

**UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE  
HUAMANGA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL**

**ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS:**

**Existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de  
una ley de conservación parcialmente no-local en los espacios  
de Besov Clásico**

Para optar el título profesional de:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.  
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

PRESENTADO POR:

**Bach. Nelson QUISPE CUBA**

ASESOR:

**M.Sc. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO**

**AYACUCHO - PERÚ**

**2024**

## Resumen

Esta tesis se centra en la investigación analítica de una innovadora ley de conservación parcialmente no-local. Esta ley de conservación surge como un intento de generalizar una ley de conservación unidimensional al añadirle una dimensión espacial y fue denominada "ley de conservación con velocidad parcialmente no-local" por quién lo propuso. Su principal característica radica en que su campo de velocidades se define mediante la composición de dos operadores no locales parciales: el potencial de Riesz parcial y la transformada de Hilbert parcial. En este trabajo, se logró establecer la buena colocación de dicha ley de conservación parcialmente no-local en el marco de los espacios de Besov Clásico, demostrando así la existencia y unicidad de la solución, así como la dependencia continua respecto a los datos iniciales en estos espacios. Para alcanzar estos objetivos, fue necesario demostrar dos nuevas estimativas para operadores conmutadores en función de los operadores no locales parciales mencionados. Además, se obtuvo una limitación para la ley de conservación parcialmente no-local al incorporar un término fuente.

**Palabras clave:** Ley de conservación parcialmente no-local, Operadores no-local, Espacios de Besov Clásico, Buena colocación de una ley de conservación no-local.

## Abstract

This thesis focuses on the analytical investigation of a novelty partially non-local conservation law. This law of conservation arose as an attempt to generalize a one-dimensional conservation law by adding a spatial dimension and was termed "partially non-local velocity conservation law" by its proposer. Its main feature lies in the fact that its velocity field is defined through the composition of two partial non-local operators: the partial Riesz potential and the partial Hilbert transform. In this work, the well-posedness of this partially non-local conservation law was established within the framework of classical Besov spaces, demonstrating both the existence and uniqueness of the solution, as well as continuous dependence on the initial data in these spaces. To achieve these objectives, it was necessary to establish two new estimates for commutator operators based on those above partial non-local operators. Additionally, a limitation for the partially non-local conservation law was obtained by incorporating a source term.

**Keywords:** Partially non-local conservation law, Non-local operators, Classical Besov spaces, Well-posedness of a non-local conservation law.

## **Agradecimientos**

Primero y ante todo, expreso mi más profunda gratitud a Dios. Extiendo mi sincero agradecimiento a mi asesor, el M.Sc. Daúl Andrés Paiva Yanayaco, así como a los miembros del jurado de tesis, los M.Sc. Ing. José Ernesto Estrada Cárdenas, Juan Pablo Valverde Cueva y José Luis Condori Condori, por su invaluable apoyo en las correcciones y mejoras realizadas en la redacción de este trabajo. Quiero expresar un agradecimiento especial al Dr. Julio César Valencia Guevara, por todas las enseñanzas, la paciencia y las valiosas sugerencias que enriquecieron significativamente esta tesis.

Estoy profundamente agradecido con la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga (UNSCH) y la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas (FISMA) por brindarme la oportunidad de cursar mis estudios de pregrado, permitiéndome recibir una formación sólida para enfrentar los retos académicos del posgrado. Asimismo, reconozco y valoro el apoyo académico de mis compañeros Eder, Margoth, Yanina, entre otros y de los profesores Enrique Avilés, Martha Nina, entre otros, quienes desempeñaron un papel esencial en mi formación a lo largo de los semestres cursados hasta culminar mi carrera profesional.

Un agradecimiento especial a mis padres, Eleutério y Adela, de igual manera, a mis hermanos, William y Christian, quienes han sido mi principal motor y motivo durante el largo camino de mi formación profesional.

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Abstract</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice general</b>	<b>IV</b>
<b>I. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	2
1.2. Organización . . . . .	5
<b>II. Planteamiento del problema</b>	<b>7</b>
2.1. Descripción de la realidad problemática . . . . .	7
2.2. Delimitación de la investigación . . . . .	8
2.2.1. Espacial . . . . .	8
2.2.2. Social . . . . .	8
2.2.3. Temporal . . . . .	9
2.3. Problema de investigación . . . . .	9
2.3.1. Problema general . . . . .	9
2.3.2. Problemas específicos . . . . .	9
2.4. Objetivos . . . . .	9
2.4.1. Objetivo general . . . . .	9
2.4.2. Objetivos específicos . . . . .	10
2.5. Hipótesis . . . . .	10
2.5.1. Hipótesis general . . . . .	10
2.5.2. Hipótesis específicas . . . . .	10
2.6. Diseño metodológico . . . . .	10
2.6.1. Tipo de investigación . . . . .	10
2.6.2. Nivel de investigación . . . . .	11
2.6.3. Diseño de investigación . . . . .	11
2.6.4. Población y muestra . . . . .	11

2.6.5.	Técnicas e instrumentos de recolección de datos . . . . .	11
2.6.6.	Técnicas de procesamiento y análisis de datos . . . . .	11
2.7.	Materiales . . . . .	11
<b>III.</b>	<b>Marco teórico</b>	<b>13</b>
3.1.	Leyes de conservación . . . . .	13
3.2.	Espacio de las funciones de Schwartz . . . . .	19
3.2.1.	Topología Débil y Débil Estrella . . . . .	20
3.2.2.	Espacios $L^p$ . . . . .	22
3.2.3.	Espacio de las funciones de Schwartz . . . . .	24
3.3.	El espacio de las distribuciones temperadas . . . . .	30
3.4.	Descomposición de Littlewood-Paley . . . . .	31
3.5.	Espacios de Besov clásico . . . . .	35
3.5.1.	Propiedades básicas de los espacios de Besov clásico . . . . .	38
<b>IV.</b>	<b>Materiales y métodos</b>	<b>39</b>
4.1.	Desigualdad de tipo Bernstein para operadores no locales parciales en los espacios de Besov . . . . .	41
4.2.	Estimativa de los operadores conmutadores en los espacios de Besov . . . . .	44
<b>V.</b>	<b>Resultados</b>	<b>58</b>
5.1.	Buena colocación de la ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov Clásico . . . . .	58
<b>VI.</b>	<b>Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>79</b>
6.1.	Conclusiones . . . . .	80
6.2.	Recomendaciones . . . . .	81

# Capítulo I

## Introducción

La presente tesis tiene como objetivo realizar un estudio analítico de una ley de conservación parcialmente no-local. Esta ley de conservación es un intento de generalizar una ley de conservación unidimensional añadiendo una dimensión espacial y abordándola dimensión por dimensión mediante la descomposición del dominio espacial (en el espíritu de una metodología de descomposición de operadores), además rotando el campo de velocidades en  $90^\circ$  en sentido anti-horario. La ley de conservación no-local en mención es dado por

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla \cdot (-\theta \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, \theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta) = 0 \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

donde  $\theta : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar, los datos iniciales  $\theta_0(x, y)$  no son necesariamente regulares en el sentido de que el dato inicial es suficientemente suave. Además,  $\mathcal{H}_i$  y  $\Lambda_i^{\alpha-1}$  con  $i = 1, 2$  son los operadores parcialmente no locales, la transformada de Hilbert parcial y el potencial de Riesz parcial respectivamente, los cuales serán definidos más adelante.

La ley de conservación parcialmente no-local que estudiaremos analíticamente puede ser interpretado como una ecuación de transporte no-lineal con un flujo parcialmente no-local. Aun-

que se trata de una propuesta reciente, aún carece de una interpretación física clara. La ecuación de transporte es una ecuación diferencial parcial (EDP) que describe cómo una cantidad, como masa, energía o la concentración de una sustancia, se desplaza a través de un medio debido a un flujo o movimiento. Este tipo de ecuación es común en física, ingeniería y ciencias aplicadas, ya que modela procesos de propagación de sustancias en un flujo continuo, como la transmisión de calor en un medio o la dispersión de contaminantes en un fluido. Para más detalles, ver LeVeque (2002); Evans (2010); Strauss (2007).

En el estudio analítico se obtuvo la buena colocación de la ley de conservación parcialmente no-local 1.1 en el marco de los espacios de Besov clásicos, es decir, se demostró la existencia y unicidad de la solución de la ley de conservación en mención, además de la dependencia continua considerando los datos iniciales en los espacios de Besov Clásico.

## **1.1. Estado del arte**

Este tipo de investigación introduce un enfoque novedoso para estudiar una ecuación de transporte bidimensional no-lineal y no-local. Para lograrlo, se define operadores no locales parciales asociados con el campo de velocidad de esta ecuación de transporte. Esto implica fijar una de las coordenadas de la variable y aplicar el operador no-local a la variable total, con una de ellas fijada. Como resultado, se obtiene un operador que actúa únicamente en una dirección. Es importante señalar que esta técnica debe aplicarse en ambas direcciones para cubrir todo el espacio de variables. Posteriormente, se aplica este enfoque a la ecuación de transporte a lo largo del dominio definido. De acuerdo a la literatura estudiada este novedoso enfoque fue utilizada por primera vez en Cuba (2024) para analizar la famosa ecuación quasi-geostrófica de superficie sin viscosidad, lo que dio lugar a la aparición de la ley de conservación con velocidad parcialmente no-local (1.1), pero el estudio de esta ley de conservación no-local fue solamente numérico a través del método Langrangeano-Euleriano.

En esta tesis nuestro objetivo es hacer un estudio analítico de la ley de conservación no-local en mención (1.1). Dado que esta la ley de conservación es novedosa y posee una nueva estructura, como un primer estudio en la parte analítica, conseguimos demostrar la buena colocación de esta ley de conservación en espacios de Besov clásicos.

Vale la pena resaltar que la motivación para esta tesis surge inicialmente del estudio de Delgado (2016) y Abreu et al. (2022). En estos trabajos, los autores investigan la buena colocación global y la explosión en tiempo finito de soluciones para una ecuación de transporte no lineal unidimensional con velocidad no-local

$$u_t - (u\mathcal{H}(u))_x = \nu u_{xx},$$

donde  $\nu > 0$  representa la viscosidad y consideran datos iniciales de medida. Este modelo surge en mecánica de fluidos y problemas de láminas de vórtices, entre otras situaciones. Su característica no-local proviene de la presencia de un operador integral singular, la transformada de Hilbert  $\mathcal{H}$ , en el campo de velocidad. Para el caso viscoso ( $\nu > 0$ ), los autores obtienen una condición explícita sobre el tamaño de los datos iniciales, lo que implica la buena colocación global en el marco de espacios de pseudo-medidas. Además, estudian numéricamente la explosión de tipo concentración y el comportamiento de difusión-suavización global de las soluciones. En el caso no viscoso ( $\nu = 0$ ), las simulaciones del modelo

$$u_t - (u\mathcal{H}(u))_x = 0$$

proporcionan evidencia de que la solución exhibe una explosión de tipo concentración con preservación de masa. Por el contrario, se observa un efecto de atenuación para el modelo con el signo opuesto en el flujo

$$u_t + (u\mathcal{H}(u))_x = 0,$$

inicializado con cualquier medida positiva no trivial como dato inicial. La solución manifiesta el comportamiento ya descrito en ambos casos, estas soluciones numéricas se obtuvieron mediante el método Lagrangeano-Euleriano.

En la misma línea, en el trabajo Huacasi Machaca (2021), se continuó el estudio de la solución numérica de la misma ecuación de transporte no-lineal y no-local unidimensional, pero con la adición del operador potencial de Riesz  $\Lambda^{\alpha-1}$  en el campo de velocidad. De hecho, la autora considera el modelo

$$u_t \pm (u\Lambda^{\alpha-1}\mathcal{H}u)_x = 0,$$

con  $0 < \alpha < 1$ , obteniendo resultados similares al anterior.

Las dos ecuaciones unidimensionales no lineales y no locales presentadas pueden interpretarse como la ecuación cuasi-geostrófica unidimensional. En concreto, Delgado (2016) y Huacasi Machaca (2021) estudian versiones unidimensionales de la ecuación cuasi-geostrófica de superficie que involucran dos operadores no locales unidimensionales, a saber, la transformada de Hilbert y el potencial de Riesz, desde perspectivas numéricas y analíticas, inicialmente motivados por la parte numérica y obteniendo resultados interesantes y novedosos en la parte analítica. Desde un punto de vista computacional, una forma natural de transitar al caso bi-dimensional es considerar un modelo intermedio. Este nuevo modelo es dado por una ley de conservación que contiene un campo de velocidad vectorial con componentes definidos por operadores no locales parciales, es decir, operadores unidimensionales que actúan por separado en cada eje. Este novedoso tipo de modelos fue propuesta y estudiada en Cuba (2024) al cual lo llamaron de una ley de conservación con velocidad parcialmente no-local. Esos modelos son

dados por

$$\begin{cases} \partial_t \theta \pm \nabla \cdot (\theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta) = 0, \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y), \end{cases}$$

donde  $\theta : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar, los datos iniciales  $\theta_0(x, y)$  no son necesariamente regulares. Además,  $\mathcal{H}_i$  y  $\Lambda_i^{\alpha-1}$  con  $i = 1, 2$  son los operadores parcialmente no locales, la transformada de Hilbert parcial y el potencial de Riesz parcial respectivamente. El estudio en este trabajo fue en la parte analítica y numérica, en la parte teórica se demostró la buena colocación en los espacios de Besov Clásico, mientras que en el estudio numérico se consideró dos casos, la primera fue cuando el flujo es positivo, o sea,  $\nabla \cdot (\theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta)$ , en este caso se obtuvo evidencias de atenuación de tipo regularización, el otro caso fue cuando el flujo es negativo, o sea,  $-\nabla \cdot (\theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta)$ , aquí se obtuvo evidencias de blow-up de tipo concentración. En ambas simulaciones se consideraron datos iniciales de medida y datos iniciales de medida de tipo weak-Morrey. Además de estos dos modelos se estudió la ley de conservación parcialmente no-local (1.1), pero en este caso solo se hizo el estudio numérico. Ahora en este trabajo se da la continuación del estudio en la parte analítica enfocándonos en la buena colocación de ley de conservación parcialmente no local en los espacios de Besov Clásico.

## 1.2. Organización

El contenido restante de este trabajo se estructura de la siguiente manera: el Capítulo II está dedicado a todo lo concerniente al planteamiento del problema, como la descripción de la realidad problemática, delimitación y formulación del problema de investigación. También se abordarán los objetivos, hipótesis y diseño metodológico. El Capítulo III está destinado al

marco teórico; aquí se hará una introducción a las leyes de conservación y se definirán algunos conceptos elementales, como la topología débil, los espacios  $L^p$ , los espacios de funciones de Schwartz, el espacio de las distribuciones temperadas, así como la descomposición de Littlewood-Paley. Todas estas teorías son necesarias para definir los espacios de Besov Clásico. Para finalizar este capítulo, presentaremos y demostraremos algunas propiedades básicas de los espacios de Besov Clásico, que serán utilizadas en el Capítulo IV. En este capítulo trataremos los materiales y métodos; el objetivo aquí es presentar el Teorema de la Desigualdad de tipo Bernstein para operadores no locales parciales y demostrar un corolario de este teorema que será muy útil en la estimación de los operadores conmutadores en los espacios de Besov Clásico, temas indispensables en el estudio analítico de la ley de conservación parcialmente no-local. En el penúltimo capítulo, Capítulo V, se presentan nuestros resultados principales de la investigación. Aquí se demostrará el teorema que garantiza la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov. Finalmente, en el Capítulo VI abordaremos las conclusiones y recomendaciones de nuestra investigación.

# Capítulo II

## Planteamiento del problema

### 2.1. Descripción de la realidad problemática

Las leyes de conservación con flujo no-local aparecen en varios problemas en ciencias puras y aplicadas, por ejemplo en la ecuación de un medio poroso con presión potencial fraccional Allen et al. (2017), la difusión anómala Meerschaert and Tadjeran (2004), la propagación de ondas en ciertos medios, como los materiales porosos saturados Sabzikar et al. (2015), también aparece en un modelo para el movimiento de las dislocaciones en un sólido propuesto por Biler, Karch y Monneau en Biler et al. (2010), la ecuación casi-geostrófica que modela la dinámica del encuentro de las corrientes de aire frío y caliente, ver Constantin et al. (1994), etc.

Recientemente en el trabajo de doctorado de Cuba (2024) se definieron y estudiaron tres tipos de leyes de conservación parcialmente no-local, siendo una de ellas

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla \cdot (-\theta \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, \theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta) = 0 \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $\theta : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar, los datos iniciales  $\theta_0(x, y)$  no son nece-

sariamente regulares, en el sentido de que es suficientemente suave. Además,  $\mathcal{H}_i$  y  $\Lambda_i^{\alpha-1}$  con  $i = 1, 2$  son los operadores no locales parciales, la transformada de Hilbert parcial y el potencial de Riesz parcial respectivamente que fueron definidos en el mismo trabajo de doctorado.

Los estudios de esta ley de conservación parcialmente no-local fueron solamente numéricos a través del método Lagrangeano-Euleriano Abreu and Pérez (2019); Abreu et al. (2020); Cuba (2024). Esto nos lleva a la siguiente pregunta:

*¿Será que la ley de conservación parcialmente no-local (2.1) es matemáticamente "bien planteado" en los espacios de Besov Clásico?*

Para responder esta pregunta debemos demostrar la buena colocación (o sea, existencia y unicidad de la solución, además de la dependencia continua de los datos iniciales) de esta de ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov Clásico.

## **2.2. Delimitación de la investigación**

### **2.2.1. Espacial**

Este trabajo se ubica en el área de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP). El concepto de buena colocación se refiere a las condiciones bajo las cuales un problema matemático presenta: existencia y unicidad de la solución, además de la dependencia continua de los datos iniciales.

### **2.2.2. Social**

El presente trabajo en principio es de aplicación para estudiantes de ciencias básicas (matemática, física, etc.) e Ingenierías.

### **2.2.3. Temporal**

La bibliografía utilizada abarca desde 1981 hasta la actualidad, incluyendo libros, artículos científicos, tesis, etc.

