

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE  
HUAMANGA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL**

**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS:**

**Matrices de Diferenciación y el Operador de Laurent**

Para optar el título profesional de:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.**

**ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR:**

**Bach. Nilo NAJARRO CÁRDENAS**

**ASESOR:**

**M.Sc. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO**

**AYACUCHO - PERÚ**

**2024**

# DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi esposa, que gracias a su empeño de superación y a su paciencia, me exhortó a continuar caminando hacia adelante.

Y a mis hijos Álvaro Abimael, Camila y Diego.

*Nilo N.*

# AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento:

- A mi familia que me han dado impulso a mi superación académica, y siempre han estado conmigo en todo momento, en especial a mi madre y hermanos.
- A todas las personas que de alguna u otra manera coadyuvaron a terminar este trabajo.
- A la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga por haberme aceptado ser parte de ella, en especial a la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, por contribuir con mi formación académica, así también a los docentes que brindaron sus conocimientos y su apoyo incondicional para seguir adelante.
- Finalmente, quiero agradecer al M.Sc. Daúl Andrés Paiva Yanayaco, quien con su dirección, conocimiento y colaboración permitió el desarrollo de este trabajo.

## RESUMEN

La presente tesis tiene por objetivo analizar y utilizar las matrices de diferenciación para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales con condiciones de frontera. Una de las ventajas de utilizar dichas matrices es que para aproximar la derivada con un mayor orden, bastará con solo realizar multiplicaciones de ellas. Tal es el caso de las matrices de diferenciación de Chebyshev y las de Fourier. Estas matrices de diferenciación tienen relación con las matrices circulantes y de Toeplitz, es por ello que se estudiarán algunas propiedades de las mencionadas matrices. Asimismo, los ejemplos que tienen solución exacta se comparan con las soluciones que se obtengan aplicando matrices de diferenciación. Se hará énfasis a las diferencias finitas de segundo orden para aproximar la primera derivada de la función  $u(x)$ , que está dada por  $u'(x_i) \approx w_i = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . En esta parte se genera un sistema de ecuaciones lineales, que en forma matricial, a la matriz del sistema se le llama matriz de diferenciación. Se espera generar matrices diferenciales tal que al aplicarlas recursivamente se obtenga el llamado Operador de Laurent.

## Palabras Clave

Matrices de diferenciación de Chebyshev, de Fourier. Diferencias finitas. Operador de Laurent.

## ABSTRACT

The objective of this thesis is to analyze and use differentiation matrices to numerically solve differential equations with boundary conditions. One of the advantages of using these matrices is that to approximate the derivative with a higher order, it will be enough to simply perform nulliplications of them. Such is the case of the Chebyshev and Fourier differentiation matrices. These differentiation matrices are related to the circulating and Toeplitz matrices, which is why some properties of the mentioned matrices will be studied. Likewise, the examples that have an exact solution are compared with the solutions that are obtained by applying differentiation matrices. Emphasis will be placed on second-order finite differences to approximate the first derivative of the function  $u(x)$ , which is given by  $u'(x_i) \approx w_i = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h}$ , for  $i = 1, 2, \dots, n$ . In this part, a system of linear equations is generated, which in matrix form, the matrix of the system is called the differentiation matrix. It is expected to generate differential matrices such that by applying them recursively the so-called Laurent Operator will be obtained.

## Keywords

Chebyshev and Fourier differentiation matrices. Finite differences. Laurent operator.

# ÍNDICE GENERAL

<b>Resumen</b>	<b>vi</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Índice general</b>	<b>viii</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>x</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Introducción</b>	<b>xii</b>
<b>I. Planteamiento del problema</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción de la realidad problemática . . . . .	1
1.2. Delimitación de la investigación . . . . .	2
1.2.1. Espacial . . . . .	2
1.2.2. Social . . . . .	2
1.2.3. Temporal . . . . .	2
1.3. Problema de investigación . . . . .	3
1.3.1. Problema general . . . . .	3
1.3.2. Problema específico . . . . .	3
1.4. Objetivos . . . . .	3
1.4.1. Objetivo general . . . . .	3
1.4.2. Objetivo específico . . . . .	3
1.5. Hipótesis . . . . .	3
1.5.1. Hipótesis general . . . . .	3
1.5.2. Hipótesis específicas . . . . .	4
1.6. Diseño . . . . .	4
1.6.1. Tipo . . . . .	4
1.6.2. Nivel . . . . .	5
1.6.3. Método . . . . .	5
1.7. Población . . . . .	5

<b>II. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Antecedentes del Problema . . . . .	6
2.1.1. Internacionales . . . . .	6
2.1.2. Nacionales . . . . .	7
2.1.3. Locales . . . . .	7
2.2. Bases teóricas . . . . .	8
2.2.1. Interpolación de Hermite y de Lagrange . . . . .	8
2.2.2. Espacios vectoriales . . . . .	12
2.2.3. Espacios de Banach . . . . .	23
2.2.4. Espacios de Sobolev . . . . .	26
2.2.5. Distribuciones . . . . .	28
2.2.6. Matriz Toeplitz . . . . .	30
2.2.7. Matriz Toeplitz asociada a una matriz $\mathbf{A}$ . . . . .	31
2.3. Marco Conceptual . . . . .	35
2.3.1. Matrices de Toeplitz Involutivas . . . . .	35
2.3.2. Matrices Circulantes . . . . .	36
2.3.3. Matriz de Fourier . . . . .	42
<b>III. Materiales y Métodos</b>	<b>47</b>
3.1. Matrices de diferenciación . . . . .	49
3.1.1. Matriz de diferenciación de orden de aproximación 4 . . . . .	55
<b>IV. Resultados y Discusión</b>	<b>62</b>
4.1. Matrices de Diferenciación de Chebyshev . . . . .	62
4.1.1. Uso de $D_n$ para una función no periódica y suave . . . . .	69
4.2. El Operador de Laurent . . . . .	70
4.3. Aplicación . . . . .	73
<b>Conclusiones</b>	<b>75</b>
<b>Recomendaciones</b>	<b>76</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>77</b>
<b>Anexos</b>	<b>79</b>
5.1. Convergencia: Diferencias Finitas . . . . .	79
5.2. Convergencia: Diferenciación Espectral . . . . .	80
5.3. Diferenciación de Chebyshev . . . . .	81
5.4. Precisión: Diferenciación de Chebyshev . . . . .	82
5.5. Solución de Ecuación de la onda . . . . .	82

# ÍNDICE DE CUADROS

2.1. Interpolantes básicos de Lagrange. . . . .	9
---	---

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. <b>Polinomios de Hermite</b> , $H_n(x)$ , en $[-2, 2]$ , para $n = 2, 3, 4, 5, 20, 25$ . . .	11
4.1. <b>Polinomio interpolante de Lagrange</b> de grado 12, de $\delta(x)$ , junto con las tangentes en los nodos. . . . .	68
4.2. <b>Diferenciación de Chebyshev</b> de $f(x) = e^{-x} \cos(5x)$ . . . . .	69
4.3. Precisión de la derivada espectral de Chebyshev para cuatro funciones de suavidad creciente. . . . .	70
4.4. Orden de precisión espectral de diferencias finitas, (convergencia de 4to orden), matriz (3.22). . . . .	72
4.5. Orden de precisión espectral con el operador de Laurent, matriz (4.17). .	72
4.6. Solución exacta del problema (4.18). . . . .	73
4.7. Solución mediante el operador de Laurent. . . . .	74
4.8. Solución modificando la velocidad constante de la onda de 0.4114. . . .	74

# INTRODUCCIÓN

Dar solución a un problema que involucra ecuaciones diferenciales, ordinarias o parciales, ha sido crucial para la generación de diversas técnicas o métodos o fórmulas que nos ayude a acercarnos tanto como querramos a la solución exacta. Una de ellas es utilizar la discretización del dominio y llevar el problema continuo a un problema discreto, el cual se transforma en un problema matricial. La aparición de esas matrices ha ayudado en parte a hacer más cómodo poder hallar una solución aproximada, inclusive con un alto grado de precisión. Sin embargo el coste computacional no queda de lado, es por ello que no siempre es recomendable usar determinado tipo de matrices. La ventaja es que al querer aumentar la precisión de la derivada, basta con sólo realizar multiplicación de matrices. Esas matrices son llamadas matrices de diferenciación, y aparecen al truncar los polinomios que representan la solución aproximada, esos polinomios son ortogonales.

Zarowski, Ch. J. (2004) generaliza las relaciones de recurrencia de los polinomios ortogonales, uno de los cuales es el polinomio de Chebyshev. Dichos polinomios son llamados espectros, es por ello que a las matrices de diferen-

ciación también se les conoce como matrices diferenciales espectrales.

Ardila, (2020), muestra algunas propiedades y ejemplos de matrices Toeplitz y resuelve una ecuación diferencial con ellas.

Trefethen, L.N., (2000), aborda los métodos espectrales en general y también utiliza las matrices de diferenciación como resultado de aplicar las diferencias finitas para aproximar la derivada.

En esta tesis estudiamos las matrices diferenciación, iniciando con las matrices circulantes, las matrices Toeplitz, las cuales aparecen en muchas aplicaciones, como el procesamiento de imágenes.

El siguiente trabajo se distribuye de la siguiente manera: En el marco conceptual, se verá los polinomios de Lagrange, cruciales para generar las matrices mencionadas, también los polinomios de interpolación de Hermite. Seguidamente, se verán las matrices circulantes, las matrices de Toeplitz, sus propiedades, luego las matrices de diferenciación de orden dos y de orden cuatro, igualmente generadas ya con los nodos de Chebyshev. Después estudiamos el operador de Laurent y finalizamos la utilización de las matrices de diferenciación. En las referencias bibliográficas no hay muchos ejemplos de ello, es así que nuestro trabajo aportará en detalle cómo se generan esas

matrices y cómo utilizarlas. Desde luego que se analizará el error respectivo comparando con la solución exacta, cuando fuere el caso.

# CAPÍTULO I

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Descripción de la realidad problemática

En la solución de una ecuación diferencial, con condiciones de contorno o de condiciones iniciales, podemos utilizar métodos espectrales o pseudoespectrales para aproximarnos a la función que satisface dicho modelo, sin embargo la aparición de derivadas requiere que las primeras o segundas o derivadas de mayor orden sean representadas por expresiones que dependen de un malla inicial, entonces ese proceso se puede realizar mediante una multiplicación de matrices, las matrices de diferenciación. Las matrices de Chebyshev o de Fourier son algunas de esas matrices que nos ayudan en esas aproximaciones (Weideman, J. A. C., and Reddy, S. C., 2000).

Actualmente, los softwares computacionales nos proporcionan muchas ventajas para resolver numéricamente un problema de valor de frontera; por ejemplo, en (Trefethen, Birksson, Driscoll, 2018), se ha implementado en `Chebfun` hasta los operadores que modelan las ecuaciones diferenciales. Es por ello que es necesario entender bien sobre matrices de diferenciación. Entonces abor-

daremos con detalle el comportamiento y la generación de esas matrices de diferenciación. A pesar de que a través de las diferencias finitas se da la idea de estas matrices, la convergencia nos lleva a un operador, el Operador de Laurent.

Una de las ventajas de utilizar las matrices de diferenciación es que si quiere elevar el orden de la aproximación, bastará con realizar multiplicaciones de matrices.

## **1.2. Delimitación de la investigación**

### **1.2.1. Espacial**

La investigación se sitúa en una rama de la matemática aplicada, como es el análisis numérico y ecuaciones diferenciales.

### **1.2.2. Social**

Este trabajo de aplicación es útil para estudiantes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemáticas e Ingenierías, pues se aborda la solución numérica de una ecuación diferencial ordinaria a través de las matrices de diferenciación.

### **1.2.3. Temporal**

Se trabajará con tesis y artículos científicos actuales, al igual que bibliografía desde 1980. Luego podremos aplicar a problemas específicos.

## **1.3. Problema de investigación**

### **1.3.1. Problema general**

¿Las matrices de diferenciación pueden usarse en la solución numérica de un problema de valor de frontera?

### **1.3.2. Problema específico**

¿Las matrices de diferenciación de Chebyshev y de Fourier se pueden aplicar a problemas periódicos?

## **1.4. Objetivos**

### **1.4.1. Objetivo general**

Demostrar que las matrices de diferenciación se pueden usar para la solución numérica de un problema de valor de frontera.

### **1.4.2. Objetivo específico**

Estudiar si las matrices de diferenciación de Chebyshev y de Fourier se pueden aplicar a problemas periódicos.

## **1.5. Hipótesis**

### **1.5.1. Hipótesis general**

Las matrices de diferenciación se pueden usar en la solución numérica de problemas de valor de frontera.

### 1.5.2. Hipótesis específicas

Las matrices de diferenciación de Chebyshev y de Fourier se pueden aplicar a problemas periódicos.

## 1.6. Diseño

(Diseño no experimental), la variable (matriz diferencial) se usa y se obtiene una aproximación a una función que es la solución de un problema de valor de frontera.

### 1.6.1. Tipo

Quivy, R., & Van Campenhoudt, L. (2005), en su libro "Manual de investigación en ciencias sociales", indica que la investigación documental implica la revisión y análisis de documentos existentes para construir un marco teórico y comprender mejor el fenómeno de estudio.

Asimismo Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2000) en su manual "Handbook of Qualitative Research", describen a la investigación documental como un método para examinar y sintetizar el conocimiento existente a través de la revisión y análisis de documentos.

Nuestro trabajo es, entonces, una investigación de **tipo documental**.

### **1.6.2. Nivel**

(Nivel descriptivo) Tiene por finalidad de describir el comportamiento de una variable (problema de valor de frontera) en función de otras (matrices de diferenciación) con la relación de (causa–efecto).

### **1.6.3. Método**

El método de investigación es inductivo y deductivo, pues como señala **Hernández Sampieri (2010) Metodología de la Investigación**, *“la investigación se basa en fuentes bibliográficas existentes en libros, tesis, artículos científicos e información por internet”*.

Puesto que nuestra tesis es un trabajo monográfico el método adecuado a usar será el método de investigación inductiva y deductiva. La investigación se basa en fuentes bibliográficas existentes en libros, tesis de doctorado, artículos e informaciones por internet.

## **1.7. Población**

De acuerdo a la naturaleza del trabajo de investigación no se considera la población.

# CAPÍTULO II

## MARCO TEÓRICO

### 2.1. Antecedentes del Problema

#### 2.1.1. Internacionales

- Weidman, J. A, C, and Reddy, S.C. (2006), en su artículo “A MatLab Differentiation Matrix Suite”, resaltan la importancia de las matrices de diferenciación para la solución numérica de las ecuaciones diferenciales e implementan en MatLab estos conceptos, The Differentiation Matrix Suite, su nombre en inglés, consiste de 17 funciones de MatLab, que generan las matrices de diferenciación basadas en los interpolantes de Chebyshev, Fourier, Hermite.
- Boyd, J.P (2001), en su trabajo “Chebyshev and Fourier Spectral Methods”, presentan las matrices de diferenciación y aplica los métodos espectrales de Chebyshev y de Fourier, asimismo analizan la convergencia y la precisión de estos métodos.

- Canuto et al, (1988), en su trabajo “Methods in Fluid Dynamics”, introducen la idea de matriz de diferenciación a través del método de colocación (pseudoespectral) para resolver ecuaciones diferenciales basadas en interpolantes ponderados.
- Trefethen, L.N., (2000), en su trabajo “Spectral methods in MatLab”, realiza un estudio de los métodos espectrales, enfatizando dos matrices de diferenciación, las de Chebyshev y la de Fourier. Además presenta una serie de programas en matlab.
- Zang et al, (1989), en su artículo “Spectral Methods for CFD”, proporciona una introducción básica a los métodos espectrales aplicados a la dinámica de fluidos, en el que las matrices de diferenciación aparecen en algunos de esos métodos y presenta resultados importantes diversos en dinámica de fluidos.

