caso, $f^{n+1-m}(x) = f^{-m} \circ f^{n+1}(x) = f^{-m} \circ f^m(x) = x$, lo que implica que $m = 0$ debido a la minimalidad de n . Así que $f^{n+1}(x) = x$. $\square$

Recordando que el número natural mínimo $\pi(x)$ tal que $f^{\pi(x)}(x) = x$ se llama el período de x .

Conjunto no errante

Sea $f : M \rightarrow M$ un sistema dinámico. Un punto $x \in X$ es un punto no errante si para todo entorno U de x , existe $n \geq 1$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Denotaremos por $\Omega(f)$ al conjunto de todos los puntos no errantes, es decir,

$$\Omega(f) = \{x \in M : x \text{ es no errante}\}.$$

Observemos que el conjunto $\Omega(f)$ es cerrado y invariante. Además

$$\text{Si } p \in \text{Per}(f) \Rightarrow p \in \Omega(f).$$

$$\text{Si } x \in M \Rightarrow \omega(x) \subset \Omega(f) \text{ y } \alpha(x) \subset \Omega(f).$$

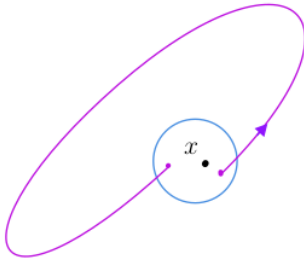


Figura 1.2: Conjunto no errante

Proposición 1.23. *Un punto $x \in X$ es errante si y solo si $\exists U$ un entorno de x y $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, f^n(U) \cap U = \emptyset$.*

Demostración. $(\Rightarrow)$ Trivial.

$(\Leftarrow)$ Tomemos U un entorno de x , $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, f^n(U) \cap U = \emptyset$ y $V_0, \dots, V_{n_0}$ conjuntos abiertos que son mutuamente disjuntos y $\forall i \in \{0, \dots, n_0\}, f^i(x) \in V_i$. Tenemos que $V = U \cap \bigcap_{i=0}^{n_0} f^{-i}(V_i)$ es un entorno de x , porque $x \in U$ y $f^i(x) \in V_i$. Para $i \in \{1, \dots, n_0\}$, $f^i(V) \subseteq V_i$, así que $V \cap f^i(V) = \emptyset$, porque $V \subseteq V_0$. Para $i > n_0$, $f^i(V) \subseteq f^i(U)$, así que $V \cap f^i(V) = \emptyset$ porque $V \subseteq U$. Por lo tanto, x es errante. $\square$

Llamamos $\Omega(f)$ al conjunto de puntos no errantes de f .

Proposición 1.24. *$\Omega(f)$ es compacto e invariante bajo f .*

Demostración. Sea $x \in X - \Omega(f)$. Existe un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $\forall n \in \mathbb{N}, f^n(U) \cap U = \emptyset$. Si $y \in U$, entonces U es un entorno de y , por lo que y es errante. Así que $X - \Omega(f)$ es abierto, lo que implica que $\Omega(f)$ es cerrado y, por lo tanto, compacto.

Sea $x \in \Omega(f)$ y U un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(U)$ es un entorno de x . Tenemos que x no es errante, así que $\exists n \in \mathbb{N} : f^{-1}(U) \cap f^{n-1}(U) \neq \emptyset$, lo que implica que $U \cap f^n(U) = f(f^{-1}(U) \cap f^{n-1}(U)) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $f(x) \in \Omega(x)$, lo que implica que $f(\Omega(x)) \subseteq \Omega(x)$. De manera análoga, $f^{-1}(\Omega(x)) \subseteq \Omega(x)$, lo que implica que $\Omega(f) = f(f^{-1}(\Omega(x))) \subseteq f(\Omega(x))$. Así que $f(\Omega(x)) = \Omega(x)$. $\square$

Proposición 1.25. *$L(f) \subseteq \Omega(f)$.*

Demostración. Sea $y \in X$ y $x \in \omega(y)$. Entonces existe una subsecuencia $\{f^{n_k}(y)\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a x . Si U es un entorno de x , existen al menos dos $n_{k_1} > n_{k_2}$ tales que $f^{n_{k_1}}(y), f^{n_{k_2}}(y) \in U$. Por lo tanto, $f^{n_{k_1}}(x) \in f^{n_{k_1}-n_{k_2}}(U)$, lo que implica que $U \cap f^{n_{k_1}-n_{k_2}}(U) \neq \emptyset$. Así que $x \in \Omega(f)$, $\omega(y) \subseteq \Omega(f)$, $\bigcup_{x \in X} \omega(x) \subseteq \Omega(f)$ y $L^+(f) \subseteq \Omega(f)$, porque $\Omega(f)$ es cerrado. De manera análoga, tenemos que $L^-(f) \subseteq \Omega(f)$. Por lo tanto, $L(f) \subseteq \Omega(f)$. $\square$

Por lo tanto, tenemos que $\overline{Per(f)} \subseteq L(f) \subseteq \Omega(f)$, pero en general estos conjuntos son distintos.

Observación 1.26. Una órbita puede ser vista como la secuencia $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subset X$, tal que $f(x_k) = x_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.27. Sea $I \subset \mathbb{Z}$ un rango de enteros, es decir, $I = [a, b] \cap \mathbb{Z}$ y $\varepsilon > 0$. Una secuencia $(x_k)_{k \in I} \subset X$ se dice ser un ε -pseudo-órbita para f , si $d(f(x_k), x_{k+1}) < \varepsilon$, para todo $k \in I$, con $k+1 \in I$.

Cuando I es finito, decimos que $(x_k)_{k \in I}$ es una pseudo-órbita-finita, y $(x_k)_{k \in I}$ es una pseudo-órbita-infinita si I es un rango infinito. Cuando $I = \mathbb{N}$ decimos que $(x_k)_{k \in I}$ es una pseudo-órbita-positiva y es una pseudo-órbita-negativa si $I = -\mathbb{N} (= \{-n; n \in \mathbb{N}\})$. Si tenemos I finito, es decir, $I = \{k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + n_0\}$, y $x_{k_0+n_0} = x_{k_0}$, decimos que $(x_k)_{k \in I}$ es una pseudo-órbita periódica.

Definición 1.28. Un punto $x \in X$ se llama cadena recurrente si existe una ε -pseudo-órbita desde x hacia sí misma para cualquier elección de $\varepsilon > 0$. El conjunto de todos los puntos cadena recurrentes se llama el conjunto cadena recurrente y se denota por $R(f)$.

Proposición 1.29. $R(f)$ es compacto y f -invariante.

Demostración. Dado que X es compacto, es suficiente demostrar que $R(f)$ es un conjunto cerrado. Considere cualquier secuencia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $R(f)$, con $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$. Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(y, \varepsilon)$, para todo $n \geq n_0$. Tome la ε -pseudo-órbita periódica que contiene x_{n_0+1} y reemplace el término x_{n_0+1} por y , obteniendo una ε -pseudo-órbita periódica que contiene a y , entonces $y \in R(f)$, por lo que $R(f)$ es un conjunto cerrado, como se desea.

Ahora, tome $x_0 \in R(f)$ y $\varepsilon > 0$, necesitamos encontrar una ε -pseudo-órbita periódica que contenga a $f(x_0)$. Por continuidad de f , existe $\delta_1 > 0$ tal que $d(x, y) < \delta_1$ implica $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $x, y \in X$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2}\}$ y, dado que $x_0 \in R(f)$, considere la δ -pseudo-órbita periódica $(x_k)_{k \in \mathbb{I}}$ que contiene a x_0 , asumiendo que $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. Defina $(y_k)_{k \in \mathbb{I}}$ por

$$y_k = \begin{cases} x_k, & k \neq 1 \\ f(x_0), & k = 1 \end{cases}.$$

Entonces, $(y_k)_{k \in \mathbb{I}}$ es una ε -pseudo-órbita periódica que contiene a $f(x_0)$. De hecho, dado que $(x_k)_{k \in \mathbb{I}}$ es una δ -pseudo-órbita periódica, tenemos $d(f(x_1), x_2) < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(f(x_0), x_1) < \delta < \delta_1$ implica $d(f(f(x_0)), f(x_1)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces,

$$k = 0 \Rightarrow d(f(y_k), y_{k+1}) = d(f(y_0), y_1) = d(f(x_0), y_1) = 0 < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} k = 1 \Rightarrow d(f(y_k), y_{k+1}) &= d(f(y_1), y_2) = d(f(f(x_0)), x_2) \\ &\leq d(f(f(x_0)), f(x_1)) + d(f(x_1), x_2), \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

y

$$k > 1 \Rightarrow d(f(y_k), y_{k+1}) = d(f(x_k), x_{k+1}) < \delta < \varepsilon.$$

Entonces, $f(x_0) \in R(f)$ y $f(R(f)) \subset R(f)$.

Dado que f es un homeomorfismo, tenemos $f^{-1}(R(f)) \subset R(f)$ por lo tanto $R(f) \subset f(R(f))$, y concluimos la prueba de que $R(f) = f(R(f))$, es decir, $R(f)$ es f -invariante. $\square$

Proposición 1.30. $\Omega(f) \subseteq R(f)$.

Demostración. Sea $x \in \Omega(f)$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_0}(B(x, \varepsilon)) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

Definiendo

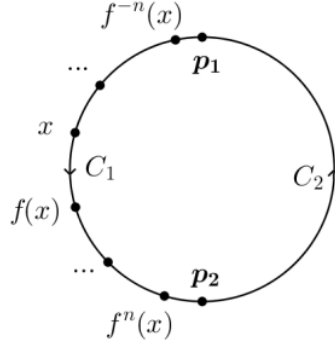
$$x_0 = x, x_1 = f(x), \dots, x_{n_0-1} = f^{n_0-1}(x), x_{n_0} = f^{n_0}(x), x_{n_0+1} = x_0, \dots$$

Obtenemos un pseudoórbita periódica ε que contiene a x , por lo tanto, $x \in R(f)$ y $\Omega(f) \subset R(f)$. $\square$

Con esto, tenemos $\overline{Per(f)} \subseteq L(f) \subseteq \Omega(f) \subseteq R(f)$. En general, estos conjuntos no son iguales. Veamos un caso donde $\Omega(f) \subsetneq R(f)$.

Ejemplo 1.31. Considere el homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ que satisface:

$$- f(p_1) = p_1 \text{ y } f(p_2) = p_2;$$

Figura 1.3: S^1

- Si $x \in C_1$ entonces $\omega(x) = \{p_2\}$ y $\alpha(x) = \{p_1\}$;
- Si $x \in C_2$ entonces $\omega(x) = \{p_1\}$ y $\alpha(x) = \{p_2\}$.

Mostraremos que $R(f) = S^1$ y $\Omega(f) = \{p_1, p_2\}$. En primer lugar, es fácil ver que $\{p_1, p_2\} \subset \Omega(f)$. Sea $x \in S^1 \setminus \{p_1, p_2\}$, entonces x es un punto errante, es decir, $x \notin \Omega(f)$. De hecho, supongamos que $x \in C_2$ y tomemos intervalos I_0 e I_1 que contengan a p_1 y x , respectivamente, con $I_0 \cap I_1 = \emptyset$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_0}(\bar{I}_1) \subset I_0$, para ver esto, para todo $y \in \bar{I}_1$ consideremos $n(y) \in \mathbb{N}$ que garantiza $f^k(y) \in I_0$, si $k \geq n(y)$.

Dado que $f^{n(y)}$ es continua, existe $\delta_y > 0$ tal que

$$f^{n(y)}(B(y, \delta_y)) \subset I_0 \quad \text{y} \quad f^k(B(y, \delta_y)) \subset I_0,$$

para todo $k \geq n(y)$. Por la compacidad de $\bar{I}_1$ existen $y_1, \dots, y_m$, $n(y_1), \dots, n(y_m)$ y $\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m}$ que cumplen $\bar{I}_1 \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \delta_{y_i})$ y $f^k(B(y_i, \delta_{y_i})) \subset I_0$, para todo $k \geq n(y_i)$. Tomando $n_0 = \max_{1 \leq i \leq m} \{n(y_i)\}$ tenemos $f^{n_0}(\bar{I}_1) \subset I_0$. Entonces, hemos demostrado que existe un conjunto abierto $U \subset S^1$, con $x \in U$, tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$, para $n \in \mathbb{N}$, es decir, x es un punto errante, así que $\Omega(f) = \{p_1, p_2\}$.