## **2.3. Problema de investigación**

### **2.3.1. Problema general**

¿Es posible demostrar, bajo un análisis riguroso en los espacios de Besov Clásico, la existencia, unicidad y la dependencia continua de las soluciones de la ley de conservación parcialmente no-local (2.1)?

### **2.3.2. Problemas específicos**

- ¿Qué propiedades básicas de los espacios de Besov Clásico serían útiles para demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1)?
- ¿Qué detalles se deben tomar en cuenta para demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1)?

## **2.4. Objetivos**

### **2.4.1. Objetivo general**

Demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de la ley de conservación parcialmente no-local (2.1) en los espacios de Besov Clásico.

## **2.4.2. Objetivos específicos**

- Presentar las propiedades básicas de los espacios de Besov que serían útiles para demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1).
- Dar a conocer los detalles que se deben tomar en cuenta para demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1).

## **2.5. Hipótesis**

### **2.5.1. Hipótesis general**

La ley de conservación parcialmente no-local (2.1) tiene una solución única con dependencia continua en los espacios de Besov Clásico.

### **2.5.2. Hipótesis específicas**

- La propiedad de inmersión de los espacios de Besov Clásico en los espacios  $L^p$  y en los mismos espacios Besov Clásico serán una herramienta para demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1).
- Bajo condiciones iniciales apropiadas en los espacios de Besov Clásico  $B_{p,q}^s$ , se puede demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1).

## **2.6. Diseño metodológico**

### **2.6.1. Tipo de investigación**

Documental.

### **2.6.2. Nivel de investigación**

Descriptivo.

### **2.6.3. Diseño de investigación**

No experimental.

### **2.6.4. Población y muestra**

No consigna.

### **2.6.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

<b>Diseño</b>	<b>Técnica</b>	<b>Instrumentos</b>
No experimental.	Sistematización bibliográfica.	Artículos científicos, libros y tesis.

### **2.6.6. Técnicas de procesamiento y análisis de datos**

Por la naturaleza del presente trabajo, no consigna.

## **2.7. Materiales**

- Humanos: Tesista, asesor y jurados.
- Materiales y equipos:
  - Materiales: libros, papel bond, lapiceros, memoria usb, materiales de escritorio.
  - Equipos: laptop, tablet y celular.

- Locales: sala de estudios de la universidad y encuentros por videollamadas.

# Capítulo III

## Marco teórico

En este capítulo presentaremos los principales espacios funcionales donde trabajaremos, además de algunos conceptos, teoremas, proposiciones, resultados, etc. que serán herramientas fundamentales para demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de (2.1) en los espacios de Besov Clásico.

### 3.1. Leyes de conservación

En esta sección se presentarán las leyes de conservación junto con algunos ejemplos sencillos, basándonos principalmente en los trabajos de Mishra et al. (2019), LeVeque (2002), Thomas (2013) y Huacasi Machaca (2021).

Numerosos problemas interesantes en las ciencias físicas, biológicas, ingenierías y sociales se modelan a través de leyes de conservación Mishra et al. (2019). Estas leyes establecen que las propiedades físicas o magnitudes (como la masa, el momento, la energía, etc.) de un sistema determinado permanecen constantes bajo ciertas condiciones y durante un período de tiempo. Por ejemplo se tiene ley de conservación de masa, del momento lineal y de energía. Matemáticamente, se expresan mediante ecuaciones diferenciales parciales, que generalmente son no

lineales, lo que complica su estudio numérico.

Para obtener una representación matemática de una ley de conservación, consideremos un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (nos referimos al dominio como una región del espacio en la cual se estudia una cantidad o fenómeno determinado) y una cantidad de interés  $u(x, t)$ , que debe conservarse, definida para todo  $x \in \Omega$  y  $t > 0$ .

La evolución temporal de  $u(x, t)$  se describe mediante el siguiente principio físico:

*La variación temporal de  $u$  en cualquier subconjunto  $\omega \subset \Omega$  es igual a la cantidad de  $u$  producida o destruida dentro de  $\omega$  y el flujo de  $u$  a través de la frontera  $\partial\omega$ .*

Esto nos indica que el cambio en  $u$  se debe a dos factores: la cantidad de  $u$  producida o destruida y el flujo que representa la cantidad de  $u$  que entra o sale del subdominio  $\omega$ . Matemáticamente puede ser expresado de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} u(x, t) dx = \int_{\omega} G dx - \int_{\partial\omega} F \cdot \eta ds \quad (3.1)$$

donde  $\eta$  es el vector normal unitario exterior a  $\omega$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el flujo que depende de  $u$  y  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es el término fuente que también depende de  $u$ .

Un ejemplo de aplicación de la ecuación (3.1) es considerar un tramo de un río donde se introduce un contaminante a través de un punto de descarga. Supongamos que  $\omega$  representa una porción del río comprendida entre dos secciones transversales. La ecuación de conservación de la masa del contaminante dentro de este tramo puede expresarse de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} c(x, t) dx = \int_{\omega} q(x, t) dx - \int_{\partial\omega} cv \cdot \eta ds \quad (3.2)$$

donde,  $c(x, t)$  es la concentración del contaminante en la posición  $x$  y tiempo  $t$ ,  $q(x, t)$  representa la tasa de generación o eliminación de contaminantes en el tramo, por ejemplo, debido a una planta de tratamiento que puede estar inyectando (fuente) o eliminando (sumidero) conta-

minantes,  $v$  es la velocidad del flujo del río y  $\eta$  es el vector normal a la frontera  $\partial\omega$ , que en este caso corresponde a las secciones transversales del tramo del río.

El término  $\int_{\partial\omega} cv \cdot \eta ds$  mide el flujo neto de contaminante que atraviesa las fronteras del tramo  $\omega$  debido a la corriente del río.

**Interpretación de la ecuación (3.2):** El lado izquierdo de la ecuación representa la tasa de cambio de la masa total del contaminante dentro del tramo del río. En cuanto al lado derecho, el primer término refleja la cantidad de contaminante que se está añadiendo o eliminando en el tramo (por ejemplo, debido a una descarga industrial o una planta de tratamiento). Finalmente, el segundo término describe el flujo de contaminantes que entra o sale a través de las secciones transversales del tramo, determinado por la velocidad del flujo del río y la concentración del contaminante.

**Aplicación de (3.2):** Supongamos que una fábrica vierte un contaminante a razón constante  $q(x, t) = q_0$  en un tramo del río. Si conocemos la velocidad del flujo  $v$  del agua y la concentración inicial del contaminante en el río, podemos utilizar esta ecuación para predecir cómo evolucionará la concentración del contaminante a lo largo del tiempo en la región  $\omega$ . Esto es clave para evaluar el impacto ambiental del vertido y diseñar estrategias de mitigación.

La ecuación (3.1) representa la forma integral de una ley de conservación que describe la evolución total de  $u$  en  $\omega$ .

Para simplificar la expresión (3.1), aplicamos el teorema de la divergencia. Este teorema establece que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la integral de volumen de la divergencia del campo sobre el interior de la superficie. Así, obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega} u(x, t) dx = \int_{\omega} G dx - \int_{\omega} \operatorname{div} F ds$$

introduciendo la derivada dentro de la integral y ordenando se tiene

$$\int_{\omega} \frac{d}{dt} u(x, t) dx + \int_{\omega} \operatorname{div} F ds - \int_{\omega} G dx = 0$$

$$\int_{\omega} (u_t(x, t) + \operatorname{div} F - G) dx = 0$$

Como la integral debe ser cero para todo  $x \in \omega$ , entonces el integrando tiene que ser necesariamente igual a cero. De este modo se obtiene la siguiente ecuación

$$u_t(x, t) + \operatorname{div} F - G = 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (3.3)$$

Esta ecuación es llamada forma diferencial de las leyes de conservación con término fuente, pues establece que el cambio en  $u$  es un balance entre el flujo y la fuente.

Comúnmente el único cambio de  $u$  es debido al flujo en las fronteras, en ese caso  $G = 0$  y la ecuación (3.3) se reduce a

$$u_t(x, t) + \operatorname{div} F = 0, \quad \forall (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+. \quad (3.4)$$

Esta ecuación es conocida como ley de conservación donde el cambio de  $u$  es únicamente debido a la cantidad que entra o sale del dominio de interés  $\omega$ .

En general el flujo  $F$  en (3.4) es una función que depende de  $u$  y de sus derivadas

$$F = F(u, \nabla u, \nabla^2 u, \dots).$$

Además puede ser clasificada de la siguiente manera:

- Si  $F = F(u)$  entonces la ley de conservación es de primer orden y es clasificada como hiperbólica.

- Si  $F = F(\nabla u)$  entonces la ley de conservación es de segundo orden y es clasificada como parabólica.
- Si  $F = F(u, \nabla u)$  entonces la ley de conservación es llamada de " Ecuación convección difusión".

En seguida daremos algunos ejemplos de leyes de conservación, para más detalles ver Mishra et al. (2019).

**Ejemplo 1.** Sea  $u(x, t)$  la concentración de un químico (por ejemplo contaminantes en un río), supongamos que el río fluye con una velocidad  $a(x, t)$  que es conocida en todos los puntos del río. El contaminante es transportado en la dirección de la velocidad con un flujo  $F(x, t) = a(x, t)u(x, t)$ . Considerando que el contaminante no se produce ni destruye durante el flujo, entonces  $G = 0$ , consecuentemente la ley de conservación tendría la siguiente forma

$$u_t(x, t) + \operatorname{div}(au) = 0,$$

y si la velocidad  $a$  es constante tendremos

$$u_t(x, t) + au_x = 0. \tag{3.5}$$

Esta es una Ecuación Diferencial Parcial escalar lineal con coeficiente constantes de tipo hiperbólico. Si consideramos  $a > 0$  y dando como condición inicial C.I.  $u(x, t_0) = \eta(x)$  tenemos solución para la EDP (3.5) en la Figura (3.1).

De acuerdo con la Real Academia Española (RAE), el término **advección** se refiere a la acción y el efecto de transportar o arrastrar algo. En este contexto, la ecuación (3.5) recibe el nombre de **ecuación de advección**, ya que describe el transporte advectivo de una sustancia presente en bajas concentraciones dentro de un fluido, sin que dicha concentración influya en

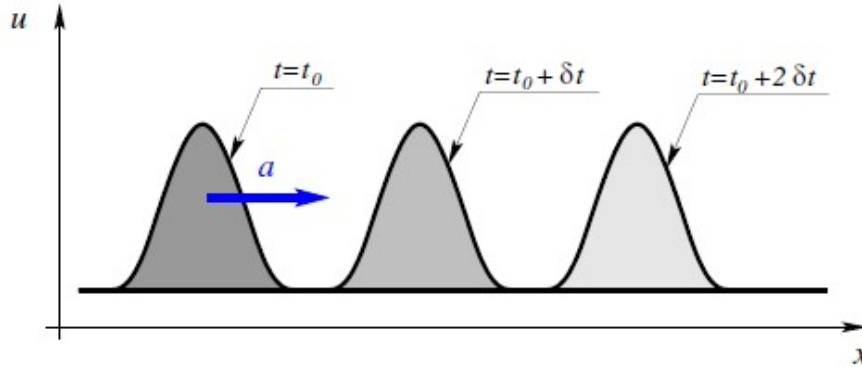


Figura 3.1: Solución de la ecuación de la ecuación de advección  $u_t(x, t) + au_x = 0$  con C.I.  $u(x, t_0) = \eta(x)$ . Imagen extraída de Bodnár et al. (2021)

la dinámica del mismo.

**Ejemplo 2.** Otro ejemplo ilustrativo es la ecuación de calor. Supongamos que una varilla de metal se calienta en un extremo y luego se deja enfriar sin proporcionar ninguna fuente adicional de calor. Una observación común es que el calor se propaga o difunde y la temperatura de la varilla se vuelve uniforme después de un tiempo.

Si denotamos por  $u(x, t)$  la temperatura de la varilla, además teniendo en cuenta que la difusión del calor es gobernado por la ley Fick, podemos escribir el flujo como

$$F(u) = -\kappa \nabla u,$$

donde  $\kappa$  es el tensor conductividad del medio, el signo (-) indica que el calor fluye de una zona caliente a una zona fría. Sustituyendo este flujo en la ley de conservación (3.4), obtenemos la ecuación del calor

$$u_t(x, t) - \text{div}(\kappa \nabla u) = 0. \quad (3.6)$$

Para  $\kappa > 0$  fijo,  $x \in \mathbb{R}$  y considerando como C.I.  $u(x, t_0)$  tenemos solución para la EDP (3.6) en la Figura (3.1).

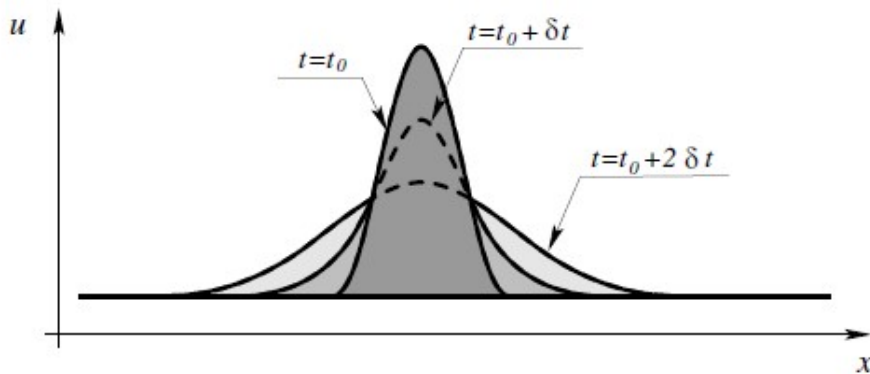


Figura 3.2: Solución de la ecuación de calor  $u_t(x, t) - \kappa u_{xx} = 0$  con C.I.  $u(x, t_0)$ . Imagen extraída de Bodnár et al. (2021)

**Ejemplo 3.** Un ejemplo bien interesante es la conservación de masa. Es bien conocido en dinámica de fluidos que la masa total de un fluido se conserva, matemáticamente esto se puede expresar como

$$\rho_t + \text{div}(\rho u) = 0, \quad (3.7)$$

donde  $\rho(x, t)$  es la densidad del fluido y  $u(x, t)$  es la velocidad del fluido. En este caso el flujo está dado por  $F = \rho u$ . Esta ecuación es conocida como **ecuación de continuidad**, ver la Figura 3.3.

## 3.2. Espacio de las funciones de Schwartz

En esta sección presentaremos el espacio de las funciones de Schwartz y las propiedades de dicho espacio que se utilizaron en el transcurso del trabajo. Nuestras principales referencias son

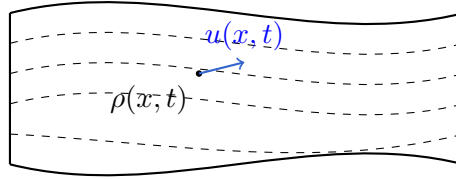


Figura 3.3: Representación del flujo de un fluido con densidad  $\rho(x, t)$  y velocidad  $u(x, t)$ .

Folland (1999) y Alvarez (2022), a menos que se indique lo contrario.

Para definir los espacios de las funciones de Schwartz, necesitamos definir algunos conceptos como la topología débil y los espacios  $L^p$  para entender mejor la definición de los espacios de las funciones de Schwartz, los cuales serán detallados en los siguientes sub-secciones.

### 3.2.1. Topología Débil y Débil Estrella

Dado un espacio vectorial normado  $X$ , por ejemplo el espacio de Banach o de Hilbert, la topología débil en  $X$  es la topología más económica, en el sentido que tiene la menor cantidad de conjuntos abiertos tal que todas las aplicaciones funcionales lineales continuas de  $X$  hacia el cuerpo subyacente, por ejemplo  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$  siguen siendo continuas.

En términos prácticos, esto significa que en lugar de considerar la convergencia de una sucesión  $(x_n)$  en el sentido normado usual, donde  $x_n \rightarrow x$ , si  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ , en la topología débil se considera la convergencia de  $x_n \rightarrow x$  débilmente si  $f(x_n) \rightarrow f(x)$  para todo funcional lineal continuo  $f \in X^*$ , donde  $X^*$  es el espacio dual de  $X$ , es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales continuos de  $X$ .

**Ejemplo 4.** Sea  $C[0, 1]$  el espacio de funciones continuas en  $[0, 1]$  con la norma del supremo,  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ . La topología débil en  $C[0, 1]$  se define como la convergencia puntual en cada punto de  $[0, 1]$ . Es decir, una secuencia  $(f_n)$  converge débilmente a  $f$  si y solo si  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  para cada  $x \in [0, 1]$ .

**Ejemplo 5.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La topología débil en  $H$  se define como la convergencia en cada producto interno. Es decir, una secuencia  $(x_n)$  converge débilmente a  $x$  si y solo si  $\langle x_n, y \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$  para cada  $y \in H$ . Recordemos que el Teorema de Representación de Riesz establece que cualquier funcional lineal continuo en un espacio de Hilbert puede expresarse mediante el producto interno.

Sea  $X$  un espacio vectorial normado y  $X^*$  su espacio dual. La topología débil en  $X^*$ , tal como se definió anteriormente, es la topología generada por  $X^{**}$ . De mayor interés es la topología generada por  $X$  (considerado como un subespacio de  $X^{**}$ ), la cual se llama la *topología débil-\** (leído "topología débil estrella") en  $X^*$ .

$X^*$  es un espacio de funciones sobre  $X$ , y la topología débil-\* es simplemente la topología de convergencia puntual:  $f_\alpha \rightarrow f$  si y solo si  $f_\alpha(x) \rightarrow f(x)$  para todo  $x \in X$ .

**Ejemplo 6.** Consideremos el espacio  $\ell^1$ , que es el conjunto de todas las sucesiones complejas (o reales) absolutamente sumables, o sea,

$$\ell^1 = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R}, \sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty \right\},$$

donde su norma es dado por  $\|x\|_{\ell^1} = \sum_{n=1}^\infty |x_n|$ , con  $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^1$ .

Su espacio dual,  $(\ell^1)^*$ , puede identificarse con  $\ell^\infty$ , el espacio de sucesiones acotadas y es definido por

$$\ell^\infty = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{C} \text{ o } \mathbb{R}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

donde su norma es dado por  $\|x\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ , con  $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ . Esta norma convierte a  $\ell^\infty$  en un **espacio de Banach**, ya que es completo con respecto a esta norma.