### **2.1.2. Nacionales**

No se ha hallado investigaciones realizadas sobre el tema.

### **2.1.3. Locales**

Igualmente, no se encontraron investigaciones sobre el tema.

## 2.2. Bases teóricas

Presentamos algunos conceptos de polinomios de interpolación, específicamente de Lagrange y de Hermite, espacios de Sobolev, espacios  $L^p$ , distribuciones, matrices de Toeplitz, matrices circulantes, entre otros.

### 2.2.1. Interpolación de Hermite y de Lagrange

#### 2.2.1. Definición. (Süli and Mayers, 2003)

Sea  $f \in C^{N+1}[a, b]$  y la partición de  $[a, b]$ :  $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N \leq b$ .

La fórmula de interpolación de Lagrange es

$$f(x) = \sum_{i=0}^N \ell_i(x) f(x_i) + \frac{1}{(N+1)!} \Pi(x) f^{(N+1)}(\xi) \quad (2.1)$$

y el polinomio interpolante de Lagrange para  $f$  de grado lo más  $n$  es

$$P_i(x) = \sum_{i=0}^N \ell_i(x) f(x_i) \quad (2.2)$$

donde los  $\ell_i(x)$  son las bases polinomiales de Lagrange, también llamadas funciones cardinales, definidas por:

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N \left( \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right), \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

■

Aquí deben conocerse los  $f(x_i)$ . Las funciones de  $\{\ell_i(x)\}_{i=0}^N$ , satisfacen la condición

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (2.4)$$

Por ejemplo si tenemos los nodos  $x_0, x_1, x_2$ , el polinomio  $\ell_1(x)$  es

$$\ell_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}.$$

Entonces si aplicamos este polinomio a cada uno de los nodos tenemos

$$\begin{cases} \ell_1(x_0) = \frac{(x_0 - x_0)(x_0 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 0 \\ \ell_1(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 1 \\ \ell_1(x_2) = \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = 0 \end{cases}$$

Nº nodos	Algunas funciones interpolantes básicas de Lagrange
2	$\{\ell_0, \ell_1\} = \left\{ \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right\}$
3	$\{\ell_0, \ell_1, \ell_2\} = \left\{ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right\}$
4	$\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\} = \left\{ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \right\}$
⋮	⋮
$n+1$	$\{\ell_k : k = 0, 1, \dots, n\} = \left\{ \ell_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)} \right\}$

**Cuadro 2.1.** Interpolantes básicos de Lagrange.

### 2.2.2. Definición. (Süli and Mayers, 2003)

En forma similar como en la definición anterior, si se conocen, aparte de los  $f(x_i)$ , los  $f'(x_i)$ , la *fórmula de interpolación de Hermite* es dada por

$$f(x) = \sum_{i=0}^N h_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^N h_i^*(x) f'(x_i) + \frac{1}{(2N+2)!} f^{(2N+2)}(\xi) \Pi^2(x) \quad (2.5)$$

donde  $h_i(x) = [1 - 2\ell'_i(x_i) \cdot (x - x_i)] \ell_i^2(x)$ ,  $h_i^*(x) = (x - x_i) \ell_i^2(x)$ , y  $\xi$  está entre  $x$  y  $x_i$ . ■

### 2.2.3. Definición. (Süli and Mayers, 2003)

Los polinomios de Hermite,  $H_n(x)$ , satisfacen las relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ \mathbf{H}_n(\mathbf{x}) &= \mathbf{2x H}_{n-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{2(n-1) H}_{n-2}(\mathbf{x}), \quad n \geq 2, \end{cases} \quad (2.6)$$

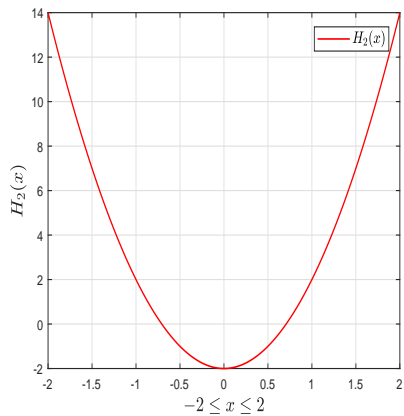
su primera y segunda derivada satisfacen

$$\begin{cases} H'_n(x) &= 2n H_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \\ H''_n(x) &= 4n(n-1) H_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \end{cases} \quad (2.7)$$

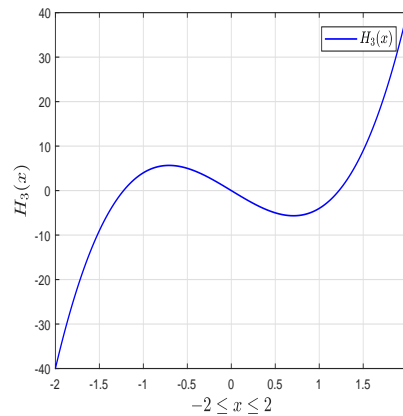
■

En la Figura (2.1) se visualizan los polinomios de Hermite, para diferentes grados  $n$  en el intervalo  $[-2, 2]$ .

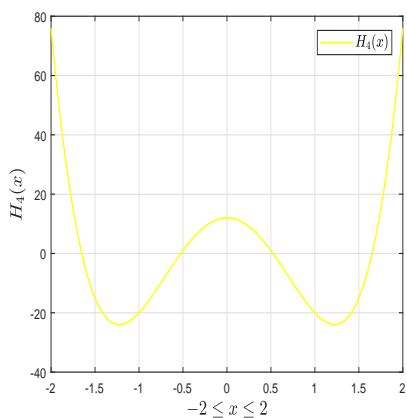
**Figura 2.1.** Polinomios de Hermite,  $H_n(x)$ , en  $[-2, 2]$ , para  $n = 2, 3, 4, 5, 20, 25$ .



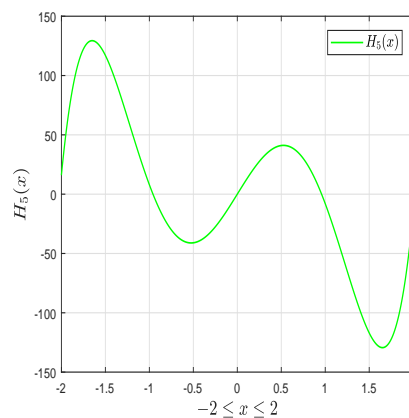
(a) Grado  $n = 2$ .



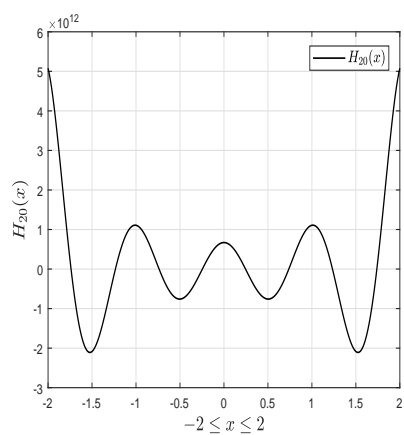
(b) Grado  $n = 3$ .



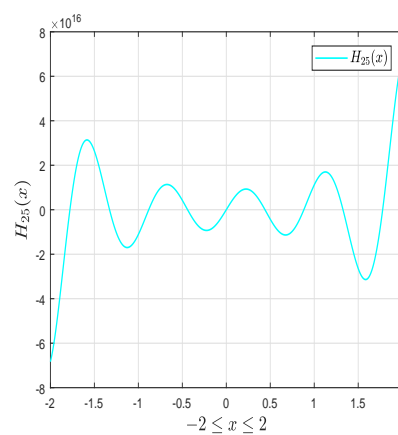
(c) Grado  $n = 4$ .



(d) Grado  $n = 5$ .



(e) Grado  $n = 20$ .



(f) Grado  $n = 25$ .

A continuación definimos algunos conceptos importantes de álgebra lineal, los cuales se encuentran en (Dym, 1978).

## 2.2.2. Espacios vectoriales

### 2.2.4. Definición. (Espacios vectoriales.)

Un *espacio vectorial* sobre un cuerpo  $K$  es un conjunto  $\mathbf{V}$  no vacío, dotado de las siguientes dos operaciones para las cuales será cerrado y cumplir además las siguientes propiedades:

$$S_1) \forall u, v \in \mathbf{V} : u + v \in \mathbf{V} \text{ y } u \cdot v \in \mathbf{V} \quad (\text{Cerradura})$$

$$S_2) \forall u, v \in \mathbf{V} : u + v = v + u \text{ y } u \cdot v = v \cdot u \quad (\text{Conmutativa})$$

$$S_3) \forall u, v, w \in \mathbf{V} : u + (v + w) = (u + v) + w \text{ y } u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$$

(Asociativa)

$$S_4) \forall u \in \mathbf{V} \text{ existe } e \in \mathbf{V}, \text{ tal que } u + e = e + u = u \quad (\text{Existencia del elemento neutro})$$

$$S_5) \exists \mathbf{1} \in \mathbf{K} \text{ tal que para todo } u \in \mathbf{V}, \text{ se tiene: } u \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot u = u \quad (\text{Existencia del neutro escalar})$$

$$S_6) \forall u \in \mathbf{V} \text{ existe } (-u) \in \mathbf{V}, \text{ tal que: } u + (-u) = e \quad (\text{Existencia del elemento inverso})$$

$$S_6) \forall \alpha, \beta \in \mathbf{K} \text{ y } \forall u, v \in \mathbf{V} : (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$$

(Distributiva)



### 2.2.5. Definición. (Subespacio)

Sea  $V$  un espacio vectorial sobre el anillo  $\mathbb{F}$ , un *subespacio*  $M$  de  $V$  es un subconjunto no vacío de  $V$  que es cerrado bajo la suma de vectores igualmente con la multiplicación por escalares. Un subespacio de un espacio vectorial es inmediatamente por definición un espacio vectorial. ■

### 2.2.6. Definición. (Span o Generado)

Sean  $u_1, u_2, \dots, u_k$  elementos del espacio vectorial  $V$  sobre el campo  $\mathbb{F}$ , entonces se define el *generado* por el conjunto  $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ , denotado por  $\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$  como el conjunto de todas las combinaciones lineales entre estos vectores, es decir

$$\text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\} \quad (2.8)$$



### 2.2.7. Definición. (Independencia lineal.)

Se dice que un conjunto de vectores  $u_1, u_2, \dots, u_k$  de un espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{F}$  es *linealmente independiente* sobre  $\mathbb{F}$  si la única forma de representar al 0 como combinación lineal de los  $u_i$ , es decir

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0 \in V, \quad (2.9)$$

es cuando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \in \mathbb{F}$ , en caso contrario son llamados *linealmente dependientes*. ■

### 2.2.8. Definición. (Base.)

El conjunto de vectores  $\{u_i\}_{i=1}^k \subset V$  forma una base del espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{F}$  si

(•)  $\text{span}\{u_i\}_{i=1}^k = V$  y

(•)  $\{u_i\}_{i=1}^k$  es linealmente independiente.

■

Ahora definiremos a una matriz.

### 2.2.9. Definición. (Matriz.)

Un arreglo rectangular, de números reales o complejos, de  $m$  filas y  $n$  columnas es llamada una matriz, así

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

En notación breve, una matriz se denota así:

$$\mathbf{A} = (a_{ij})$$

El conjunto de todas las matrices de orden  $m \times n$  con elementos o entradas en  $\mathbb{F}$ , es denotado por

$$\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}). \quad (2.11)$$

Además, (2.11) junto con las operaciones “+” y “•”, es un espacio vectorial:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \quad (2.12)$$

$$\alpha \cdot \mathbf{A} = (\alpha \cdot a_{ij}) \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = \left( \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \right) \quad (2.14)$$

■

También tenemos los siguientes productos.

**2.2.10. Definición.** (Producto de Shur)

Sean  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$ , se define el

(-) Producto de Shur: matriz cuya  $ij$ -ésima componente es el producto de la  $ij$ -ésima componente de  $\mathbf{A}$  por la  $ij$ -ésima componente de  $\mathbf{B}$ , es decir

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = (a_{ij} \cdot b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F}) \quad (2.15)$$

(-) Producto Kronecker (también llamado producto tensorial o producto directo)

Si  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{F})$  y  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{F})$  entonces

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (a_{ij} \cdot \mathbf{B}) \in \mathcal{M}_{mpnq}(\mathbb{F}) \quad (2.16)$$

si  $p = m, q = n$ , entonces

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = (a_{ij} \cdot \mathbf{B}) \in \mathcal{M}_{m^2 n^2}(\mathbb{F}) \quad (2.17)$$

■

**Propiedades del Producto de Kronecker:**

- (i)  $(\alpha \mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\alpha \mathbf{B}) = \alpha (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$ , con  $\alpha \in \mathbb{C}$ .
- (ii)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$ , ( $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  del mismo orden).
- (iii)  $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})$ , ( $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  del mismo orden).
- (iv)  $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C}$ .
- (v)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})$ , (si es que los productos pueden realizarse).
- (vi)  $\overline{(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})} = \overline{\mathbf{A}} \otimes \overline{\mathbf{B}}$ , ( $\overline{\mathbf{A}}$ : conjugada de  $\mathbf{A}$ )
- (vii)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$ ,  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* \otimes \mathbf{B}^*$ .
- (viii)  $\text{traza}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{traza}(\mathbf{A}) \cdot \text{traza}(\mathbf{B})$ , ( $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$  y  $\mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ ).
- (ix)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$ , ( $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  matrices no singulares)
- (x)  $\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \det^n \mathbf{A} \cdot \det^m \mathbf{B}$  ( $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  como en viii)

**2.2.1. Ejemplo.** Sean las matrices, en  $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathbf{A} * \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-3)(2) & (2)(3) \\ (1)(-2) & (-4)(5) \\ (5)(-6) & (-1)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & -20 \\ -30 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -\mathbf{3} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} & \mathbf{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} & -\mathbf{4} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{5} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} & -\mathbf{1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 6 & -15 \\ 18 & -6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 10 \\ -12 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8 & -12 \\ 8 & -20 \\ 24 & -8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ -10 & 25 \\ -30 & 10 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -5 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

■

El resultado anterior, de  $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$ , se ha representado en bloques, sin embargo los paréntesis en la parte interna pueden quitarse. Se puede observar que tiene orden  $3^2 \times 2^2 = 9 \times 4$ , es decir que  $\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{94}(\mathbb{R})$ .

### 2.2.11. Definición. (Determinante de una matriz.)

Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ; su *determinante* es el funcional

$$\mathbf{det} : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (2.18)$$

que satisface las siguientes reglas:

- (1)  $\mathbf{det}(\mathbf{I}_n) = 1$
- (2)  $\mathbf{det}(\mathbf{A})$  es un funcional multilineal en las filas de  $\mathbf{A}$ .
- (3) Si dos filas de  $\mathbf{A}$  son idénticas, entonces  $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0$ .
- (4) Si en la matriz  $\mathbf{A}$  se suman o multiplican una de sus filas por otra de sus filas, entonces el determinante de la matriz resultante es igual al determinante de  $\mathbf{A}$ .
- (5) Si  $\mathbf{A}$  tiene una fila formada por ceros, entonces  $\mathbf{det}(\mathbf{A}) = 0$ .
- (6) Si la matriz  $\mathbf{A}$  tiene dos filas linealmente dependientes, su determinante es nulo.

■

### 2.2.12. Definición. (Algunas matrices especiales.)

Sean las matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ , entonces:

- (1)  $\mathbf{A}$  es **diagonal** si  $a_{ij} = \delta_{ij}$ .
- (2)  $\mathbf{A}$  es **invertible** si existe  $\mathbf{A}^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$  tal que  $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$ .