Ahora, veremos que $R(f) = S^1$. Para ello, sea $x \in S^1$ y $\varepsilon > 0$, obtendremos una pseudo órbita periódica ε que contiene a x . Supongamos que $x \in C_2$, podemos elegir

$k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{k_1}(x), p_1) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, tomamos un punto $z \in C_1 \cap B(p_1, \frac{\varepsilon}{2})$ y elegimos $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_2}(z) \in B(p_2, \frac{\varepsilon}{2})$. Definimos la secuencia $(x_k)_{k \in \{0, \dots, 2k_1+k_2\}} \subset X$ como

$$x_k = \begin{cases} f^k(x), & k \in \{0, \dots, k_1 - 1\}, \\ f^{k-k_1}(z), & k \in \{k_1, \dots, k_1 + k_2 - 1\}, \\ f^{k-(2k_1+k_2)}(x), & k \in \{k_1 + k_2, \dots, 2k_1 + k_2\}. \end{cases}$$

Entonces, tenemos

$$d(f(x_{k_1-1}), x_{k_1}) = d(f^{k_1}(x), z) < \varepsilon$$

y

$$d(f(x_{k_1+k_2-1}), x_{k_1+k_2}) = d(f^{k_2}(z), f^{-k_1}(x)) < \varepsilon \quad (1.3)$$

o $d(f(x_k), x_{k+1}) = 0$, en caso contrario. Así que $(x_k)_{k \in \{0, \dots, 2k_1+k_2\}}$ es una ε -pseudo-órbita periódica que contiene x . Esto es válido para cualquier $\varepsilon > 0$, entonces $x \in R(f)$ y $R(f) = S^1$. En este ejemplo, $\overline{Per(f)} = L(f) = \Omega(f) = \{p_1, p_2\} \subsetneq R(f) = S^1$.

1.3.4. La Herradura de Smale

Sean $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ un cuadrado unitario, A un semicírculo de radio 1 por debajo de Q , B un semicírculo de radio 1 por encima de Q y $N = A \cup Q \cup B$. Sean H_j , para $j \in \{0, 1\}$, dos frajas horizontales

$$H_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, y_1^j \leq y \leq y_2^j\}, \text{ con } 0 \leq y_1^0 < y_2^0 < y_1^1 < y_2^1 \leq 1$$

y sean V_j , para $j \in \{0, 1\}$, dos frajas verticales,

$$V_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_1^j \leq x < x_2^j, 0 \leq y \leq 1\}, \text{ con } 0 \leq x_1^0 \leq x_2^0 < x_1^1 < x_2^1 \leq 1.$$

Sean G una franja horizontal comprendida entre H_0 e H_1 , H_2 una franja horizontal inferior en Q por debajo de H_0 , e H_3 una franja horizontal superior en Q por encima de H_1 .

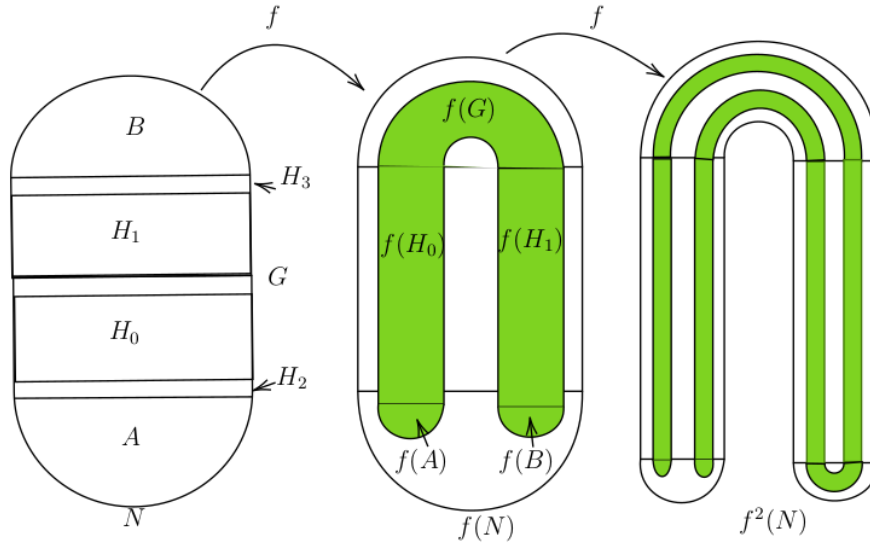


Figura 1.4: La herradura de Smale

La función herradura de Smale f envía una región N dentro de si misma, es decir, efectúa una transformación de N en N como pasamos a describir. Primero, contraemos linealmente el cuadrado Q en la dirección horizontal por un factor $0 < \delta < \frac{1}{2}$ e expandiéndolo en la dirección vertical por un factor $\frac{1}{\delta}$, como es mostrado en la Figura 1.4. Obtenemos un rectángulo que es doblado en la forma de $\cap$ ("herradura") y ubicado sobre el cuadrado original (Figura 1.4). Además de esto, consideramos f de forma que $f(G) \subset B$, la imagen de $H_2 \cup H_3$ este contenida en A , que f sea una contracción de A y también de forma que $f(A), f(B) \subset A$. Así, en estas condiciones, la función herradura de Smale f transforme la región N dentro de si misma, como pretendíamos. Así $f^2(N) \cap Q$ consiste de cuatro franjas verticales de ancho δ^2 . Un procedimiento análogo nos permite concluir que $f^3(N) \cap Q$ consiste de ocho franjas verticales de anchura δ^3 . Continuando esta construcción inductiva, obtenemos el siguiente conjunto

$$\Lambda_- = \{q \in Q : f^{-k}(q) \in Q, \text{ para } k = 1, 2, \dots\}$$

que es producto cartesiano $[0, 1] \times C_1$, de un conjunto de Cantor por un intervalo

vertical, es decir, es un conjunto de Cantor de segmentos verticales. De la misma forma, podemos observar que el conjunto $f^{-1}(N) \cap Q$ es la unión $H_0 \cup H_1$, de dos franjas horizontales de altura δ ; $f^{-2}(N) \cap Q$ consiste de cuatro franjas horizontales de altura δ^2 . Un procedimiento análogo nos permite concluir que $f^{-3}(N) \cap Q$ consiste de ocho franjas horizontales de altura δ^3 . Continuando esta construcción inductiva, obtenemos el siguiente conjunto

$$\Lambda_+ = \{q \in Q : f^k(q) \in Q, \text{ para } k = 1, 2, \dots\}$$

Finalmente interceptando estos dos conjuntos, obtenemos el conjunto

$$\Lambda = \Lambda_- \cap \Lambda_+.$$

El conjunto invariante en Q es Λ , ya que cualquier punto en Λ_+ o Λ_- es transportado por f a otro punto que también está en Λ . Así, el conjunto Λ está formado por los puntos en Q que, después de aplicaciones repetidas (en número infinito) de la función f , pueden mostrar un comportamiento recurrente o no errante. Los puntos de Q que no están en Λ eventualmente deben salir de Q bajo cualquier tipo de iteración de f .

1.3.5. Expansividad y estabilidad

3 Los expansivos son un caso particular de movimiento caótico. Tenemos que dos puntos cualquiera se separan, a futuro y/o a pasado. Esto implica que un pequeño error en las condiciones iniciales puede dar lugar a una diferencia sustancial entre las órbitas y los conjuntos límite.

Definición 1.32. Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ es llamado **expansivo**, si existe un constante $c > 0$ tal que para cualquier par de puntos $x, y \in X$ diferentes, existe $n = n(x, y) \in \mathbb{Z}$ tal que

$$d(f^n x, f^n y) > c.$$

A constante $c > 0$ satisfaciendo la definición anterior, es llamada *constante de expansividad*.

Observación 1.33. La expansividad garantiza la existencia de un número finito de puntos fijos.

Sea $K = \{0, 1, \dots, k-1\}$, donde $k \geq 2$, un conjunto finito llamada de k símbolos. Denotaremos por $K^{\mathbb{Z}}$ al conjunto, llamado *espacio shift*, formado por todas las sucesiones bi-infinitas $c : \mathbb{Z} \rightarrow K$, es decir:

$$K^{\mathbb{Z}} = \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : a_n \in K \quad \forall n \in \mathbb{Z}\}.$$

Por otro lado, en $K^{\mathbb{Z}}$ definimos la métrica

$$d(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}}$$

Definamos a continuación el shift de Bernoulli

Definición 1.34. Sea la aplicación $\sigma : K^{\mathbb{Z}} \rightarrow K^{\mathbb{Z}}$ definida por

$$\sigma(\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}) = \{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

con $b_n = a_{n-1}$. Esta aplicación es llamada de *shift de Bernoulli*.

Ejemplo 1.35. (El shift de Bernoulli). Sea $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ dotado de la topología producto dada por poner la topología discreta en $\{0, 1\}$. En Σ podemos definir la siguiente transformación $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ dada por $\sigma(\{x_n\}) = \{y_n\}$ de forma tal que $y_n = x_{n-1}$. En pocas palabras, lo que hace σ (llamado *shift de Bernoulli*) es correr la sucesión $\{x_n\}$ un lugar para la derecha.

Es muy sencillo observar como la transformación σ es expansiva con constante de expansividad 1. Para verlo, tomemos dos sucesiones diferentes $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$. Por ser distintas, existe n_0 para el cual $x_{n_0} \neq y_{n_0}$ por lo cual $|x_{n_0} - y_{n_0}| = 1$, entonces

$$d(\sigma^{n_0}(\{x_n\}), \sigma^{n_0}(\{y_n\})) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n - n_0|}} \geq \frac{|x_{n_0} - y_{n_0}|}{2^{|n_0 - n_0|}} = 1$$

Observemos que la última desigualdad es obtenida por que $x_{n_0}, y_{n_0} \in \{0, 1\}$ y son diferentes. ◁

Observación 1.36. En definitiva lo que se hace en el ejemplo 1.35² es correr las dos sucesiones de forma tal que el término en el que difieren es en el que se concentra la mayor distancia. Sin embargo, es muy sencillo encontrar sucesiones distintas que se mantienen arbitrariamente cercanas para el futuro, por ejemplo: la sucesión constante igual a 1 se mantiene arbitrariamente a sucesiones $\{x_n\}$ que cumplen que son uno para los $n < n_0$ y en el resto de los valores son cero.

A seguir definamos el siguiente conjunto

$$\Gamma_c(x) = \{y \in X; d(f^k(x), f^k(y)) \leq c, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

es la bola dinámica de radio c centrada en x . Es fácil ver que $c > 0$ es la constante de expansividad para f si y solo si $\Gamma_c(x) = x$, para todo $x \in X$.

Definición 1.37. Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ es positivamente expansivo cuando existe $c > 0$ tal que $x \neq y$ implica $d(f^n(x), f^n(y)) > c$, para algún $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, presentamos algunas propiedades básicas de los homeomorfismos expansivos.

Proposición 1.38. Si f es un homeomorfismo positivamente expansivo, entonces X es finito.

Demostración. Primero afirmamos que existe un número $0 < \varepsilon < c$, donde c es la constante de expansividad para f , tal que para todo punto $x \in X$ existe un entorno U_x tal que si $y \in U_x$ entonces $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \leq \varepsilon$, para todo $n \geq 0$.

En efecto, supongamos que existen puntos $y_n \rightarrow x$ para $n \rightarrow \infty$ de manera que para algunos $k_n \in \mathbb{N}$ tengamos $d(f^{-k_n}(y_n), f^{-k_n}(x)) > \varepsilon$ (podemos suponer que k_n es el primero).

Dado que f es uniformemente continuo, tenemos que $k_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $z_n = f^{-k_n}(y_n)$ y $w_n = f^{-k_n}(x)$ puntos tales que $d(z_n, w_n) > \varepsilon$ y $d(f^l(z_n), f^l(w_n)) < \varepsilon$, para $l \in \{1, 2, \dots, k_n\}$.

Sean z y w puntos límite de z_n y w_n , respectivamente, tenemos $d(z, w) > \varepsilon$, en particular $z \neq w$. Entonces,

$$d(f^m(z), f^m(w)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^m(z_n), f^m(w_n)) \leq \varepsilon < c,$$

lo cual contradice el hecho de que f es expansivo.

Y ahora mostramos que para todo $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < c$) y para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) < \varepsilon$, $\forall n \geq 0$, implica $d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) < \delta$, para todo $m > N$.

En efecto, si no fuera así, tendríamos que para todo $N \in \mathbb{N}$ existen x_N e y_N que satisfacen

$$\delta \leq d(f^k(x_N), f^k(y_N)) < \varepsilon < c, \forall 0 \leq k \leq N.$$

Sean z y w puntos límites de $f^{-N}(x_N)$ y $f^{-N}(y_N)$, respectivamente, tenemos $d(z, w) \geq \delta > 0$, mientras que $d(f^n(z), f^n(w)) < \varepsilon < c$, para todo $n \geq 0$, lo cual contradice el hecho de que f es expansivo.