En este caso, la topología débil-\* en  $\ell^\infty$  es la topología de convergencia puntual. Es decir, una sucesión  $\{f_n\} \subset \ell^\infty$  converge débil-\* a  $f \in \ell^\infty$  si y solo si, para cada  $k \in \mathbb{N}$ , se cumple que  $f_n(k) \rightarrow f(k)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Esto significa que podemos observar la convergencia de una sucesión en  $\ell^\infty$  evaluando sus valores en cada punto de la sucesión en  $\ell^1$ , en lugar de verificar la convergencia en norma.

### 3.2.2. Espacios $L^p$

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Un álgebra de conjuntos en  $X$  es una colección no vacía  $\mathcal{A}$  de subconjuntos de  $X$  que es cerrada bajo uniones finitas y complementos; en otras palabras, si  $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$ , entonces  $\bigcup E_j \in \mathcal{A}$ ; y si  $E \in \mathcal{A}$ , entonces  $E^c \in \mathcal{A}$ . Una  $\sigma$ -álgebra es un álgebra que es cerrada bajo uniones numerables.

**Ejemplo 7.** Si  $X$  es cualquier conjunto, el conjunto potencia  $P(X)$  y  $\{0, X\}$  son  $\sigma$ -álgebras.

**Ejemplo 8.** Si  $X$  es un conjunto no numerable, entonces

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ es numerable o } E^c \text{ es numerable}\}$$

es una  $\sigma$ -álgebra, llamada la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos numerables o co-numerables.

Sea  $X$  un conjunto equipado con una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{M}$ . Una medida en  $\mathcal{M}$  es una función  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  tal que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2. si  $\{E_j\}_{j=1}^\infty$  es una secuencia de conjuntos disjuntos en  $\mathcal{M}$ , entonces  $\mu(\bigcup E_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$ .

La propiedad (ii) se llama aditividad numerable.

Si  $X$  es un conjunto y  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$  es una  $\sigma$ -álgebra, entonces  $(X, \mathcal{M})$  se llama *espacio medible* y los conjuntos en  $\mathcal{M}$  se llaman *conjuntos medibles*. Si  $\mu$  es una medida en  $(X, \mathcal{M})$ , entonces  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  se llama *espacio de medida*.

En la teoría clásica de la integración en  $\mathbb{R}$ ,  $\int f(x) dx$  se define como un límite de sumas de Riemann, que son integrales de funciones que aproximan a  $f$  y son constantes en subintervalos

de  $[a, b]$ . De manera similar, en cualquier espacio de medida existe una noción natural de integral para funciones que, en un sentido adecuado, son localmente constantes, y se puede extender a una integral para funciones más generales. En este capítulo, desarrollamos la teoría de la integración en espacios de medida abstractos, prestando particular atención a la integral de Lebesgue en  $\mathbb{R}$  y su generalización en  $\mathbb{R}^n$ .

Recordemos que cualquier aplicación  $f : X \rightarrow Y$  entre dos conjuntos induce una aplicación  $f^{-1} : P(Y) \rightarrow P(X)$ , definida por  $f^{-1}(E) = \{x \in X : f(x) \in E\}$ , que preserva uniones, intersecciones y complementos. Así, si  $\mathcal{N}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $Y$ , entonces  $\{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{N}\}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ .

Si  $(X, \mathcal{M})$  y  $(Y, \mathcal{N})$  son espacios medibles, una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  se llama medible, si  $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$  para todo  $E \in \mathcal{N}$ .

Consideremos un espacio de medida fijo  $(X, \mathcal{M}, \mu)$ . Si  $f$  es una función medible en  $X$  y  $0 < p < \infty$ , definimos los espacios  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$  como

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_p < \infty\},$$

donde

$$\|f\|_p = \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Cuando no existe riesgo de ambigüedad, abreviamos  $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$  como  $L^p(\mu)$ ,  $L^p(X)$ , o simplemente  $L^p$ .

Para el caso  $p = \infty$ , si  $f$  es una función medible en  $X$ , definimos

$$\|f\|_\infty = \inf\{a > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > a\}) = 0\},$$

con la convención de que  $\inf \emptyset = \infty$ .

La cantidad  $\|f\|_\infty$  se conoce como el *supremo esencial* de  $|f|$  y a veces se denota por

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)|.$$

Definimos entonces

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es medible y } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Vale la pena resaltar que  $L^p$  es un espacio vectorial, ya que si  $f, g \in L^p$ , entonces

$$\|f + g\|_p \leq (2 \max(|f|, |g|))^p \leq 2^p (\|f\|_p + \|g\|_p).$$

De modo que  $f + g \in L^p$ .

### 3.2.3. Espacio de las funciones de Schwartz

Un multi-índice es una  $n$ -tupla ordenada de enteros no negativos. Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es un multi-índice y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad \alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \quad \partial^\alpha = (\partial_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n)^{\alpha_n}, \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}.$$

Así, por ejemplo, la fórmula de Taylor para las funciones  $f \in C^k$ , es decir,  $f$  es una función  $k$ -veces continuamente diferenciable, podemos escribir como

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha f)(x_0) \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + R_k(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|R_k(x)|}{|x - x_0|^k} = 0,$$

y la regla del producto para derivados se convierte en

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (\partial^\beta f)(\partial^\gamma g).$$

Uno de los primeros elementos a definir serán las funciones de Schwartz o espacio de las funciones de decrecimiento rápido. Estas son funciones definidas en  $\mathbb{R}^n$ , infinitamente diferenciables y éstas, así como sus derivadas parciales, se cancelan en el infinito más rápido que cualquier potencia de  $|x|$ . Definimos esto formalmente de la siguiente manera.

**Definición 1** (Espacio de funciones de Schwartz). *Dados un multi-índice  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ,  $N \in \mathbb{Z}$  y una función  $f$ , definimos*

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty : \|f\|_{N,\alpha} < \infty, \text{ para cada } N, \alpha\},$$

donde

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|.$$

Aquí,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  es un multi-índice que indica las derivadas parciales de  $f$  en cada dirección,  $\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  representa la derivada de  $f$  de orden  $|\alpha|$  y el factor  $(1+|x|)^N$  garantiza que  $f$  y todas sus derivadas decrecen suficientemente rápido a medida que  $|x| \rightarrow \infty$ .

Equipamos  $\mathcal{S}$  con la topología débil que hace continuas las funciones  $\|\cdot\|_{N,\alpha}$  para cada  $N, \alpha$ .

**Ejemplo 9.** *La función  $f(x) = e^{-|x|^2}$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ , es llamado de Gaussiana y  $f \in \mathcal{S}$ .*

*Para demostrar que la función Gaussiana  $f(x) = e^{-|x|^2}$  pertenece al espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , necesitamos verificar que para cada entero  $N$  y cada multiíndice  $\alpha$ ,*

$$\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$$

es finita.

Note que, para cada multi-índice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , la derivada  $\partial^\alpha f(x)$  se puede expresar como

$$\partial^\alpha f(x) = p_\alpha(x) e^{-|x|^2},$$

donde  $p_\alpha(x)$  es un polinomio en  $x$  cuyo grado depende de  $\alpha$ . Esto ocurre porque cada vez que derivamos  $e^{-|x|^2}$ , obtenemos factores de  $x_i$  en las derivadas debido a la regla de la cadena, ya que

$$\frac{\partial}{\partial x_i} e^{-|x|^2} = -2x_i e^{-|x|^2}.$$

Así, cada derivada  $\partial^\alpha f(x)$  es un producto de un polinomio en  $x$ ,  $p_\alpha(x)$ , y del término exponencial  $e^{-|x|^2}$ .

Por otro lado, el término  $e^{-|x|^2}$  decrece muy rápidamente cuando  $|x| \rightarrow \infty$ , aún más rápido que cualquier crecimiento polinómico de  $p_\alpha(x)$  o de  $(1 + |x|)^N$ . De hecho, para grandes valores de  $|x|$ , el factor  $e^{-|x|^2}$  tiende a cero más rápido que cualquier función de la forma  $|x|^m$  para cualquier  $m \in \mathbb{N}$ .

Así, aunque  $p_\alpha(x)$  y  $(1 + |x|)^N$  puedan crecer en  $|x|$ , el decrecimiento exponencial de  $e^{-|x|^2}$  domina, y garantiza que el producto

$$(1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)| = (1 + |x|)^N |p_\alpha(x)| e^{-|x|^2}$$

permanezca acotado en todo  $\mathbb{R}^n$ .

Por lo tanto,  $\|f\|_{N,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$  es finita para cada  $N$  y  $\alpha$ .

**Observación 1.** Las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto  $C_c^\infty$  están en  $\mathcal{S}$ .

Se utilizará la notación  $L^p$  para referirnos al espacio  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , a menos que se resalte que el

dominio ya no es  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 2.** Dada  $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{S}$ , definimos

$$|f| = \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cuando  $1 \leq p < \infty$  denotaremos

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sin embargo, de manera análoga a la demostración de la equivalencia de normas en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que

$$\|f\|_{L^p} \equiv \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^p}.$$

Por otro lado, definimos

$$\|f\|_{L^\infty} = \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^\infty}.$$

**Proposición 1** (Desigualdad de Hölder). Supongamos que  $1 < p < \infty$  y que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (es decir,  $q = \frac{p}{p-1}$ ). Si  $f$  y  $g$  son funciones medibles en  $X$ , entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (3.8)$$

En particular, si  $f \in L^p$  y  $g \in L^q$ , entonces  $fg \in L^1$ , y en este caso se cumple la igualdad en (3.8) si y solo si  $|f|^p = \alpha|g|^q$  casi en todas partes para algunas constantes  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\alpha\beta \neq 0$ .

*Demostración.* La demostración está detallada en Folland (1999). □

**Definición 3** (Convolución). Dadas las funciones  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , la convolución  $f * g$  entre  $f$  y

$g$  está dada por la función

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

La siguiente proposición muestra que en nuestro contexto, es decir, en el espacio de las funciones de Schwartz, la convolución está bien definida. Este resultado se puede encontrar en Folland (1999) y Grafakos (2008).

**Proposición 2.** Considerando  $f, g \in \mathcal{S}$ , tenemos que  $f * g \in \mathcal{S}$ .

**Proposición 3** (Desigualdad de Young). Si  $f \in L^1$  y  $g \in L^p$  (con  $1 \leq p \leq \infty$ ), entonces  $f * g(x)$  existe para casi todo  $x$ ,  $f * g \in L^p$ , y se cumple que

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

*Demostración.* La demostración está detallado en Folland (1999). □

**Definición 4** (Transformada de Fourier). Dada  $f \in \mathcal{S}$  definimos la transformada de Fourier  $\hat{f}$  de tal manera que

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

También consideramos la transformada inversa de Fourier de  $f$ , denotada por  $\check{f}$ , como siendo

$$\check{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{ix \cdot \xi} dx$$

**Definición 5** (Transformada inversa de Fourier). Dada  $f \in \mathcal{S}$  definimos la transformada inversa de Fourier  $\check{f}$ , como

$$\check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{ix \cdot \xi} dx$$

**Proposición 4.** *La transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier son aplicaciones continuas de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$ .*

*Demostración.* Para demostrar que la transformada de Fourier y la transformada inversa de Fourier son aplicaciones continuas de  $\mathcal{S}$  en  $\mathcal{S}$ , debemos verificar que estas transformadas llevan funciones en el espacio de  $\mathcal{S}$  en funciones que también pertenecen a  $\mathcal{S}$  y que esta operación es continua.

**Afirmación 3.2.1.** *La transformada de Fourier lleva  $\mathcal{S}$  en sí mismo.*

*Sea  $f \in \mathcal{S}$ , entonces  $f$  y todas sus derivadas decrecen más rápido que cualquier potencia de  $|x|$  cuando  $|x| \rightarrow \infty$ .*

*Luego, al aplicar la transformada de Fourier a  $f$ , podemos verificar que  $\widehat{f}$  también cumple esta propiedad de decaimiento rápido en  $\xi$ . Esto es debido a que al multiplicar  $f$  por un monomio en  $x$  equivale a derivar  $\widehat{f}$  en  $\xi$ . Es decir, para cualquier  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , tenemos*

$$\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \widehat{(-D^\alpha f)}(\xi),$$

*lo que implica que  $\widehat{f}$  también es rápidamente decreciente, ya que  $D^\alpha f \in \mathcal{S}$  para todo  $\alpha$ .*

*Además, si  $f \in \mathcal{S}$ , entonces todas las derivadas de  $\widehat{f}$  existen y son rápidamente decrecientes. Así,  $\widehat{f} \in \mathcal{S}$ , lo que prueba que la transformada de Fourier mapea  $\mathcal{S}$  en sí mismo.*

**Afirmación 3.2.2.** *La continuidad de la transformada de Fourier en  $\mathcal{S}$*

*Para demostrar que la transformada de Fourier es continua en  $\mathcal{S}$ , debemos mostrar que si  $\{f_k\}$  es una sucesión en  $\mathcal{S}$  que converge a  $f$  en  $\mathcal{S}$ , entonces  $\{\widehat{f}_k\}$  converge a  $\widehat{f}$  en  $\mathcal{S}$ .*

*La convergencia en  $\mathcal{S}$  significa que, para cualquier multi-índice  $\alpha$  y cualquier  $\beta$ , se tiene que  $x^\alpha D^\beta f_k(x) \rightarrow x^\alpha D^\beta f(x)$  uniformemente en  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Por las propiedades de la transformada de Fourier, sabemos que derivar en  $\xi$  corresponde a multiplicar por  $x$  en el espacio de las funciones originales. Esto implica que todas las*

propiedades de convergencia de las derivadas y del decaimiento rápido se preservan bajo la transformada de Fourier, lo cual garantiza que  $\widehat{f}_k \rightarrow \widehat{f}$  en  $\mathcal{S}$ .

Por tanto la transformada de Fourier es una aplicación continua de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  en sí mismo.

De forma similar se muestra para la transformada inversa de Fourier. Esto se debe a que la transformada inversa de Fourier tiene una definición análoga a la transformada directa, y las propiedades de decaimiento y derivabilidad se preservan de la misma forma.  $\square$

### 3.3. El espacio de las distribuciones temperadas

La noción de distribuciones en general busca de cierta manera generalizar el concepto de función. Veremos cómo se hace esto en nuestro contexto, específicamente, tomando como base el espacio de las funciones de Schwartz. Las siguientes definiciones se encuentran en Folland (1999).

**Definición 6** (El espacio de las distribuciones temperadas). *Denotamos por  $\mathcal{S}'$  y llamamos al espacio de las distribuciones temperadas el espacio dual de  $\mathcal{S}$ . En otras palabras,*

$$\mathcal{S}' := \{F : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C} \mid F \text{ es lineal y continua}\}.$$

*Dotamos  $\mathcal{S}'$  con la topología débil-\*. Dados  $F \in \mathcal{S}'$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}$  escribimos indistintamente  $F(\varphi)$  o  $\langle F, \varphi \rangle$ .*

Podemos definir la convolución entre un elemento en  $\mathcal{S}'$  y un elemento en  $\mathcal{S}$ , así como definir la transformada de Fourier para el contexto del espacio de las distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'$ . Lo haremos a continuación teniendo como referencias a Folland (1999) y Sawano et al. (2018).

**Definición 7.** *Sean  $f \in \mathcal{S}'$  e  $\varphi \in \mathcal{S}$ .*

1. Definimos el producto  $f\varphi \in S'$  por

$$\langle f\varphi, \psi \rangle = \langle f, \psi\varphi \rangle, \quad \forall \psi \in S.$$

2. Definimos la convolución  $f * \varphi$  entre  $f$  y  $\varphi$  como

$$\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle f, \psi * \tilde{\varphi} \rangle, \quad \forall \psi \in S,$$

donde para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ .

3. En virtud de la integración por partes, considerando un multi-índice  $\alpha$ , definimos

$$\langle x^\alpha f, \psi \rangle = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle f, x^\alpha \psi \rangle, \quad \forall \psi \in S.$$

4. La transformada de Fourier  $\hat{f}$  de  $f$  se considera de tal manera que

$$\langle \hat{f}, \psi \rangle = \langle f, \hat{\psi} \rangle, \quad \forall \psi \in S.$$

5. La transformada inversa de Fourier  $\check{f}$  de  $f$  se considera de tal manera que

$$\langle \check{f}, \hat{\psi} \rangle = \langle f, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in S.$$

### 3.4. Descomposición de Littlewood-Paley

La descomposición de Littlewood-Paley es un concepto fundamental en el análisis armónico (estudia la representación de funciones o señales como combinaciones de ondas básicas por ejemplo senos y cosenos u otras bases ortogonales más generales), especialmente en la

exploración del análisis de Fourier y sus diversas aplicaciones. Esta descomposición implica expresar una sola función como una suma de funciones con distintas frecuencias, siendo una herramienta indispensable para descifrar el comportamiento local de funciones en función de su contenido de frecuencia. Es particularmente útil en el estudio de transformadas de Fourier y en el análisis de funciones y distribuciones. El lector podrá ver más detalles en Bahouri et al. (2011); Grafakos (2008); Ferreira and Pérez-López (2022); Wu (2007). Además, esta descomposición es ampliamente aplicada en diversos dominios matemáticos, incluidas las ecuaciones diferenciales parciales, la teoría de la probabilidad y la teoría de números, la descomposición de Littlewood-Paley permite un análisis exhaustivo de las funciones.

Para introducir la descomposición de Littlewood-Paley, escribimos para cada  $j \in \mathbb{Z}$

$$D_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \frac{3}{4}2^j \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}2^j\} \text{ y } B_j = \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq \frac{4}{3}2^j\}.$$

Además, consideramos una función radial no negativa  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  que satisface  $\text{supp}(\varphi) \subset D_0$  y

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \text{ donde } \varphi_j(\xi) := \varphi(2^{-j}\xi) \text{ o } \hat{\varphi}_j(\xi) = 2^{2j}\hat{\varphi}(2^j\xi),$$

note que,  $\text{supp} \varphi_j \subset D_j$  para todo  $j \in \mathbb{Z}$ .