- (3) Se dice que  $A$  y  $B$  son **semejantes** si existe una matriz invertible  $P$  talque  $P^{-1} \cdot A \cdot P = B$ .
- (4) Se dice que  $A$  es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.
- (5)  $A$  es **involutiva** si  $A = A^{-1}$ .
- (6) Se dice que  $A$  es **nilpotente** de grado  $k$  si  $A^k = 0$ .
- (7) Si  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ , la transpuesta conjugada o adjunta de  $A$ , denotada por  $A^*$ , es  $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ .

■

### Normas en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

- **Norma de Frobenius:** (Glashof and Bronstein, 2018)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} |a_{ij}|^2} = (\text{traza}(A^* \cdot A))^{\frac{1}{2}} \quad (2.19)$$

- **Norma Operador:** (Glashof and Bronstein, 2018)

$$\|A\|_2 = \max_{x \in \mathbb{R}^2: \|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = (\lambda_{\max}(A^* \cdot A))^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

donde  $A^*$  es la **adjunta** o transpuesta conjugada de  $A$  y  $\lambda_{\max}(A)$  es el máximo de las normas de los autovalores de  $A$ , también llamado **radio espectral** de  $A$ .

**2.2.13. Definición.** (Matriz autoadjunta.)

Una matriz compleja  $\mathbf{A}$  se dice que es **autoadjunta** si

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}. \quad (2.21)$$

■

Por ejemplo, si  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 + 3i \\ 4 - i & 2 \end{pmatrix}$ , la adjunta de  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & 4 + i \\ 5 - 3i & 2 \end{pmatrix}$$

Sin embargo no es autoadjunta.

En cambio la matriz  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -8 & 6 - 4i \\ 6 + 4i & 5 \end{pmatrix}$  sí es autoadjunta, pues

$$\mathbf{B}^* = \begin{pmatrix} -8 & 6 - 4i \\ 6 + 4i & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

**2.2.14. Definición.** (Matrices conjuntamente diagonalizables.)

Se dice que las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son **conjuntamente diagonalizables** si existe una matriz unitaria  $\mathbf{U}$  tal que las matrices

$$\mathbf{U}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{D}_A, \quad \text{y} \quad \mathbf{U}^* \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{D}_B$$

son diagonales. (Glashof and Bronstein, 2018)

■

**2.2.1. Teorema.** *Sea  $\mathbf{A}$  una matriz y  $\mathbf{T}_A$  su matriz de Toeplitz asociada tal que*

$$\|\mathbf{T}_A - \mathbf{A}\|_2 < \varepsilon, \text{ con } \varepsilon > 0,$$

*entonces:*

$$(i) \quad \|\mathbf{T}_A, \mathbf{A}\|_2 < 2\varepsilon \min \{\|\mathbf{T}_A\|_2, \|\mathbf{A}\|_2\}.$$

(ii) *Si  $\mathbf{A}$  es autoadjunta, también lo es  $\mathbf{T}_A$ . Además si  $\|\mathbf{A}\|_2 \leq 1$  y  $\|\mathbf{T}_A\|_2 \leq 1$ , ambas son aproximada y conjuntamente diagonalizables, esto en el sentido de (Glashof and Bronstein, 2018).*

$$([\mathbf{T}_A, \mathbf{A}] = \mathbf{T}_A \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{T}_A) \quad \blacksquare$$

### **Demostración.-**

(i) Asumamos que  $\|\mathbf{T}_A - \mathbf{A}\|_2 < \varepsilon$ , ( $\varepsilon > 0$ ), entonces tenemos las dos relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_A, \mathbf{A}\|_2 &= \|\mathbf{T}_A \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{T}_A\|_2 \\ &= \|\mathbf{T}_A \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{T}_A - \mathbf{T}_A^2 + \mathbf{T}_A^2\|_2 \\ &\leq \|\mathbf{T}_A \mathbf{A} - \mathbf{T}_A^2\|_2 + \|\mathbf{T}_A^2 - \mathbf{A} \mathbf{T}_A\|_2 \\ &= \|\mathbf{T}_A (\mathbf{A} - \mathbf{T}_A)\|_2 + \|\mathbf{T}_A (\mathbf{T}_A - \mathbf{A})\|_2 \\ &= \|\mathbf{T}_A\|_2 \|\mathbf{A} - \mathbf{T}_A\|_2 + \|\mathbf{T}_A\|_2 \|\mathbf{T}_A - \mathbf{A}\|_2 \\ &= 2\|\mathbf{T}_A\|_2 \|\mathbf{A} - \mathbf{T}_A\|_2 \\ &< 2\varepsilon \|\mathbf{T}_A\|_2 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\| [\mathbf{T}_A, \mathbf{A}] \|_2 &= \| T_A A - A T_A \|_2 \\
&= \| T_A A - A T_A - A^2 + A^2 \|_2 \\
&\leq \| T_A A - A^2 \|_2 + \| A^2 - A T_A \|_2 \\
&= \| A (T_A - A) \|_2 + \| A (A - T_A) \|_2 \\
&= \| A \|_2 \| A - T_A \|_2 + \| A \|_2 \| T_A - A \|_2 \\
&= 2 \| A \|_2 \| A - T_A \|_2 \\
&< \mathbf{2\varepsilon} \| \mathbf{A} \|_2
\end{aligned}$$

De ello se concluye:

$$\| [T_A, A] \|_2 < 2\varepsilon \mathbf{min} \{ \| T_A \|_2, \| A \|_2 \}.$$

(*ii*) En primer lugar veamos que si  $A$  es autoadjunta, entonces  $T_A$  también lo es.

Veamos, de acuerdo a la definición de las matrices Toeplitz  $T_A$  que está asociada a la matriz  $A$ , tenemos:

$$t_{ij} = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^k a_{i+l, j+l} = \frac{1}{k+1} \sum_{l=1}^k \overline{a_{i+l, j+l}} = \overline{t_{i, j}}$$

Es decir que  $A$  es autoadjunta.

En (Glashof and Bronstein, 2018) se ve el resto de la prueba, es decir de que si  $\|A\|_2 \leq 1$  y  $\|T_A\|_2 \leq 1$  entonces  $A$  y  $T_A$  son aproximadas y conjuntamente diagonalizables. ■

### 2.2.3. Espacios de Banach

#### 2.2.15. Definición. (Espacio de Banach.)

Un *espacio de Banach* es un espacio lineal completo  $\mathcal{B}$  con una norma  $\|\cdot\|$  que *satisface*:

- (1)  $\|f\| = 0$ , si y solo si  $f = 0$ .
- (2)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ , para  $\lambda \in \mathbb{C}$  y  $f \in \mathcal{B}$ , y
- (3)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ , para  $f, g \in \mathcal{B}$ .

tal que  $\mathcal{B}$  es completo en la métrica dada por esta norma. ■

#### 2.2.16. Definición. (Funcional lineal acotado.)

Sea  $\mathcal{B}$  un espacio de Banach. Una función  $\psi$  de  $\mathcal{B}$  en  $\mathbb{C}$  se dice que es un *funcional lineal acotado* si:

- (1)  $\psi(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \psi(f) + \lambda_2 \psi(g)$ , para  $f, g \in \mathcal{B}$  y  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ; y
  - (2) Existe  $M > 0$  tal que  $|\psi(f)| \leq M \|f\|$ ,  $\forall f \in \mathcal{B}$ .
-

**2.2.17. Definición. (Espacio dual o conjugado.)**

En el conjunto  $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \mathbb{C}) = \mathcal{B}^*$  de todos los funcionales lineales acotados en el espacio de Banach  $\mathcal{B}$  se define, para  $\psi \in \mathcal{B}^*$ :

$$\|\psi\| = \sup \left\{ \frac{|\psi(f)|}{\|f\|} : f \neq 0 \right\} \quad (2.22)$$

A  $\mathcal{B}^*$  se le denomina *espacio dual o conjugado* de  $\mathcal{B}$ . ■

**2.2.18. Definición. ( $\mathbb{C}$ -álgebra.)**

Se dice que  $\mathcal{A}$  es una  $\mathbb{C}$ -álgebra si:

- (1)  $\mathcal{A}$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.
- (2) Es un anillo con la misma suma que tenía como espacio vectorial, y un producto nuevo.
- (3)  $\mathcal{A}$  tiene unidad  $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$  para el producto.
- (4)  $\forall \alpha \in \mathbb{C}, a, b \in \mathcal{A}: \alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$ .

También,  $\mathcal{A}'$  se dice que es una *subálgebra* de  $\mathcal{A}$ , si es un subespacio cerrado bajo el producto. ■

**2.2.19. Definición. (Álgebra de Banach)**

Un *álgebra de Banach* es una  $\mathbb{C}$ -álgebra  $\mathcal{A}$  que tiene una norma  $\|\cdot\|$  que la hace un espacio de Banach, junto con la condición:  $\forall a, b \in \mathcal{A}$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad (2.23)$$

Si  $\mathcal{A}$  tiene unidad, se cumple:  $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathcal{A}}$ , y  $\|\mathbf{1}_{\mathcal{A}}\| = 1$ . ■

### 2.2.20. Definición. (Multiplicadores)

Sea el álgebra de Banach  $\mathcal{A}$ , se definen los *multiplicadores* (o caracteres) de  $\mathcal{A}$  a los morfismos no nulos

$$\psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Si el  $\mathcal{A}$  es abeliana y tiene unidad, los  $\psi \in \mathcal{A}^*$  y

$$\|\psi\| = 1.$$

Al conjunto de todos los multiplicadores de  $\mathcal{A}$  se le denotará como  $\mathcal{L}_+$ . ■

### 2.2.21. Definición. (Elementos invertibles)

Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra de Banach, denotaremos por  $\mathcal{G}$  a la colección de *elementos invertibles* en  $\mathcal{A}$ , y a la colección de los elementos invertibles izquierdos e invertibles derechos en  $\mathcal{A}$ , que no son invertibles a los conjuntos

$$\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_d$$

respectivamente. ■

### 2.2.22. Definición. (espectro de un elemento)

Dado el álgebra de Banach,  $\mathcal{A}$ , y  $x \in \mathcal{A}$ , entonces el *espectro de  $x$  en  $\mathcal{A}$* , denotado por  $\sigma_{\mathcal{A}}(x)$ , se define como

$$\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \cdot \mathbf{1} \text{ no es invertible}\} \quad (2.24)$$

■

### 2.2.23. Definición. (Funcional lineal complejo)

Un *funcional lineal complejo*  $\psi$  en el álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  se dice que es *multiplicativo* si:

- (1)  $\psi(fg) = \psi(f)\psi(g)$ , para  $f, g \in \mathcal{A}$ ; y
- (2)  $\psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ .

Se denotará por  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$  al conjunto de todos los funcionales lineales multiplicativos en  $\mathcal{A}$ . ■

## 2.2.4. Espacios de Sobolev

### 2.2.24. Definición. (Los espacios $\mathbf{C}^m(\bar{\Omega})$ , $m \geq 0$ .)

Sea  $\Omega := (a, b)^d$ ,  $d = 1, 2, 3$  y denotemos por  $\bar{\Omega}$  la cerradura de  $\Omega$ , es decir el poli-intervalo cerrado  $[a, b]^d$ .

Se denota por  $\mathbf{C}^m(\bar{\Omega})$  al espacio vectorial de las funciones  $u : (\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que para todo multiíndice  $\alpha$ , con  $0 \leq |\alpha| \leq m$ , la derivada  $D^\alpha u$  existe y es continua en  $(\bar{\Omega})$ .

Una norma en  $\mathbf{C}^m(\bar{\Omega})$  es

$$\|u\| := \sup_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in (\bar{\Omega})} |D^\alpha u(x)| \quad (2.25)$$

■

**2.2.25. Definición.** (Los espacios  $L^p$ .)

Sea  $(a, b)$  un intervalo acotado de  $\mathbb{R}$ , y sea  $1 \leq p < +\infty$ . Se denota por  $L^p(a, b)$  al espacio:

$$L^p := \left\{ u : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ es medible, } \int_a^b |u(x)|^p dx < +\infty \right\} \quad (2.26)$$

Una norma es

$$\|u\|_{L^p(a,b)} := \left( \int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.27)$$

Con la norma dada en (2.27),  $L^p$  es un espacio de Banach.

(•) Si  $p = +\infty$ ,  $L^\infty(a, b)$  es el espacio de funciones medibles  $u : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que  $|u(x)|$  es acotada, si  $M$  es el número más pequeño tal que  $|u(x)| \leq M$ , se define la norma

$$\|u\|_{L^\infty(a,b)} := \operatorname{esssup}_{x \in (a,b)} |u(x)| = M. \quad (2.28)$$

$L^\infty(a, b)$  también es un espacio de Banach.

(•) Si  $p = 2$ ,  $L^2(a, b)$  no es un espacio de Banach, sin embargo es un espacio de Hilbert con producto escalar

$$(u, v)_{L^2(a,b)} := \int_a^b u(x) v(x) dx. \quad (2.29)$$

■

Ahora, sea  $\Omega$  acotado en  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ ; denotemos por  $\mathcal{D}(\Omega)$ , al espacio vectorial de todas las funciones infinitamente diferenciables  $\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , para las cuales existe un conjunto cerrado  $K \subset \Omega$ , tal que  $\psi \equiv 0$  fuera de ese conjunto (es decir que es de [soporte compacto](#)).

Se dice que la sucesión de funciones  $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$  converge en  $\mathcal{D}(\Omega)$  a la función  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , si existe un conjunto común  $K \subset \Omega$ , tal que todas las  $\psi_n$  se anula fuera de  $K$  y  $D^\alpha \psi_n \rightarrow D^\alpha \psi$  uniformemente sobre  $K$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , para todo multiíndice no negativo  $\alpha$ .

Sea el mapeo lineal (forma)  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ . El valor de  $T$  sobre el elemento  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$  se denotará por  $\langle T, \psi \rangle$ . Se dice que  $T$  es **es continua** si, para cada sucesión  $\psi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$  que converge en  $\mathcal{D}(\Omega)$  a la función  $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\langle T, \psi_n \rangle \rightarrow \langle T, \psi \rangle . \quad (2.30)$$

## 2.2.5. Distribuciones

### 2.2.26. Definición. (Distribuciones.)

Una **distribución** es una forma lineal continua sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$ . El espacio  $\mathcal{D}'(\Omega)$  denota al conjunto de todas las distribuciones sobre  $\Omega$ . ■

### 2.2.2. Ejemplo. (Dos ejemplos de distribuciones)

(•) Sea  $h \in L^p(a, b)$ , entonces la distribución  $T_h$  se define por

$$\langle T_h, \psi \rangle := \int_a^b h(x) \psi(x) dx, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.31)$$

(•) Sea  $y_0 \in (a, b)$ , la forma lineal sobre  $\mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle \delta_{y_0}, \psi \rangle := \psi(y_0), \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.32)$$

es una distribución, llamada función de Dirac. ■

**2.2.27. Definición. (Espacios  $L^p(\mathbb{T})$ ).**

En  $\mathbb{C}$  se define la circunferencia unitaria  $\mathbb{T}$ ,

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \quad (2.33)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ , se definen los espacios  $L^p(\mathbb{T})$ :

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{T}} |f(\lambda)|^p d\lambda < \infty, \text{ con } d\lambda = \frac{d\theta}{2} \right\} \quad (2.34)$$

■

**2.2.28. Definición. (Base ortonormal de  $L^2(\mathbb{T})$ )**

Sobre  $\mathbb{T}$  se define la función potencia  $\varepsilon_n$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ :

$$\varepsilon_n(z) = z^n. \quad (2.35)$$

En particular, si tenemos que  $z = e^{i\theta}$ , entonces  $\varepsilon_n(z = e^{i\theta}) = e^{in\theta}$ , y el conjunto  $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{T})$  con producto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta. \quad (2.36)$$

■

**2.2.29. Definición. (Espacios de Hardy.)**

Se define el *espacio de Hardy*  $H^p$ , para  $1 \leq p < \infty$ , como

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \varepsilon_n(e^{i\theta}) d\theta = 0 \text{ si } n > 0 \right\} \quad (2.37)$$



## 2.2.6. Matriz Toeplitz

### 2.2.30. Definición. (Matriz Toeplitz)

Es una matriz en la que los elementos de sus diagonales, la principal y sus paralelas, son constantes.