Finalmente, dado que cada punto x en X tiene un entorno U_x en el que sus puntos permanecen cerca de x en el pasado, tenemos una cobertura para X dada por $\bigcup_{x \in X} U_x$ y obtenemos una subcobertura finita $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$.

Sea $n_k \rightarrow \infty$ de manera que $f^{-n_k}(x_i) \rightarrow \bar{x}_i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Para n_k suficientemente grande, $f^{-n_k}(U_{x_i})$ está contenido en un entorno lo suficientemente pequeño de $\bar{x}_i$ y $f^{-n_k}(X) = X$, por lo que concluimos que $X = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$. $\square$

A la inversa, todo homeomorfismo $f : X \rightarrow X$, donde X es finito, es expansivo positivamente.

Proposición 1.39. *Un homeomorfismo f es expansivo si y solo si f^k es expansivo, para todo $k \neq 0$.*

Demostración. Sea $c > 0$ la constante de expansividad para f y elige $\delta > 0$, por continuidad, de manera que $d(x, y) < \delta$ implique $d(f^n(x), f^n(y)) < c$, para todo $n \in 0, 1, \dots, k$. Afirmamos que $c' = \min c, \delta$ es la constante de expansividad para f^k . De hecho, si $d(f^{nk}(x), f^{nk}(y)) < c' \leq \delta$ entonces $d(f^j(x), f^j(y)) < c$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. De ello se sigue que $x = y$, lo que demuestra que f^k es expansivo. Por otro lado, si f^k es expansivo para todo $k \neq 0$, es claro que f es expansivo, con la misma constante de expansividad. $\square$

Proposición 1.40. *El mapa identidad en un espacio métrico compacto X es expansivo solo cuando X es finito.*

Demostración. Si $id : X \rightarrow X$ es expansivo, entonces existe $c > 0$ tal que

$$x \neq y \Rightarrow d(id^n(x), id^n(y)) > c,$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, es decir, $d(x, y) > c > 0$. Por lo tanto, para todo punto $x \in X$ tenemos $B(x, c) \setminus \{x\} \cap X = \emptyset$, lo que significa que todos los puntos en X son aislados. Dado que X es compacto, concluimos que X es finito. $\square$

Proposición 1.41. *Si f es expansivo, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe solo un número finito de puntos periódicos de período n .*

Demostración. Supongamos que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una secuencia de puntos periódicos distintos de período n , y sea $p \in X$ un punto límite de $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Tenemos

$$\begin{aligned} d(f^n(p), p) &= d(f^n(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k), \lim_{k \rightarrow \infty} p_k) \\ &= d(\lim_{k \rightarrow \infty} f^n(p_k), \lim_{k \rightarrow \infty} p_k) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} d(f^n(p_k), p_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^n(p) = p$. Y si $f^j(p) = p$ para cualquier $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, tendríamos $f^j(p_k) = p_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces p sería un punto periódico de período n .

Sea $c > 0$ la constante de expansividad de f^n , entonces existen infinitos puntos fijos de f^n en $B(p, c)$. Por lo tanto, $\Gamma_c(p)$ tiene puntos infinitos, lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 1.42. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo. Entonces, el conjunto $A = \{y \in X; \alpha(y) = \{p\} \text{ y } \omega(y) = \{q\}\}$ es a lo sumo un conjunto numerable.*

Demostración. Supongamos que A es innumerable. Entonces existen puntos fijos p_1 y p_2 de f tal que el conjunto $B = \{y \in X; \alpha(y) = \{p_1\} \text{ y } \omega(y) = \{p_2\}\}$ es innumerable, dado que f tiene puntos fijos infinitos.

Sea $c > 0$ la constante de expansividad de f . Para cada $y \in B$, sea n_y el menor número natural tal que

$$d(f^{-k}(y), p_1) > \frac{c}{2} \quad \text{y} \quad d(f^k(y), p_2) > \frac{c}{2}, \quad \forall k \geq n_y.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ considera el conjunto $B_n = \{y \in B; n = n_y\}$. Entonces tenemos $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ y así existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que B_{n_0} es innumerable.

Sea $p \in X$ un punto límite de B_{n_0} , elige $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implique $d(f^k(x), f^k(y)) < c$, para todo $k \in \{-n, \dots, n\}$. Toma x_1 y x_2 en B_n tal que $d(x_1, x_2) < \delta$ y

$$\begin{aligned} d(f^k(x_1), f^k(x_2)) &\leq d(f^k(x_1), p_2) + d(p_2, f^k(x_2)) \\ &< \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c, \end{aligned}$$

para todo $k \leq n$. Además,

$$\begin{aligned} d(f^{-k}(x_1), f^{-k}(x_2)) &\leq d(f^{-k}(x_1), p_1) + d(p_1, f^{-k}(x_2)) \\ &< \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c, \end{aligned}$$

para todo $k \geq n$. Además,

$$d(f^k(x_1), f^k(x_2)) < c, \quad \forall k \in \{-n, \dots, n\}.$$

Esto implica que $\Gamma_c(x_1)$ contiene un punto diferente de x_1 , lo cual contradice la expansividad de f . $\square$

Proposición 1.43. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $W_\varepsilon^s(x) \subset W^s(x)$ y $W_\varepsilon^u(x) \subset W^u(x)$.*

Demostración. Sea $c > 0$ la constante de expansividad para f y elige $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{c}{2}$. Basta con demostrar que para todo $r > 0$ existe $n > 0$ tal que $f^k(W_\varepsilon^s(x)) \subset W_r^s(f^k(x))$, para todo $k \geq n$ y todo $x \in X$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún $k_n \neq n$ y $x_n \in X$ tal que $W_r^s(f^{k_n}(x_n))$ no contiene a $f^{k_n}(W_\varepsilon^s(x_n))$, es decir, existe $y_n \in f^{k_n}(W_\varepsilon^s(x_n))$ pero $y_n \notin W_r^s(f^{k_n}(x_n))$. Sea $z_n = f^{-k_n}(y_n)$, entonces $z_n \in W_\varepsilon^s(x_n)$

y $z_n \notin f^{-k_n}(W_r^s(f^{k_n}(x_n)))$, es decir, $y_n = f^{k_n}(z_n) \notin W_r^s(f^{k_n}(x_n))$. Dado que $z_n \in W_\varepsilon^s(x_n)$, tenemos $d(f^k(z_n), f^k(x_n)) < \varepsilon$, para todo $k \geq 0$. Pero $f^{k_n}(z_n) \notin W_r^s(f^{k_n}(x_n))$, por lo que $d(f^{k_n}(z_n), f^{k_n}(x_n)) > r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Las secuencias $(f^{k_n}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(f^{k_n}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tienen puntos límite z y x en X , respectivamente, que cumplen $z \neq x$ y

$$d(f^k(z_n), f^k(x_n)) < \varepsilon, \forall k \geq 0 \Rightarrow d(f^{k+k_n}(z_n), f^{k+k_n}(x_n)) < \varepsilon, \forall k \geq -k_n,$$

entonces $d(f^k(f^{k_n}(z_n)), f^k(f^{k_n}(x_n))) < \varepsilon \longrightarrow d(f^k(z), f^k(x)) \leq \varepsilon < c$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, cuando $n \rightarrow \infty$. Esto es una contradicción. $\square$

Definición 1.44. ³ Decimos que un punto $p \in X$ es **estable** si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq W_\varepsilon^s(p)$.

Un punto $p \in X$ es **inestable** si es estable para f^{-1} , es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq W_\varepsilon^u(p)$.

Definición 1.45. ⁵ Decimos que un punto $p \in X$ es **asintóticamente estable** si es estable y existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subseteq W^s(p)$. Vea la figura 1.5

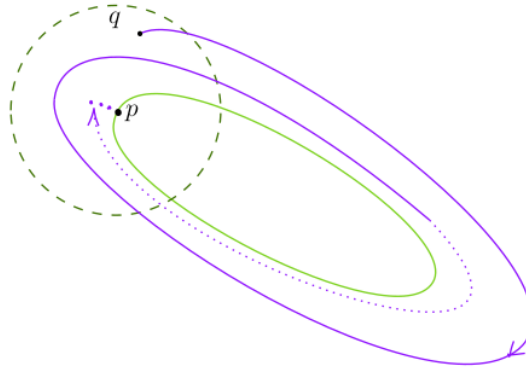


Figura 1.5: p es asintóticamente estable

Un punto p es llamado **atractor** si es periódico y asintóticamente estable. Un punto p es llamado **repulsor** si es periódico y asintóticamente estable para f^{-1} .

El siguiente teorema indica que para homeomorfismos expansivos, los puntos periódicos estables implican ser asintóticamente estables.

Teorema 1.46. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo. Si $p \in X$ es un punto periódico estable, entonces p es un punto atractor.*

Demostración. Sea p un punto periódico de periodo k . Por lo tanto, p es un punto fijo para f^k . Por contradicción, suponga que p es un punto fijo estable y no atractor, es decir, p no es asintóticamente estable. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset$



Figura 1.6: existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n_k}(q)$

$W_\varepsilon(p)$ y $q \in B_\delta(p)$ tal que $\omega(q) \neq \{p\}$. Sea $q' \in \omega(q)$ con $q' \neq p$ (vea la figura 4.1), luego

$$d(f^n(p), f^n(q')) \leq \delta,$$

como f es expansivo se tiene que $p = q'$, llegando a una contradicción. $\square$

Observe que el teorema anterior indica que si dos puntos se acompañan para iterados positivos entonces estos se aproximan cada vez mas a medida que se va iterando.

CAPÍTULO 2

HOMEOMORFISMOS HIPER-EXPANSIVOS

Como fue descrito en el capítulo anterior, los expansivos indican el comportamiento de la órbita de dos puntos suficientemente próximos. Es natural preguntarse que sucede con la órbita de continuos (conjunto compacto y conexo) suficientemente próximos. Así, Kato (1993) define un primer concepto referente a continuos, llamado de cw-expansivo, esto fue definido de la siguiente forma: f es llamado de cw-expansivo si existe $\delta > 0$ tal que si C es un continuo tal que $\text{diam} f^n(C) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces C es un único punto. Luego, Artigue (2013) introduce un concepto más fuerte que la expansividad, denominada de hiper-expansividad, esta estudia el comportamiento de la órbita de dos continuos suficientemente próximos.

2.1. Homeomorfismos hiper-expansivos

Dado un espacio métrico compacto X , consideremos el espacio de todos los subconjuntos compactos $A \subseteq X$, este espacio es llamado de hiperespacio y se denota por 2^X .

Definición 2.1. Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo definido en un espacio métrico

X . Llamamos de extensión natural de f para 2^X al mapeo $\hat{f} : 2^X \rightarrow 2^X$ definido por

$$\begin{aligned}\hat{f} : 2^X &\rightarrow 2^X \\ A &\rightarrow \hat{f}(A) = f(A)\end{aligned}$$

Definición 2.2. Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ es llamado **hiper-expansivo**, si existe una constante $c > 0$ tal que $\hat{f} : 2^X \rightarrow 2^X$ es expansivo, es decir, si existe una constante $c > 0$ tal que para cualquier dos subconjuntos $A, B \in 2^X$ no unitarios tenemos que

$$d_H(f^n(A), f^n(B)) \leq c \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

entonces $A = B$

Observe que equivalentemente a la definición anterior, podemos afirmar que para cualquier dos subconjuntos $A, B \in 2^X$ tenemos que

$$d_H(f^n(A), f^n(B)) \geq c \quad \text{para algún } n \in \mathbb{Z}$$

Observación 2.3. La hiper-expansividad garantiza la existencia finita de conjuntos compactos e invariantes. Caso contrario, de la compacidad de 2^X existe por menos dos conjuntos invariantes A y B suficientemente próximos (ε -próximos con ε una constante de hiper-expansividad), observe que las iteradas positivas y negativas de A y B continúan próximos por la invariancia de los conjuntos. Contradiciendo así la hiper-expansividad de f .