También, definimos  $\psi$  como  $\psi(\xi) := \sum_{j \leq -1} \varphi_j(\xi)$ , si  $\xi \neq 0$  y  $\psi(0) := 1$ . Entonces,  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,  $\text{supp}(\psi) \subset B_0$  y

$$\psi(\xi) + \sum_{j \geq 0} \varphi_j(\xi) = 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Los operadores de localización  $\Delta_j$ ,  $\bar{\Delta}_j$  y  $S_j$  se definen como

$$\Delta_j f = \varphi_j(D)f = \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{\varphi_j f} \right) = 2^{jn} (\mathcal{F}^{-1} \varphi(2^j \cdot)) * f, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

$$\bar{\Delta}_j f = \Delta_j f, \quad \text{if } j \geq 0,$$

$$\bar{\Delta}_{-1} f = \psi(D)f = \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{\psi f} \right) = \mathcal{F}^{-1}(\psi) * f,$$

$$\bar{\Delta}_j f = 0, \quad \text{if } j \leq -2,$$

$$S_j f = \psi_j(D)f = \mathcal{F}^{-1} \left( \widehat{\psi_j f} \right) = 2^{jn} (\mathcal{F}^{-1} \psi(2^j \cdot)) * f, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

donde  $\psi_j(\xi) = \psi(2^{-j}\xi)$ . De las relaciones de los soportes de  $\varphi_j$  y  $\psi_j$  se obtiene la ortogonalidad de los operadores de localización

$$\Delta_j \Delta_k f = 0, \quad \text{if } |j - k| \geq 2, \quad (3.9)$$

$$\Delta_j (S_{k-2} f) = 0, \quad \text{if } |j - k| \geq 3. \quad (3.10)$$

La descomposición de Littlewood-Paley de  $f$  se obtiene a través de los operadores  $S_k$  y  $\Delta_j$ , es decir,  $f = S_k f + \sum_{j \geq k} \Delta_j f$ , para todo  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Además, si  $\lim_{k \rightarrow -\infty} S_k f = 0$  en  $\mathcal{S}'$  (como en el caso de  $f \in L^\infty \setminus \{\text{constantes}\}$ ), entonces la igualdad  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Delta_j f$  se llama la descomposición homogénea de Littlewood-Paley de  $f$ , ver Lemarié-Rieusset (2002).

**Ejemplo 10.** *Ilustraremos la descomposición de Littlewood-Paley de la función Gaussiana  $f(x) = e^{-x^2}$ .*

*La transformada de Fourier de  $f$  es  $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}$  y esta función es de tipo Gaussiano en el dominio de frecuencia, con decaimiento rápido en  $\xi$ .*

*Luego usamos las funciones de corte  $\varphi$  y  $\psi$  para definir las funciones  $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$ , que el que actúa como filtro para seleccionar la banda de frecuencia  $D_j$  centrada en  $|\xi| \approx 2^j$  y  $\psi(\xi) = \sum_{j \leq -1} \varphi_j(\xi)$  para las bajas frecuencias, con soporte en  $B_0$ .*

Así, tenemos las componentes de Alta Frecuencia  $\Delta_j f$  y cada componente es dado por

$$\Delta_j f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j(\xi)\hat{f}(\xi)) = \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi(2^{-j}\xi)\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\right).$$

Estas componentes capturan diferentes bandas de frecuencia de la función gaussiana. Por ejemplo:

Para  $j = 0$ ,  $\Delta_0 f(x)$  capta la contribución de frecuencia alrededor de  $|\xi| \approx 1$ .

Para  $j = 1$ ,  $\Delta_1 f(x)$  corresponde a las frecuencias en  $|\xi| \approx 2$ .

Para  $j = 2$ ,  $\Delta_2 f(x)$  corresponde a las frecuencias en  $|\xi| \approx 2^2$ , y así sucesivamente.

La componente de Baja Frecuencia  $S_k f$  es dado por

$$S_k f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_k(\xi)\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}),$$

donde  $\psi_k(\xi)$  cubre las frecuencias bajas hasta la escala  $k$ .

Entonces, la descomposición de  $f(x) = e^{-x^2}$  en bandas de frecuencia se obtiene sumando todas las componentes  $\Delta_j f(x)$  y  $S_k f(x)$ , es decir, para cualquier  $k \in \mathbb{Z}$  tenemos

$$f(x) = S_k f(x) + \sum_{j \geq k} \Delta_j f(x).$$

Aquí,  $S_k f(x)$  recoge las frecuencias bajas hasta la escala  $k$ , mientras que  $\sum_{j \geq k} \Delta_j f(x)$  suma las componentes de frecuencia superiores.

Por otro lado, usando el paraproducto de Bony Bony (1981), se deduce que para  $f, g \in \mathcal{S}'$  podemos definir el producto  $f \cdot g$  como

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g), \tag{3.11}$$

donde  $T_{fg} = \sum_{j \geq 2} S_{j-2} f \bar{\Delta}_j g$  y  $R(f, g) = \sum_{j \geq -1} \bar{\Delta}_j f \sum_{|j-j'| \leq 2} \bar{\Delta}_{j'} g$ .

El paraproducto de Bony es una forma de aproximar el producto  $f \cdot g$  a través de la transformada de Fourier. La idea es separar los productos de las componentes de alta y baja frecuencia de  $f$  y  $g$ , de manera que se pueda controlar mejor su comportamiento en el espacio funcional.

### 3.5. Espacios de Besov clásico

Los espacios de Besov Clásico, denotados generalmente como  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , son una familia de espacios funcionales que generalizan varios espacios de funcionales conocidos, como por ejemplo los espacios de Sobolev y los espacios de Hölder, para saber más de estos espacios consultar Brezis (2011); Evans (2010); Adams and Fournier (2003); Stein (1970). Los espacios de Besov son fundamentales en análisis armónico, teoría de interpolación y el estudio de regularidad en EDPs. Para definir este espacio, se utilizan principalmente tres parámetros: **suavidad**  $s$  es el que controla la regularidad de las funciones; **integrabilidad**  $p$  es el que define el tipo de integrabilidad en la norma  $L^p$ ; **decaimiento**  $q$  es el que describe cómo se comporta la regularidad en diferentes escalas Burenkov and Tararykova (2023).

Oleg Vladimirovich Besov, nació en Moscú el 27 de julio de 1933, es un matemático destacado, Doctor en Ciencias en física y matemáticas, miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Rusia y académico de la Academia Europea de Ciencias. Ha sido investigador principal en el Instituto de Matemáticas V.A. Steklov y profesor honorario en el Instituto de Física y Tecnología de Moscú. Bajo la guía de Serguéi Mijaílovich Nikol'skii, Besov desarrolló los espacios que llevan su nombre, los espacios de Besov o Nikol'skii–Besov, fundamentales en el análisis de funciones diferenciables de varias variables reales. Con más de 150 publicaciones en revistas prestigiosas, su trabajo ha influido significativamente en el análisis matemático, el procesamiento de señales y el análisis de imágenes, convirtiéndose en una herramienta am-

pliamente aplicada en diversas ramas de la matemática moderna. Su legado se extiende a cursos avanzados de análisis funcional y teoría de espacios de función, destacando la versatilidad de los espacios de Besov para describir propiedades complejas de funciones Burenkov and Tararykova (2023).

Para definir los espacios de Besov Clásico usaremos como principal referencia a Ferreira and Pérez-López (2022).

**Definición 8.** Sean  $L^p \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  con  $1 \leq p \leq \infty$  (es decir, un espacio de Banach),  $1 \leq r \leq \infty$  y  $s \in \mathbb{R}$ . El espacio de Besov no homogéneo  $B_{p,r}^s$  es definido como

$$B_{p,r}^s = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); \|f\|_{B_{p,r}^s} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{B_{p,r}^s} := \begin{cases} \left( \sum_{j \geq -1} 2^{jsr} \|\bar{\Delta}_j f\|_{L^p}^r \right)^{1/r} & \text{si } r < \infty \\ \sup_{j \geq -1} 2^{js} \|\bar{\Delta}_j f\|_{L^p}, & \text{si } r = \infty. \end{cases}$$

De manera similar, el espacio clásico homogéneo de Besov  $\dot{B}_{p,r}^s$  se define como

$$\dot{B}_{p,r}^s = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s} < \infty \right\},$$

donde,  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio de las funciones polinómicas en  $\mathbb{R}^n$  y

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s} := \begin{cases} \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{jsr} \|\Delta_j f\|_{L^p}^r \right)^{1/r}, & \text{si } r < \infty \\ \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2^{js} \|\Delta_j f\|_{L^p} & \text{si } r = \infty. \end{cases}$$

**Ejemplo 11.** El espacio  $B_{1,1}^s(\mathbb{R})$  está formado por todas las funciones  $f(x)$  cuyas derivadas de orden  $s$  son absolutamente integrables en el intervalo real  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo, la función  $f(x) = \text{sen}(x)$  pertenece a  $B_{1,1}^s(\mathbb{R})$  para cualquier  $s$ .

Note que para el caso particular  $p = 1$  y  $r = 1$ , correspondiente a  $B_{1,1}^s(\mathbb{R})$ , podemos interpretar de la siguiente manera:

- La norma de Besov  $\|f\|_{B_{1,1}^s} = \sum_{j \geq -1} 2^{js} \|\bar{\Delta}_j f\|_{L^1}$  indica que la contribución de cada banda de frecuencia  $\bar{\Delta}_j f$ , escalada por  $2^{js}$ , debe ser absolutamente sumable.
- Cada término  $\|\bar{\Delta}_j f\|_{L^1}$  mide la energía total de  $f$  en la escala asociada al nivel  $j$ , y el factor  $2^{js}$  ajusta la influencia de las frecuencias más altas o más bajas en la norma total.
- La finitud de esta suma garantiza que  $f$  tiene un comportamiento controlado tanto en las frecuencias bajas como en las altas, en el sentido de que las oscilaciones de  $f$  están suficientemente reguladas a través de las distintas escalas.

En este sentido, pertenecer a  $B_{1,1}^s(\mathbb{R})$  significa que  $f$  tiene una descomposición bien controlada en términos de frecuencias y escalas, lo cual refleja propiedades de regularidad y comportamiento global en  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 12.** Otro ejemplo ilustrativo es  $B_{2,2}^s(\mathbb{R})$ . En este espacio, las funciones  $f(x)$  tienen derivadas de orden  $s$  que son cuadrado-integrables en el intervalo real  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo sería la función  $f(x) = e^{-x^2/2}$ , que pertenece a  $B_{2,2}^s(\mathbb{R})$ . Además, note que  $f(x) = e^{-x^2/2} \in C_c^\infty$  y  $C_c^\infty \subset B_{p,r}^s(\mathbb{R})$ .

En la siguiente sub-sección se tienen las propiedades fundamentales de los espacios de Besov clásicos los cuales están descritos en Zhou et al. (2014).

### 3.5.1. Propiedades básicas de los espacios de Besov clásico

**Proposición 5.** Sean  $s \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  y  $1 \leq q \leq \infty$ .

(I) Si  $s > 0$ , entonces  $B_{p,r}^s = \dot{B}_{p,r}^s \cap L^p$  y  $\|f\|_{B_{p,r}^s} = \|f\|_{\dot{B}_{p,r}^s} + \|f\|_{L^p}$ ;

(II) Si  $s_1 \leq s_2$ , entonces  $B_{p,r}^{s_2} \subset B_{p,r}^{s_1}$ . Si  $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \infty$ , entonces  $\dot{B}_{p,r_1}^s \subset \dot{B}_{p,r_2}^s$  y  $B_{p,r_1}^s \subset B_{p,r_2}^s$ ;

(III) Si  $s > \frac{n}{p}$ , entonces  $B_{p,r}^s \hookrightarrow L^\infty$ . Si  $p_1 \leq p_2$ ,  $s_1 - \frac{n}{p_1} > s_2 - \frac{n}{p_2}$ , entonces  $B_{p_1,r_1}^{s_1} \hookrightarrow B_{p_2,r_2}^{s_2}$ ;

(IV) Si  $s > 0$ ,  $p \geq 1$ , entonces  $\|uv\|_{B_{p,\infty}^s} \leq C\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B_{p,\infty}^s} + C\|u\|_{B_{p,\infty}^s}\|v\|_{L^\infty}$   
donde  $C$  es una constante

*Demostración.* Las demostraciones está en Bahouri et al. (2011)

□

# Capítulo IV

## Materiales y métodos

El objetivo principal en este capítulo es demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación hiperbólica con velocidad parcialmente no local (2.1) en los espacios de Besov Clásico. Esta ley de conservación fue propuesta y estudiada numéricamente por Cuba (2024), el cual es dado por

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla \cdot (-\theta \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, \theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta) = 0, & (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0, \end{cases}$$

donde  $\theta : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar, el dato inicial  $\theta_0(x, y)$  no necesariamente es regular; los operadores no locales  $\Lambda_1^{\alpha-1}$  y  $\Lambda_2^{\alpha-1}$  son el potencial de Riez parcial, que son dados por (4.3) y (4.4) respectivamente, también  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son operadores no locales que son llamados por transformada de Hilbert parcial, que son dados por (4.1) y (4.2) respectivamente, Estos operadores no locales parciales tienen la característica de que solo actúan en una variable dejando inalterada la otra y fueron definidos en Cuba (2024) de la siguiente manera.

**Definición 9 (La transformada de Hilbert parcial).** *Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la*

transformada de Hilbert parcial en el eje- $X$  y en el eje- $Y$  son definidos respectivamente como

$$\mathcal{H}_1[f(x, y)] = \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, y)}{x - u} du, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{H}_2[f(x, y)] = \frac{1}{\pi} \text{p. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, v)}{y - v} dv. \quad (4.2)$$

**Definición 10 (El potencial de Riesz parcial).** Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ , para  $\alpha \in (0, 1)$  el potencial de Riesz parcial en el eje- $X$  y en el eje- $Y$  son definidos respectivamente como

$$\Lambda_1^{\alpha-1}[f(x, y)] = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f(u, y)}{|x - u|^\alpha} du, \quad (4.3)$$

$$\Lambda_2^{\alpha-1}[f(x, y)] = c_\alpha \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x, v)}{|y - v|^\alpha} dv. \quad (4.4)$$

donde,  $c_\alpha = \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{2^{1-\alpha} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1-\alpha}{2})}$ , siendo  $\Gamma$  la conocida Función gamma.

En Grafakos (2008), encontramos una forma equivalente de definir la Transformada de Hilbert a través de una función de distribución en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . La importancia de definir la transformada de Hilbert de una manera equivalente radica en su aplicación para regularizar el campo de velocidades en la demostración del teorema 2.

Comenzamos definiendo una distribución  $W_0$  en  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  de la siguiente manera:

$$\langle W_0, \zeta \rangle = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon \leq |x| < 1} \frac{\zeta(x)}{x} dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x| \geq 1} \frac{\zeta(x)}{x} dx, \quad (4.5)$$

para  $\zeta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

De ahí, la transformada de Hilbert truncada de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (en altura  $\epsilon$ ) es definido por

$$H^{(\epsilon)}(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|y| \geq \epsilon} \frac{f(x - y)}{y} dy = \frac{1}{\pi} \int_{|x - y| \geq \epsilon} \frac{f(y)}{x - y} dy. \quad (4.6)$$

Entonces, la transformada de Hilbert de  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  es definido por

$$\mathcal{H}(f)(x) = (W_0 * f)(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} H^{(\epsilon)}(f)(x). \quad (4.7)$$

## 4.1. Desigualdad de tipo Bernstein para operadores no locales parciales en los espacios de Besov

El siguiente teorema limita la composición de los operadores no locales parciales aplicados a una función por la misma función en los espacios  $L^p$  y fueron propuestos y demostrados por Cuba (2024) con el objetivo de demostrar la buena colocación de las siguientes leyes de conservación parcialmente no-local

$$\begin{cases} \partial_t \theta \pm \nabla \cdot (\theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta) = 0, \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y), \end{cases}$$

donde  $\theta : \mathbb{R}^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función escalar, los datos iniciales  $\theta_0(x, y)$  son suficientemente suaves. Además,  $\mathcal{H}_i$  y  $\Lambda_i^{\alpha-1}$  con  $i = 1, 2$  son los operadores parcialmente no locales, la transformada de Hilbert parcial y el potencial de Riesz parcial respectivamente.

Vale la pena resaltar que el Teorema 1 al ser nuevo, en el sentido que fue propuesto y demostrado este año, aún no se tienen aplicaciones directas o ejemplos adicionales a parte del trabajo desarrollado en Cuba (2024). Esto se debe justamente en ese trabajo proponen nueva forma de estudiar leyes no-local, tratándolos de forma parcialmente no-local. Uno de los objetivos implícitos es justamente usar el Teorema 1 para la demostración de la buena colocación de la ley de conservación parcialmente no-local (2.1).

**Teorema 1 (Desigualdad tipo Bernstein).** Sean  $i = 1, 2; \alpha \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  y  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ .

(I) Si  $f$  satisface

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| \leq 2^j\},$$

para algún entero  $j$ , entonces

$$\|\Lambda_i^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.8)$$

$$\|\Lambda_i^\alpha \mathcal{H}_i f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.9)$$

(II) Si  $f$  satisface

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^2 : K_1 2^j \leq |\xi| \leq K_2 2^j\}, \quad (4.10)$$

para algún entero  $j$  y constantes  $0 < K_1 \leq K_2$ , entonces

$$C_1 2^{j\alpha} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|\Lambda_i^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.11)$$

$$\tilde{C}_1 2^{j(\alpha-1)} \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq \tilde{C}_2 2^{j(\alpha-1)+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.12)$$

donde  $C_1, \tilde{C}_1, C_2$  y  $\tilde{C}_2$  son constantes dependiendo unicamente de  $\alpha, p$  y  $q$ .

*Demostración.* Ver la demostración del Teorema 1 de Cuba (2024). □

**Corolario 1.** Sobre las mismas hipótesis del Teorema 1, se tienen para  $i, l = 1, 2$  con  $i \neq l$

(I)

$$\|\partial_l \Lambda_i^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C 2^{(\alpha+1)j+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.13)$$

$$\|\partial_l \Lambda_i^\alpha \mathcal{H}_i f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C 2^{(\alpha+1)j+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.14)$$

(II)

$$\|\partial_l \Lambda_i^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C 2^{(\alpha+1)j+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.15)$$

$$\|\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C 2^{\alpha j+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.16)$$

donde  $C$  es una constant que depende unicamente de  $\alpha, p$  y  $q$ .