Si  $\mathbf{T} = (t_{i,j})$  es Toeplitz, entonces

$$t_{i,j} = t_{i+1,j+1} \quad (2.38)$$



### 2.2.3. Ejemplo. (Matrices Toeplitz)

Las matrices siguientes son Toeplitz

$$T_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0.2 \\ 0.2 & 3 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} m & n & p & q & r \\ s & m & n & p & q \\ t & s & m & n & p \\ u & t & s & m & n \\ v & u & t & s & m \end{pmatrix},$$



En general, toda matriz de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{-1} & a_{-2} & \cdots & \cdots & a_{-(n-1)} \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & \mathbf{a}_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{a}_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0 & \mathbf{a}_{-1} \\ a_{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_2 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

es una matriz de Toeplitz, pero esta no necesariamente tiene que ser cuadrada.

### 2.2.7. Matriz Toeplitz asociada a una matriz $\mathbf{A}$ .

Sea  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , la matriz Toeplitz,  $\mathbf{T}_\mathbf{A} = (t_{ij})$ , asociada a la matriz

$\mathbf{A}$  está definida como:

$$t_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{r=1}^k a_{1+r, j+r} & , \quad i = 1, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad k = n-j \\ \frac{1}{k+1} \sum_{r=1}^k a_{i+r, 1+r} & , \quad j = 1, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad k = n-i \\ t_{i+r, j+r} & , \quad i+r \leq n, \quad j+r \leq n \\ a_{1,n} & , \quad i = 1, \quad j = n \\ a_{n,1} & , \quad i = n, \quad j = 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Por ejemplo, sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-2i & 3+5i & -3 \\ 3 & 3+i & 2+3i & 3-i \\ 4+i & 2+2i & 4 & 1+i \\ -2 & -i & 2+i & 5-3i \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Las entradas de la matriz  $\mathbf{T}_A = (t_{ij})$ , de acuerdo a (2.40), con  $n = 4$  son:

(\*)  $\mathbf{i} = \mathbf{1}$ ,  $1 \leq j \leq 3$ ,  $k = 4 - j$ ,

(•)  $j = 1 \rightarrow k = 4 - 1 = 3$

$$t_{11} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^3 a_{1+r,1+r} = \frac{a_{22} + a_{33} + a_{44}}{4} = \frac{(3 + \mathbf{i}) + (4) + (5 - 3\mathbf{i})}{4}$$

$$\implies t_{11} = 3 - \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

(•)  $j = 2 \rightarrow k = 4 - 2 = 2$

$$t_{12} = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^2 a_{1+r,2+r} = \frac{a_{23} + a_{34}}{3} = \frac{(2 + 3\mathbf{i}) + (1 + \mathbf{i})}{3}$$

$$\implies t_{12} = 1 + \frac{4}{3}\mathbf{i}$$

(•)  $j = 3 \rightarrow k = 4 - 3 = 1$

$$t_{13} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^1 a_{1+r,3+r} = \frac{a_{24}}{2} = \frac{3 - \mathbf{i}}{2}$$

$$\implies t_{13} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

Hacemos lo mismo con  $i$ , recordamos que el término  $t_{11}$  ya está calculado:

(\*)  $\mathbf{j} = \mathbf{1}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ,  $k = 4 - i$ ,

(•)  $i = 1 \rightarrow k = 4 - 1 = 3$

$$t_{11} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^3 a_{1+r,1+r} = \frac{a_{22} + a_{33} + a_{44}}{4} = 3 - \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

(•)  $i = 2 \rightarrow k = 4 - 2 = 2$

$$t_{21} = \frac{1}{3} \sum_{r=1}^2 a_{2+r,1+r} = \frac{a_{32} + a_{43}}{3} = \frac{(2 + 2\mathbf{i}) + (2 + \mathbf{i})}{3}$$

$$\implies t_{21} = \frac{4}{3} + \mathbf{i}$$

$$(\bullet) \quad i = 3 \longrightarrow k = 4 - 3 = 1$$

$$t_{31} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^1 a_{3+r,1+r} = \frac{a_{42}}{2} = \frac{-i}{2}$$

$$\implies t_{31} = 0 - \frac{1}{2}i$$

Hemos hallado los tres primeros elementos de la primera fila y primera columna, los otros elementos serán:

$$3 - \frac{1}{2}i = t_{11} = t_{22} = t_{33} = t_{44}$$

$$1 + \frac{4}{3}i = t_{12} = t_{23} = t_{34}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i = t_{13} = t_{24}$$

$$\frac{4}{3} + i = t_{21} = t_{32} = t_{43}$$

$$-\frac{1}{2}i = t_{31} = t_{42}; \quad t_{14} = a_{14} = -3, \quad t_{4,1} = a_{41} = -2$$

Por tanto la matriz  $\mathbf{T}_A$  será

$$\mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} 3 - \frac{1}{2}i & 1 + \frac{4}{3}i & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i & -3 \\ \frac{4}{3} + i & 3 - \frac{1}{2}i & 1 + \frac{4}{3}i & \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i & \frac{4}{3} + i & 3 - \frac{1}{2}i & 1 + \frac{4}{3}i \\ -2 & -\frac{1}{2}i & \frac{4}{3} + i & 3 - \frac{1}{2}i \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Además, podemos hallar qué tan cerca está la matriz  $\mathbf{A}$  de ser Toeplitz,  $\mathbf{T}_A$ .

De acuerdo a (2.20), la distancia entre  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{T}_A$  es:

$$d(\mathbf{A}, \mathbf{T}_A) = \|\mathbf{A} - \mathbf{T}_A\|_2$$

$$\text{Hacemos } \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} -2 + \frac{i}{2} & -\frac{10}{3}i & \frac{3}{2} + \frac{11}{2}i & 0 \\ \frac{5}{3} - i & \frac{3}{2}i & 1 + \frac{5}{3}i & \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ 4 + \frac{3}{2}i & \frac{2}{3} + i & 1 + \frac{i}{2} & -\frac{i}{3} \\ 0 & -\frac{i}{2} & \frac{2}{3} & 2 - \frac{5}{2}i \end{pmatrix}.$$

Hallamos el producto de  $\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{473}{18} & 1 + \frac{73}{6}i & \frac{9}{2} - \frac{269}{36}i & \frac{5}{2} - \frac{2}{3}i \\ 1 - \frac{73}{6}i & \frac{271}{18} & -\frac{44}{3} + \frac{19}{6}i & \frac{1}{6} - \frac{53}{36}i \\ \frac{9}{2} + \frac{269}{36}i & -\frac{44}{3} - \frac{19}{6}i & \frac{1367}{36} & \frac{11}{6} - 5i \\ \frac{5}{2} + \frac{2}{3}i & \frac{1}{6} + \frac{53}{36}i & \frac{11}{6} + 5i & \frac{463}{36} \end{pmatrix}$$

Los autovalores de  $\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{B}$  son:

$$\lambda_1 = 51.8449711571$$

$$\lambda_2 = 26.0072241761$$

$$\lambda_3 = 11.2046728527$$

$$\lambda_4 = 3.1097984808$$

y sus módulos (o valores absolutos) respectivos son:

$$|\lambda_1| = 51.8449711571$$

$$|\lambda_2| = 26.0072241761$$

$$|\lambda_3| = 11.2046728527$$

$$|\lambda_4| = 3.1097984808$$





$$\Pi_5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Pi_6 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (2.46)$$

$$\Pi_n = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Matriz  $\Gamma$  de orden  $k$ :  $\Gamma_k$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad (2.49)$$

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Las matrices  $\Pi_n$  y  $\Gamma_n$  satisfacen:

$$\Pi_n^n = \mathbf{I}_n, \quad \Pi_n^T = \Pi_n^{-1} = \Pi_n^{n-1}, \quad (2.51)$$

$$\Gamma_n^2 = \mathbf{I}_n, \quad \Gamma_n^T = \Gamma_n = \Gamma_n^{-1}. \quad (2.52)$$

### 2.3.1. Definición. (Matriz Circulante)

Sea la  $n$ -upla  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , se denomina *matriz circulante de orden  $n \times n$* , a la matriz definida como:

$$\mathbf{circ}_n(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_3 & \cdots & c_n & c_1 & c_2 \\ c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n & c_1 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

■

Así tenemos, para  $\mathbf{c}_2 = (c_1, c_2)$ ,  $\mathbf{c}_3 = (c_1, c_2, c_3)$ ,  $\mathbf{c}_4 = (c_1, \dots, c_4)$  y  $\mathbf{c}_5 = (c_1, \dots, c_5)$ :

$$\mathbf{circ}_2(\mathbf{c}_2) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{circ}_3(\mathbf{c}_3) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{circ}_4(\mathbf{c}_4) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{circ}_5(\mathbf{c}_5) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_5 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_4 & c_5 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_1 \end{pmatrix}$$

**2.3.1. Ejemplo.** Una matriz circulante es la matriz  $\Pi_n$ :

$$\Pi_n = \mathbf{circ}_n(0, 1, 0, \dots, 0) \tag{2.54}$$

■

Una propiedad que debe cumplir una matriz cualquiera para que sea circulante se da en la siguiente proposición, cuya demostración la hallamos en [\(Lara T., 2001\)](#).

**2.3.2. Proposición.** Una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $n \times n$  es circulante si y sólo si:

$$\Pi_n \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \Pi_n \tag{2.55}$$

■

**Propiedades de las matrices circulantes:**

( $i_c$ ) El producto de dos matrices circulantes es conmutativo.

( $ii_c$ ) Si  $\mathbf{A}$  es circulante, también lo son sus potencias:  $\mathbf{A}^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

Por ejemplo, sean las matrices circulantes de orden 4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos el producto:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 65 & 51 & 40 & 53 \\ 53 & 65 & 51 & 40 \\ 40 & 53 & 65 & 51 \\ 51 & 40 & 53 & 65 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

Igualmente tenemos que las potencias siguientes son circulantes:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 38 & 26 & 23 & 34 \\ 24 & 38 & 26 & 23 \\ 23 & 34 & 38 & 26 \\ 26 & 23 & 34 & 38 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^5 = \begin{pmatrix} 40\,061 & 40\,823 & 40\,465 & 39\,702 \\ 39\,702 & 40\,061 & 40\,823 & 40\,465 \\ 40\,465 & 39\,702 & 40\,061 & 40\,823 \\ 40\,823 & 40\,465 & 39\,702 & 40\,061 \end{pmatrix}.$$

**Observación:**

Si  $\mathbf{A}$  es una matriz circulante de orden  $n$ , entonces es Toeplitz.

Además, si  $n = p \cdot q$ , dicha matriz es circulante por bloques, y cada bloque es una matriz de Toeplitz de orden  $q$  en el que  $\mathbf{A}$  está formada por un arreglo de  $p \times p$  bloques.

**2.3.2. Ejemplo.** Consideremos la matriz circulante de orden  $n = 8$ :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ h & a & b & c & d & e & f & g \\ g & h & a & b & c & d & e & f \\ f & g & h & a & b & c & d & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ d & e & f & g & h & a & b & c \\ c & d & e & f & g & h & a & b \\ b & c & d & e & f & g & h & a \end{pmatrix}$$

Hagamos  $n = p \cdot q = 4 \cdot 2$ , es decir  $p = 4$  y  $q = 2$ , entonces podemos formar un arreglo de  $4 \times 4$  bloques, con cada bloque de orden  $q = 2$ , así:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b \\ h & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c & d \\ b & c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} e & f \\ d & e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} g & h \\ f & g \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} g & h \\ f & g \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ h & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c & d \\ b & c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} e & f \\ d & e \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} e & f \\ d & e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} g & h \\ f & g \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ h & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} c & d \\ b & c \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} c & d \\ b & c \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} e & f \\ d & e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} g & h \\ f & g \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & b \\ h & a \end{matrix}} \end{pmatrix}_{4 \times 4 \text{ bloques}}$$

Ahora hagamos  $n = p \cdot q = 2 \cdot 4$ , es decir  $p = 2$  y  $q = 4$ , entonces podemos formar un arreglo de  $2 \times 2$  bloques, con cada bloque de orden  $q = 4$ , así:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a & b & c & d \\ h & a & b & c \\ g & h & a & b \\ f & g & h & a \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} e & f & g & h \\ d & e & f & g \\ c & d & e & f \\ b & c & d & e \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} e & f & g & h \\ d & e & f & g \\ c & d & e & f \\ b & c & d & e \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a & b & c & d \\ h & a & b & c \\ g & h & a & b \\ f & g & h & a \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \mathbf{2 \times 2 \text{ bloques}}$$

■

### 2.3.3. Matriz de Fourier

Antes de definir una matriz de Fourier, recordemos que el objetivo principal de la tesis es demostrar que las matrices de diferenciación se pueden usar para la solución numérica de un problema de valor de frontera. En otras palabras, aproximar la solución exacta. Una de las formas de aproximar es la interpolación, sin embargo hay que elegir unos puntos de referencia llamados nodos de interpolación.

Consideremos un polinomio de grado  $n - 1$ , con  $n$  un número par

$$P(w) = a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + a_3 w^3 + a_4 w^4 + a_5 w^5 + \dots + a_{n-2} w^{n-2} + a_{n-1} w^{n-1} \quad (2.56)$$

Podemos separar el polinomio dado en (2.56), en dos polinomios, los de coeficientes de lugar par y los de coeficientes de lugar impar:

$$\begin{aligned} (\bullet) \quad P_{\text{pares}}(w) &= a_0 + a_2 \cdot (w^2) + a_4 \cdot (w^2)^2 + \cdots + a_{n-2} \cdot (w^2)^{\frac{n}{2}-1} \\ &= P_{\text{pares}}(w^2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} (\bullet) \quad P_{\text{impares}}(w) &= w \cdot \left( a_1 + a_3 \cdot (w^2) + a_5 \cdot (w^2)^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot (w^2)^{\frac{n}{2}-1} \right) \\ &= w \cdot P_{\text{impares}}(w^2) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Es decir que (2.56) podemos expresarlo en términos de (2.57) y (2.58):

$$P(w) = P_{\text{pares}}(w^2) + w \cdot P_{\text{impares}}(w^2) \quad (2.59)$$

Se puede observar que el polinomio, que era de grado  $n - 1$ , ahora queda en función de dos polinomios de grado  $\frac{n}{2} - 1$  en  $w^2$ .