Observación 2.4. De acuerdo con la definición de 2.2 tenemos que

$$\text{Hiper-expansividad} \Rightarrow \text{expansividad} \Rightarrow \text{Cw-expansividad}$$

Lema 2.5. Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo hiper-expansivo. Si $K \subseteq X$ un conjunto minimal entonces K es un conjunto finito.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ una constante de hiper-expansividad. De acuerdo a la Observación 1.14, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in K$ existe $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal

que $d(f^j(x), y) \leq \varepsilon$. Además, $f^j(\mathcal{O}_n(x)) = \mathcal{O}_n(f^j(x))$ es ε -denso para todo $j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$d_H(f^j(K), f^j(\mathcal{O}_n(x))) \leq \varepsilon$$

Luego, de acuerdo con la hiper-expansividad tenemos que $K = \mathcal{O}_n(x)$, es decir, K es un conjunto finito. $\square$

Proposición 2.6. *Si f es hiper-expansivo entonces todo punto fijo de f es atractor o repulsor.*

Demostración. Por contradicción, supóngase que $p \in X$ es un punto fijo que no es atractor ni repulsor. Como p no es atractor, por el Teorema 1.46 tenemos que p no es estable, de esta forma existe $\varepsilon > 0$ y sucesiones $x_n \in X$ y $k_n > 0$ tal que $x_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $f^{k_n}x_n \notin B_\varepsilon(p)$. Podemos suponer que k_n es el primer tiempo donde el punto x_n salen de la bola, es decir, para todo $n < k_n$, $f^n x_n \in B_\varepsilon(p)$ y $f^{k_n}x_n \notin B_\varepsilon(p)$. Supongamos que $a_n = f^{k_n-1}(x_n) \rightarrow a \in \overline{B_\varepsilon(p)}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, podemos deducir que

$$f^n(a) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow -\infty,$$

y $a \neq p$. En efecto, basta observar la invariancia de los conjuntos $\alpha(t)$ y $\{p\}$, de acuerdo a la hiper-expansividad tenemos que $\alpha(a) = p$. De manera similar, si p no es repelente, existe $b \neq p$ tal que $f^n b \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\delta > 0$ una constante de hiper-expansividad y $n_0 > 0$ tal que $f^{-n}(a)$ y $f^n b$ pertenecen al conjunto $B_\delta(p)$ para todo $n \geq n_0$. Finalmente, observe que los conjuntos $A = \{f^{-n_0}(a), f^{n_0}(b)\}$ y $B = \{p, f^{-n_0}(a), f^{n_0}(b)\}$ contradicen la hiper-expansividad. En efecto, sea $U_\delta(f^n A) = \{x \in X : d(x, f^n A) \leq \delta\}$ un δ -entorno de $f^n A$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se afirma que $f^n B \subset U_\delta(f^n A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De hecho, como $f^{-n_0}a$ y $f^{n_0}b$ son puntos en común de A y B , bastaría probar que $p \in U_\delta(f^n A)$. Obsérvese que para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} d(p, f^n A) &= \inf\{d(p, y) : y \in f^n A\} \\ &\leq d(p, f^{n+n_0}b) \\ &\leq \delta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

La última desigualdad de (4,1) se tiene por la convergencia de la órbita de b al punto p . De esta forma $p \in U_\delta(f^n A)$ para todo $n \geq 0$. Se puede mostrar de manera similar que $p \in U_\delta(f^n A)$ para todo $n \leq 0$. Se ha probado entonces que todo δ -entorno de $f^n A$ contiene al conjunto $f^n B$. Es fácil observar que todo δ -entorno de $f^n B$ contiene al conjunto $f^n A$ para todo $n \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$d_H(f^n(A), f^n(B)) = \inf\{\delta' : f^n B \subset U_{\delta'}(f^n A) \text{ y } f^n A \subset U_{\delta'}(f^n B)\} \leq \delta.$$

La hiper-expansividad implica que $B = A$. Se concluye entonces que $p = f^{-n_0}a$ ó $p = f^{n_0}b$, de esta forma $a = p$ ó $b = p$, en cualquiera de los casos tenemos una contradicción $\square$

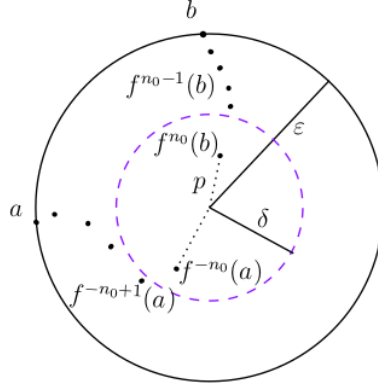


Figura 2.1: $f^n b \rightarrow p$ y $f^{-n}(a) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, .

Sea $p \in X$, recordemos que si p es una órbita periódica asintóticamente estable, se dice que la órbita de p es un *atractor*. Un *repelente* es un atractor para f^{-1} . Denotaremos por Per_r y Per_a como el conjunto de puntos periódicos repelentes y atractores, respectivamente.

Teorema 2.7. *Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ es hiper-expansivo si y solo si f posee un número finito de órbitas y $\Omega(f) = Per_r \cap Per_a$.*

Demostración. Supongamos que f es hiper-expansivo. Mostraremos que f posee un número finito de órbitas. De acuerdo con la hiper-expansividad tenemos un número

finito de puntos periódicos. Podemos suponer que todos los puntos periódicos son puntos fijos, basta tomar una potencia de f . Sabemos que $Per_r \cup Per_a \subseteq \Omega(f)$, mostremos que $\Omega(f) \subseteq Per_r \cup Per_a$. En efecto, sea $x \notin Per_r \cap Per_a$ un punto que no es fijo y consideremos el conjunto minimal $K \subseteq \omega(x)$. De acuerdo con el Lema 2.5 tenemos que $K = \{p\}$ puesto que todas los puntos periódicos son fijos. Afirmamos que $\omega(x) = \{p\}$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $y \in \omega(x)$ entonces existe $k_0 > 0$ tal que

$$d(f^{n_k}(x), y) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } k \geq k_0,$$

como $p \in \omega(x)$ y dado que p es atractor existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset W^s(p)$, luego existe $s_0 > 0$ tal que $f^{s_0}(x) \in W^s(p)$. Entonces existe $n_1 > s_0$ tal que

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

considerando un $n_2 = \max\{k_0, n_1\}$ tenemos que $d(y, p) \leq \varepsilon$. Por lo tanto, $y = p$, luego $\omega(x) = \{p\}$.

Finalmente, demostremos que $x \notin \Omega(f)$, es decir, para $\delta > 0$ consideremos un $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño y un $n_0 > 0$ tal que

- $f^n x \in B(p, \delta)$ para todo $n \geq n_0$ y tal que $f^n x \notin B(x, \varepsilon_0)$ para todo $1 \leq n \leq n_0$,
- $d(x, y) \leq \varepsilon_0$ implica $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \frac{\delta}{2}$ para todo $1 \leq n < n_0$.

Vea la figura 2.2.

Finalmente, mostremos que existe un número finito de órbitas. Observemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \geq 0$ tal que si $x \notin B_\varepsilon(\Omega(f))$ tal que $f^j x, f^k x \in B_\varepsilon(\Omega(f))$ si $j \geq n$ y $k \leq -n$. En efecto, si $x \notin B_\varepsilon(\Omega(f))$ entonces $d(x, \Omega(f)) > \varepsilon$, luego $x \notin \Omega(f)$, siguiendo la misma idea del párrafo inicial, tenemos que

$$\omega(x) = q \in Per(f) \subseteq \Omega(f) = Per_r \cap Per_a.$$

Por lo tanto, q es un punto atractor, luego, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(q) \subset W^s(q) \cap W_\varepsilon^s(q)$, es decir, existe $n > 0$ tal que $f^j x \in B_\varepsilon(q) \in B_\varepsilon(\Omega(f))$ para todo $j \geq n$, vea la figura 2.3 mostrando así nuestra afirmación.

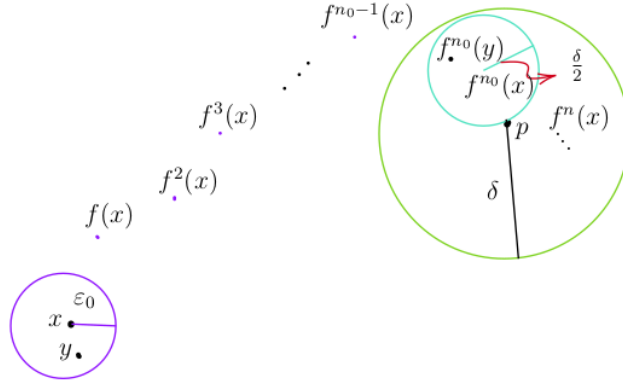


Figura 2.2: $x \in \Omega(f)$, es decir, $f^n(B_{\varepsilon_0}(x)) \cap B_{\varepsilon_0}(x) = \emptyset$

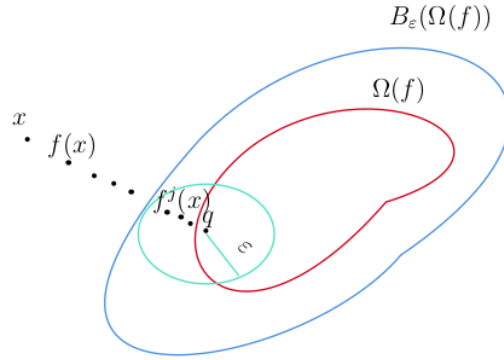


Figura 2.3: $B_\delta(q) \subset W^s(q) \cap W_\varepsilon^s(q)$

Supongamos que f tiene un número infinito de órbitas y $\varepsilon > 0$ una constante de expansividad para $\bar{f}$, entonces $X \setminus B_\varepsilon(\Omega(f))$ es un conjunto compacto infinito. Entonces, existe $x, y \notin B_\varepsilon(\Omega(f))$ y $p, q \in \Omega(f)$ tal que $\omega(y) = \omega(x) = \{p\}$ y $\alpha(x) = \alpha(y) = \{q\}$. Entonces, si x y y son suficientemente próximos, entonces estos puntos contradicen la expansividad de f . Esto contradice el número finitos de órbitas. $\square$

2.2. Shift de dos símbolos

Sea $\sum_2$ el espacio de secuencias de dos símbolos 0 y 1, es decir,

$$\sum_2 = \{x = a_0 a_1 a_2 \dots : a_i \in \{0, 1\}\}$$

Para dos secuencias $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$, definimos

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Es fácil ver que la métrica d genera la topología del producto en $\sum_2$. Sea la aplicación que corre los valores de las secuencias un lugar para la izquierda, es decir

$$\begin{aligned} \sigma : \sum_2 &\rightarrow \sum_2 \\ (x_i) &\rightarrow \sigma(x_i) = (x_{i+1}) \end{aligned}$$

La aplicación σ es conocida como la aplicación de desplazamiento (full-shift) y es continua con respecto a la métrica d definida. Esta construcción simple y abstracta resulta muy poderosa dentro de los Sistemas Dinámicos. El punto es que el full-shift y sus restricciones a subconjuntos invariantes modelan un conjunto impresionante de dinámicas en distintos contextos. Por ejemplo, los sistemas dinámicos caóticos en variedades suelen ser proyecciones de este tipo de dinámicas simbólicas.

El siguiente ejemplo demuestra que la implicancia de la Obervacion 2.4 no es verdadera, es decir

$$\text{Expansividad} \not\Rightarrow \text{Hiper-expansivo}$$

Ejemplo 2.8. Sea $\sum_2$ el espacio de secuencias de dos símbolos 0 y 1 y $K(\sum_2) = 2^{\sum_2}$ sea el espacio de hipervolúmenes de todos los subconjuntos compactos no vacíos de $\sum_2$. Es fácil observar que $(\sum_2, \sigma)$ es expansivo con una constante de expansividad de $\frac{1}{2}$. Sin embargo, demostramos que el sistema $(\sum_2, \sigma)$ no es hiper-expansivo. Supongamos que $(\sum_2, \sigma)$ es hiper-expansivo, es decir, $(K(\sum_2), \hat{\sigma})$ es expansivo, con una constante de expansividad δ . Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$. De-

finimos S_1 como $\{0^k 1^r 0^\infty : k \geq 0, r \leq n\}$ y S_2 como $\{0^k 1^r 0^\infty : k \geq 0, r \leq n+1\}$.

Luego, $d_H(S_1, S_2) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Además, $\sigma(S_i) = S_i, i = 1, 2$. Así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$,

$$d_H(\sigma^k(S_1), \sigma^k(S_2)) = d_H(S_1, S_2) = \frac{1}{2^{n+1}} < \delta,$$

lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, el sistema $(\mathcal{K}(\Sigma_2), \hat{\sigma})$ no es expansivo, es decir, (Σ_2, σ) no es hiper-expansivo. $\triangleleft$

CAPÍTULO 3

FLUJOS HIPER-EXPANSIVOS

En este capítulo definiremos los flujos hiper-expansivos y demostraremos diversas propiedades de esta. Nuestra adaptación de la hiper-expansividad para el caso continuo es más sutil que la hiper-expansividad para el caso discreto, debido a la dirección del flujo y la posibilidad de tener un conjunto de reparametrizaciones. De esta manera, logramos obtener un concepto que pueda abarcar distintos ejemplos y casos.