*Demostración.* Sean  $i, l = 1, 2$  tal que  $i \neq l$ . Note que,  $\partial_l \Lambda_i^\alpha f = \Lambda_i^\alpha \partial_l f$  y  $\partial_l \Lambda_i^\alpha \mathcal{H}_i f = \Lambda_i^\alpha \mathcal{H}_i \partial_l f$ . Solo provaremos (4.13) y (4.14), pues (4.15) y (4.16) se prueba de manera análoga.

De (4.8), (4.9), Teorema 1 y del Lema 2.1 de Bahouri et al. (2011), en este caso se consideran  $u = f, \lambda = 2^j, k = 1$  y  $p = q$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|\partial_l \Lambda_i^\alpha f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} &= \|\Lambda_i^\alpha \partial_l f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\partial_l f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \{C^2 2^j \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\} \\ &\leq C 2^{(\alpha+1)j+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|\partial_l \Lambda_i^\alpha \mathcal{H}_i f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} &= \|\Lambda_i^\alpha \mathcal{H}_i \partial_l f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\partial_l f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C 2^{j\alpha+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \{C^2 2^j \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\} \\ &\leq C 2^{(\alpha+1)j+2j(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

□

## 4.2. Estimativa de los operadores conmutadores en los espacios de Besov

Esta sección contiene las dos estimativas de los operadores conmutadores en el contexto de los espacios de Besov. Estas estimaciones son esenciales en la demostración de la buena colocación de la ecuación de transporte con un campo de velocidades parcialmente no-local (2.1).

**Proposición 6.** Sean  $i, l = 1, 2$ ;  $\lambda > 0, \alpha \in (0, 1)$  y  $p \in [1, \infty]$ . Supongamos que  $l \neq i$  y  $r > 2/p$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$2^{j\lambda} \left\| [\Delta_j, v] \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \right\|_{L^p} \leq C \left( \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} + \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \right), \quad (4.17)$$

donde el corchete  $[\cdot, \cdot]$  representa el operador conmutador dado por

$$[\Delta_j, f]g := \Delta_j(fg) - f\Delta_j g, \quad (4.18)$$

para funciones adecuadas  $f$  y  $g$ .

*Demostración.* Usando la descomposición de Bony (2.41) y las relaciones de ortogonalidad del operador de localización de Bahouri et al. (2011), el operador conmutador puede ser escrito

como

$$\begin{aligned}
[\Delta_j, v] \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u &= \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} v \Delta_k (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)) \\
&+ \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \Delta_k v) + \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_j (\Delta_k v \Delta_{\bar{k}} (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)) \\
&- \sum_{|j-k| \leq 1} S_{k-1} v \Delta_k (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) - \sum_{k \geq j+1} S_{k-1} (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \Delta_k v \\
&- \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_k v \Delta_{\bar{k}} (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \\
&= \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} v \Delta_k (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)) - \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1} v \Delta_k (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \\
&+ \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \Delta_k v) + \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_j (\Delta_k v \Delta_{\bar{k}} (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)) \\
&- \sum_{k \geq j+1} S_{k-1} (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \Delta_k v - \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_k v \Delta_{\bar{k}} (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \\
&= \sum_{|j-k| \leq 4} \{ \Delta_j (S_{k-1} v \Delta_k (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)) - S_{k-1} v \Delta_k (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \} \\
&+ \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-2} (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \Delta_k v) + \sum_{|k-j| \leq 3} \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_j (\Delta_k v \Delta_{\bar{k}} (\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)) \\
&- \sum_{k \geq j+1} S_{k-1} (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \Delta_k v - \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \sum_{|\bar{k}-j| \leq 1} \Delta_k v \Delta_{\bar{k}} (\Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \\
&:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.
\end{aligned}$$

Comenzamos estimando de forma independiente los términos anteriores. Para iniciar, ob-

servemos que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} h(2^j(x-y)) \{S_{k-1}v(y) - S_{k-1}v(x)\} \Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(y) dy \\
&= \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} h(2^j(x-y)) \left\{ - \int_0^1 \nabla \{S_{k-1}v(x + \tau(y-x))\} \cdot (x-y) d\tau \right\} \times \\
&\quad \Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(y) dy \\
&= - \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} h(z) \left\{ \int_0^1 \nabla \{S_{k-1}v(x - 2^{-j}z\tau)\} \cdot 2^{-j}z d\tau \right\} \times \\
&\quad \Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z) (2^{-2j}) dz \\
&= \sum_{|k-j|\leq 4} -2^{-j} \int_{\mathbb{R}^2} h(z) \left\{ \int_0^1 \nabla \{S_{k-1}v(x - 2^{-j}z\tau)\} \cdot z d\tau \right\} \Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z) dz,
\end{aligned}$$

Aplicando valor absoluto, obtenemos

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \left\{ \int_0^1 |\nabla \{S_{k-1}v(x - 2^{-j}z\tau)\} \cdot z| d\tau \right\} \times \\
&\quad |\Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z)| dz \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \left\{ \int_0^1 \|\nabla S_{k-1}v\|_{L^\infty} \|z\| d\tau \right\} |\Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z)| dz \\
&= \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{-j} \|\nabla S_{k-1}v\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \|z\| |\Delta_k \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z)| dz.
\end{aligned}$$

Entonces aplicando la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ , desigualdad de Young, de (4.16) del Corolario 1 y de

(III) de la Proposición 5, tenemos

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{L^p} &\leq \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{-j} \|\nabla S_{k-1}v\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \|z\| \|\partial_t \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_k u\|_{L^p} dz \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{-j} \|\nabla S_{k-1}v\|_{L^\infty} \|\partial_t \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_k u\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \|z\| dz \\
&= \sum_{|k-j|\leq 4} 2^{-j} \|S_{k-1} \nabla v\|_{L^\infty} \|\partial_t \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_k u\|_{L^p} C \\
&\leq \sum_{k=j-4}^{j+4} C 2^{-j} \|\nabla v\|_{L^\infty} C 2^{\alpha k} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{-j} \|\nabla v\|_{B_{p,\infty}^r} \sum_{k=j-4}^{j+4} 2^{\alpha k} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{-j} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{k=j-4}^{j+4} 2^{\alpha k} \|\Delta_k u\|_{L^p},
\end{aligned}$$

la última desigualdad se debe a la inmersión; para más detalles, ver de 1. del Teorema 2.2 de Sawano et al. (2018). Además, debemos tener que  $r > 2/p$ .

Entonces,

$$\begin{aligned}
2^{j\lambda} \|I_1\|_{L^p} &\leq C 2^{(\lambda-1)j} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{k=j-4}^{j+4} 2^{\alpha k} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&= C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{k=j-4}^{j+4} 2^{(\lambda-1)(j-k)} 2^{(\lambda-1+\alpha)k} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \sum_{k=-4}^4 2^{(\lambda-1)k} \\
&\leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

También tenemos la siguiente estimación a través de las desigualdades de Young y Hölder,

además de (III) de la Proposición 5

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^p} &\leq \sum_{|k-j|\leq 4} \|\Delta_j(S_{k-1}\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\Delta_k v)\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} C\|S_{k-1}\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 4} C\|S_{k-1}\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty}\|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{k=j-4}^{j+4} C\|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty}\|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq C\sum_{k=j-4}^{j+4} \|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{B_{p,\infty}^r}\|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq C\sum_{k=j-4}^{j+4} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}}\|\Delta_k v\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

La última desigualdad se derivó del siguiente argumento auxiliar, en el que se emplean las desigualdades (4.16) y (4.14) del Corolario 1.

$$\begin{aligned}
\|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{B_{p,\infty}^r} &= \sup_{j\geq 0} 2^{jr} \|\Delta_j\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^p} + \|S_0\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^p} \\
&= \sup_{j\geq 0} 2^{jr} \|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i\Delta_j u\|_{L^p} + \|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i S_0 u\|_{L^p} \\
&\leq \sup_{j\geq 0} 2^{jr} C_2^{j\alpha} \|\Delta_j u\|_{L^p} + C_1 \|S_0 u\|_{L^p} \\
&\leq C \left( \sup_{j\geq 0} 2^{j(r+\alpha)} \|\Delta_j u\|_{L^p} + \|S_0 u\|_{L^p} \right) \\
&= C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}}, \tag{4.19}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
2^{j\lambda} \|I_2\|_{L^p} &\leq C 2^{j\lambda} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \sum_{k=j-4}^{j+4} \|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&= C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \sum_{k=j-4}^{j+4} 2^{(j-k)\lambda} 2^{k\lambda} \|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \sum_{k=-4}^4 2^{k\lambda} \\
&\leq C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda}.
\end{aligned}$$

De manera análoga, estimamos  $I_3$  usando las desigualdades de Young y Hölder, además del (4.16) del Corolario 1 y de (III) de la Proposición 5

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{L^p} &\leq \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\tilde{k}|\leq 1} \|\Delta_j(\Delta_k v \Delta_{\tilde{k}} \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u)\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\tilde{k}|\leq 1} C \|\Delta_k v\|_{L^p} \|\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_{\tilde{k}} u\|_{L^\infty} \\
&\leq \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\tilde{k}|\leq 1} C \|\Delta_k v\|_{L^p} C 2^{\alpha\tilde{k}} \|\Delta_{\tilde{k}} u\|_{L^\infty} \\
&\leq C 2^{-j\lambda} \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\tilde{k}|\leq 1} 2^{(j-k)\lambda} \left\{ \sup_{k\geq 0} 2^{k\lambda} \|\Delta_k v\|_{L^p} \right\} \left\{ \sup_{\tilde{k}\geq 0} 2^{\tilde{k}\alpha} \|\Delta_{\tilde{k}} u\|_{L^\infty} \right\} \\
&= C 2^{-j\lambda} \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\tilde{k}|\leq 1} 2^{(j-k)\lambda} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \|u\|_{B_{\infty,\infty}^\alpha} \\
&= C 2^{-j\lambda} C \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \|u\|_{B_{\infty,\infty}^\alpha} \\
&= C 2^{-j\lambda} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}},
\end{aligned}$$

entonces

$$2^{j\lambda} \|I_3\|_{L^p} \leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}}.$$

Similarmente, estimamos  $I_4$  usando las desigualdades de Hölder y Young, además de (III) de la Proposición 5

$$\begin{aligned} \|I_4\|_{L^p} &\leq \sum_{k \geq j+1} \|S_{k-1} \Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_k v\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{k \geq j+1} \|S_{k-1} \Delta_j \partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \|\Delta_k v\|_{L^p} \\ &\leq 2^{-j\lambda} \sum_{k \geq j+1} 2^{(j-k)\lambda} C \|\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} 2^{k\lambda} \|\Delta_k v\|_{L^p} \\ &= 2^{-j\lambda} C \|\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} 2^{k\lambda} \|\Delta_k v\|_{L^p} \\ &\leq C 2^{-j\lambda} \|\partial_l \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{B_{p,\infty}^r} \left\{ \sup_{k \geq 0} 2^{k\lambda} \|\Delta_k v\|_{L^p} + \|S_0(v)\|_{L^p} \right\} \\ &\leq C 2^{-j\lambda} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda}, \end{aligned}$$

entonces

$$2^{j\lambda} \|I_4\|_{L^p} \leq C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|I_5\|_{L^p} &\leq \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\Delta_{j''}v\Delta_{j'}\Delta_j\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\Delta_{j''}v\|_{L^p} \|\Delta_{j'}\Delta_j\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \\
&\leq \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} C\|\Delta_{j''}v\|_{L^p} \|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \\
&= C\|\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\Delta_{j''}v\|_{L^p} \\
&\leq C\|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\Delta_{j''}v\|_{L^p},
\end{aligned}$$

Procediendo de manera análoga a las estimaciones anteriores, tenemos

$$2^{j\lambda}\|I_5\|_{L^p} \leq C\|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}}\|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda},$$

y recopilando las estimaciones anteriores, obtenemos

$$2^{j\lambda}\|[\Delta_j, v]\partial_l\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^p} \leq C(\|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}}\|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} + \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda}\|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}}).$$

□

**Proposición 7.** Sean  $i, l = 1, 2$ ;  $\lambda > 0, \alpha \in (0, 1)$  y  $p \in [1, \infty]$ . Supongamos que  $i \neq l$  y  $r > 2/p$ . Entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$2^{j\lambda}\|[\Delta_j, \Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u]\partial_l v\|_{L^p} \leq C(\|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}}\|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} + \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}}\|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}}), \quad (4.20)$$

donde el corchete  $[\cdot, \cdot]$  representa el operador conmutador.

*Demostración.* Utilizando la descomposición de Bony (2.41) y las relaciones de ortogonalidad

del operador de localización de Bahouri et al. (2011), el conmutador se puede escribir como

$$\begin{aligned}
[\Delta_j, \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u] \partial_l v &= \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_k \partial_l v) + \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} \partial_l v \Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) \\
&+ \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_j (\Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_{\bar{k}} \partial_l v) - \sum_{|j-k| \leq 4} S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_k \Delta_j \partial_l v \\
&- \sum_{k \geq j} S_{k-1} \Delta_j \partial_l v \Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u - \sum_{|j'-j''| \leq 1, |j-j''| \leq 2} \Delta_{j'} \Delta_j \partial_l v \Delta_{j''} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \\
&= \sum_{|j-k| \leq 4} \{ \Delta_j (S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_k \partial_l v) - S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_j \Delta_k \partial_l v \} \\
&+ \sum_{|j-k| \leq 4} \Delta_j (S_{k-1} \partial_l v \Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u) + \sum_{|k-j| \leq 3} \sum_{|k-\bar{k}| \leq 1} \Delta_j (\Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \Delta_{\bar{k}} \partial_l v) \\
&- \sum_{k \geq j} S_{k-1} \Delta_j \partial_l v \Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u - \sum_{|j''-j'| \leq 1} \sum_{|j'-j| \leq 1} \Delta_{j''} \Delta_j \partial_l v \Delta_{j'} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u \\
&:= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5.
\end{aligned}$$

La estimación de cada término se obtendrá de manera similar a la de la proposición anterior.

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sum_{|j-k| \leq 4} 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} h(2^j(x-y)) \{ S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(y) - S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x) \} \Delta_k \partial_l v(y) dy \\
&= \sum_{|j-k| \leq 4} 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} h(2^j(x-y)) \left\{ \int_0^1 \nabla [S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x + \tau(y-x))] \cdot (x-y) d\tau \right\} \Delta_k \partial_l v(y) dy \\
&= \sum_{|j-k| \leq 4} 2^{2j} \int_{\mathbb{R}^2} h(z) \left\{ \int_0^1 \nabla [S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z)] \cdot 2^{-j}z d\tau \right\} \Delta_k \partial_l v(x - 2^{-j}z) (2^{-j})^2 dz \\
&= \sum_{|j-k| \leq 4} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}^2} h(z) \left\{ \int_0^1 \nabla [S_{k-1} \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u(x - 2^{-j}z)] \cdot z d\tau \right\} \Delta_k \partial_l v(x - 2^{-j}z) dz,
\end{aligned}$$

aplicando el valor absoluto, obtenemos

$$\begin{aligned}
|L_1| &\leq \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \left\{ \int_0^1 |\nabla[S_{k-1}\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u(x-2^{-j}z)] \cdot z| d\tau \right\} |\Delta_k \partial_l v(x-2^{-j}z)| dz \\
&\leq \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{-j} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)| \left\{ \int_0^1 \|\nabla S_{k-1}\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} |z| d\tau \right\} |\Delta_k \partial_l v(x-2^{-j}z)| dz \\
&\leq \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{-j} \|\nabla S_{k-1}\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)||z| |\Delta_k \partial_l v(x-2^{-j}z)| dz,
\end{aligned}$$

entonces, despues de aplicar la norma  $\|\cdot\|_{L^p}$ , desigualdad de Young, la desigualdad de Bernstein Clásica (ver el inten (b) de la Proposición 2.3 de Lemarié-Rieusset (2002)), tenemos

$$\begin{aligned}
\|L_1\|_{L^p} &\leq \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{-j} \|S_{k-1}\nabla\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)||z| \|\Delta_k \partial_l v\|_{L^p} dz \\
&\leq \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{-j} C \|\nabla\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \|\Delta_k \partial_l v\|_{L^p} \int_{\mathbb{R}^2} |h(z)||z| dz \\
&= \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{-j} C \|\nabla\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{L^\infty} \|\partial_l \Delta_k v\|_{L^p} C \\
&\leq \sum_{|j-k|\leq 4} C 2^{-j} \|\nabla\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{B_{p,\infty}^r} 2^k \|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{-j} \|\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{|j-k|\leq 4} 2^k \|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{-j} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \sum_{|j-k|\leq 4} 2^k \|\Delta_k v\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Observemos que  $r > 2/p$  y que la última desigualdad se derivó del siguiente argumento

auxiliar, en el cual se emplean las desigualdades (4.12) y (4.9) del Teorema 1.

$$\begin{aligned}
\|\Lambda_i^{\alpha-1}\mathcal{H}_i u\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} &= \sup_{j \geq 0} 2^{j(r+1)} \|\Delta_j \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{L^p} + \|S_0 \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{L^p} \\
&= \sup_{j \geq 0} 2^{j(r+1)} \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_j u\|_{L^p} + \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i S_0 u\|_{L^p} \\
&\leq \sup_{j \geq 0} 2^{j(r+1)} C_2 2^{j(\alpha-1)} \|\Delta_j u\|_{L^p} + C_1 \|S_0 u\|_{L^p} \\
&\leq C \left( \sup_{j \geq 0} 2^{j(r+\alpha)} \|\Delta_j u\|_{L^p} + \|S_0 u\|_{L^p} \right) \\
&= \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}},
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
2^{j\lambda} \|L_1\|_{L^p} &\leq C 2^{(\lambda-1)j} \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \sum_{|j-k| \leq 4} 2^k \|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&= C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \sum_{|j-k| \leq 4} 2^{(\lambda-1)(j-k)} 2^{\lambda k} \|\Delta_k v\|_{L^p} \\
&\leq C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda} \sum_{|k| \leq 4} 2^{(\lambda-1)k} \\
&\leq C \|u\|_{B_{p,\infty}^{r+\alpha}} \|v\|_{B_{p,\infty}^\lambda}.
\end{aligned}$$