Ahora, ya no es necesario evaluar  $n$  puntos, sino en  $\frac{n}{2}$  puntos. Sean dichos puntos los  $w_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ , y teniendo en cuenta (2.59)

$$P(w_i) = P_{\text{pares}}(w_i^2) + w_i \cdot P_{\text{impares}}(w_i^2) \quad (2.60)$$

$$P(-w_i) = P_{\text{pares}}(w_i^2) - w_i \cdot P_{\text{impares}}(w_i^2) \quad (2.61)$$

Veamos un caso particular,  $n = 4$ , (polinomio de grado 3). Supongamos que  $w_1 = 1$ , entonces  $w_3 = -w_1 = -1$ , esto se cumple ya que el polinomio debe ser evaluado en 4 puntos, los cuales deben agruparse de a pares, positivos y negativos. También se debe evaluar a los nuevos polinomios en los puntos  $w_1^2$  y  $w_2^2$ , y por (2.60) y (2.61), uno de ellos es el opuesto del otro, es decir:  $w_1^2 = -w_2^2$ . Además se cumple que

$$w_1^4 = 1 = w_2^4 = w_3^4 = w_4^4 = 1$$

Esto nos lleva a las **raíces cuartas de la unidad**:

$$\sqrt[4]{1} = e^{i\frac{2\pi}{4}k} = w_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$w_1 = 1, \quad w_3 = -1, \quad w_2 = i, \quad w_4 = -i$$

Generalizando

$$\sqrt[n]{1} = e^{i\frac{2\pi}{n}(k-1)} = w_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.62)$$

Si definimos  $w_n = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ , para un  $n \in \mathbb{Z}^+$  fijo, como la raíz  $n$ -ésima de la unidad,

tenemos que se cumple:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad w_n^n = 1, \\ \text{(b)} \quad w_n \cdot \bar{w}_n = 1, \quad (\bar{z} : \text{conjugada de } z) \\ \text{(c)} \quad \bar{w}_n = w_n^{-1} \\ \text{(d)} \quad (\bar{w}_n)^k = w_n^{-k} = w_n^{n-k} \\ \text{(e)} \quad 1 + w_n + w_n^2 + w_n^3 + \dots + w_n^{n-1} = \sum_{r=1}^n w_n^{r-1} = 0 \end{array} \right. \quad (2.63)$$

### 2.3.2. Definición. (Matriz de Vandermonde)

Se denomina *matriz de Vandermonde* de los elementos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  a la matriz

$$\mathbf{V}(z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

■

Teniendo ya la definición de la matriz de Vandermonde, dada en (2.64),

ahora ya podemos definir lo que es una matriz de Fourier.

### 2.3.3. Definición. (Matriz de Fourier)

Una matriz  $\mathbf{F}$  de orden  $n$  se dice que es una *matriz de Fourier* de orden  $n$  si su matriz transpuesta conjugada, o matriz adjunta,  $\mathbf{F}^*$ , es tal que

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^{n-1} \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{2(n-1)} \\ 1 & w_n^3 & w_n^6 & w_n^9 & \cdots & w_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{n-2} & w_n^{2(n-2)} & w_n^{3(n-2)} & \cdots & w_n^{(n-2)(n-1)} \\ 1 & w_n^{n-1} & w_n^{2(n-1)} & w_n^{3(n-1)} & \cdots & w_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

■

De acuerdo a las propiedades de  $w_n$  dadas en (2.63), se tiene que

$$w_n^{n+k} = w_n^k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.66)$$

es decir que la sucesión  $\{w_n^r\}_{r=1}^\infty$  es periódica y  $\mathbf{F}$  tiene solo  $n$  elementos diferentes. De esto, la matriz  $\mathbf{F}^*$  dada en (2.65) también es equivalente a

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n & w_n^2 & w_n^3 & \cdots & w_n^{n-1} \\ 1 & w_n^2 & w_n^4 & w_n^6 & \cdots & w_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{n-1} & w_n^{n-2} & w_n^{n-3} & \cdots & w_n \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Por ejemplo, para  $n = 6$ , tenemos que

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_6 & w_6^2 & w_6^3 & w_6^4 & w_6^5 \\ 1 & w_6^2 & w_6^4 & w_6^6 & w_6^8 & w_6^{10} \\ 1 & w_6^3 & w_6^6 & w_6^9 & w_6^{12} & w_6^{15} \\ 1 & w_6^4 & w_6^8 & w_6^{12} & w_6^{16} & w_6^{20} \\ 1 & w_6^5 & w_6^{10} & w_6^{15} & w_6^{20} & w_6^{25} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

y teniendo en cuenta (2.63), se tiene que

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w_6 & w_6^2 & w_6^3 & w_6^4 & w_6^5 \\ 1 & w_6^2 & w_6^4 & 1 & w_6^2 & w_6^4 \\ 1 & w_6^3 & 1 & w_6^3 & 1 & w_6^3 \\ 1 & w_6^4 & w_6^2 & 1 & w_6^4 & w_6^2 \\ 1 & w_6^5 & w_6^4 & w_6^3 & w_6^2 & w_6 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

o también:

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} & -1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} & 1 & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \\ 1 & e^{-\frac{\pi i}{3}} & e^{-\frac{2\pi i}{3}} & -1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{\pi i}{3}} \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

### *Propiedades de la matriz de Fourier*

- (•)  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}^*$  son simétricas.
- (•)  $\mathbf{F}$  es unitaria y sus autovalores son  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{i}$ , con sus multiplicidades.

# CAPÍTULO III

## MATERIALES Y MÉTODOS

En la Sección (2.3.1) se vio lo que es una matriz involutiva, sin embargo la transformada discreta de Fourier es el soporte para que garantice el número de relaciones de equivalencia que permite agrupar dichas matrices. Además, el espacio  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$  nos ayudará a construir una base canónica.

***El espacio de las sucesiones complejas  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$***

El espacio de las sucesiones complejas, denotado por  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ ,

$$\ell^2(\mathbb{Z}_n) = \{z = (z(0), z(1), \dots, z(n-1)) : z(i) \in \mathbb{C}, i = 0, 1, \dots, n-1\} \quad (3.1)$$

es un espacio vectorial  $n$ -dimensional, donde  $\mathbb{Z}_n$  es el conjunto de los enteros módulo  $n$ :  $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ , junto con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas como:

$$z + \theta = (\dots, z(i) + \theta(i), \dots), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.2)$$

$$a \cdot z = (\dots, a \cdot z(i), \dots), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (3.3)$$

El conjunto

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\} \quad (3.4)$$

donde  $e_i(m) = \delta_{im}$ , es una base para  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ .

Un producto interno y una norma asociados a él son:

$$\langle z, w \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} z(i) \cdot \overline{w(i)} \quad (3.5)$$

$$\|z\| = \left( \sum_{i=0}^{n-1} z(i) \cdot \overline{z(i)} \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} |z(i)|^2 \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

### ***Sucesión exponencial***

Sea  $p \in \mathbb{Z}_n$ , la expresión

$$\mathcal{E}_p(m) = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi pm}{n}i} \quad (3.7)$$

define una sucesión exponencial.

#### **3.0.1. Lema.** *El conjunto*

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n-1}\} \quad (3.8)$$

es una base ortonormal de  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ . ■

#### **Demostración.**

Ver (Ardila, M. 2020). ■

#### **3.0.1. Definición. (Base de Fourier)**

Para cada  $p \in \mathbb{Z}_n$  se define  $F_p \in \ell^2(\mathbb{Z}_n)$  mediante

$$F_p = \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi pm}{n}}, \text{ donde } m \in \mathbb{Z}_n \quad (3.9)$$

Al conjunto

$$F = \{F_0, F_1, \dots, F_{n-1}\} \quad (3.10)$$

se le llama **base de Fourier** de  $\ell^2(\mathbb{Z}_n)$ . ■

La base de Fourier, dada en (3.10), se puede expresar en términos de la base  $\mathcal{E}$ , dada en (3.8),

$$F_p(m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( e^{\frac{2\pi p m}{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} E_p(m) \quad (3.11)$$

Ahora nos introduciremos en las matrices de diferenciación.

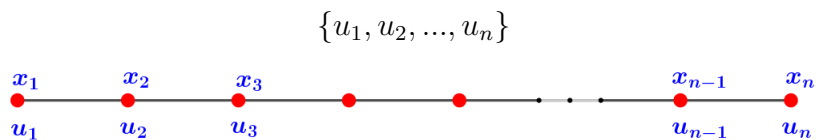
### 3.1. Matrices de diferenciación

Daremos las aproximaciones de la primera derivada, por diferencias finitas de orden dos, de tal manera que al aplicarlas a una red de puntos se pueda construir una matriz.

Consideremos una malla uniforme

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

con la condición de que  $x_{k+1} - x_k = h$  (*tamaño de paso*) y que para cada  $k$  se tiene el conjunto de valores conocidos



Suponemos también que

$$\mathbf{u}_0 = u_n \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_{n+1} = u_1, \quad (3.12)$$

es decir que el problema es periódico. Sabemos que la derivada de primer orden en cada  $x_k$ , representada por  $u'_k = u'(x_k)$ , se puede aproximar por diferencias finitas de orden dos, denotada como:  $w_k$ , mediante la fórmula

$$u'_k \approx w_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}, \quad k = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

Ahora consideremos las notaciones:

$$\mathbf{w}_n = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T, \quad \mathbf{u}_n = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$$

Usando la ecuación (3.13), veamos las matrices que se generan para algunos valores de  $n$ , teniendo en cuenta las condiciones (3.12).

(•)  $\mathbf{n} = 1$ :  $\mathbf{u}_0 = u_1$ ;  $\mathbf{u}_2 = u_1$ ,

$$w_1 = \frac{u_2 - u_0}{2h} = \frac{u_1 - u_1}{2h} = \frac{1}{2h} (\mathbf{0}) \cdot u_1$$

(•)  $\mathbf{n} = 2$ :  $\mathbf{u}_0 = u_2$ ;  $\mathbf{u}_3 = u_1$ ,

$$w_1 = \frac{u_2 - \mathbf{u}_0}{2h} = \frac{u_2 - u_2}{2h} = \frac{1}{h} \cdot 0 \cdot u_2 = \frac{1}{2h} (0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2)$$

$$w_2 = \frac{\mathbf{u}_3 - u_1}{2h} = \frac{u_1 - u_1}{2h} = \frac{1}{h} (0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2)$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=D_2} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_2 = \frac{1}{h} D_2 \cdot \mathbf{u}_2$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = \mathbf{3}: \mathbf{u}_0 = u_3; \quad \mathbf{u}_4 = u_1,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{u_2 - \mathbf{u}_0}{2h} = \frac{u_2 - u_3}{2h} = \frac{1}{h} \cdot \left( 0 \cdot u_1 + \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3 \right) \\ w_2 &= \frac{u_3 - u_1}{2h} = \frac{u_3 - u_1}{2h} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2}u_1 + 0 \cdot u_2 + \frac{1}{2}u_3 \right) \\ w_3 &= \frac{\mathbf{u}_4 - u_2}{2h} = \frac{u_1 - u_2}{2h} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + 0 \cdot u_3 \right) \end{aligned}$$

En forma matricial es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_3} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ \implies \mathbf{w}_3 &= \frac{1}{h} D_3 \cdot \mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = \mathbf{4}: \mathbf{u}_0 = u_4; \quad \mathbf{u}_5 = u_1,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{u_2 - \mathbf{u}_0}{2h} = \frac{u_2 - u_4}{2h} = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_4 \right) \\ w_2 &= \frac{u_3 - u_1}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \right) \\ w_3 &= \frac{u_4 - u_2}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 \right) \\ w_4 &= \frac{\mathbf{u}_5 - u_3}{2h} = \frac{u_1 - u_3}{2h} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_3 \right) \end{aligned}$$

En forma matricial es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_4} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\implies \mathbf{w}_4 = \frac{1}{h} D_4 \cdot \mathbf{u}_4$$

(•)  $n = 5$ :  $\mathbf{u}_0 = u_5$ ;  $\mathbf{u}_6 = u_1$ ,

$$w_1 = \frac{u_2 - \mathbf{u}_0}{2h} = \frac{u_2 - u_5}{2h} = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_5 \right)$$

$$w_2 = \frac{u_3 - u_1}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \right)$$

$$w_3 = \frac{u_4 - u_2}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 \right)$$

$$w_4 = \frac{u_5 - u_3}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_5 \right)$$

$$w_5 = \frac{\mathbf{u}_6 - u_4}{2h} = \frac{u_1 - u_4}{2h} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_4 \right)$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_5} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_5 = \frac{1}{h} D_5 \cdot \mathbf{u}_5$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = \mathbf{6}: \mathbf{u}_0 = u_6; \quad \mathbf{u}_7 = u_1,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{u_2 - \mathbf{u}_0}{2h} = \frac{u_2 - u_6}{2h} = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_6 \right) \\ w_2 &= \frac{u_3 - u_1}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \right) \\ w_3 &= \frac{u_4 - u_2}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 \right) \\ w_4 &= \frac{u_5 - u_3}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_3 + \frac{1}{2}u_5 \right) \\ w_5 &= \frac{u_6 - u_4}{2h} = \frac{1}{h} \left( -\frac{1}{2}u_4 + \frac{1}{2}u_6 \right) \\ w_6 &= \frac{\mathbf{u}_7 - u_5}{2h} = \frac{u_1 - u_5}{2h} = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_5 \right) \end{aligned}$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_6} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \mathbf{w}_6 = \frac{1}{h} D_6 \cdot \mathbf{u}_6$$

Generalizando para cualquier  $n$ , tenemos que la representación matricial para la aproximación de la primera derivada por medio de diferencias finitas de orden dos,  $\mathcal{O}(h^2)$ , dada en (3.13), es

$$\mathbf{w}_n = \frac{1}{h} D_n \cdot \mathbf{u}_n \tag{3.14}$$

donde la matriz  $D_n$  está dada por

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

y se denomina *matriz de diferenciación*.

Esas matrices se llaman así porque al multiplicarlas por los  $u_k$  nos da la aproximación de la derivada en los mismos nodos. La matriz (3.15) nos da una *aproximación de orden 2*. Además es una matriz Toeplitz, es decir que tiene entradas constantes a lo largo de las diagonales. También es circulante, recordemos la Definición (2.3.1), es decir

$$D_n = \mathbf{circ}_n \left( 0, \frac{1}{2}, \underbrace{\ddots}_{\text{ceros}}, -\frac{1}{2} \right). \quad (3.16)$$

Obtendremos la matriz dada en (3.15) a través de interpolación local y diferenciación, específicamente los polinomios de interpolación de Lagrange. Recordando de (2.2), con la función  $f(x) = u(x)$ , tenemos el proceso siguiente, para  $k = 1, 2, \dots, n$ : (Trefethen, 2000)

---



---

(•) Sea  $P_k$  el único polinomio de  $gr(P_k) \leq 2$ , tal que

$$P_k(x_{k-1}) = u_{k-1}, \quad P_k(x_k) = u_k, \quad \text{y} \quad P_k(x_{k+1}) = u_{k+1}$$

(•) Hacemos  $w_k = P'_k(x_k)$

---



---

Entonces para los nodos  $x_{k-1}$ ,  $x_k$  y  $x_{k+1}$  tenemos

$$P_k(x) = g_{-1}(x) \cdot u_{k-1} + g_0(x) \cdot u_k + g_1(x) \cdot u_{k+1} \quad (3.17)$$

donde  $g_{-1}(x)$ ,  $g_0(x)$  y  $g_1(x)$  son los polinomios básicos de Lagrange en los nodos respectivos  $x_{k-1}$ ,  $x_k$  y  $x_{k+1}$ ,

$$\begin{aligned} g_{-1}(x) &= \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})} = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2h^2} \\ g_0(x) &= \frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})} = -\frac{(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})}{h^2} \\ g_1(x) &= \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} = \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)}{2h^2} \end{aligned}$$

Derivamos (3.19) y luego reemplazamos en  $x_k$

$$P'_k(x) = u_{k-1} \cdot \frac{(2x - x_k - x_{k+1})}{2h^2} - u_k \cdot \frac{(2x - x_{k-1} - x_{k+1})}{h^2} + u_{k+1} \cdot \frac{(2x - x_k - x_{k-1})}{2h^2}$$

de donde

$$w_k = P'_k(x_k) = u_{k-1} \cdot \frac{-h}{2h^2} - u_k \cdot 0 + u_{k+1} \cdot \frac{h}{2h^2}$$

y así

$$w_k = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}.$$

Y considerando la periodicidad (3.12), se tiene la matriz de diferenciación dada en (3.15).