3.1. Introducción

Sea (X, ϕ) un flujo definido ³ en un espacio métrico compacto X . Donde un flujo en X es una función continua $\phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ denotada por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$, satisfaciendo:

- $\phi_0(x) = x$ para todo $x \in X$,
- $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.

Llamamos a ϕ de flujo regular si para cada $x \in X$ existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t(x) \neq x$, es decir, no tiene puntos de equilibrio.

Definición 3.1. Llamamos conjunto no errante al conjunto $\Omega(\phi)$ definido por

$$\Omega = \{x \in X : \text{para cada entorno } V_x \text{ y } t_0 > 0 \text{ existe } t > t_0 \text{ tal que } \phi_t(V_x) \cap V_x \neq \emptyset\}$$

Definición 3.2. Para $x \in X$ sean los conjuntos

$$\omega(x) = \{y \in X : \phi_{t_n}x \rightarrow y \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\},$$

$$\alpha(x) = \{y \in X : \phi_{-t_n}x \rightarrow y \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow \infty\}$$

Decimos que el punto $x \in X$ es recurrente si $x \in \omega(x) \cap \alpha(x)$.

Definición 3.3. Para cualquier $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Sean $W_\varepsilon^s(x)$ y $W_\varepsilon^u(x)$ los conjuntos **estable local** e **inestable local** de x respectivamente, definidas por:

$$W_\varepsilon^s(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R}^+) \text{ tal que } d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y) \leq \varepsilon \forall t \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R}^-) \text{ tal que } d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y) \leq \varepsilon \forall t \leq 0\}.$$

Definición 3.4. Para cualquier $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Sean $W^s(x)$ y $W^u(x)$ los conjuntos **estable global** y **inestable global** de x respectivamente, definidas por:

$$W^s(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R}^-) \text{ tal que } d(\phi_t x, \phi_{\alpha(t)} y) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\},$$

$$W^u(x) = \{y \in X : \exists \alpha \in \text{Rep}(\mathbb{R}^-) \text{ tal que } d(\phi_{-t} x, \phi_{\alpha(-t)} y) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty\}.$$

³ Decimos que un punto $x \in X$ es **estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset W_\varepsilon^s(x)$. El punto $x \in X$ será llamado de **inestable** si es estable para ϕ_{-t} . Decimos que x es **asintóticamente estable** si es estable y existes δ tal que $B_\delta(x) \subset W^s(x)$.

Definición 3.5. Un punto $p \in X$ es llamado **atractor** si posee una órbita periódica y es asintóticamente estable. Un **repelente** es un atractor para ϕ_{-t} .

Definición 3.6. Un punto $p \in X$ es llamado **no errante** para un flujo ϕ en X si para cualquier entorno U_x de x y $T_0 > 0$ existe un $t > T_0$ tal que $\phi_t(U_x) \cap U_x \neq \emptyset$.

3.2. Flujos expansivos

La adaptación de la expansividad para flujos definido por Bowen and Walters (1972) es más sutil que la definición de expansividad para homeomorfismos, debido a la dirección del flujo y a la posibilidad de tener una reparametrización.

Definamos los siguientes conjuntos:

- a) $\mathcal{R} = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ homeomorfismos tal que } h(0) = 0\}$,
- b) $\mathcal{H}(A) = \{\alpha : A \rightarrow \mathcal{R} : \exists x_\alpha \in A \text{ con } \alpha(x_\alpha) = id_{\mathbb{R}} \text{ y } \forall t \in \mathbb{R}, \alpha(\cdot)(t) \in C^0(A, \mathbb{R})\}$,
- c) para $\alpha \in \mathcal{H}(A)$ y $t \in \mathbb{R}$, definamos $\mathcal{X}_\alpha^t(A) = \{\phi_{\alpha(x)(t)}(x) : x \in A\}$. Cuando $\alpha(x) = I_d$ para todo $x \in A$, denotaremos a $\mathcal{X}_{I_d}^t(A)$ simplemente por $\mathcal{X}^t(A)$,
- d) $\mathcal{K}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos de X equipado con la métrica de Hausdorff,
- e) $\mathcal{C}(X) = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \text{ conexo}\}$.

Definición 3.7. Sea (X, ϕ) un flujo ϕ definido en un ²espacio métrico compacto X . Decimos que (X, ϕ) es **expansivo** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua con $s(0) = 0$ y $d(\phi_t x, \phi_{s(t)} y) \leq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $y \in \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)} x$.

Esto indica que dos órbitas se separarán δ en algún momento, no importa como los reparametricemos (una de ellas).

Proposición 3.8. Si (X, ϕ) es un flujo expansivo entonces todo punto fijo estable es atractor.

Demostración. Sean $p \in X$ un punto fijo y $\varepsilon > 0$. Por contradicción supongamos que ⁵ p es un punto estable pero no asintóticamente estable. Sea $\delta > 0$ una constante de expansividad correspondiente a $\varepsilon > 0$. De la estabilidad del punto $p \in X$ existe $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(p) \subset W_\delta^s(p)$; por otra parte, dado que p no es asintóticamente estable, existe $q \in B_{\delta'}(p)$ tal que $q \notin W^s(p)$. Por lo tanto, existe $\alpha(t) \in Rep(\mathbb{R})$ tal

que $\phi_{\alpha(t)}q \in B_\delta(p)$ para todo $t \geq 0$ y $p \notin \omega(q)$. Sea $q' \in \omega(q)$, $q' \neq p$, es inmediato observar que $q' \in B_{\delta'}(p)$. Por lo tanto

$$d(\phi_t(q'), p) \leq \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo a la expansividad, observe que $p = q'$, obteniendo una contradicción. Por lo tanto, todo punto fijo estable es atractor. $\square$

Proposición 3.9. *Si (X, ϕ) es un flujo expansivo, entonces cada punto fijo es aislado.*

Demostración. (Bowen and Walters, 1972, Lema 1) $\square$

Observación 3.10. *Observe que cada punto periódico no es aislado para puntos periódicos del mismo periodo. Basta observar, un punto en la órbita de un punto periódico, suficientemente próximo al punto periódico, este punto estará próximo al punto periódico y tendrá el mismo periodo.*

Definición 3.11. *Un flujo ϕ^t es **cw-expansivo** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con la propiedad de que si $A \in \mathcal{C}(X)$ y $\alpha \in H(A)$ con $\text{diam} \mathcal{X}_\alpha^t(A) < \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $A \subset \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}(x_\alpha)$.*

3.3. Flujos Hiper-expansivos

En esta sección definiremos los flujos hiper-expansivos y mostraremos que el flujo suspensión de la herradura de Smale es un flujo hiper-expansivo. Además, mostraremos que todo conjunto minimal está contenida en un segmento de órbita finita.

Familia de estables y inestables

Sea (X, ϕ) um flujo definido en un espacio métrico X . Definamos los conjuntos de familias estables e inestables de conjuntos compactos:

Definición 3.12. *Para cualquier $A \in \mathcal{K}(X)$ y $\varepsilon > 0$, sea $W_\varepsilon^s(A)$ y $W_\varepsilon^u(A)$ las*

familias locales estables y inestables de subconjuntos de X definidas por:

$$W_\varepsilon^s(A) = \{B \in \mathcal{K}(X) : \exists \alpha \in \mathcal{H}(B)^+ \text{ tal que } d_H(\mathcal{X}^t(A), \mathcal{X}_\alpha^t B) \leq \varepsilon, \forall t \geq 0\},$$

$$W_\varepsilon^u(A) = \{B \in \mathcal{K}(X) : \exists \alpha \in \mathcal{H}(B)^- \text{ tal que } d_H(\mathcal{X}^t(A), \mathcal{X}_\alpha^t B) \leq \varepsilon, \forall t \leq 0\}.$$

Definición 3.13. Sea

$$\hat{\phi}_t : 2^X \rightarrow 2^X \quad (3.1)$$

una extensión natural de la acción de ϕ a 2^X , definido por $\hat{\phi}_t(A) = \phi_t(A)$ para cualquier $A \in 2^X$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.14. Un flujo (X, ϕ) definido en un espacio métrico X es llamado **hiper-expansivo** si $(2^X, \hat{\phi})$ es expansivo, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$d_H(\mathcal{X}^t(B), \mathcal{X}_\alpha^t A) \leq \delta \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } A, B \in 2^X$$

entonces $A \subset \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)} B$.

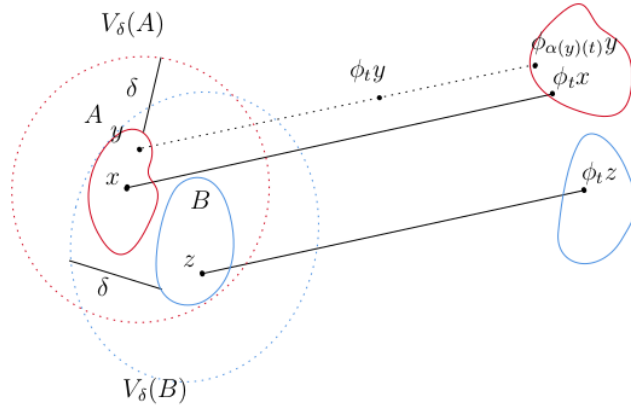


Figura 3.1: Hiper-expansividad

Observación 3.15. a) Observe que la adaptación de la hiper-expansividad para flujos es mas sutil que la hiper-expansividad para homeomorfismos, debido a la dirección del flujo y a la posibilidad de tener un conjunto de reparametrizaciones, vea la figura 3.3.

b) La hiper-expansividad es una propiedad más fuerte que la expansividad definida por Bowen, es decir, la hiper-expansividad implica la expansividad. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ una constante de expansividad para $\hat{\phi}$ correspondiente a ε . Afirmamos que $\delta > 0$ será una constante de expansividad para ϕ . En efecto, supongamos que $d(\phi_{\alpha(t)}x, \phi_t y) \leq \delta$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$. Por la definición de hiper-expansividad para los conjuntos $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$ tenemos que $x = \phi_r y$ para algún $|r| < \varepsilon$. Esto prueba que ϕ es expansivo.

Flujo hiper-expansivo $\Rightarrow$ Flujo expansivo $\Rightarrow$ Flujo Cw-expansivo.

◁

Flujo suspensión

Sea (X, d) un espacio métrico, $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo y $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Llamaremos de espacio suspensión de f sobre c al conjunto

$$X^{c,f} := \{(x, t) : 0 \leq t \leq c(x), x \in X\} / \sim$$

A seguir definiremos el flujo suspensión y la métrica definida en el espacio suspensión para mas detalles vea Bowen and Walters (1972)

Definición 3.16. La suspensión de f con altura c es el flujo definido por

$$\begin{aligned} \phi_t^{c,f} : X^{c,f} &\rightarrow X^{c,f}, \\ (x, s) &\mapsto \phi_t^{c,f}(x, s) := (f^n(x), s'), \end{aligned}$$

con n y s' satisfaciendo

$$\sum_{i=0}^{n-1} c(f^i(x)) + s' = t + s, \quad 0 \leq s' \leq c(f^n(x)).$$

Definamos ahora una métrica en $X^{1,f} = X^f$ y suponga que $\dim X \leq 1$. Consideremos el subconjunto $X \times \{t\}$ de $X \times [0, 1]$ y sea d_t la métrica definida por

$$d_t((y, t), (z, t)) = (1 - t)d(y, t) + td(f(y), f(z)), \quad y, z \in X.$$

Por otro lado, para cada $(x, t), (y, s) \in X^f$, considere todas las sucesiones finitas $(z_i, t_i)_{i=1}^n$ de elementos de X^f tal que $(z_1, t_1) = (x, t)$, $(z_n, t_n) = (y, s)$ y para cada $1 \leq i \leq n-1$, (x_i, t_i) y (x_{i+1}, t_{i+1}) pertenecen al mismo conjunto $X \times \{t\}$ para algún $t \in [0, 1]$ (en ese caso llamamos $[(x_i, t_i), (x_{i+1}, t_{i+1})]$ un segmento horizontal) o pertenecen a la misma órbita do flujo suspensión (en ese caso llamamos $[(x_i, t_i), (x_{i+1}, t_{i+1})]$ de segmento vertical). La **longitud de un segmento horizontal** será dado por la distancia d_t entre los puntos (x_i, t_i) y (x_{i+1}, t_{i+1}) , en cuanto la **longitud de un segmento vertical** será la distancia entre sus tiempos en $[0, 1]$. La longitud de una cadena es definido como la suma de las longitudes de sus segmentos horizontales y verticales. Definamos una métrica d^f en X^f de la siguiente forma:

$$d^f((x, t), (y, s)) = \inf\{\text{longitud de todas las cadenas entre } (x, t) \text{ y } (y, s)\}.$$