También tenemos la siguiente estimación mediante las desigualdades de Hölder y Young,

además del tercer ítem de la Proposición 5 y de (4.12) del Teorema 1.

$$\begin{aligned}
\|L_2\|_{L^p} &\leq \sum_{|j-k|\leq 4} \|S_{k-1}\partial_1 v\|_{L^\infty} \|\Delta_k \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{|j-k|\leq 4} C \|\partial_1 v\|_{L^\infty} \|\Delta_k \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u\|_{L^p} \\
&\leq C \sum_{|j-k|\leq 4} \|\nabla v\|_{B_{p,\infty}^r} \|\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C \sum_{|j-k|\leq 4} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \tilde{C} 2^{k(\alpha-1)} \|\Delta_k u\|_{L^p},
\end{aligned}$$

so,

$$\begin{aligned}
2^{j\lambda} \|L_2\|_{L^p} &\leq C 2^{j\lambda} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{k(\alpha-1)} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&= C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{|j-k|\leq 4} 2^{(j-k)\lambda} 2^{(\lambda+\alpha-1)k} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \sum_{|k|\leq 4} 2^{k\lambda} \\
&\leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}}.
\end{aligned}$$

También tenemos,

$$\begin{aligned}
\|L_3\|_{L^p} &\leq \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\bar{k}|\leq 1} C \|\Delta_k \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u\|_{L^p} \|\Delta_{\bar{k}} \partial_t v\|_{L^\infty} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\bar{k}|\leq 1} \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_k u\|_{L^p} \|\partial_t v\|_{L^\infty} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\bar{k}|\leq 1} \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_k u\|_{L^p} \|\nabla v\|_{L^\infty} \\
&\leq C \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\bar{k}|\leq 1} 2^{k(\alpha-1)} \|\Delta_k u\|_{L^p} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \\
&\leq C 2^{-j\lambda} \sum_{|k-j|\leq 3} \sum_{|k-\bar{k}|\leq 1} 2^{(j-k)\lambda} \{2^{(\lambda+\alpha-1)k} \|\Delta_k u\|_{L^p}\} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \\
&\leq C 2^{-j\lambda} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}},
\end{aligned}$$

entonces,

$$2^{j\lambda} \|L_3\|_{L^p} \leq C \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}}.$$

Procediendo de manera similar, obtendremos las estimaciones para  $L_4$  y  $L_5$

$$\begin{aligned}
\|L_4\|_{L^p} &\leq \sum_{k \geq j} C \|\partial_t v\|_{L^\infty} \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq \sum_{k \geq j} \|\nabla v\|_{L^\infty} \tilde{C} 2^{k(\alpha-1)} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{-j\lambda} \sum_{k \geq j} 2^{(j-k)\lambda} \|\nabla v\|_{B_{p,\infty}^r} 2^{k(\lambda+\alpha-1)} \|\Delta_k u\|_{L^p} \\
&\leq C 2^{-j\lambda} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}},
\end{aligned}$$

entonces

$$2^{j\lambda} \|L_4\|_{L^p} \leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|L_5\|_{L^p} &\leq \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\partial_l v\|_{L^\infty} \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_{j'} u\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\nabla v\|_{L^\infty} \|\Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i \Delta_{j'} u\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|\nabla v\|_{B_{p,\infty}^r} C 2^{j'(\alpha-1)} \|\Delta_{j'} u\|_{L^p} \\ &\leq C \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} 2^{(\alpha-1)j'} \|\Delta_{j'} u\|_{L^p}, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} 2^{j\lambda} \|L_5\|_{L^p} &\leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \sum_{|j''-j'|\leq 1} \sum_{|j'-j|\leq 1} 2^{(j-j')\lambda} 2^{(\lambda+\alpha-1)j'} \|\Delta_{j'} u\|_{L^p} \\ &\leq C \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}} \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Al reunir las estimaciones previas, obtenemos

$$2^{j\lambda} \|[\Delta_j, \Lambda_i^{\alpha-1} \mathcal{H}_i u] \partial_l v\|_{L^p} \leq C (\|u\|_{B_{p,\infty}^r} \|v\|_{B_{p,\infty}^{\gamma+\alpha}} + \|u\|_{B_{p,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \|v\|_{B_{p,\infty}^{r+1}}).$$

□

# Capítulo V

## Resultados

El Teorema 2 es uno de nuestros resultados principales de esta investigación, ya que este teorema responde la pregunta del problema general de esta tesis, el cual fue: ¿Es posible demostrar, bajo un análisis riguroso en los espacios de Besov Clásico, la existencia, unicidad y la dependencia continua de las soluciones de la ley de conservación parcialmente no-local (2.1)? El Teorema 2 garantiza la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación con velocidad parcialmente no-local (2.1) en los espacios de Besov Clásico. Antes de comenzar con la demostración de este teorema, presentamos algunos resultados que han sido usados a lo largo de la demostración de este teorema.

### **5.1. Buena colocación de la ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov Clásico**

Para regularizar el campo de velocidades de (2.1), consideremos una función suave, simétrica y no negativo  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , o sea está en el espacio de las funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto, tal que  $\int_{\mathbb{R}} \rho(s) \, ds = 1$ . Ahora, para un pequeño  $\epsilon > 0$  definimos,

$\rho_\epsilon(s) = \epsilon^{-1}\rho(\frac{s}{\epsilon})$ . Además, dada una función  $\theta(x, y)$  definida en  $\mathbb{R}^2$ , denotamos por  $*_1$  y  $*_2$  las convoluciones parciales:

$$(\rho *_1 \theta)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x - s)\theta(s, y) \, ds, \quad (5.1)$$

$$(\rho *_2 \theta)(x, y) = \int_{\mathbb{R}} \rho(y - s)\theta(x, s) \, ds, \quad (5.2)$$

respectivamente.

Definamos,

$$\begin{aligned} P_{1,\epsilon}\theta &:= c_\alpha(|x|^{-\alpha} * \rho_\epsilon) * (\mathcal{H}_1\theta) \\ &= c_\alpha(|x|^{-\alpha} * \rho_\epsilon) * (W_0 * \theta_y) \\ &= c_\alpha|x|^{-\alpha} * (W_0 * (\rho_\epsilon * \theta_y)) \\ &= c_\alpha|x|^{-\alpha} * (W_0 * (\rho_\epsilon *_1 \theta)) \\ &= c_\alpha|x|^{-\alpha} * \mathcal{H}_1(\rho_\epsilon *_1 \theta) \\ &= \Lambda_1^{\alpha-1}\mathcal{H}_1\theta_{1,\epsilon}, \end{aligned}$$

donde

$$\theta_{1,\epsilon} = \rho_\epsilon *_1 \theta. \quad (5.3)$$

Note que  $\theta_y \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  and  $\rho_\epsilon *_1 \theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Similarmente podemos obtener  $P_{2,\epsilon}\theta = \Lambda_2^{\alpha-1}\mathcal{H}_2\theta_{2,\epsilon}$ ,

onde

$$\theta_{2,\epsilon} = \rho *_2 \theta. \quad (5.4)$$

Por tanto, la regularización del campo de velocidades es dado por

$$(-\Lambda_2^{\alpha-1}\mathcal{H}_2\theta_{2,\epsilon}, \Lambda_1^{\alpha-1}\mathcal{H}_1\theta_{1,\epsilon}).$$

Además, para  $j$  fijo, las funciones  $\theta_{i,\epsilon}$  y  $\Delta_j\theta_{i,\epsilon}$  con  $i = 1, 2$  son limitados por  $\theta$  y  $\Delta_j\theta$

respectivamente en  $L^1(\mathbb{R}^2)$ .

En efecto, de la desigualdad de Young sigue que

$$\begin{aligned}
\|\theta_{1,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |\theta_{1,\epsilon}(x, y)| \, dx \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\rho_\epsilon * \theta| \, dx \right) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\rho_\epsilon * \theta\|_{L^1} \, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} C \|\theta_y\|_{L^1} \, dy \\
&= C \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\theta_y(x)| \, dx \, dy \\
&= C \|\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos obtener  $\|\theta_{2,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ .

Por otro lado, de la definición de la convolución parcial  $*_1$ , ver (5.1), y de la linealidad de la convolución, tenemos

$$\begin{aligned}
\Delta_j \theta_{1,\epsilon}(x, y) &= 2^{2j} [(\mathcal{F}^{-1} \varphi(2^j \cdot)) * \theta_{1,\epsilon}](x, y) \\
&= 2^{2j} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1} \varphi(2^j(x-u, y-v)) \theta_{1,\epsilon}(u, v) \, du \, dv \\
&= 2^{2j} \int_{\mathbb{R}} [\mathcal{F}^{-1} \varphi(2^j(\cdot, y-v)) *_1 (\rho_\epsilon * \theta)](x) \, dv \\
&= 2^{2j} \int_{\mathbb{R}} [\rho_\epsilon *_1 (\mathcal{F}^{-1} \varphi(2^j(\cdot, y-v)) *_1 \theta)](x) \, dv \\
&= (\rho_\epsilon *_1 \Delta_j \theta)(x, y),
\end{aligned}$$

entonces, por la desigualdad de Young, obtenemos

$$\|\Delta_j \theta_{1,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\Delta_j \theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \quad (5.5)$$

De manera similar, se puede demostrar que  $\Delta_j \theta_{2,\epsilon}(x, y) = (\rho_\epsilon *_{2} \Delta_j \theta)(x, y)$  y

$$\|\Delta_j \theta_{2,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\Delta_j \theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \quad (5.6)$$

Note que, para  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \|\theta_{1,\epsilon}\|_{B_{1,\infty}^\lambda(\mathbb{R}^2)} &= \sup_{j \geq 0} 2^{\lambda j} \|\Delta_j \theta_{1,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|S_0 \theta_{1,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \sup_{j \geq 0} 2^{\lambda j} C \|\Delta_j \theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + C \|\theta\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq C \|\theta\|_{B_{1,\infty}^\lambda(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Similarmente, obtenemos  $\|\theta_{2,\epsilon}\|_{B_{1,\infty}^\lambda(\mathbb{R}^2)} \leq C \|\theta\|_{B_{1,\infty}^\lambda(\mathbb{R}^2)}$ .

En el siguiente resultado los operadores no locales y la función  $f$  dependen sólo de una variable. Este resultado particular se cita varias veces en la demostración del Teorema 2.

**Afirmación 5.1.1.** *Para  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tenemos*

$$\frac{d}{dx} (\Lambda^{\alpha-1} \mathcal{H}f) = \Lambda^\alpha f. \quad (5.8)$$

En efecto, de las definiciones  $(\Lambda^{\alpha-1} f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{\alpha-1} \hat{f}(\xi)$  y  $(\mathcal{H}f)^\wedge(\xi) = -\frac{i\xi}{|\xi|} \hat{f}(\xi)$  se tiene

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dx} \Lambda^{\alpha-1} (\mathcal{H}f) \right\}^\wedge(\xi) &= i\xi \{ \Lambda^{\alpha-1} (\mathcal{H}f) \}^\wedge(\xi) \\ &= i\xi \{ |\xi|^{\alpha-1} (\mathcal{H}f)^\wedge(\xi) \} \\ &= i\xi \left\{ |\xi|^{\alpha-1} \left( -\frac{i\xi}{|\xi|} \hat{f}(\xi) \right) \right\} \\ &= |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi) \\ &= (\Lambda^\alpha f)^\wedge(\xi) \end{aligned}$$

al tomar la transformada inversa de Fourier, obtenemos lo deseado.

**Lema 1.** Sean  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\gamma > 3$ . Supongamos que  $w, u_1, u_2 \in B_{1,\infty}^\lambda$  y

$$\partial_t w + \nabla \cdot \{w(-\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2, \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1)\} = g, \quad (5.9)$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j w) \partial_t \Delta_j w dx dy \leq \sum_{i=1}^2 C 2^{-j\gamma} \|u_i\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma} + \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j w) \Delta_j g dx dy, \quad (5.10)$$

donde,  $\Delta_j$  es el operador de localización  $g = g(w, u_1, u_2)$ .

*Demostración.* La ecuación (5.9) puede ser escrita como

$$\partial_t w = \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \partial_1 w + w \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 - \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1 \partial_2 w - w \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1 + g,$$

multiplicando por el operador de localización  $\Delta_j$ , tenemos de la definición de operador conmutador (4.18) que

$$\begin{aligned} \Delta_j \partial_t w &= [\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2] \partial_1 w + \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \Delta_j \partial_1 w \\ &\quad + [\Delta_j, w] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 + w \Delta_j \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \\ &\quad - [\Delta_j, \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1] \partial_2 w - \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1 \Delta_j \partial_2 w \\ &\quad - [\Delta_j, w] \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1 - w \Delta_j \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 u_1 + \Delta_j g. \end{aligned}$$

Ahora, multiplicando ambos lados por  $\text{sgn}(\Delta_j w) = \frac{\Delta_j w}{|\Delta_j w|}$  e integrando sobre  $\mathbb{R}^2$  obtenemos:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \text{sgn}(\Delta_j w) \partial_t \Delta_j w \, dx \, dy := \sum_{m=1}^4 J_m - \sum_{m=1}^4 J'_m + \int_{\mathbb{R}^2} \text{sgn}(\Delta_j w) g \, dx \, dy. \quad (5.11)$$

Luego, para estimar  $J_1$ , se emplea la Proposición 7; en este caso tomamos  $r = \gamma - 1 > 2$

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\text{sgn}(\Delta_j w) [\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2] \partial_1 w| \, dx \, dy \\ &= \left\| [\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2] \partial_1 w \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq 2^{-j\gamma} \left\{ C \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{r+\alpha}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma} + C \|w\|_{B_{1,\infty}^{r+1}} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \right\} \\ &\leq 2^{-j\gamma} \left\{ C \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma} + C \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \right\} \\ &\leq C 2^{-j\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\lambda}. \end{aligned}$$

Para estimar  $J_2$ , usamos la integración por partes, también de (III) de la Proposición 5 para  $r = \gamma - 1 > 2$  y de (4.19), tenemos

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \text{sgn}(\Delta_j w) \partial_1 \Delta_j w \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \partial_1 |\Delta_j w| \, dx \, dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 |\Delta_j w| \, dx \, dy \\ &\leq \left\| \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_j w| \, dx \, dy \\ &\leq C \left\| \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \right\|_{B_{1,\infty}^r} \|\Delta_j w\|_{L^1} \\ &\leq C 2^{-j\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{r+\alpha}} \left\{ 2^{j\gamma} \|\Delta_j w\|_{L^1} \right\} \\ &\leq C 2^{-j\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma}. \end{aligned}$$

Para estimar  $J_3$ , usamos la Proposición 6 y tomamos  $r = \gamma - 1 > 2$

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{sgn}(\Delta_j w) [\Delta_j, w] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2| dx dy \\
&\leq \| [\Delta_j, w] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 u_2 \|_{L^1} \\
&\leq 2^{-j\gamma} \left\{ C \|w\|_{B_{1,\infty}^{r+1}} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} + C \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{r+\alpha}} + \|w\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \right\} \\
&= 2^{-j\gamma} \left\{ C \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} + C \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} + \|w\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \right\} \\
&\leq C 2^{-j\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, definiendo  $\operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) = \frac{\Delta_j w}{\sqrt{(\Delta_j w)^2 + \delta}}$  tenemos que  $\operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) \rightarrow \operatorname{sgn}(\Delta_j w)$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Además

$$\begin{aligned}
\partial_i \{ \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) w \} &= \partial_i \{ \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) \} w + \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) \partial_i w \\
&= \frac{\partial_i(\Delta_j w)}{(\Delta_j w)^2 + \delta} \left\{ \sqrt{(\Delta_j w)^2 + \delta} - \frac{(\Delta_j w)^2}{\sqrt{(\Delta_j w)^2 + \delta}} \right\} w + \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) \partial_i w \\
&= \frac{\partial_i(\Delta_j w)}{\sqrt{(\Delta_j w)^2 + \delta}^3} (\delta w) + \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) \partial_i w \rightarrow \operatorname{sgn}(\Delta_j w) \partial_i w,
\end{aligned}$$

entonces,  $\partial_i \{ \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) w \} \rightarrow \operatorname{sgn}(\Delta_j w) \partial_i w$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

Finalmente, estimamos  $J_4$  usando integración por partes, Desigualdad de Hölder, a partir de (4.12) del Teorema 1, de (III) de la Proposición 5 y 1. del Teorema 2.2 de Sawano et al.

(2018), para  $r = \gamma - 1$ , tenemos

$$\begin{aligned}
J_4 &\approx \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}_\delta(\Delta_j w) w \partial_1 (\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j u_2) dx dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j w) \partial_1 \{w\} (\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j u_2) dx dy \\
&\leq \|\partial_1 w\|_{L^\infty} \|\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j u_2\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j\lambda} \|\partial_1 w\|_{L^\infty} 2^{j(\lambda+\alpha-1)} \|\Delta_j u_2\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j\gamma} \|w\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+1}} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \\
&\leq C 2^{-j\gamma} \|u_2\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma},
\end{aligned}$$

donde el símbolo  $\approx$  significa una aproximación.

Las estimativas para cada  $J'_m$  es similar a las estimativas hechas para cada  $J_m$  con  $m = 1, \dots, 4$  obteniendo las mismas estimativas respectivamente.