### 3.1.1. Matriz de diferenciación de orden de aproximación 4

Consideramos ahora los polinomios de interpolación de grado a lo más 4,

$$P_k(x_{k \pm j}) = u_{k \pm j}, \quad j = 0, 1, 2, \quad w_k = P'_k(x_k).$$

y consideremos la periodicidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{-1} = u_n \\ \mathbf{u}_0 = u_{n-1} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{n+1} = u_1 \\ \mathbf{u}_{n+2} = u_2 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Procedemos en forma similar utilizando los polinomios interpolantes de Lagrange y tenemos que para los nodos  $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$  y  $x_{k+2}$  el polinomio interpolante de Lagrange es

$$P_k(x) = g_{-2}(x) \cdot u_{k-2} + g_{-1}(x) \cdot u_{k-1} + g_0(x) \cdot u_k + g_1(x) \cdot u_{k+1} + g_2(x) \cdot u_{k+2} \quad (3.19)$$

donde los  $g_i(x)$ ,  $i = -2, -1, 0, 1, 2$ , son los polinomios básicos de Lagrange en los nodos respectivos  $x_i$ ,

$$\begin{aligned} g_{-2}(x) &= \frac{(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{24h^4} \\ g_{-1}(x) &= \frac{(x - x_{k-2})(x - x_k)(x - x_{k+1})(x - x_{k+2})}{-6h^4} \\ g_0(x) &= \frac{(x - x_{k-2})(x - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})}{4h^4} \\ g_1(x) &= \frac{(x - x_{k-2})(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+2})}{-6h^4} \\ g_2(x) &= \frac{(x - x_{k-2})(x - x_{k-1})(x - x_k)(x - x_{k+1})}{24h^4} \end{aligned}$$

Al derivar  $P_k(x)$  y evaluarlo en  $x_k$  y teniendo en cuenta que  $w_k = P'_k(x_k)$  obtenemos una fórmula aproximar la primera derivada

$$w_k = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12}u_{k-2} - \frac{2}{3}u_{k-1} + \frac{2}{3}u_{k+1} - \frac{1}{12}u_{k+2} \right) \quad (3.20)$$

Esta fórmula de aproximación es de orden 4. Veamos las matrices que se originan para algunos valores de  $n$  considerando (3.20) y la periodicidad (3.18).

(•)  $n = 1$ :  $\mathbf{u}_{-1} = u_0$ ,  $\mathbf{u}_0 = u_1$ ;  $\mathbf{u}_2 = u_1$ ,  $\mathbf{u}_3 = u_2$

$$w_1 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12}\mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3}\mathbf{u}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{u}_2 - \frac{1}{12}\mathbf{u}_3 \right) = \frac{1}{h} (\mathbf{0}) \cdot \mathbf{u}_1$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = 2: \mathbf{u}_{-1} = u_1, \mathbf{u}_0 = u_2; \quad \mathbf{u}_3 = u_1, \mathbf{u}_4 = u_2$$

$$w_1 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} \mathbf{u}_2 - \frac{1}{12} \mathbf{u}_3 \right) = \frac{1}{h} (0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2)$$

$$w_2 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_0 - \frac{2}{3} u_1 + \frac{2}{3} \mathbf{u}_3 - \frac{1}{12} \mathbf{u}_4 \right) = \frac{1}{h} (0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2)$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=D_2} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_2 = \frac{1}{h} D_2 \cdot \mathbf{u}_2$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = 3: \mathbf{u}_{-1} = u_2, \mathbf{u}_0 = u_3; \quad \mathbf{u}_4 = u_1, \mathbf{u}_5 = u_2,$$

$$w_1 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{9}{8} u_2 - \frac{9}{8} u_3 \right)$$

$$w_2 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_0 - \frac{2}{3} u_1 + \frac{2}{3} u_3 - \frac{1}{12} \mathbf{u}_4 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( -\frac{9}{8} u_1 + \frac{9}{8} u_3 \right)$$

$$w_3 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} u_1 - \frac{2}{3} u_2 + \frac{2}{3} \mathbf{u}_4 - \frac{1}{12} \mathbf{u}_5 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{9}{8} u_1 - \frac{9}{8} u_2 \right)$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{8} & -\frac{9}{8} \\ -\frac{9}{8} & 0 & \frac{9}{8} \\ \frac{9}{8} & -\frac{9}{8} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_3} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_3 = \frac{1}{h} D_3 \cdot \mathbf{u}_3$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = 4: \mathbf{u}_{-1} = u_3, \mathbf{u}_0 = u_4; \quad \mathbf{u}_5 = u_1, \mathbf{u}_6 = u_2,$$

$$w_1 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{2}{3} u_2 - \frac{2}{3} u_4 \right)$$

$$w_2 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_0 - \frac{2}{3} u_1 + \frac{2}{3} u_3 - \frac{1}{12} u_4 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( -\frac{2}{3} u_1 + \frac{2}{3} u_3 \right)$$

$$w_3 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} u_1 - \frac{2}{3} u_2 + \frac{2}{3} u_4 - \frac{1}{12} \mathbf{u}_5 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( -\frac{2}{3} u_2 + \frac{2}{3} u_4 \right)$$

$$w_4 = \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} u_2 - \frac{2}{3} u_3 + \frac{2}{3} \mathbf{u}_5 - \frac{1}{12} \mathbf{u}_6 \right) = \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{2}{3} u_1 - \frac{2}{3} u_3 \right)$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_4} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_4 = \frac{1}{h} D_4 \cdot \mathbf{u}_4$$

Podemos observar que las matrices de diferenciación son circulantes, entonces para las siguientes matrices solo evaluaremos  $w_1$  y generamos la matriz  $D_n$ .

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = 5: \mathbf{u}_{-1} = u_4, \mathbf{u}_0 = u_5; \quad \mathbf{u}_6 = u_1, \mathbf{u}_7 = u_2,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 + \frac{1}{12} u_4 - \frac{2}{3} u_5 \right) \end{aligned}$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_5} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_5 = \frac{1}{h} D_5 \cdot \mathbf{u}_5$$

(•)  $\mathbf{n} = \mathbf{6}$ :  $\mathbf{u}_{-1} = u_5$ ,  $\mathbf{u}_0 = u_6$ ;  $\mathbf{u}_7 = u_1$ ,  $\mathbf{u}_8 = u_2$ ,

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 + \frac{1}{12} u_5 - \frac{2}{3} u_6 \right) \end{aligned}$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}}_{=D_6} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix}$$

$$\implies \mathbf{w}_6 = \frac{1}{h} D_6 \cdot \mathbf{u}_6$$

$$(\bullet) \quad \mathbf{n} = 7: \mathbf{u}_{-1} = u_6, \mathbf{u}_0 = u_7; \quad \mathbf{u}_8 = u_1, \mathbf{u}_9 = u_2,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{h} \left( \frac{1}{12} \mathbf{u}_{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{u}_0 + \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 \right) \\ &= \frac{1}{h} \left( \frac{2}{3} u_2 - \frac{1}{12} u_3 + \frac{1}{12} u_6 - \frac{2}{3} u_7 \right) \end{aligned}$$

En forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & 0 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{=D_7}$

$$\implies \mathbf{w}_7 = \frac{1}{h} D_7 \cdot \mathbf{u}_7$$

Generalizando para cualquier  $n$ , tenemos que la representación matricial para la aproximación de la primera derivada por medio de diferencias finitas de orden cuatro, dada en (3.20), es

$$\mathbf{w}_n = \frac{1}{h} D_n \cdot \mathbf{u}_n \tag{3.21}$$

donde la matriz  $D_n$  está dada por

$$D_n = \begin{pmatrix} & \ddots & & \frac{1}{12} & -\frac{2}{3} \\ & \ddots & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \\ & \ddots & \frac{2}{3} & \ddots & \\ & \ddots & 0 & \ddots & \\ & \ddots & -\frac{2}{3} & \ddots & \\ -\frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & \ddots & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{12} & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

y se denomina *matriz de diferenciación* de orden 4,  $\mathcal{O}(h^4)$ .

Observamos que el operador  $D_n$  dado en (3.15) y (3.22) es antisimétrico:

$$D_n^T = -D_n.$$

# CAPÍTULO IV

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. Matrices de Diferenciación de Chebyshev

Una de las ventajas de las matrices de diferenciación es que se puede aproximar derivadas de mayor orden con solo realizar multiplicaciones de ellas. Es por ello que veremos ahora las matrices de diferenciación de Chebyshev.

Los polinomios de Chebyshev son funciones definidas en el intervalo  $[-1, 1]$  y obedecen a la regla de recurrencia:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (4.1)$$

donde

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \quad (4.2)$$

Las funciones dadas en (4.2) son llamadas las condiciones iniciales. Estos polinomios son un caso particular de una familia de polinomios ortogonales dadas en el siguiente teorema, cuya demostración puede verse en ([Zarowski, 2004](#)).

**4.1.1. Teorema.** *Cualesquier tres polinomios ortogonales están relacionados por la fórmula de recurrencia de tres términos:*

$$\Phi_{n+1}(x) = (A_n x + B) \cdot \Phi_n(x) + C_n \cdot \Phi_{n-1}(x), \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{cases} A_n = \frac{\Phi_{n+1,n+1}}{\Phi_{n,n}}, \\ B_n = \frac{\Phi_{n+1,n+1}}{\Phi_{n,n}} \cdot \left( \frac{\Phi_{n+1,n}}{\Phi_{n+1,n+1}} - \frac{\Phi_{n,n-1}}{\Phi_{n,n}} \right), \\ C_n = -\frac{\Phi_{n+1,n+1} \cdot \Phi_{n-1,n-1}}{\Phi_{n,n}^2}. \end{cases} \quad (4.4)$$

(Zarowski, 2004). ■

Algunos polinomios de Chebyshev se dan a continuación:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_1 &= x, \\ T_2 &= 2x^2 - 1, \\ T_3 &= 4x^3 - 3x, \\ T_4 &= 8x^4 - 8x^2 - 1, \\ T_5 &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \end{aligned} \quad (4.5)$$

Los ceros de los polinomios de Chebyshev en  $[-1, 1]$  están dados por:

$$x_k = \cos \left( \frac{2k-1}{2n} \cdot \pi \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

La derivada se puede obtener mediante

$$T'_n(x) = \frac{n}{2 \cdot (1-x^2)} \cdot (T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)) \quad (4.7)$$

De (4.7) y (4.1) se obtiene

$$2T_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} \quad (4.8)$$

Igualmente, de (4.8), se tiene

$$\int T_n(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right) + C. \quad (4.9)$$

Además, de la ley recursiva de los polinomios de Chebyshev, (4.1), tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

El siguiente teorema nos da la generación de las matrices de diferenciación de Chebyshev, cabe señalar que los polinomios interpolantes de Lagrange son importantes para la construcción de esas matrices.

**4.1.2. Teorema.** *Para cada  $n \geq 1$ , la matriz de diferenciación espectral de Chebyshev  $D_n$ , la cual es una matriz cuadrada de orden  $(n+1) \times (n+1)$ , tiene por entradas a: (Trefethen, 2000)*

$$(D_n)_{00} = \frac{2n^2 + 1}{6}, \quad (D_n)_{n,n} = -\frac{2n^2 + 1}{6} \quad (4.11)$$

$$(D_n)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)}, \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (4.12)$$

$$(D_n)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \cdot \frac{(-1)^{i+j}}{(x_i - x_j)}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n-1 \quad (4.13)$$

donde

$$c_i = \begin{cases} 2 & , \quad i = 0 \text{ ó } n \\ 1 & , \quad \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4.14)$$

■

La forma de la matriz  $D_n$  es

$\frac{2N^2 + 1}{6}$	$2 \frac{(-1)^j}{1 - x_j}$	$\frac{1}{2}(-1)^N$
$-\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1 - x_i}$	$\frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j}$ $\frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)}$ $\frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j}$	$\frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1 + x_i}$
$-\frac{1}{2}(-1)^N$	$-2 \frac{(-1)^{N+j}}{1 + x_j}$	$-\frac{2N^2 + 1}{6}$

Los  $x_k$  del Teorema (4.1.2) son los puntos de red de Chebyshev, es decir los puntos de Chebyshev:

$$x_k = \cos \left( \frac{k}{n} \cdot \pi \right), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4.15)$$

Así, para el caso  $n = 1$  tenemos que los  $x_k$  ( $k = 0, 1$ ) son

$$x_0 = \cos \left( \frac{0}{1} \cdot \pi \right) = \cos(0) = 1; \quad x_1 = \cos \left( \frac{1}{1} \cdot \pi \right) = \cos(\pi) = -1$$

Construyendo el polinomio interpolante de Lagrange para esos nodos junto con los datos  $y_0$  y  $y_1$ , respectivamente:

$$P_2(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1 = \frac{1}{2} \cdot y_0(x + 1) - \frac{1}{2} \cdot y_1(x - 1)$$

Su derivada es

$$P_2'(x) = \frac{1}{2} \cdot y_0 - \frac{1}{2} \cdot y_1$$

Es decir

$$\begin{aligned} P_2'(x_0 = 1) &= \frac{1}{2} \cdot y_0 - \frac{1}{2} \cdot y_1 \\ P_2'(x_1 = -1) &= \frac{1}{2} \cdot y_0 - \frac{1}{2} \cdot y_1 \end{aligned} \implies \begin{pmatrix} P_2'(x_0) \\ P_2'(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Si hacemos  $w_0 = P_2'(x_0)$  y  $w_1 = P_2'(x_1)$  tendremos

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{= D_2} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \implies \bar{w} = D_2 \cdot \bar{y}$$

En forma similar, si hacemos  $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ , tendremos los nodos de Chebyshev:

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -1$$

y el polinomio interpolante de Lagrange,  $P_3(x)$ , y su derivada,  $P_3'(x)$ , son

$$P_3(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2 + L_3(x) \cdot y_3$$

$$P_3'(x) = L_0'(x) \cdot y_0 + L_1'(x) \cdot y_1 + L_2'(x) \cdot y_2 + L_3'(x) \cdot y_3$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0(x) = \frac{2}{3}(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})(x + 1) \implies L_0'(x) = \frac{12x^2 + 8x - 1}{6} \\ L_1(x) = -\frac{4}{3}(x - 1)(x + \frac{1}{2})(x + 1) \implies L_1'(x) = \frac{-12x^2 - 4x + 4}{3} \\ L_2(x) = \frac{4}{3}(x - 1)(x - \frac{1}{2})(x + 1) \implies L_2'(x) = \frac{12x^2 - 4x - 4}{3} \\ L_3(x) = -\frac{2}{3}(x - 1)(x - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) \implies L_3'(x) = \frac{-12x^2 + 8x + 1}{6} \end{array} \right.$$

Ahora, hacemos  $w_k = P'_3(x_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , y tendremos la representación matricial

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{19}{6} & -4 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{19}{6} \end{pmatrix}}_{=D_3} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \implies \bar{w} = D_3 \cdot \bar{y}$$

Supongamos que  $n = 12$  y tenemos la función  $y = \delta(x)$  : delta de Dirac con soporte en  $x_8 = -\frac{1}{2}$ , entonces

$$P_{12}(x) = \sum_{k=0}^{12} L_k(x) \cdot \delta(x_k) \implies P'_{12}(x) = \sum_{k=0}^{12} L'_k(x) \cdot \delta(x_k)$$