Teorema 3.17. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo y $c : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función continua. La suspensión de f con altura c es expansiva si y solo si f es expansiva.*

Demostración. Vea (Bowen and Walters, 1972, Teorema 6) □

Ejemplo 3.18. *El flujo suspensión de la herradura de Smale $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ definida en la sección 1.3.4 es expansiva. En efecto, en el ejemplo 2.8 mostramos que la función desplazamiento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ es expansivo. Por otro lado, existe una función $h : \Lambda \rightarrow \Sigma$ que es una conjugación topológica entre $f|_\Lambda$ y σ . Así, la herradura de Smale es expansiva, pues las conjugaciones topológicas llevan espacios expansivos en espacios expansivos. Finalmente, por el Teorema 3.17 tenemos que el flujo suspensión de la herradura de Smale es expansivo.*

El siguiente ejemplo muestra que la expansividad no implica la hiper-expansividad.

$$\text{Flujo expansivo} \not\Rightarrow \text{Flujo hiper-expansivo}.$$

Ejemplo 3.19. *El flujo suspensión de la herradura de Smale es un flujo expansivo pero no hipere expansivo. En efecto, todo punto periódico de un homeomorfismo es un punto periódico de su flujo suspensión. Además, sabemos que todo punto periódico de un flujo es un punto fijo de su hiperespacio. Por otro lado, la herradura de*

Smale definida en la subsección 1.3.4 tiene infinitos puntos periódicos, luego el flujo suspensión de la herradura en el hiper-espacio tiene infinitos puntos fijos. Sabemos que los flujos expansivos tienen un número finito de puntos fijos. Por lo tanto, el flujo en el hiper-espacio no puede ser expansivo, es decir, el flujo suspensión de la herradura de Smale no es hiper-expansivo. $\triangleleft$

Ejemplo 3.20. *Siguiendo la misma idea del ejemplo anterior, podemos observar que el flujo suspensión del difeomorfismo de Anosov lineal y del Shift de Bernoulli son ejemplos de flujos expansivos que no son hiper-expansivos.* $\triangleleft$

Definición 3.21. *Sea (X, ϕ) un flujo continuo definido en un espacio métrico. $A \subset X$ es minimal si*

- (a) *A es cerrado, $A \neq \emptyset$ y $\phi_t(A) = A$ para todo $t \in \mathbb{R}$,*
- (b) *$B \subset X$ satisface (a) y $B \subset A$ entonces $A = B$, es decir, no existe subconjunto propio satisfaciendo (a).*

Definición 3.22. *Decimos que A es un conjunto ε -denso en X si para todo $x \in X$ existe $y \in A$ tal que $d(x, y) \leq \varepsilon$.*

Lema 3.23. *Si (X, ϕ) es un flujo hiper-expansivo y $K \subset X$ un conjunto minimal entonces K esta contenida en un segmento de órbita finita.*

Demostración. De acuerdo a la minimalidad del conjunto K , afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\phi_{[0, t_0]}x$ es ε -denso en K . En efecto, suponga por contradicción existe $\varepsilon > 0$, $t_k \rightarrow \infty$ desde que $k \rightarrow \infty$ y puntos $x_k \in X$ tal que $\phi_{[0, t_k]}x_k$ no es ε -denso en K . Por lo tanto, de acuerdo a la definición anterior existe una sucesión $p_k \in K$ tal que $d(\phi_r x_k, p_k) \geq \varepsilon$ para todo $r \leq [0, t_k]$. Aplicando limite, $d(\phi_r x, p) \geq \varepsilon$ para todo $r \geq 0$, donde $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in X$ y $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k \in K$. Esto contradice la minimalidad de K . Continuando con la demostración, sea $\varepsilon_0 > 0$ y $\delta > 0$ una constante de hiper-expansividad correspondiente a ε_0 . Por el párrafo anterior y la continuidad uniforme de ϕ , existe un t_1 correspondiente a $\delta/2$ tal que para todo $x \in X$:

- (a) $\phi_{[0,t_1]}x$ es $\delta/2$ -densa en K ,
- (b) $d(\phi_u x, x) \leq \delta/2$ para todo $|u| \leq t_1$.

Es claro por la propiedad de flujos que

$$\phi_t(\phi_{[0,t_1]}x) = \phi_{[0,t_1]}(\phi_t x) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

así $\phi_t(\phi_{[0,t_1]}x)$ es $\delta/2$ -densa en K para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, concluimos que

$$d_H(\mathcal{X}^t(\phi_{[0,t_0]}x), \mathcal{X}^t K) = d_H(\phi_t(\phi_{[0,t_0]}x), K) \leq \delta.$$

Así, por la hiper-expansividad $K \subset \phi_{[-\varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]}x$. Esto prueba que K está contenido en un segmento de órbita finita. Mostremos la última desigualdad. Sea $t \in \mathbb{R}$, se afirma que :

- 1) $K \subset U_\delta(\phi_t(\phi_{[0,t_1]}x))$,
- 2) $\phi_t(\phi_{[0,t_1]}x) \subset U_\delta(K)$.

Por lo descrito en el párrafo anterior, 1) es inmediato. Mostremos 2). Sean $\phi_{t+r_1}x \in \phi_t(\phi_{[0,t_1]}x)$ y $q \in K$. De (a), existe $\phi_{t+r_2}x \in \phi_t(\phi_{[0,t_1]}x)$ tal que $d(q, \phi_{t+r_2}x) \leq \delta/2$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} d(\phi_{t+r_1}x, K) &\leq d(\phi_{t+r_1}x, q) \\ &\leq d(\phi_{t+r_1}x, \phi_{t+r_2}x) + d(\phi_{t+r_2}x, q) \\ &\leq d(\phi_{t+r_1}x, \phi_{t+r_1+u}x) + \delta/2 \\ &\leq \delta/2 + \delta/2 = \delta, \end{aligned}$$

donde $u = r_2 - r_1$ y $|u| \leq t_1$. Esto prueba que $\phi_t(\phi_{[0,t_1]}x) \subset U_\delta(K)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, se concluye que $d_H(\phi_t(\phi_{[0,t_0]}x), K) \leq \delta$, como se deseaba. $\square$

Observación 3.24. *Observe que el lema anterior nos indica que K es una órbita periódica.* $\triangleleft$

Llamamos punto fijo para $\hat{\phi}$ a todo conjunto $K \subset X$ compacto ϕ -invariante, es decir, $\phi_t(K) = K$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Observación 3.25.

1. Cada flujo hiper-expansivo posee un número finito de puntos fijos para $\hat{\phi}$. Caso contrario, existe por lo menos un punto de acumulación de puntos fijos. Por lo tanto, existen dos conjuntos diferentes, invariantes y suficientemente próximos K_1 y K_2 contradiciendo la hiper-expansividad.
2. Por lo anterior, note que todo flujo hiper-expansivo posee un número finito de puntos periódicos. $\triangleleft$

Proposición 3.26. Sea (X, ϕ) un flujo definido en un espacio métrico. Entonces existe al menos un conjunto minimal no vacío $K \subset X$.

Demostración. (Todd and Boris, 2018, Proposición 1.6.27) $\square$

Corolario 3.27. Cada flujo hiper-expansivo posee al menos una órbita periódica

Demostración. Sigue inmediatamente de la Proposición 3.26 y el Lema 3.23. $\square$

Teorema 3.28. Sea (X, ϕ) un flujo hiper-expansivo. Para cualquier $x \in X$ existe un punto periódico $p \in X$ tal que $\text{Orb}(p) \subset \omega(x)$.

Demostración. Sea $x \in X$. De la invariancia y compacidad del conjunto $\omega(x)$ y la Proposición 3.26, podemos garantizar la existencia de un conjunto minimal K contenido en el conjunto $\omega(x)$. Entonces, de acuerdo con el Lema 3.23 existe un punto periódico p tal que $K = \text{Orb}(p)$. $\square$

Finalmente, enunciamos algunos problemas que pueden ser abordados a futuro, o que podrían resultar de interés para los lectores de este trabajo.

Problema 1. ¿Podemos afirmar que todo punto no errante de flujos hiper-expansivos son atractores o repulsores?.

Para resolver el problema 1, observamos que es importante responder el siguiente problema:

Problema 2. ¿Los puntos periódicos estables de flujos expansivos actúan como atractores?.

CAPÍTULO 4

¹RESULTADO, DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

4.1. Resultado

Tal como hemos indicado en los objetivos de nuestra trabajo, los teoremas y proposiciones que enumeraremos a continuación, a modo de síntesis, representan nuestros resultados fundamentales. Dividiremos en dos partes nuestros resultados, la primera constará de los resultados descritos en el capítulo 2, que son resultados obtenidos en el artículo Artigue (2013) y la segunda parte constará de resultados obtenidos en este trabajo de tesis que son descritos en el capítulo 3.

Parte I

Teorema 1.46. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo. Si $p \in X$ es un punto periódico estable entonces p es un punto atractor.*

Demostración. Sea p un punto periódico de periodo k . Por lo tanto, p es un punto fijo para f^k . Por contradicción, suponga que p es un punto fijo estable y no atractor, es decir, p no es asintóticamente estable. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset$

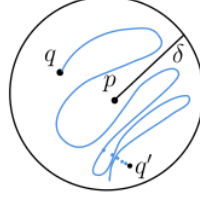


Figura 4.1: existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n_k}(q)$

$W_\varepsilon(p)$ y $q \in B_\delta(p)$ tal que $\omega(q) \neq \{p\}$. Sea $q' \in \omega(q)$ con $q' \neq p$ (vea la figura 4.1), luego

$$d(f^n(p), f^n(q')) \leq \delta,$$

como f es expansivo se tiene que $p = q'$, llegando a una contradicción. $\square$

Proposición 3.8. Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo expansivo. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $W_\varepsilon^s(x) \subset W^s(x)$ y $W_\varepsilon^u(x) \subset W^u(x)$.

Demostración. Sea $c > 0$ la constante de expansividad para f y elige $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < \frac{c}{2}$. Basta con demostrar que para todo $r > 0$ existe $n > 0$ tal que $f^k(W_\varepsilon^s(x)) \subset W_r^s(f^k(x))$, para todo $k \geq n$ y todo $x \in X$.

Supongamos que existe $r > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún $k_n \neq n$ y $x_n \in X$ tal que $W_r^s(f^{k_n}(x_n))$ no contiene a $f^{k_n}(W_\varepsilon^s(x_n))$, es decir, existe $y_n \in f^{k_n}(W_\varepsilon^s(x_n))$ pero $y_n \notin W_r^s(f^{k_n}(x_n))$. Sea $z_n = f^{-k_n}(y_n)$, entonces $z_n \in W_\varepsilon^s(x_n)$ y $z_n \notin f^{-k_n}(W_r^s(f^{k_n}(x_n)))$, es decir, $y_n = f^{k_n}(z_n) \notin W_r^s(f^{k_n}(x_n))$. Dado que $z_n \in W_\varepsilon^s(x_n)$, tenemos $d(f^k(z_n), f^k(x_n)) < \varepsilon$, para todo $k \geq 0$. Pero $f^{k_n}(z_n) \notin W_r^s(f^{k_n}(x_n))$, por lo que $d(f^{k_n}(z_n), f^{k_n}(x_n)) > r$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Las secuencias $(f^{k_n}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ y $(f^{k_n}(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tienen puntos límites z y x en X , respectivamente, que

cumplen $z \neq x$ y

$$d(f^k(z_n), f^k(x_n)) < \varepsilon, \forall k \geq 0 \Rightarrow d(f^{k+k_n}(z_n), f^{k+k_n}(x_n)) < \varepsilon, \forall k \geq -k_n,$$

entonces $d(f^k(f^{k_n}(z_n)), f^k(f^{k_n}(x_n))) < \varepsilon \longrightarrow d(f^k(z), f^k(x)) \leq \varepsilon < c$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, cuando $n \rightarrow \infty$. Esto es una contradicción. $\square$