Por tanto, utilizando las estimativas anteriores en (5.11), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j w) \partial_t \Delta_j w dx dy \leq \sum_{i=1}^2 C 2^{-j\gamma} \|u_i\|_{B_{1,\infty}^{\gamma+\alpha-1}} \|w\|_{B_{1,\infty}^\gamma} + \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j w) g dx dy.$$

□

**Teorema 2.** Sean  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\lambda > 5$ . Supongamos que el dato inicial  $\theta_0 \in B_{1,\infty}^\lambda$ . Entonces podemos encontrar un  $T = T(\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda})$ , tal que existe una única solución  $\theta$  para (2.1) en  $[0, T] \times \mathbb{R}^2$ . Además, esta solución pertenece al espacio

$$C^1([0, T]; B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}) \cap L^\infty([0, T]; B_{1,\infty}^\beta) \text{ con } \beta \in [\lambda + \alpha - 2, \lambda].$$

*Demostración.* Comenzamos la demostración del Teorema 2 construyendo una secuencia  $\{\theta^{(n)}\}$ ,

definida recursivamente através de la solución de las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \theta^{(1)} = S_2(\theta_0) \\ \partial_t \theta^{(n+1)} = \nabla \cdot \left\{ \theta^{(n+1)} (\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta_{2,\epsilon}^{(n)}, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta_{1,\epsilon}^{(n)}) \right\} \\ \theta^{(n+1)}((x, y), 0) = \theta_0^{(n+1)} = S_{n+2} \theta_0. \end{cases} \quad (5.12)$$

Dado que  $\theta^{(n+1)}$  resuelve el sistema lineal, siempre podemos encontrar la secuencia. Observe que la segunda ecuación de (5.12) es un caso particular del Lema 1 con  $w = \theta^{(n+1)}$ ,  $u_1 = \theta_{1,\epsilon}^{(n)}$ ,  $u_2 = \theta_{2,\epsilon}^{(n)}$  y  $g = 0$ , donde  $\theta_{1,\epsilon}$  y  $\theta_{2,\epsilon}$  están definidos en (5.3) y (5.4) respectivamente, para  $\gamma = \lambda$ , de (5.5) y (5.6), tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j \theta^{(n+1)}) \partial_t \Delta_j \theta^{(n+1)} dx dy &\leq \sum_{i=1}^2 C 2^{-j\lambda} \left\| \theta_{i,\epsilon}^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \left\| \theta^{(n+1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \\ &\leq C 2^{-j\lambda} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \left\| \theta^{(n+1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Además, observe que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}(\Delta_j \theta^{(n+1)}) \partial_t \Delta_j \theta^{(n+1)} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t |\Delta_j \theta^{(n+1)}| dx dy = \frac{d}{dt} \left\| \Delta_j \theta^{(n+1)} \right\|_{L^1}, \quad (5.14)$$

luego integrando de 0 a  $t$  en (5.13), del hecho de que  $\theta_0^{(n+1)} = S_{n+2} \theta_0$ , la desigualdad de Young, y aplicando  $\sup_{j \geq -1} 2^{j\lambda}$ , tenemos

$$\begin{aligned} \sup_{j \geq -1} 2^{j\lambda} \left\| \Delta_j \theta^{(n+1)} \right\|_{L^1} &\leq \sup_{j \geq -1} 2^{j\lambda} C \left\| \Delta_j \theta_0 \right\|_{L^1} + \sup_{j \geq -1} 2^{j\lambda} C 2^{-j\lambda} \int_0^t \left\| \theta^{(n+1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} d\tau \\ \left\| \theta^{(n+1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} &\leq C \left\| \theta_0 \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} + C \int_0^t \left\| \theta^{(n+1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} d\tau, \end{aligned}$$

por la desigualdad de Grönwall forma integral, se deduce que

$$\|\theta^{(n+1)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \leq C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp\left\{C \int_0^t \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} d\tau\right\}, \quad (5.15)$$

con  $C$  independiente de  $n$ .

**Afirmación 5.1.2.** Al definir  $X_T := C([0, T]; B_{1,\infty}^\lambda)$ , obtenemos

$$\|\theta^{(n+1)}\|_{X_T} \leq C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp\left\{CT\|\theta^{(n)}\|_{X_T}\right\}, \quad (5.16)$$

donde,  $\|\theta^{(n+1)}\|_{X_T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\theta^{(n+1)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda}$ .

En efecto, tomando  $t \leq T$ , tenemos (5.15)

$$\begin{aligned} \|\theta^{(n+1)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} &\leq C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp\left\{C \int_0^t \sup_{0 \leq \tau \leq T} \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} d\tau\right\} \\ &= C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp\left\{C \int_0^t \|\theta^{(n)}\|_{X_T} d\tau\right\} \\ &= C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp\left\{C\|\theta^{(n)}\|_{X_T} t\right\} \\ &\leq C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp\left\{CT\|\theta^{(n)}\|_{X_T}\right\}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

y tomamos el supremo para  $t \in [0, T]$ , obtenemos (5.16).

La siguiente afirmación establece que la secuencia  $\theta^{(n)}$  está limitada por el dato inicial  $\theta_0$  en el espacio  $B_{1,\infty}^\lambda$ .

**Afirmación 5.1.3.** Si  $\exp\left\{2C^2T_0\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda}\right\} \leq 2$ , entonces  $\sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \leq 2C\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda}$  para todo  $n \geq 1$ .

En efecto, la prueba es por inducción. Sea  $T_0 \leq T$ , para  $n = 1$ , de la desigualdad de Young,

tenemos

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\theta^{(1)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} &= \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|S_2 \theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \\
&\leq C \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \\
&\leq 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda}.
\end{aligned}$$

Supongamos que es válido para  $n$ ; mostramos que también es válido para  $n + 1$ . De (5.15) y procediendo como en (5.17), podemos obtener

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\theta^{(n+1)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} &\leq C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp \left\{ CT_0 \sup_{0 \leq t \leq T_0} \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \right\} \\
&\leq C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \exp \left\{ CT_0 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \right\} \\
&\leq 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda}.
\end{aligned}$$

Sea  $Y_T := C([0, T]; B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2})$ . Probaremos que la secuencia  $(\theta^{(n)})$  es de Cauchy en  $Y_{T_1}$  para algún  $T_1 \in (0, T_0)$ . Considerando la diferencia  $\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}$ , y la linealidad de  $\Lambda_i^{\alpha-1}$  y  $\mathcal{H}_i$ , obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}) &= \nabla \cdot \left\{ \theta^{(n+1)}(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta_{2,\epsilon}^{(n)}, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta_{1,\epsilon}^{(n)}) \right\} \\
&\quad - \nabla \cdot \left\{ \theta^{(n)}(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta_{1,\epsilon}^{(n-1)}) \right\} \\
&= \nabla \cdot \left\{ (\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta_{2,\epsilon}^{(n)}, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta_{1,\epsilon}^{(n)}) \right\} \\
&\quad + \nabla \cdot \left\{ \theta^{(n)}(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}), -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta_{1,\epsilon}^{(n)} - \theta_{1,\epsilon}^{(n-1)})) \right\} \\
&:= D_1 + D_2,
\end{aligned}$$

con dato inicial  $(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})(x, y, 0) = \Delta_{n+1} \theta_0$ .

Note que estamos en un caso particular del Lema 1 con  $w = \theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}$ ,  $u_1 = \theta_{1,\epsilon}^{(n)}$ ,  $u_2 = \theta_{2,\epsilon}^{(n)}$  y  $g = D_2$ , donde  $\theta_{1,\epsilon}$  y  $\theta_{2,\epsilon}$  se definen en (5.3) y (5.4) respectivamente; para  $\gamma = \lambda + \alpha - 2$ , tenemos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \partial_t \Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}) dx dy \leq \\ & \sum_{i=1}^2 C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \|u_i\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+2\alpha-3}} \|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} + \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \Delta_j D_2 dx dy \leq \\ & C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} + \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \Delta_j D_2 dx dy, \end{aligned} \quad (5.18)$$

de la definición de conmutadores (4.18), podemos encontrar que

$$\begin{aligned} \Delta_j D_2 &= [\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)})] \partial_1 \theta^{(n)} + \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \Delta_j \partial_1 \theta^{(n)} \\ &+ [\Delta_j, \theta^{(n)}] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) + \theta^{(n)} \Delta_j \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \\ &- [\Delta_j, \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta_{1,\epsilon}^{(n)} - \theta_{1,\epsilon}^{(n-1)})] \partial_2 \theta^{(n)} - \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta_{1,\epsilon}^{(n)} - \theta_{1,\epsilon}^{(n-1)}) \Delta_j \partial_2 \theta^{(n)} \\ &- [\Delta_j, \theta^{(n)}] \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta_{1,\epsilon}^{(n)} - \theta_{1,\epsilon}^{(n-1)}) + \theta^{(n)} \Delta_j \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta_{1,\epsilon}^{(n)} - \theta_{1,\epsilon}^{(n-1)}) \end{aligned}$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \Delta_j D_2 dx dy := \sum_{m=1}^4 J_m - \sum_{m=1}^4 J'_m. \quad (5.19)$$

Estimamos los  $J_m$  y  $J'_m$  para  $m = 1, \dots, 4$  de forma análoga a las estimativas hechas en la

demostración del Lema 1. Para  $J_1$  de la Proposición 7, en este caso, tomamos  $r = \lambda - 2 > 2$

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \left\| [\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)})] \partial_i \theta^{(n)} \right\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\{ \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-1}} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2+(\alpha-1)}} \right\} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\{ \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} + \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \right\} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}.
\end{aligned}$$

Para  $J_2$ , de la integración por partes, de (III) de la Proposición 5 y de (4.19), aquí también tomamos  $r = \lambda - 2 > 2$

$$\begin{aligned}
J_2 &= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \partial_1 \{\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)})\} \Delta_j \theta^{(n)} dx dy \\
&\leq \left\| \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \right\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_j \theta^{(n)}| dx dy \\
&\leq C \left\| \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \right\|_{B_{1,\infty}^r} \left\| \Delta_j \theta^{(n)} \right\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{r+\alpha}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}.
\end{aligned}$$

Para  $J_3$  de la Proposición 6, con  $r = \lambda - 2 > 2$  y de (III) la Proposición 5

$$\begin{aligned}
J_3 &\leq \left\| [\Delta_j, \theta^{(n)}] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \right\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\{ \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda-1}} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2+(\alpha-1)}} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \right\} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\{ \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} + \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \right\} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para  $J_4$  de la integración por partes, de la desigualdad (4.12) del Teorema 1 y del tercer ítem de la Proposición 5, en este caso  $r = \lambda - 1$

$$\begin{aligned}
J_4 &= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \partial_1 \theta^{(n)} \{ \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \} dx dy \\
&\leq \left\| \nabla \theta^{(n)} \right\|_{L^\infty} \left\| \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \right\|_{L^1} \\
&\leq C \left\| \nabla \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^r} 2^{j(\alpha-1)} \left\| \Delta_j(\theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)}) \right\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{r+1}} \left\| \theta_{2,\epsilon}^{(n)} - \theta_{2,\epsilon}^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2+(\alpha-1)}} \\
&\leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}.
\end{aligned}$$

Las estimativas para cada  $J'_m$  es similar a las estimativas hechas para cada  $J_m$  con  $m = 1, \dots, 4$  y se obtienen las mismas estimativas respectivamente. Entonces en (5.19), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})\} \Delta_j D_2 dx dy \leq C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} \left\| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}. \quad (5.20)$$

Por otro lado, de la ortogonalidad del operador de localización  $\Delta_j$  y la desigualdad de

Young, tenemos

$$\begin{aligned}
\left\| \theta_0^{(n+1)} - \theta_0^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} &= \left\| \Delta_{n+1} \theta_0 \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \\
&= \sup_{j \geq -1} 2^{j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \Delta_j \Delta_{n+1} \theta_0 \right\|_{L^1} \\
&= \sup_{n \leq j \leq n+2} 2^{j\lambda} 2^{j(\alpha-2)} \left\| \Delta_{n+1} \Delta_j \theta_0 \right\|_{L^1} \\
&\leq 2^{n(\alpha-2)} \sup_{n \leq j \leq n+2} 2^{j\lambda} C \left\| \Delta_j \theta_0 \right\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{n(\alpha-2)} \left\| \theta_0 \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (5.14), (5.18) y (5.20), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left\| \Delta_j (\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}) \right\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t |\Delta_j (\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)})| dx dy \leq \\
C 2^{-j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} &\left\{ \left\| \theta^{(n+1)} - \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} + \left\| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \right\},
\end{aligned}$$

integrando los extremos de 0 a  $t$  y usando  $\sup_{j \geq -1} 2^{j(\lambda+\alpha-2)}$

$$\begin{aligned}
\sup_{j \geq -1} 2^{j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \Delta_j (\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}) \right\|_{L^1} &\leq \sup_{j \geq -1} 2^{j(\lambda+\alpha-2)} \left\| \Delta_j (\theta_0^{(n+1)} - \theta_0^{(n)}) \right\|_{L^1} + \\
\sup_{j \geq -1} C \int_0^t \left\| \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda}} &\left\{ \left\| \theta^{(n+1)} - \theta^{(n)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} + \left\| \theta^{(n)} - \theta^{(n-1)} \right\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \right\} d\tau,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} &\leq \|\theta_0^{(n+1)} - \theta_0^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} \\
&+ C \int_0^t \sup_{0 \leq \tau \leq T_1} \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \sup_{0 \leq \tau \leq T_1} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} d\tau \\
&+ C \int_0^t \sup_{0 \leq \tau \leq T_1} \|\theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} d\tau \\
&\leq C2^{n(\alpha-2)} \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} + C \int_0^t 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{Y_{T_1}} d\tau \\
&+ C \int_0^t 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} d\tau \\
&\leq C2^{n(\alpha-2)} \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} + 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{Y_{T_1}} \int_0^t d\tau \\
&+ 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \int_0^t \|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} d\tau \\
&\leq C2^{n(\alpha-2)} \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} + 2CT_1 \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{Y_{T_1}} \\
&+ 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \int_0^t \|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} d\tau,
\end{aligned}$$

por la desigualdad de Grönwall versión integral, obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\theta^{(n+1)} - \theta^{(n)}\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}} &\leq \left( C2^{n(\alpha-2)} \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} + 2CT_1 \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{Y_{T_1}} \right) \\
&\exp \left\{ 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \int_0^t d\tau \right\} \\
&\leq \left( C2^{n(\alpha-2)} \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} + 2CT_1 \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{Y_{T_1}} \right) \\
&\exp \left\{ 2CT_1 \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda} \right\} \\
&\leq C'2^{n(\alpha-2)} + C'T_1 \exp\{C'T_1\} \|\theta^{(n)} - \theta^{(n-1)}\|_{Y_{T_1}},
\end{aligned}$$

donde,  $T_1 \in [0; T_0]$  y la constante  $C' = C'(\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\lambda})$ . Por tanto, si  $C'T_1 \exp\{C'T_1\} < 1/2$ , podemos deducir que  $\theta^{(n)}$  converge para  $\theta \in L^\infty([0; T_1]; B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2})$  in  $Y_{T_1}$ .

Tomando  $\beta = (1 - s)(\lambda + \alpha - 2) + s\lambda$  donde  $0 \leq s \leq 1$ , tenemos

$$\|\theta^{(n)} - \theta\|_{B_{1,\infty}^\beta} = \|\theta^{(n)} - \theta\|_{B_{1,\infty}^{\lambda+\alpha-2}}^{1-s} \|\theta^{(n)} - \theta\|_{B_{1,\infty}^\lambda}^s,$$

sabemos que para todo  $n \in \mathbb{N}$  y  $0 \leq t \leq T_1$  que  $\theta^{(n)}$  es limitado por la condición inicial  $\theta_0 \in B_{1,\infty}^\lambda$ , entonces  $(\theta^{(n)} - \theta)$  es limitado en  $B_{1,\infty}^\lambda$ . Así, por la conocida desigualdad de interpolación en los espacios de Besov, tenemos  $\theta^{(n)} \rightarrow \theta$  en  $L^\infty([0; T_1]; B_{1,\infty}^\beta)$  para todos  $\beta \in [\lambda + \alpha - 2, \lambda]$ .

Sea  $n \rightarrow \infty$ , tenemos  $\theta^{(n)} \rightarrow \theta$ . Por lo tanto, encontramos que  $\theta$  es una solución de (2.1) en  $B_{1,\infty}^\beta$ .