Para  $n = 12$  los nodos son

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 & , & & x_1 &= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & , & & x_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & , & & x_4 &= \frac{1}{2} & , & & x_5 &= \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ x_6 &= 0 & , & & x_7 &= -\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & , & & x_8 &= -\frac{1}{2}, \\ x_9 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & , & & x_{10} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} & , & & x_{11} &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \\ x_{12} &= -1. \end{aligned}$$

y en vista de que el soporte es en  $x_8 = -\frac{1}{2}$ , tenemos

$$L'_8(x_7) = -4.14626, \quad L'_8(x_8) = 0.333333, \quad L'_8(x_9) = 4.82843$$

estas son las pendientes dadas en la matriz de diferenciación

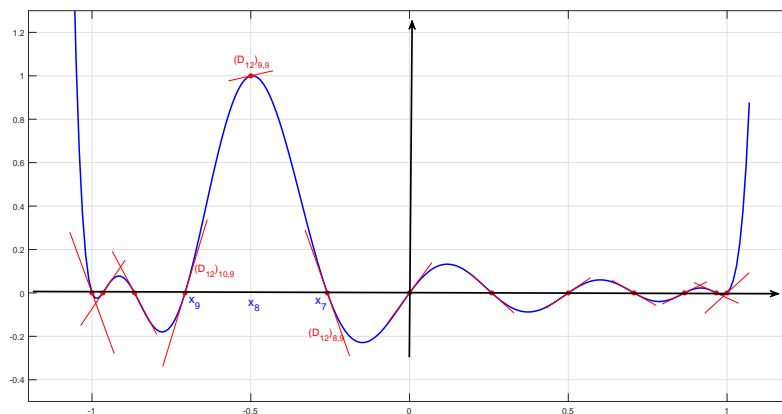
$$(D_{12})_{8,9} = -4.14626, \quad (D_{12})_{9,9} = 0.333333, \quad (D_{12})_{10,9} = 4.82843$$

La matriz de diferenciación  $D_{12}$  de orden  $13 \times 13$  es:

$$D_{12} = \begin{pmatrix} 48.167 & -58.696 & 14.928 & -6.828 & 4.000 & -2.698 & 2.000 & -1.589 & 1.333 & -1.172 & 1.072 & -1.017 & 0.500 \\ 14.674 & -7.210 & -10.010 & 3.864 & -2.146 & 1.414 & -1.035 & 0.816 & -0.682 & 0.598 & -0.546 & 0.518 & -0.254 \\ -3.732 & 10.010 & -1.732 & -6.292 & 2.732 & -1.647 & 1.155 & -0.889 & 0.732 & -0.636 & 0.577 & -0.546 & 0.268 \\ 1.707 & -3.864 & 6.292 & -0.707 & -4.828 & 2.231 & -1.414 & 1.035 & -0.828 & 0.707 & -0.636 & 0.598 & -0.293 \\ -1.000 & 2.146 & -2.732 & 4.828 & -0.333 & -4.146 & 2.000 & -1.318 & 1.000 & -0.828 & 0.732 & -0.682 & 0.333 \\ 0.675 & -1.414 & 1.647 & -2.231 & 4.146 & -0.139 & -3.864 & 1.932 & -1.319 & 1.035 & -0.889 & 0.816 & -0.397 \\ -0.500 & 1.035 & -1.155 & 1.414 & -2.000 & 3.864 & -0.000 & -3.864 & 2.000 & -1.414 & 1.155 & -1.035 & 0.500 \\ 0.397 & -0.816 & 0.889 & -1.035 & 1.319 & -1.932 & 3.864 & 0.139 & -4.146 & 2.231 & -1.647 & 1.414 & -0.675 \\ -0.333 & 0.682 & -0.732 & 0.828 & -1.000 & 1.318 & -2.000 & 4.146 & 0.333 & -4.828 & 2.732 & -2.146 & 1.000 \\ 0.293 & -0.598 & 0.636 & -0.707 & 0.828 & -1.035 & 1.414 & -2.231 & 4.828 & 0.707 & -6.292 & 3.864 & -1.707 \\ -0.268 & 0.546 & -0.577 & 0.636 & -0.732 & 0.889 & -1.155 & 1.647 & -2.732 & 6.292 & 1.732 & -10.010 & 3.732 \\ 0.254 & -0.518 & 0.546 & -0.598 & 0.682 & -0.816 & 1.035 & -1.414 & 2.146 & -3.864 & 10.010 & 7.210 & -14.674 \\ -0.500 & 1.017 & -1.072 & 1.172 & -1.333 & 1.589 & -2.000 & 2.698 & -4.000 & 6.828 & -14.928 & 58.696 & -48.167 \end{pmatrix}$$

En la Figura (4.1), se observa el polinomio interpolante de Lagrange de grado 12,  $P_{12}$ , de la función  $\delta(x)$  con soporte en  $x_8 = -\frac{1}{2}$  y las tangentes en los nodos respectivos.

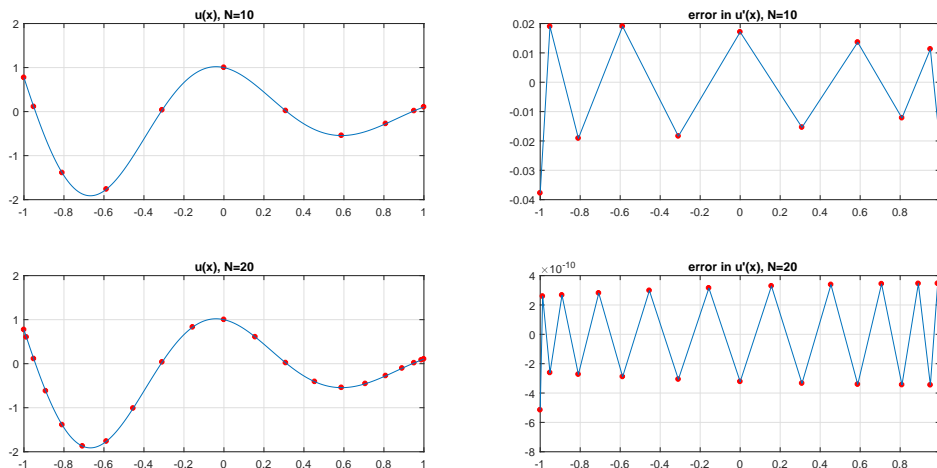
**Figura 4.1.** Polinomio interpolante de Lagrange de grado 12, de  $\delta(x)$ , junto con las tangentes en los nodos.



### 4.1.1. Uso de $D_n$ para una función no periódica y suave

Consideremos la función  $f(x) = e^{-x} \cos(5x)$ . Aplicamos  $D_n$ , para  $n = 10$  y  $n = 20$ . En la Figura (4.2), se observa la función  $f(x)$  y el error de la derivada  $f'(x)$ . Si tomamos  $n \geq 20$ , el error es del orden menor a  $10^{-10}$ .

**Figura 4.2.** Diferenciación de Chebyshev de  $f(x) = e^{-x} \cos(5x)$ .

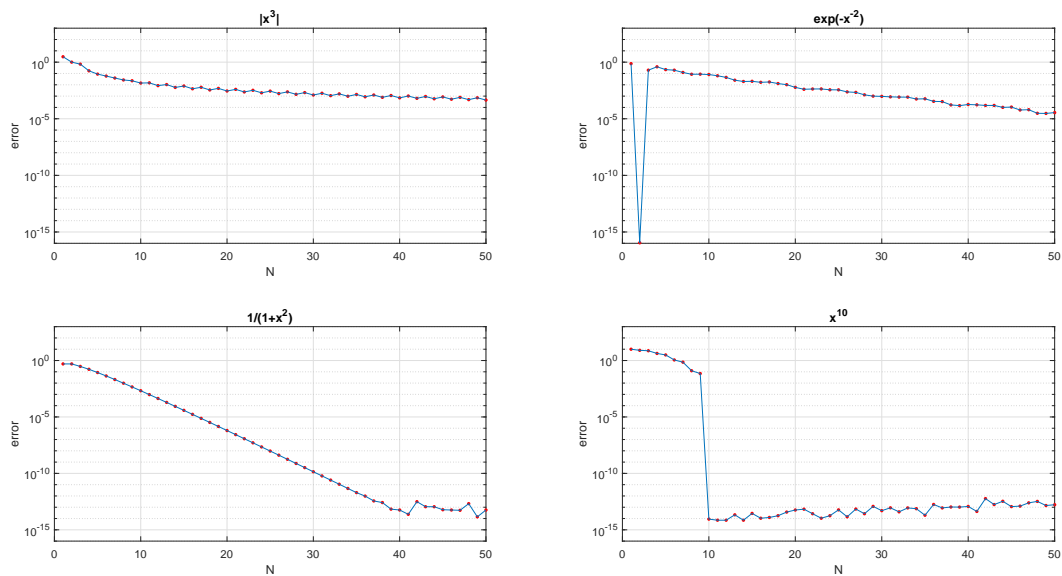


Consideremos a las funciones  $f_1(x) = |x^3|$ , cuya 3ra derivada no es acotada en  $[-1, 1]$ ,  $f_2(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ , que es  $C$ -infinito,  $f_3(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , que es analítica en  $[-1, 1]$ , y  $f_4(x) = x^{10}$ , que es polinomial.

En la Figura (4.3), se observa la precisión de la derivada espectral para la cuatro funciones anteriores. Para  $|x^3|$ , el error es del orden menor a  $10^{-2}$  con  $n \geq 10$ . Para  $e^{-\frac{1}{x^2}}$  es del orden menor a  $10^{-2}$  si  $n \geq 20$ . En la función  $\frac{1}{x^2+1}$  es

del orden menor a  $10^{-5}$ ,  $n \geq 20$ . Y en  $x^{10}$ , es del orden menor a  $10^{-13}$ ,  $n \geq 20$ .

**Figura 4.3.** Precisión de la derivada espectral de Chebyshev para cuatro funciones de suavidad creciente.



## 4.2. El Operador de Laurent

Hemos trabajado con matrices de diferenciación hasta de orden cuatro, sin embargo la idea es, si fuera posible, conseguir matrices de diferenciación con aproximaciones de orden infinito. Esto es lo que nos lleva a una matriz especial, la matriz infinita, llamada el **Operador de Laurent**.

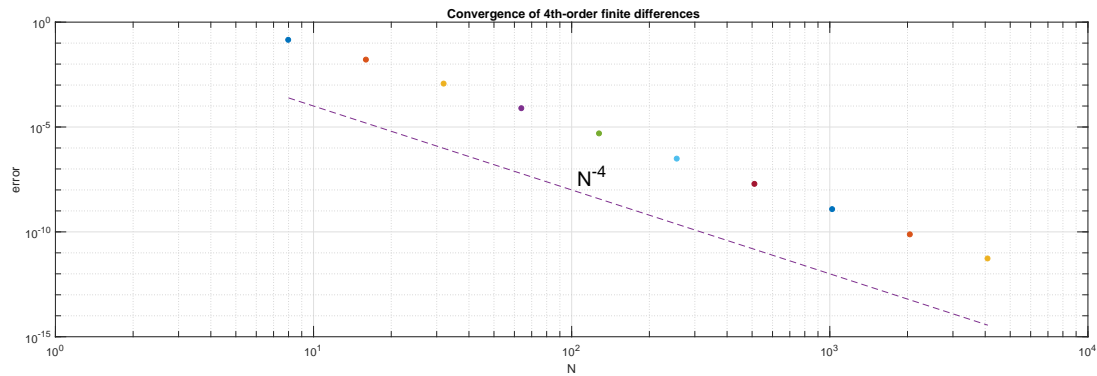
$$D = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \frac{1}{3} & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & -1 & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{3} & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Esta matriz es antisimétrica ( $D^T = -D$ ). Físicamente no se puede trabajar con matrices infinitas, es por ello que para  $n$  par se utilizan polinomios trigonométricos y la matriz de diferenciación que se obtiene es

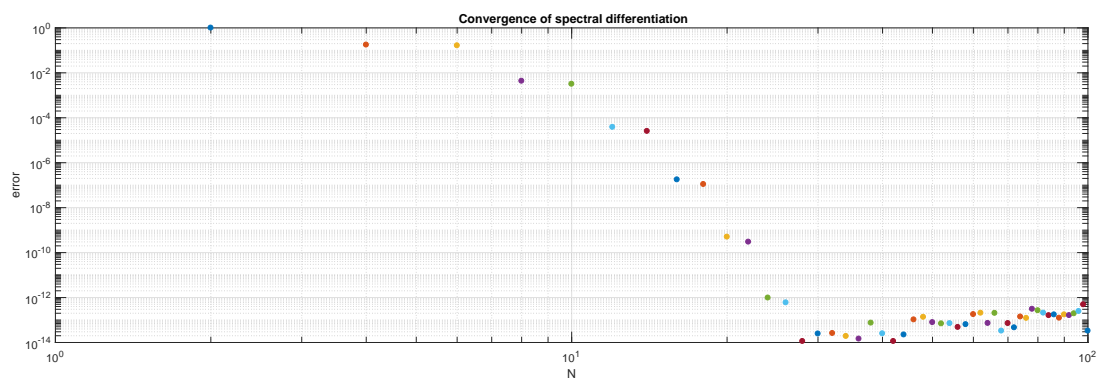
$$D_n = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \frac{1}{2} \cot\left(\frac{3h}{2}\right) & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} \cot\left(\frac{2h}{2}\right) & & & & & \\ & & & \frac{1}{2} \cot\left(\frac{1h}{2}\right) & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} \cot\left(\frac{1h}{2}\right) & & \ddots & & & \\ & & & \frac{1}{2} \cot\left(\frac{2h}{2}\right) & & & \ddots & & \\ & & & -\frac{1}{2} \cot\left(\frac{3h}{2}\right) & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \ddots & \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Comparamos el orden de precisión de la matriz dada en (3.22) y con la matriz dada en (4.17).

**Figura 4.4.** Orden de precisión espectral de diferencias finitas, (convergencia de 4to orden), matriz (3.22).



**Figura 4.5.** Orden de precisión espectral con el operador de Laurent, matriz (4.17).



Observamos que el orden de convergencia en la matriz (3.22) es de aproximadamente  $10^{-11}$  con  $n \geq 1000$ . Sin embargo para la matriz dada en (4.17) no se necesitan muchos puntos de red, es decir para  $n \geq 50$  la precisión es más alta, aproximadamente  $10^{-15}$ .

### 4.3. Aplicación

Consideremos la ecuación de la propagación de la onda unidireccional, con coeficientes variables:

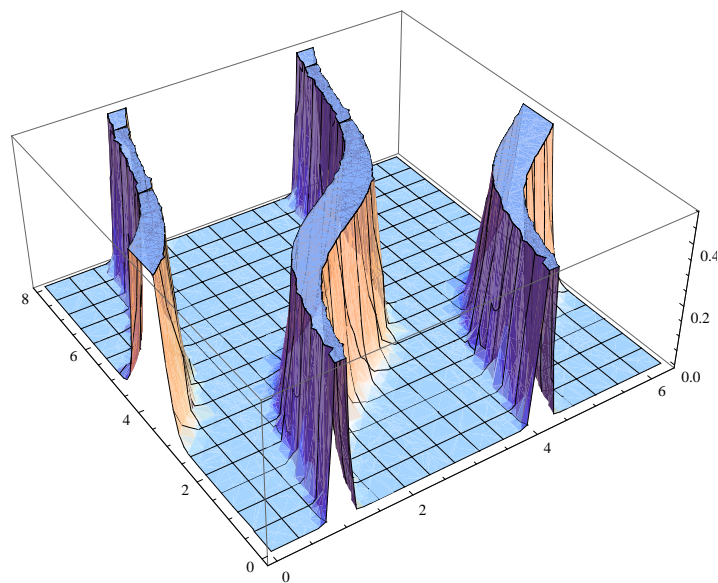
$$\frac{\partial u}{\partial t} + q(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad q(x) = \frac{1}{5} + \sin^2(x-1) \quad (4.18)$$

donde  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $t > 0$  con condiciones de frontera periódica y condición inicial

$$u(x, 0) = e^{-100(x-1)^2}$$

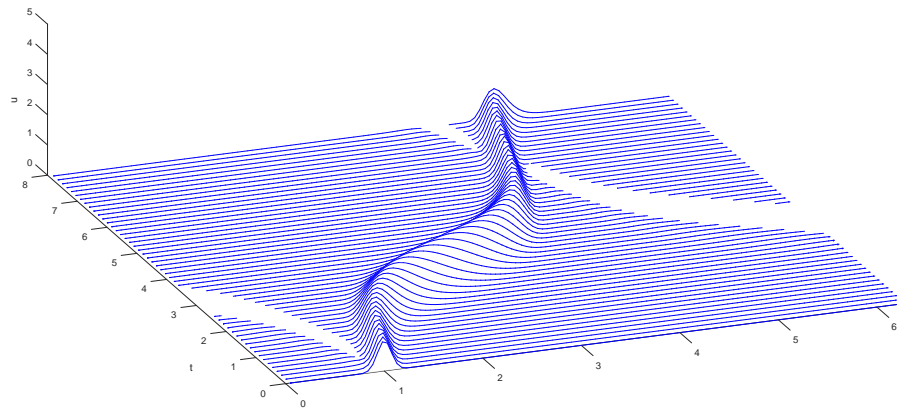
La gráfica de la solución exacta del problema dado en (4.18) se muestra en la Figura (4.6).