Lema 2.5. *Sea $f : X \rightarrow X$ un homeomorfismo hiper-expansivo. Si $K \subseteq X$ un conjunto minimal entonces K es un conjunto finito.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ una constante de hiper-expansividad. De acuerdo a la Observación 1.14, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in K$ existe $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que $d(f^j(x), y) \leq \varepsilon$. Además, $f^j(\mathcal{O}_n(x)) = \mathcal{O}_n(f^j(x))$ es ε -denso para todo $j \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto,

$$d_H(f^j(K), f^j(\mathcal{O}_n(x))) \leq \varepsilon$$

Luego, de acuerdo con la hiper-expansividad tenemos que $K = \mathcal{O}_n(x)$, es decir, K es un conjunto finito. $\square$

Proposición 2.6. *Si f es hiper-expansivo entonces todo punto fijo de f es atractor o repulsor.*

Demostración. Por contradicción, supóngase que $p \in X$ es un punto fijo que no es atractor ni repulsor. Como p no es atractor, por el Teorema 1.46 tenemos que p no es estable, de esta forma existe $\varepsilon > 0$ y sucesiones $x_n \in X$ e $k_n > 0$ tal que $x_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$ y $f^{k_n}x_n \notin B_\varepsilon(p)$. Podemos suponer que k_n es el primer tiempo donde los punto x_n salen de la bola, es decir, para todo $n < k_n$, $f^n x_n \in B_\varepsilon(p)$ y $f^{k_n}x_n \notin B_\varepsilon(p)$. Supongamos que $a_n = \phi_{k_n-1}(x_n) \rightarrow a \in \overline{B_\varepsilon(p)}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por lo tanto, podemos deducir que

$$f^n(a) \rightarrow p \text{ cuando } n \rightarrow -\infty,$$

y $a \neq p$. En efecto, basta observar la invariancia de los conjuntos $\alpha(t)$ e $\{p\}$, de acuerdo a la hiper-expansividad tenemos que $\alpha(a) = p$. De manera similar, si p no

es repelente, existe $b \neq p$ tal que $f^n b \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea $\delta > 0$ una constante de hiper-expansividad y $n_0 > 0$ tal que $f^{-n}(a)$ y $f^n b$ pertenecen al conjunto $B_\delta(p)$ para todo $n \geq n_0$. Finalmente, observe que los conjuntos $A = \{f^{-n_0}(a), f^{n_0}(b)\}$ y $B = \{p, f^{-n_0}(a), f^{n_0}(b)\}$ contradicen la hiper-expansividad. En efecto, sea $U_\delta(f^n A) = \{x \in X : d(x, f^n A) \leq \delta\}$ un δ -entorno de $f^n A$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se afirma que $f^n B \subset U_\delta(f^n A)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. De hecho, como $f^{-n_0}a$ y $f^{n_0}b$ son puntos en común de A y B , bastaría probar que $p \in U_\delta(f^n A)$. Obsérvese que para todo $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} d(p, f^n A) &= \inf\{d(p, y) : y \in f^n A\} \\ &\leq d(p, f^{n+n_0}b) \\ &\leq \delta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

La última desigualdad de (4.1) se tiene por la convergencia de la órbita de b al punto p . De esta forma $p \in U_\delta(f^n A)$ para todo $n \geq 0$. Se puede mostrar de manera similar que $p \in U_\delta(f^n A)$ para todo $n \leq 0$. Se ha probado entonces que todo δ -entorno de $f^n A$ contiene al conjunto $f^n B$. Es fácil observar que todo δ -entorno de $f^n B$ contiene al conjunto $f^n A$ para todo $n \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$d_H(f^n(A), f^n(B)) = \inf\{\delta' : f^n B \subset U_{\delta'}(f^n A) \text{ y } f^n A \subset U_{\delta'}(f^n B)\} \leq \delta.$$

La hiper-expansividad implica que $B = A$. Se concluye entonces que $p = f^{-n_0}a$ ó $p = f^{n_0}b$, de esta forma $a = p$ ó $b = p$, en cualquiera de los casos tenemos una contradicción $\square$

Teorema 2.7. *Un homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ es hiper-expansivo si y solo si f posee un número finito de órbitas y $\Omega(f) = Per_r \cap Per_a$.*

Demostración. Supongamos que f es hiper-expansivo. Mostraremos que f posee un número finito de órbitas. De acuerdo con la hiper-expansividad tenemos un número finito de puntos periódicos. Podemos suponer que todos los puntos periódicos son puntos fijos, basta tomar una potencia de f . Sabemos que $Per_r \cup Per_a \subseteq \Omega(f)$, mostremos que $\Omega(f) \subseteq Per_r \cup Per_a$. En efecto, sea $x \notin Per_r \cap Per_a$ un punto

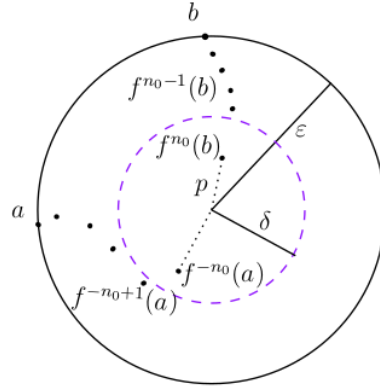


Figura 4.2: $f^n b \rightarrow p$ y $f^{-n}(a) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.

fijo e consideremos el conjunto minimal $K \subseteq \omega(x)$. De acuerdo con el Lema 2.5 tenemos que $K = \{p\}$ puesto que todos los puntos periódicos son fijos. Afirmamos que $\omega(x) = \{p\}$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y $y \in \omega(x)$ entonces existe $k_0 > 0$ tal que

$$d(f^{n_k}(x), y) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } k \geq k_0,$$

como $p \in \omega(x)$ y dado que p es atractor existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset W^s(p)$, luego existe $s_0 > 0$ tal que $f^{s_0}(x) \in W^s(p)$. Entonces existe $n_1 > s_0$ tal que

$$d(f^n(x), p) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } n \geq n_1,$$

considerando un $n_2 = \max\{k_0, n_1\}$ tenemos que $d(y, p) \leq \varepsilon$. Por lo tanto $y = p$, luego $\omega(x) = \{p\}$. Finalmente, demostremos que $x \notin \Omega(f)$, es decir, para $\delta > 0$ consideremos un $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño y un $n_0 > 0$ tal que

- $f^n x \in B(p, \delta)$ para todo $n \geq n_0$ y tal que $f^n x \notin B(x, \varepsilon_0)$ para todo $1 \leq n \leq n_0$,
- $d(x, y) \leq \varepsilon_0$ implica $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \frac{\delta}{2}$ para todo $1 \leq n < n_0$.

Vea la figura 2.2. Finalmente, si f tiene un número infinito de órbitas y $\varepsilon > 0$ una constante de expansividad para $\bar{f}$, entonces $X \setminus B_\varepsilon(\Omega(f))$ es un conjunto compacto infinito. Entonces, existe $x, y \notin B_\varepsilon(\Omega(f))$ y $p, q \in \Omega(f)$ tal que $\omega(y) = \omega(x) = \{p\}$ y $\alpha(x) = \alpha(y) = \{q\}$.

□

Parte II

Proposición 3.8. Si (X, ϕ) es un flujo expansivo entonces todo punto fijo estable es atractor.

Demostración. Sean $p \in X$ un punto fijo y $\varepsilon > 0$. Por contradicción supongamos que p es un punto estable pero no asintóticamente estable. Sea $\delta > 0$ una constante de expansividad correspondiente a $\varepsilon > 0$. De la estabilidad del punto $p \in X$ existe $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(p) \subset W_\delta^s(p)$; por otra parte, dado que p no es asintóticamente estable, existe $q \in B_{\delta'}(p)$ tal que $q \notin W^s(p)$. Por lo tanto, existe $\alpha(t) \in \text{Rep}(\mathbb{R})$ tal que $\phi_{\alpha(t)}q \in B_\delta(p)$ para todo $t \geq 0$ y $p \notin \omega(q)$. Sea $q' \in \omega(q)$, $q' \neq p$, es inmediato observar que $q' \in B_{\delta'}(p)$. Por lo tanto

$$d(\phi_t(q'), p) \leq \delta \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo a la expansividad, observe que $p = q'$, obteniendo una contradicción. Por lo tanto, todo punto fijo estable es atractor. □

Definición 3.13. Sea

$$\hat{\phi}_t : 2^X \rightarrow 2^X \quad (4.2)$$

una extensión natural de la acción de ϕ a 2^X , definido por $\hat{\phi}_t(A) = \phi_t(A)$ para cualquier $A \in 2^X$ y $t \in \mathbb{R}$.

Definición 3.14. Un flujo (X, ϕ) definido en un espacio métrico X es llamado **hiper-expansivo** si $(2^X, \hat{\phi})$ es expansivo, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si

$$d_H(\mathcal{X}^t(B), \mathcal{X}_\alpha^t(A)) \leq \delta \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ y } A, B \in 2^X$$

entonces $A \subset \phi_{(-\varepsilon, \varepsilon)}B$.

Lema 3.23. Si (X, ϕ) es un flujo hiper-expansivo y $K \subset X$ un conjunto minimal entonces K esta contenida en un segmento de órbita finita.

Demostración. De acuerdo a la minimalidad del conjunto K , afirmamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $t_0 > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\phi_{[0, t_0]}x$ es ε -densa en K . En efecto,

suponga por contradicción existe $\varepsilon > 0$, $t_k \rightarrow \infty$ desde que $k \rightarrow \infty$ y puntos $x_k \in X$ tal que $\phi_{[0, t_k]}x_k$ no es ε -densa en K . Por lo tanto, de acuerdo a la definición anterior existe una sucesión $p_k \in K$ tal que $d(\phi_r x_k, p_k) \geq \varepsilon$ para todo $r \leq [0, t_k]$. Aplicando limite, $d(\phi_r x, p) \geq \varepsilon$ para todo $r \geq 0$, donde $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in X$ y $p = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k \in K$. Esto contradice la minimalidad de K . Continuando con la demostración, sea $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta > 0$ una constante de hiper-expansividad correspondiente a ε_0 . Por el párrafo anterior y la continuidad uniforme de ϕ , existe un t_1 correspondiente a $\delta/2$ tal que para todo $x \in X$:

- (a) $\phi_{[0, t_1]}x$ es $\delta/2$ -densa en K ,
- (b) $d(\phi_u x, x) \leq \delta/2$ para todo $|u| \leq t_1$.

Es claro por la propiedad de flujos que

$$\phi_t(\phi_{[0, t_1]}x) = \phi_{[0, t_1]}(\phi_t x) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

así $\phi_t(\phi_{[0, t_1]}x)$ es $\delta/2$ -densa en K para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, concluimos que

$$d_H(\mathcal{X}^t(\phi_{[0, t_0]}x), \mathcal{X}^t K) = d_H(\phi_t(\phi_{[0, t_0]}x), K) \leq \delta.$$

Así, por la hiper-expansividad $K \subset \phi_{[-\varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0]}x$. Esto prueba que K está contenido en un segmento de órbita finita. Mostremos la última desigualdad. Sea $t \in \mathbb{R}$, se afirma que :

- 1) $K \subset U_\delta(\phi_t(\phi_{[0, t_1]}x))$,
- 2) $\phi_t(\phi_{[0, t_1]}x) \subset U_\delta(K)$.

Por lo descrito en el párrafo anterior, 1) es inmediato. Mostremos 2). Sean $\phi_{t+r_1}x \in \phi_t(\phi_{[0, t_1]}x)$ y $q \in K$. De (a), existe $\phi_{t+r_2}x \in \phi_t(\phi_{[0, t_1]}x)$ tal que $d(q, \phi_{t+r_2}x) \leq \delta/2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 d(\phi_{t+r_1}x, K) &\leq d(\phi_{t+r_1}x, q) \\
 &\leq d(\phi_{t+r_1}x, \phi_{t+r_2}x) + d(\phi_{t+r_2}x, q) \\
 &\leq d(\phi_{t+r_1}x, \phi_{t+r_1+u}x) + \delta/2 \\
 &\leq \delta/2 + \delta/2 = \delta,
 \end{aligned}$$

donde $u = r_2 - r_1$ e $|u| \leq t_1$. Esto prueba que $\phi_t(\phi_{[0,t_1]}x) \subset U_\delta(K)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, se concluye que $d_H(\phi_t(\phi_{[0,t_0]}x), K) \leq \delta$, como se deseaba.