**Unicidad y dependencia continua:** Supongamos que  $\theta$  y  $\sigma$  son elementos de  $L^\infty([0; T_1]; B_{1,\infty}^\beta)$ , que representan dos soluciones de la ley de conservación hiperbólica con velocidad parcialmente no local (2.1) asociado a los datos iniciales  $\theta_0$  y  $\sigma_0$  respectivamente. Considerando la diferencia  $\partial_t \theta - \partial_t \sigma$ , tenemos

$$\begin{aligned} \partial_t(\theta - \sigma) &= \nabla \cdot \{\theta(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta)\} - \nabla \cdot \{\sigma(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta)\} \\ &\quad + \nabla \cdot \{\sigma(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta)\} - \nabla \cdot \{\sigma(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \sigma, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \sigma)\} \\ &= \nabla \cdot \{(\theta - \sigma)(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta)\} \\ &\quad + \nabla \cdot \{\sigma(\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma), -\Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta - \sigma))\} \\ &:= D_3 + D_4. \end{aligned}$$

Este también es un caso particular del Lema 1 con  $w = \theta - \sigma$ ,  $u_1 = u_2 = \theta$  y  $g = D_4$ , para

$\gamma = \beta$ , tenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta - \sigma)\} \partial_t \Delta_j(\theta - \sigma) dx dy \leq \\
& C2^{-j\beta} \|\theta\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} + \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta - \sigma)\} \Delta_j D_4 dx dy \leq \\
& C2^{-j\beta} \|\theta\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} + \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta - \sigma)\} \Delta_j D_4 dx dy, \tag{5.21}
\end{aligned}$$

de la definición del operador conmutador (4.18), podemos obtener

$$\begin{aligned}
\Delta_j D_4 &= [\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma)] \partial_1 \sigma + \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma) \Delta_j \partial_1 \sigma \\
&+ [\Delta_j, \sigma] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma) + \sigma \Delta_j \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma) \\
&- [\Delta_j, \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta - \sigma)] \partial_2 \sigma - \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta - \sigma) \Delta_j \partial_2 \sigma \\
&- [\Delta_j, \sigma] \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta - \sigma) - \sigma \Delta_j \partial_2 \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1(\theta - \sigma)
\end{aligned}$$

entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta - \sigma)\} \Delta_j D_4 dx dy := \sum_{m=1}^4 G_m - \sum_{m=1}^4 G'_m. \tag{5.22}$$

En seguida, tenemos las siguientes estimativas:

Para  $G_1$  de la Proposición 7 con  $r = \beta - 1$  y (III) de la Proposición 5

$$\begin{aligned}
G_1 &\leq \|[\Delta_j, \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma)] \partial_1 \sigma\|_{L^1} \\
&\leq C2^{-j\beta} \left\{ \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha}} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} + \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+1}} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \right\} \\
&\leq C2^{-j\beta} \left\{ \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} + \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \right\} \\
&\leq C2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta}.
\end{aligned}$$

Para  $G_2$  de la integración por partes y de (III) de la Proposición 5, aquí también tomamos  $r = \beta - \alpha > 2$

$$\begin{aligned}
G_2 &= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta - \sigma)\} \partial_1 \{\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma)\} \Delta_j \sigma \, dx \, dy \\
&\leq \|\partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma)\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta_j \sigma| \, dx \, dy \\
&\leq C \|\partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma)\|_{B_{1,\infty}^r} \|\Delta_j \sigma\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j\beta} C \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{r+\alpha}} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \\
&\leq C 2^{-j\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta}.
\end{aligned}$$

Para  $G_3$  de la Proposición 6, con  $r = \beta - 1 > 2$  y de (III) de la Proposición 5

$$\begin{aligned}
G_3 &\leq \|[\Delta_j, \sigma] \partial_1 \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2(\theta - \sigma)\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j\beta} \left\{ \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^{r+1}} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} + \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{r+\alpha}} + \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \right\} \\
&= C 2^{-j\beta} \left\{ \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} + \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \right\} \\
&\leq C 2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta}.
\end{aligned}$$

Finalmente, para  $G_4$  de la integración por partes, de la desigualdad (4.12) del Teorema 1 y

del tercer ítem de la Proposición 5. Para este caso  $r = \beta - 1$

$$\begin{aligned}
G_4 &= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{sgn}\{\Delta_j(\theta - \sigma)\} \partial_1 \sigma \{\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j(\theta - \sigma)\} dx dy \\
&\leq \|\partial_1 \sigma\|_{L^\infty} \|\Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \Delta_j(\theta - \sigma)\|_{L^1} \\
&\leq C \|\partial_1 \sigma\|_{B_{1,\infty}^r} C 2^{j(\alpha-1)} \|\Delta_j(\theta - \sigma)\|_{L^1} \\
&\leq C 2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^{r+1}} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \\
&\leq C 2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^{\beta+\alpha-1}} \\
&\leq C 2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta}.
\end{aligned}$$

Las estimativas para cada  $G'_m$  es similar a las estimativas hechas para cada  $G_m$  con  $m = 1, \dots, 4$  y se obtienen las mismas estimativas respectivamente. Entonces en (5.22), obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{d}{dt} |\Delta_j(\theta - \sigma)| dx dy &\leq C 2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \\
\int_0^t \frac{d}{dt} \|\Delta_j(\theta - \sigma)\|_{L^1} d\tau &\leq \int_0^t C 2^{-j\beta} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} d\tau \\
\|\Delta_j(\theta - \sigma)\|_{L^1} - \|\Delta_j(\theta_0 - \sigma_0)\|_{L^1} &\leq C 2^{-j\beta} \int_0^t \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} d\tau,
\end{aligned}$$

a través de  $\sup_{j \geq -1} 2^{j\beta}$ , se tiene

$$\begin{aligned}
\|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} &\leq \|\theta_0 - \sigma_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} + C \int_0^t \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} d\tau \\
&\leq \|\theta_0 - \sigma_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} + C \int_0^t \sup_{0 \leq t \leq T_1} \|\sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} d\tau \\
&\leq \|\theta_0 - \sigma_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} + C \int_0^t 2C \|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} d\tau \\
&\leq \|\theta_0 - \sigma_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} + C' \int_0^t \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} d\tau,
\end{aligned}$$

donde  $C' = C'(\|\theta_0\|_{B_{1,\infty}^\beta})$  y por la desigualdad de Grönwall forma integral, tenemos

$$\begin{aligned} \|\theta - \sigma\|_{B_{1,\infty}^\beta} &\leq \|\theta_0 - \sigma_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} \exp\left\{C' \int_0^t d\tau\right\} \\ &\leq \|\theta_0 - \sigma_0\|_{B_{1,\infty}^\beta} \exp\{C'T_1\}, \end{aligned}$$

si  $\theta_0 = \sigma_0$  obtenemos la unicidad de las soluciones en  $C([0; T_1]; B_{1,\infty}^\beta)$ . La prueba está completa. □

Por tanto, los objetivos tanto general y específicos de esta tesis fueron realizadas con éxito, pues conseguimos demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de la ley de conservación parcialmente no-local (2.1) en los espacios de Besov Clásico, cabe resaltar que una de las herramientas elementales fue utilizar las propiedades básicas del espacio en mención dadas en la Proposición 5. Además, las hipótesis generales y específicas estaban en lo correcto.

# Capítulo VI

## Conclusiones y recomendaciones

El objetivo de esta tesis es demostrar la existencia, unicidad y dependencia continua de una ley de conservación parcialmente no-local en espacios de Besov Clásico, osea la buena colocación de esta ley de conservación parcialmente no-local en espacios de Besov Clásico. Dicha ley puede interpretarse como una ecuación de transporte no lineal con un flujo parcialmente no-local. Tanto el flujo no-local como la ecuación de transporte no lineal modelan la evolución de problemas de flujo relevantes en ciencias puras y aplicadas. Estos problemas surgen en conexión con modelos dinámicos en mecánica de fluidos continua y dinámica de fluidos en medios porosos; por ejemplo, la evolución de láminas de vórtices, la ecuación de medio poroso incompresible, modelos de interfaz entre fluidos incompresibles, la ecuación de flujo magnetostrófico, problemas de parche en meteorología, por nombrar algunos de los temas de interés significativo en el ámbito de los modelos no locales.

El punto de partida es motivar el problema y establecer varias bases para la existencia de soluciones regulares en todo tiempo, lo que lleva a preguntas importantes como la buena colocación, el blow-up (o sea, la explosión de la solución en un tiempo finito o explosión del dominio de la solución, formación de singularidades en el flujo, etc.), el comportamiento asintótico, la auto-similaridad, entre otras. En este trabajo estudiamos la buena colocación de un tipo de la

ley de conservación parcialmente no-local mencionado anteriormente, con datos iniciales pertenecientes al marco de los espacios de Besov Clásico. Para lograr esto, se han obtenido nuevos resultados matemáticos.

En este capítulo, recopilamos los resultados principales de la tesis y ofrecemos recomendaciones para posibles extensiones futuras del presente trabajo.

## 6.1. Conclusiones

En la siguiente ley de conservación parcialmente no-local

$$\begin{cases} \partial_t \theta + \nabla \cdot (-\theta \Lambda_2^{\alpha-1} \mathcal{H}_2 \theta, \theta \Lambda_1^{\alpha-1} \mathcal{H}_1 \theta) = 0 \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0(x), \end{cases}$$

conseguimos demostrar resultados importantes como:

La buena colocación con datos iniciales pertenecientes al espacio de Besov Clásico  $B_{1,\infty}^\lambda$  con  $\lambda > 5$ , o sea, se demostró la existencia y unicidad de la solución de la ley de conservación en mención, además de la dependencia continua considerando los datos iniciales en los espacios de Besov Clásico. La buena colocación de la solución se estableció a través de un estudio analítico y la novedad de este trabajo radica en que conseguimos los primeros resultados del estudio analítico de la ley de conservación no-local en mención, el cual fue estudiado solo numéricamente en uno de los capítulos del trabajo del doctorado de Cuba (2024).

Los aportes de este trabajo son: un resultado particular del Teorema de la desigualdad de tipo Bernstein para operadores parcialmente no locales, a saber, Transformada de Hilbert parcial y Potencial de Riesz parcial, este resultado es plasmado en el Corolario 1. También conseguimos demostrar dos nuevas estimativas para operadores conmutadores en función de los operadores no-locales parciales ya mencionados, los cuales están detalladas en la Proposición 6 y Pro-

posición 7. Además, se obtuvo un tipo de limitación para la ley de conservación no-local en mención al agregar un término fuente, el cual se describe en el Lema 1. Todos estos aportes fueron fundamentales para demostrar la buena colocación de la solución de la ley de conservación en mención.

## **6.2. Recomendaciones**

Si bien es cierto la ley de conservación parcialmente no-local que se estudió en este trabajo, junto con las otras dos leyes de conservación parcialmente no-local que se estudió en el trabajo de doctorado de Cuba (2024) son modelos nuevos y poseen estructuras innovadoras, un camino natural a seguir sería darles una interpretación física y buscar aplicaciones directas de este tipo de modelos. Otra idea interesante sería conectar los resultados teóricos de este trabajo con los resultados numéricos obtenidos para la misma ley de conservación parcialmente no-local en el trabajo de Cuba (2024).

Además como un primer estudio se demostró la buena colocación en los espacios de Besov Clásico, un siguiente paso natural sería demostrar la buena colocación en espacios más generales como los espacios de Besov Morrey, Besov weak-Morrey, Besov weak-Morrey Modificado, espacios de Besov-Lorentz, entre otros. Esto permitiría exigir menos regularidad a nuestras solución para este tipo de leyes de conservación.

# Bibliografía

- Abreu, E., Diaz, C., Galvis, J., and Pérez, J. (2020). On the conservation properties in multiple scale coupling and simulation for darcy flow with hyperbolic-transport in complex flows. *Multiscale Modeling & Simulation*, 18(4):1375–1408.
- Abreu, E., Ferreira, L., Galeano, J., and Pérez, J. (2022). On a 1d model with nonlocal interactions and mass concentrations: an analytical-numerical approach. *Nonlinearity*, 35(4):1734.
- Abreu, E. and Pérez, J. (2019). A fast, robust, and simple lagrangian–eulerian solver for balance laws and applications. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(9):2310–2336.
- Adams, R. A. and Fournier, J. J. (2003). *Sobolev spaces*. Elsevier.
- Allen, M., Caffarelli, L., and Vasseur, A. (2017). Porous medium flow with both a fractional potential pressure and fractional time derivative. *Chinese Annals of Mathematics, Series B*, 38:45–82.
- Alvarez, P. H. (2022). Sobre as equações de euler em espaços de besov. Master’s thesis, State University of Campinas (UNICAMP), Campinas, Brasil.
- Bahouri, H., Chemin, J.-Y., and Danchin, R. (2011). *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343. Springer.

- Biler, P., Karch, G., and Monneau, R. (2010). Nonlinear diffusion of dislocation density and self-similar solutions. *Communications in Mathematical Physics*, 294:145–168.
- Bodnár, T., Fraunié, P., and Kozel, K. (2021). Modified equation for a class of explicit and implicit schemes solving one-dimensional advection problem. *Acta Polytechnica*, 61(SI):49–58.
- Bony, J.-M. (1981). Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. 14(2):209–246.
- Brezis, H. (2011). Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations.
- Burenkov, V. I. and Tararykova, T. V. (2023). On the 80th birthday of professor oleg vladimirovich besov.
- Constantin, P., Majda, A. J., and Tabak, E. (1994). Formation of strong fronts in the 2-d quasi-geostrophic thermal active scalar. *Nonlinearity*, 7(6):1495.
- Cuba, N. (2024). *A Besov spaces approach and numerical insights to study: a conservation law with partially nonlocal velocity and the inviscid surface quasi-geostrophic equation*. PhD thesis, State University of Campinas (UNICAMP).
- Delgado, J. G. (2016). *Well-posedness and blow-up of global solutions for a nonlinear transport equation with nonlocal flux and measure data: theory and numerics Boa colocação e blow-up de soluções globais para uma equação de transporte não linear com fluxo não local e*. PhD thesis, State University of Campinas (UNICAMP).
- Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations*, volume 19. American Mathematical Soc.
- Ferreira, L. C. and Pérez-López, J. E. (2022). On the well-posedness of the incompressible

- euler equations in a larger space of besov–morrey type. *Dynamics of Partial Differential Equations*, 19(1):23–49.
- Folland, G. B. (1999). *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons.
- Grafakos, L. (2008). *Classical fourier analysis*, volume 2. Springer.
- Huacasi Machaca, M. (2021). Estudio y aplicación de un método lagrangiano-euleriano para leyes de conservación hiperbólicas con flujo doblemente no local. Master’s thesis, Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa, Arequipa, Perú. Available at: <http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/12345>.
- Lemarié-Rieusset, P. G. (2002). Recent developments in the navier-stokes problem.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press.
- Meerschaert, M. M. and Tadjeran, C. (2004). Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of computational and applied mathematics*, 172(1):65–77.
- Mishra, S., Fjordholm, U., and Abgrall, R. (2019). Numerical methods for conservation laws and related equations. *Lecture notes for Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 57:58.
- Sabzikar, F., Meerschaert, M. M., and Chen, J. (2015). Tempered fractional calculus. *Journal of Computational Physics*, 293:14–28.
- Sawano, Y. et al. (2018). *Theory of Besov spaces*, volume 56. Springer.

- Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton university press.
- Strauss, W. A. (2007). *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley & Sons.
- Thomas, J. W. (2013). *Numerical partial differential equations: conservation laws and elliptic equations*, volume 33. Springer Science & Business Media.
- Wu, J. (2007). Existence and uniqueness results for the 2-d dissipative quasi-geostrophic equation. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(11):3013–3036.
- Zhou, X., Xiao, W., and Chen, J. (2014). Fractional porous medium and mean field equations in besov spaces. *Electron. J. Differential Equations*, 2014(199):1–14.



UNSCH

FACULTAD DE  
**INGENIERÍA**  
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

## ACTA No 098-2024-FIMGC: ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS

### PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

En la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga de la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **Resolución Decanal N° 767-2024-FIMGC-D**, a los trece días del mes de diciembre de 2024, siendo las 12:00 p.m, reunidos en el Auditorio de la Escuela Profesional de Ingeniería de Minas, bajo la presidencia del MSc. Ing José Ernesto ESTRADA CÁRDENAS y los miembros; Mg. Juan Pablo VALVERDE CUEVA y Mg. José Luis CONDORI CONDORI, actuando como secretario docente el MSc. Ing. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO, para proceder a la sustentación de tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática, del bachiller en Ciencias Físico Matemáticas:

**Nelson QUISPE CUBA**

Quien presentó la tesis denominada:

**Existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov Clásico**

Los señores miembros del jurado luego de expuesto la tesis y absueltas las preguntas, delibera y lo declaran:

#### APROBADO CON NOTA DIECISIETE

Siendo las 01:40 p.m. del día 13 de diciembre de 2024, culmina el acto de sustentación de tesis, y en conformidad a lo actuado los miembros del jurado firmamos al pie del presente.

MSc. Ing José Ernesto ESTRADA CÁRDENAS  
Presidente

Mg. Juan Pablo VALVERDE CUEVA  
Miembro

Mg. José Luis CONDORI CONDORI  
Miembro

MSc. Ing. kelvis BERROCAL ARGUMEDO  
Secretario docente de la FIMGC

cc:

Archivo



UNSCH

FACULTAD DE  
**INGENIERÍA**  
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL



## CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 003-2025-JAHQ-FIMGC/UNSCH

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 697-2024-FIMGC -D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

**Nombres y Apellidos** : QUISPE CUBA, NELSON.  
**Escuela Profesional** : CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.  
**Título de la Tesis** : Existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov Clásico  
**Evaluación de la Originalidad** : 10% Índice de Similitud.  
**Identificador de la entrega** : 2641663155.

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 11 de abril del 2025.

Dr. JUAN ALFREDO HUAMANCHAQUI QUISPE  
DNI N°: 41764585

# Existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación parcialmente no- local en los espacios de Besov Clásico

*por* NELSON QUISPE CUBA

---

**Fecha de entrega:** 10-abr-2025 01:11p.m. (UTC-0500)

**Identificador de la entrega:** 2641663155

**Nombre del archivo:** TESIS.pdf (451.51K)

**Total de palabras:** 18545

**Total de caracteres:** 81687

# Existencia, unicidad y dependencia continua de la solución de una ley de conservación parcialmente no-local en los espacios de Besov Clásico

## INFORME DE ORIGINALIDAD

10%

INDICE DE SIMILITUD

10%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

2%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

## FUENTES PRIMARIAS

1	<a href="https://repositorio.unsa.edu.pe">repositorio.unsa.edu.pe</a> Fuente de Internet	5%
2	Submitted to Universidad de Málaga - Tii Trabajo del estudiante	1%
3	<a href="http://www.repositorio.unicamp.br">www.repositorio.unicamp.br</a> Fuente de Internet	1%
4	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	1%
5	<a href="http://bibdigital.epn.edu.ec">bibdigital.epn.edu.ec</a> Fuente de Internet	<1%
6	<a href="http://repositorio.unicordoba.edu.co">repositorio.unicordoba.edu.co</a> Fuente de Internet	<1%
7	Vigo Ingar, Katia. "Estudio local de la ecuacion de Korteweg-De Vries modificada II.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2020	<1%

---

8	<a href="https://noesis.uis.edu.co">noesis.uis.edu.co</a> Fuente de Internet	<1 %
9	Submitted to Universidad de Cundinamarca Trabajo del estudiante	<1 %
10	<a href="https://doczz.es">doczz.es</a> Fuente de Internet	<1 %
11	<a href="https://qdoc.tips">qdoc.tips</a> Fuente de Internet	<1 %
12	<a href="https://www.coursehero.com">www.coursehero.com</a> Fuente de Internet	<1 %
13	Luca Fanelli, Junyong Zhang, Jiqiang Zheng. "Uniform Resolvent Estimates for Critical Magnetic Schrödinger Operators in 2D", International Mathematics Research Notices, 2023 Publicación	<1 %
14	Yolanda Silvia Santiago Ayala. "EL LEMA DE NAKAO Y ALGUNAS APLICACIONES", Pesquimat, 2014 Publicación	<1 %
15	<a href="https://dokumen.pub">dokumen.pub</a> Fuente de Internet	<1 %

---

---

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias

< 30 words

Excluir bibliografía

Activo