**Figura 4.6.** Solución exacta del problema (4.18).



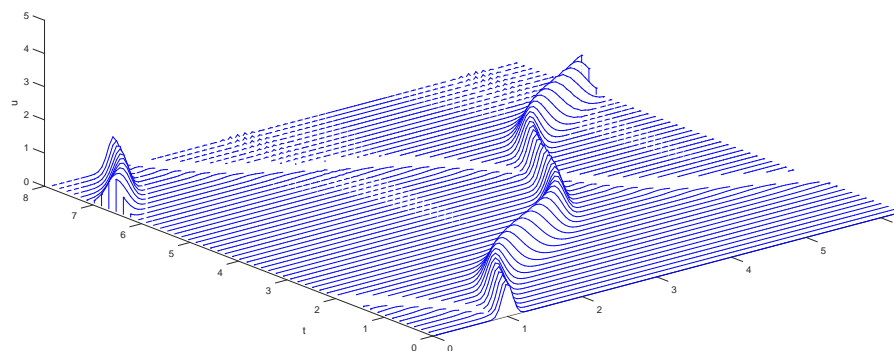
Y la gráfica de la solución utilizando el operador de Laurent, matriz (4.17), se muestra en la Figura (4.7).

**Figura 4.7.** Solución mediante el operador de Laurent.



Si en la ecuación (4.18) hacemos que  $q(x) = 0.4114 + \sin^2(x - 1)$  tendremos la gráfica dada en Figura (4.8).

**Figura 4.8.** Solución modificando la velocidad constante de la onda de 0.4114.



Los programas utilizados se encuentran en los anexos.

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo de investigación, se ha comprobado que las matrices de diferenciación pueden ser utilizadas para aproximar la derivada de funciones, sean estas continuas, con discontinuidades, igualmente para la solución de una ecuación diferencial parcial, como la ecuación de la onda. Asimismo, los polinomios de Lagrange juegan un papel crucial en la generación de dichas matrices.

En la solución de una ecuación diferencial parcial, la ecuación de la onda, se ha comprobado que el operador de Laurent da una aproximación más precisa a la que dan las diferencias finitas.

## RECOMENDACIONES

Se recomienda tener en cuenta que la matriz de diferenciación se ha aplicado a problemas periódicos. Sin embargo se sugiere analizar la función que actúa como condición inicial, pues si prácticamente se anula en los extremos, ésta se puede considerar como periódica.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ardila, M. (2020) *Algunas propiedades de las Matrices de Toeplitz Complejas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ciencias y Educación. Bogotá D.C.
- [2] Boyd, J.P (2001). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Second Edition.
- [3] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Zang, T. A. (1988). *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer–Verlag, Berlin, Germany.
- [4] Dym H. (1978). *Linear Algebra in Action*. Estados Unidos, Universidad de Windsor.
- [5] Glashoff, K. and Bronstein, M.M, (2018) *Almost-commuting matrices are almost jointly diagonalizable*. Institute of Computational Science, Faculty of Informatics, Università della Svizzera Italiana (USI). Lugano, Suiza.
- [6] Kucerovsky, D. and Sarraf, A., (2014) *Scur multipliers and matrix products*. Houston Journal of Mathematics. University of Houston.
- [7] Lara, T. (2001). *Matrices circulantes*. Departamento de Física y Matemáticas. NURR–ULA, Trujillo. Venezuela.
- [8] Trefethen, L.N., (2000). *Spectral Methods in MATLAB*. SIAM.
- [9] Trefethen, L. N.; Birksson, A., Driscoll, T. A. (2018). *Explorando la EDOS*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [10] Weideman, J.A.C. and Reddy, S.C. (2000). *A MATLAB Differentiation Matrix Suite*. ACM Trans. on Math. Software, 465–519.
- [11] Zang, T. A., Streett, C., Hussaini, M.. A. (1989). *Spectral Methods for CFD*. INSITUTE FOR COMPUTER APPLICATIONS IN SCIENCIE AND ENGINEERING NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia.
- [12] Zarowski, Ch. J. (2004). *An introduction to numerical analysis for electrical and computer engineers*. A Jhon Wiley and Sons, INC Publication, Canadá.

# ANEXOS

## 5.1. Convergencia: Diferencias Finitas

### 5.1.0.1. Programa. 1

```
% p1.m - Convergencia de diferencias finitas de 4to orden
% Para varios valores de N, configuramos la cuadrícula en [-pi,pi]
%y la función u(x):

Nvec = 2.^(3:12);

clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])

for N = Nvec

h = 2*pi/N; x = -pi + (1:N)*h;

u = exp(sin(x)); uprime = cos(x).*u;

% Construcción de matrices de diferenciación sparse de 4to orden:

e = ones(N,1);

D = sparse(1:N,[2:N 1],2*e/3,N,N)...
- sparse(1:N,[3:N 1 2],e/12,N,N);

D = (D-D')/h;

% Plot max(abs(D*u-uprime)):
```

```

error = norm(D*u-uprime,inf);

loglog(N,error, '.', 'markersize',15), hold on

end

grid on, xlabel N, ylabel error

title('Convergencia de diferencias finitas de 4to orden')

semilogy(Nvec,Nvec.^(-4),'--')

text(105,5e-8,'N^{-4}','fontsize',18)

```

## 5.2. Convergencia: Diferenciación Espectral

### 5.2.0.1. Programa. 2

```

% p2.m - Convergencia del método espectral periódico

% Para varios valores de N (par), se configura la cuadrícula:

clf, subplot('position',[.1 .4 .8 .5])

for N = 2:2:100

h = 2*pi/N;

x = -pi + (1:N)*h;

u = exp(sin(x)); uprime = cos(x).*u;

% Construcción de la matriz de diferenciación espectral:

column = [0 .5*(-1).^(1:N-1).*cot((1:N-1)*h/2)];

D = toeplitz(column,column([1 N:-1:2]));

% Plot max(abs(D*u-uprime)):

error = norm(D*u-uprime,inf);

loglog(N,error, '.', 'markersize',15), hold on

end

```

```
grid on, xlabel N, ylabel error
title('Convergencia de diferenciación espectral')
```

## 5.3. Diferenciación de Chebyshev

### 5.3.0.1. Programa. 3

```
% p11.m - Diferenciación de Chebyshev de funciones suaves
xx = -1:.01:1; uu = exp(-xx).*cos(5*xx); clf
for N = [10 20]
[D,x] = chebi(N); u = exp(-x).*cos(5*x);
subplot('position',[.15 .66-.4*(N==20) .31 .28])
plot(x,u,'.r','markersize',14), grid on
line(xx,uu,'linewidth',.8)
title(['u(x), N=' int2str(N)])
error = D*u + exp(-x).*(5*sin(5*x)+cos(5*x));
subplot('position',[.55 .66-.4*(N==20) .31 .28])
plot(x,error,'.r','markersize',14), grid on
line(x,error,'linewidth',.8)
title([' Error en u''(x), N=' int2str(N)])
end
```

## 5.4. Precisión: Diferenciación de Chebyshev

### 5.4.0.1. Programa. 4

```
% p12.m - Precisión de la diferenciación espectral de Chebyshev
% Cálculo de las derivadas para varios valores de N:
Nmax = 50; E = zeros(3,Nmax);
for N = 1:Nmax
    [D,x] = chebi(N);
    v = abs(x).^3; vprime = 3*x.*abs(x); % 3ra derivada Variac. Acotada
    E(1,N) = norm(D*v-vprime,inf);
    v = exp(-x.^(-2)); vprime = 2.*v./x.^3; % C-infinity
    E(2,N) = norm(D*v-vprime,inf);
    v = 1./(1+x.^2); vprime = -2*x.*v.^2; % analítica en [-1,1]
    E(3,N) = norm(D*v-vprime,inf);
    v = x.^10; vprime = 10*x.^9; % polinomio
    E(4,N) = norm(D*v-vprime,inf);
end
% Gráfica de resultados:
titles = {'|x^3|','exp(-x^{-2})','1/(1+x^2)','x^{10}'}; clf
for iplot = 1:4
    subplot(2,2,iplot)
    semilogy(1:Nmax,E(iplot,:),'.r','markersize',9)
    line(1:Nmax,E(iplot,:),'linewidth',.8)
    axis([0 Nmax 1e-16 1e3]), grid on
    set(gca,'xtick',0:10:Nmax,'ytick',(10).^(-15:5:0))
    xlabel N, ylabel error, title(titles(iplot))
end
```

## 5.5. Solución de Ecuación de la onda

### 5.5.0.1. Programa. 5

```
% p6.m - Ecuación de la onda con coeficiente variable
% Red, coeficiente variable, y condición inicial:
N = 128; h = 2*pi/N; x = h*(1:N); t = 0; dt = h/4;
%c = 1/5 + sin(x-1).^2;
c = .4114 + sin(x-1).^2;
v = exp(-100*(x-1).^2); vold = exp(-100*(x-.2*dt-1).^2);
```

```

% Tamaño de paso en el tiempo para la fórmula Leap Frog:

tmax = 8; tplot = .15; clf, drawnow

plotgap = round(tplot/dt); dt = tplot/plotgap;

nplots = round(tmax/tplot);

data = [v; zeros(nplots,N)]; tdata = t;

for i = 1:nplots

for n = 1:plotgap

t = t+dt; v_hat = fft(v);

w_hat = 1i*[0:N/2-1 0 -N/2+1:-1] .* v_hat;

w = real(ifft(w_hat));

vnew = vold - 2*dt*c.*w; vold = v; v = vnew;

end

data(i+1,:) = v; tdata = [tdata; t];

end

waterfall(x,tdata,data), view(10,70), colormap([0 0 1])

axis([0 2*pi 0 tmax 0 5]), ylabel t, zlabel u, grid off

```

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 053-2024-FIMGC**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS. ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICA**

En la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga de la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **Resolución Docanal N° 566-2024-FIMGC-D**, a los veintiséis días del mes de agosto de 2024, siendo las 11:00 a.m, reunidos en el Auditorio de la Escuela Profesional de Ingeniería de Minas, bajo la presidencia del MSc. Ing. José Ernesto ESTRADA CARDENAS y los miembros; Mg. Víctor Alcides COAQUIRA CÁRDENAS, Mg. José Carlos JUARÉZ PULACHE y Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO, actuando como secretario docente el MSc. Ing. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO, para proceder a la sustentación de tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática, del Bachiller en Ciencias Físico Matemáticas:

**NILO NAJARRO CÁRDENAS**

Quien presentó la tesis denominada:

**Matrices de diferenciación y el operador de Laurent**

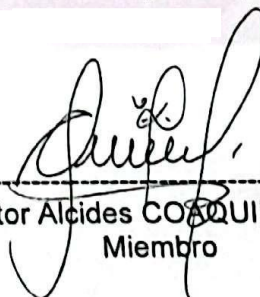
Los señores miembros del jurado luego de expuesto la tesis y absueltas las preguntas, delibera y lo declaran:

**APROBADO CON NOTA DIECISIETE (17)**

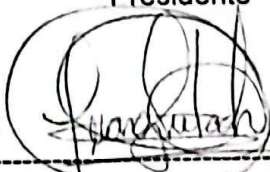
Siendo las 1:50 p.m. del día 26 de agosto de 2024, culmina el acto de sustentación de tesis, y en conformidad a lo actuado los miembros del jurado firmamos al pie del presente.



-----  
MSc. Ing. José Ernesto ESTRADA CARDENAS  
Presidente



-----  
Mg. Víctor Alcides COAQUIRA CÁRDENAS  
Miembro



-----  
Mg. José Carlos JUARÉZ PULACHE  
Miembro



-----  
Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO  
Miembro



-----  
MSc. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO.  
Secretario docente de la FIMGC

cc:  
Archivo



UNSCH

FACULTAD DE  
INGENIERÍA  
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL



## CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

### CONSTANCIA N° 006-2024-JAHQ-FIMGC/UNSCH

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales de la Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 697-2024-FIMGC-D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

**Nombres y Apellidos** : NILO NAJARRO CÁRDENAS.  
**Escuela Profesional** : CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.  
**Título de la Tesis** : Matrices de Diferenciación y el Operador de Laurent  
**Evaluación de la Originalidad** : 8 % Índice de Similitud.  
**Identificador de la entrega** : 2500264733.

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 05 de diciembre del 2024.

Dr. JUAN ALFREDO HUAMANCHAQUI QUISPE  
DNI N°: 41764585

# Matrices de Diferenciación y el Operador de Laurent

*por NILO NAJARRO CÁRDENAS*

---

**Fecha de entrega:** 05-dic-2024 07:21a.m. (UTC-0500)

**Identificador de la entrega:** 2500264733

**Nombre del archivo:** Nilo\_Najarro\_Tesis\_v-2-97\_u.pdf (1.36M)

**Total de palabras:** 14679

**Total de caracteres:** 58528

# Matrices de Diferenciación y el Operador de Laurent

## INFORME DE ORIGINALIDAD

<b>8%</b>	<b>6%</b>	<b>1%</b>	<b>4%</b>
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

<b>1</b>	<b>Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga</b> Trabajo del estudiante	<b>2%</b>
<b>2</b>	<b>repositorio.unsch.edu.pe</b> Fuente de Internet	<b>1%</b>
<b>3</b>	<b>qdoc.tips</b> Fuente de Internet	<b>1%</b>
<b>4</b>	<b>emis.kaist.ac.kr</b> Fuente de Internet	<b>1%</b>
<b>5</b>	<b>ebin.pub</b> Fuente de Internet	<b>1%</b>
<b>6</b>	<b>repositorio.unsa.edu.pe</b> Fuente de Internet	<b>&lt;1%</b>
<b>7</b>	<b>Zarowski. "Orthogonal Polynomials", An Introduction to Numerical Analysis for Electrical and Computer Engineers, 03/02/2004</b> Publicación	<b>&lt;1%</b>

8	Fuente de Internet	<1 %
9	sharif.edu Fuente de Internet	<1 %
10	Submitted to Universidad Nacional Mayor de San Marcos Trabajo del estudiante	<1 %
11	Tom H. Koornwinder. "The Askey scheme as a four-manifold with corners", The Ramanujan Journal, 10/28/2009 Publicación	<1 %
12	Submitted to Woodstock School Trabajo del estudiante	<1 %
13	Submitted to Indian Institute of Technology, Bombay Trabajo del estudiante	<1 %
14	www.haringey.gov.uk Fuente de Internet	<1 %
15	www.lilo.org.uk Fuente de Internet	<1 %
16	hdl.handle.net Fuente de Internet	<1 %

Exclur bibliografia    Activo