□

Corolario 3.27. *Cada flujo hiper-expansivo posee al menos una órbita periódica.*

Demostración. Sigue inmediatamente de la Proposición 3.26 y el Lema 3.23. □

Teorema 3.28. *Sea (X, ϕ) un flujo hiper-expansivo. Para cualquier $x \in X$ existe un punto periódico $p \in X$ tal que $\text{Orb}(p) \subset \omega(x)$.*

Demostración. Sea $x \in X$. De la invariancia y compacidad del conjunto $\omega(x)$ y la Proposición 3.26, podemos garantizar la existencia de un conjunto minimal K contenido en el conjunto $\omega(x)$. Entonces, de acuerdo con el Lema 3.23 existe un punto periódico p tal que $K = \text{Orb}(p)$. □

4.2. Discusión

- Comprender la dinámica hiperbólica se ha convertido en el principal objetivo de muchos investigadores del área y se han considerado muchas generalizaciones de la hiperbolicidad: Hiperbolicidad Parcial, Hiperbolicidad No Uniforme, Descomposición Dominada, entre otras. Todas estas nociones suponen fuertes propiedades en el comportamiento de la derivada del sistema, casi nada se puede decir, a partir de estas teorías, sobre sistemas definidos en espacios métricos que no son variedades, o para espacios de Peano (localmente conexos), sin considerar alguna diferenciabilidad del sistema. Observamos que para el

investigador de ciencias naturales, el conocimiento de las propiedades de diferenciabilidad de un sistema nunca es inmediato. Por tanto, resulta interesante desarrollar teorías que no involucren la derivada y considerar generalizaciones de la hiperbolicidad desde un punto de vista topológico, como es la hiper-expansividad, expansividad y cw-expansividad.

- En la búsqueda de la teoría de la hiper-expansividad para flujos, iniciamos de forma preliminar con el estudio de la expansividad y hiper-expansividad para homeomorfismos. Se observa que la hiper-expansividad implica la expansividad y se obtiene resultados más fuertes con la teoría de la hiper-expansividad. De hecho, en el Teorema 1.46, un punto periódico estable definido en un espacio expansivo implica ser un punto atractor, es decir, las órbitas de dos puntos suficientemente próximos a un punto estable, se aproximan cada vez más para tiempos positivos, y en la Proposición 2.6 se observa que todo punto fijo en un espacio Hiper-expansividad es atractor o repulsor, observando que en el caso de la hiper-expansividad no exigimos la estabilidad para garantizar que un punto sea atractor.
- La adaptación de la hiper-expansividad para el caso continuo es más sutil que la hiper-expansividad para el caso discreto, debido a la dirección del flujo y la posibilidad de tener un conjunto de reparametrizaciones. Así, los flujos hiper-expansivos descrita en 3.14 fue definida usando un continuo de reparametrizaciones. Es importante realzar que nuestra definición fue creada usando las ideas de flujos cw-expansivos definidas en Arbieto et al. (2017). Al intentar llevar propiedades del caso discreto al continuo, nos enfrentamos a diversos problemas relacionados con las reparametrizaciones, motivo por el cual es necesario diversas herramientas como las secciones transversales.

4.3. Conclusión y Sugerencia

Es fundamental y a manera de resumen dar algunas conclusiones sobre nuestros resultados mas importantes. Para mejor orden lo dividiremos en dos partes.

- En el estudio de homeomorfismos hiper-expansivos, logramos concluir que una de las principales importancias, es la implicancia de propiedades mucho más fuertes que en el caso de expansivo. En efecto, observamos que los elementos de estudio son los compactos, englobando así diversas propiedades y obteniendo resultados más fuertes que los expansivos y cw-expansivos. Por otro lado, para homeomorfismos hiper-expansivos garantizamos la relación existente de conjuntos minimales con las órbitas periódicas. En efecto, en Lema 3.23 se muestra que los conjuntos minimales son órbitas periódicas.
- En el caso continuo, exploramos diversas formas de definir la hiper-expansividad para flujos, tomando en consideración las definiciones de expansividad y cw-expansividad para flujos. Después de examinar los distintos resultados y teniendo en cuenta la dificultad de las reparametrizaciones, logramos obtener como resultado la Definición 3.14, obteniendo así una definición que pueda obtener la mayor cantidad de posibilidades de ejemplos que encajen en ella. Un ejemplo para esta definición es el flujo suspensión de la herradura de Smale. Logramos concluir que los hiper-expansivos implican la expansividad y cw-expansividad.
- El Lema 3.23 y en el Teorema 3.28 logramos obtener resultados significativos para flujos hiper-expansivos. Sin embargo, reconocemos que aún tenemos un largo camino a recorrer por este mundo de los hiper-expansivos. Hemos identificado varios problemas que requieren atención, los cuales están descritos en el Problema 1 y el Problema 2 al final de nuestro trabajo. A seguir, damos algunas sugerencias del problema 2.

Primera tentativa del problema 2. Aquí trabajamos con la definición de conjuntos estables definidas con reparametrizaciones. El problema cae en no encontrar una reparametrización para el punto q' (como se observa en la ecuación de color rojo) y también no logramos garantizar que $p \notin \omega(p)$. Como es descrito en la siguiente demostración:

Sean $p \in X$ un punto periódico, $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0}p = p$ y $\delta > 0$

una constante de expansividad correspondiente a $\varepsilon > 0$. Supongamos por contradicción que p es un punto estable pero no asintóticamente estable.

De la estabilidad del punto $p \in X$ existe $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(p) \subset W_{\delta}^s(p)$; por otra parte, dado que p no es asintóticamente estable, existe $q \in B_{\delta'}(p)$ tal que $q \notin W^s(p)$. Por lo tanto, existe $\alpha(t) \in Rep(\mathbb{R})$ tal que $\phi_{\alpha(t)}q \in B_{\delta}(\phi_t p)$ para todo $t \geq 0$ pero tal que, $p \notin \omega(q)$. Sea $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_0 n)}q$, de acuerdo a la Definición 3.12 tenemos que $q' \neq p$. Por lo tanto

$$d(\phi_{\alpha(t)}q', \phi_t p) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi_{\alpha(t) + \alpha(t_0 n)}(q), \phi_t p) \leq \delta \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

La última desigualdad de la ecuación anterior no necesariamente es verdadera, este es un problema común que se tiene cuando se trabaja con reparametrizaciones. Si lográsemos responder esta última desigualdad como afirmativa, podríamos seguir nuestra demostración como se muestra a seguir: Por la expansividad de ϕ , se llega a que $\phi_r p = q'$ para algún $|r| \leq \varepsilon$ y entonces $p \in \omega(q)$. En efecto, como $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_0 n)}q$ entonces

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_0 n) - r} q$$

Así, $p \in \omega(q)$, lo cual es una contradicción.

Segunda tentativa del problema 2. Para no caer en el problema anterior, pensamos que podríamos trabajar con otro tipo de reparametrizaciones. En efecto, definiremos los conjuntos estables con reparametrizaciones en $Rep(\varepsilon)$, es decir, funciones Lipchitz. Observamos que con este tipo de reparametrización, solucionamos el problema inicial y creemos que es posible concluir como afirmativo nuestro problema, por el tiempo y dado que no es un objetivo de nuestra tesis, dejamos como un problema a trabajar a futuro o para los lectores interesados. Damos algunas ideas para la demostración del problema 2:

Sean $p \in X$ un punto periódico, $\varepsilon > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_{t_0} p = p$ y $\delta > 0$ una constante de expansividad correspondiente a $\varepsilon > 0$. Supongamos por contradicción que p es un punto estable pero no asintóticamente estable.

De la estabilidad del punto $p \in X$ existe $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(p) \subset W_{\delta}^s(p)$ (definiremos los conjuntos estables com reparametrizaciones en $Rep(\varepsilon)$, es decir, funciones lipchitz); por otra parte, dado que p no es asintóticamente estable, existe $q \in B_{\delta'}(p)$ tal que $q \notin W^s(p)$.

Supongamos que $p \notin \omega(q)$. Sea $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_0n)}q$, $q' \neq p$. Por lo tanto, defina $\alpha_n(t) = \alpha(t + t_0n) - \alpha(t)$, entonces $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in Rep(\varepsilon)$

$$d(\phi_{\beta(t)}q', \phi_t p) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\phi_{\alpha(t+t_0n)}(q), \phi_t p) \leq \delta \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Luego, por la expansividad de ϕ tenemos que $\phi_r p = q'$ para algún $|r| \leq \varepsilon$ y entonces $p \in \omega(q)$. De fato, como $q' = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_0n)}q$ entonces

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_0n)-r}q$$

Así, $p \in \omega(q)$, lo cual es una contradicción.

Ahora supongamos que $p \in \omega(q)$. Observe que para cualquier $a \in B_{\delta'}(p)$ tenemos que $a' = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{\alpha'(t_0n)}a$ pertenece a la órbita de p . Por otro lado, el hecho de $q \notin W^s(p)$ implica que existe una secuencia $t_k \rightarrow \infty$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_{\alpha(t_k)}q = q''$ pertenezca a la órbita de p o no. Si $q'' \notin Orb(p)$, entonces existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\phi_t q'' \in B_{\delta'}(p)$ (aquí por la continuidad q'' acompaña a la órbita de $\phi_{\alpha(t_k)}q''$ cada vez mas, dado que $p \in \omega(q)$ garantizamos que la órbita de p se aproxima para p). De acuerdo a la afirmación del párrafo anterior, $q'' \in Orb(p)$, contradicción.

¿Podemos afirmar que $q'' \in Orb(p)$?

Para el problema 1, creemos que las herramientas usadas hasta el momento no son suficientes para lograr resolver . Por lo tanto, como sugerencia podemos afirmar que las secciones transversales son importantes para este tipo de problemas, esto puede verse en el artículo de Artigue (2015).

¹ Finalmente recomendar, a todos los interesados en leer el presente trabajo, tener claro los conceptos de disciplinas básicas tales como Topología y Análisis real. Eso

4.3. CONCLUSIÓN Y SUGERENCIA

facilitará a entender y codificar ¹mejor, los temas que se tratan en el presente trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

- Arbieto, A., Cordeiro, W., and Pacifico, M. (2017). *Continuum-wise expansivity and entropy for flows*, volume 1. Ergodic Theory and Dynamical Systems.
- Artigue, A. (2013). *Hyper-expansive homeomorphisms*, volume 1. Publ. Mat. Urug. (14). pp 72-77.
- Artigue, A. (2015). *Fields of Cross Sections and Expansive Flows*, volume 1. arxiv.org/pdf/1502.02691.pdf.
- Bauer, W. and Sigmund, K. (1975). *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures.*, volume 1. Monatsh. Math.(79). <https://doi.org/10.1007/BF01585664>.
- Bowen, R. and Walters, p. (1972). *Expansive one-parameter flows*, volume 1. J. Diff. Eq.
- Hiraide, K. (1990). *Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov*, volume 1. Osaka J. Math. (27). pp 117-162.
- Kato, H. (1993). *Continuumwise expansive homeomorphisms*, volume 1. Canada. J. Math.
- Namjip, K., Hyunhee, L., and Nyamdavaa, T. (2020). *Topological Stability in Hy-*

- perspace Dynamical Systems*, volume 1. Commun. Korean Math. Soc. (4), pp. 1309-1318.
- Roberto Hernández, S. and Mendoza Torres, C. (2018). *Metodología de la investigación*, volume 1. Editorial MC Graw Hill Education.
- Tam Malaga, J., Vera, G., and Oliveros Ramos, R. (2008). *Tipos, métodos y estrategias de investigación científica.*, volume 1. Escuela de posgrado. Lima.
- Todd, F. and Boris, H. (2018). *Hyperbolic flows*, volume 1. Graduate School of Mathematical Sciences.
- Williams, R. U. (1950). *Unstable homeomorphisms*, volume 1. Proc. Amer. Math. Soc.

Homeomorfismos hiper-expansivos y una adaptación para flujos en hiper-espacios

INFORME DE ORIGINALIDAD

7%

INDICE DE SIMILITUD

5%

FUENTES DE INTERNET

0%

PUBLICACIONES

3%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga	2%
	Trabajo del estudiante	
2	archive.cmat.edu.uy	2%
	Fuente de Internet	
3	www.fing.edu.uy	1%
	Fuente de Internet	
4	scielo.pt	<1%
	Fuente de Internet	
5	issuu.com	<1%
	Fuente de Internet	
6	tr-ex.me	<1%
	Fuente de Internet	
7	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA	<1%
	Trabajo del estudiante	
8	prezi.com	<1%
	Fuente de Internet	

9

hdl.handle.net

Fuente de Internet

<1 %

10

www.slideshare.net

Fuente de Internet

<1 %

11

Submitted to Unviersidad de Granada

Trabajo del estudiante

<1 %

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias < 30 words

Excluir bibliografía

Activo