

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL
DE HUAMANGA**

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



TESIS:

**"Análisis y Aplicaciones del Método de las Series de Taylor
Fraccionarias en Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias"**

Para optar el título profesional de:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

PRESENTADO POR:

Bach. Angel Luis LLANTOY LAURA

ASESOR:

M.Sc. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO

AYACUCHO - PERÚ

2025

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a mi Madre en el cielo.

A mi Padre

A mis hermanos que me ayudaron en el trayecto de mi
carrera.

Angel Ll.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento:

- A Dios, por darme la fuerza de voluntad que me hizo seguir adelante.
- Al Profesor Daúl Paiva, mi asesor, por su apoyo en esta tesis.
- A toda mi familia y amigos por su apoyo durante mi formación profesional.

RESUMEN

La presente investigación tiene por objetivo utilizar las series de Taylor fraccionarias, como una extensión del método clásico de Taylor, para aproximar funciones en el ámbito de las ecuaciones diferenciales fraccionarias. Mientras que en el método clásico de Taylor se consideran derivadas enteras de una función, en el método de Taylor fraccionario se consideran derivadas fraccionarias, lo que permite abordar problemas con memoria fraccionaria y comportamientos no locales. Aquí presentamos un enfoque para resolver (aproximadamente) una clase especial de ecuaciones integrodiferenciables fraccionarias lineales (Fredholm y Volterra), esto será siguiendo las ideas del trabajo de (Huang et al., 2011). Se mostrará que este método proporciona una solución simple para ese tipo de ecuaciones diferenciales lineales. Con algunos ejemplos de aplicación se demostrará la eficiencia y la precisión del método.

Palabras Clave

Series de Taylor fraccionarias, Ecuaciones diferenciales fraccionarias, Derivadas fraccionarias.

ABSTRACT

The objective of this research is to use fractional Taylor series, as an extension of the classical Taylor method, to approximate functions in the scope of fractional differential equations. While in the classical Taylor method integer derivatives of a function are considered, in the fractional Taylor method fractional derivatives are considered, which allows problems with fractional memory and non-local behavior to be addressed. Here we present an approach to solve (approximately) a special class of linear fractional integrable equations (Fredholm and Volterra), this will be following the ideas of the work of (Huang et al., 2011). It will be shown that this method provides a simple solution for such linear differential equations. With some application examples the efficiency and precision of the method will be demonstrated.

Keywords

Fractional Taylor series, Fractional differential equations, Fractional derivatives.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	vi
Abstract	vii
Índice general	viii
Índice de cuadros	xi
Índice de figuras	xii
Introducción	xiv
I. Planteamiento del problema	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Delimitación de la investigación	3
1.2.1. Espacial	3
1.2.2. Social	4
1.2.3. Temporal	4
1.3. Problema de investigación	5
1.3.1. Problema general	5
1.3.2. Problema específico	5
1.4. Objetivos	6
1.4.1. Objetivo general	6
1.4.2. Objetivo específico	6
1.5. Hipótesis	6
1.5.1. Hipótesis general	6
1.5.2. Hipótesis específica	6
1.6. Diseño metodológico	7
1.6.1. Tipo de investigación	7
1.6.2. Nivel de investigación	7
1.6.3. Método de investigación	8
1.6.4. Diseño de investigación	8

1.7. Población y muestra	8
1.7.1. Población	8
1.7.2. Muestra	8
II. Marco Teórico	9
2.1. Antecedentes del Problema	9
2.1.1. Antecedentes Internacionales	9
2.1.2. Antecedentes Nacionales	11
2.1.3. Antecedentes Locales	11
2.2. Bases teóricas	11
2.2.1. Algo de historia	11
2.2.2. Funciones especiales: Gamma, Beta, Mittag-Leffler	17
2.2.3. Derivadas e integrales fraccionarias	23
2.2.4. Transformada de Laplace de derivadas fraccionarias	37
2.2.5. Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario	39
2.2.6. Series de Taylor Clásicas	48
2.3. MARCO CONCEPTUAL	58
2.3.1. Series de Taylor Fraccionarias	58
2.3.2. Fórmula de Taylor generalizado	61
2.3.3. Taylor generalizado como extensión de Taylor clásico	62
2.3.4. Análisis de convergencia	63
2.3.5. Error en la fórmula de Taylor generalizada	67
2.3.6. Uso de la fórmula generalizada de Taylor	69
III. Materiales y Métodos	78
3.1. Memoria fraccionaria	78
3.1.1. Ejemplo de memoria fraccionaria	79
3.1.2. Efecto de la memoria fraccionaria	79
3.2. Método de diferencias finitas centrales	82
3.3. Modelo: Ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo	83
3.3.1. Derivada de Caputo en el tiempo	84
3.3.2. Método de Galerkin (para tiempo fraccionario)	84
3.3.3. Método de colocación (para tiempo fraccionario)	85
3.3.4. Método de Taylor Fraccionario	86
3.4. Modelo: Difusión fraccionaria en el espacio	87
3.4.1. Derivada de Riesz (simétrica en espacio)	87
3.4.2. Método de Galerkin (espacial)	87
3.4.3. Método de colocación (espacial)	87

3.4.4.	Comparación metodológica	87
3.4.5.	Ejemplo Avanzado: Ecuación de difusión fraccionaria	88
IV.	Resultados y Discusión	95
4.1.	Ecuación de difusión fraccionaria	95
4.1.1.	Problema considerado	95
4.1.2.	Resultados numéricos	96
4.2.	Ecuación de Volterra fraccionaria	98
4.2.1.	Problema considerado	98
4.2.2.	Resultados numéricos	98
4.3.	Ecuación de Fredholm fraccionaria	100
4.3.1.	Problema considerado	100
4.3.2.	Resultados numéricos	100
4.4.	Análisis comparativo general	102
4.4.1.	Tabla de resumen de errores relativos	102
	Conclusiones	105
	Recomendaciones	106
	Anexos	107
7.1.	Demostración del Teorema (7.1.1).	107
7.2.	Demostración del Teorema (2.3.4).	110
7.3.	Programa Mittag–Leffler.	112
7.4.	Programa Fredholm–Colocación.	113
7.5.	Programa Fredholm–Galerkin.	114
7.6.	Programa Fredholm–Taylor Fraccionario.	116
7.7.	Programa Volterra–Colocación.	116
7.8.	Programa Volterra–Galerkin.	117
7.9.	Programa Volterra–Taylor Fraccionario.	119

ÍNDICE DE CUADROS

2.1.	Comparación de Taylor orden 2 y 4.	52
2.2.	Valores aproximados de $E_\alpha(x)$, $N = 20$	69

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1.	La función Gamma: $\Gamma(x)$, para $-3.1 \leq x \leq 3.9$	18
2.2.	La función Gamma en el plano complejo: $ \Gamma(x + iy) $, $-3.5 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2.5$	18
2.3.	La recíproca de la función Gamma y la función $\frac{x^{\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}}e^x$	19
2.4.	La función Beta: $\mathfrak{B}(x, y)$, para $-2 \leq x, y \leq 5$	20
2.5.	$ \mathfrak{B}(x + iy, -3.4) $, para $-6 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$	21
2.6.	Función de Mittag-Leffler $E_{\alpha, \beta}$	22
2.7.	$E_{\alpha, \beta}$, $0 < \alpha \leq 4.9$, $\beta = 4$, $-1 \leq t \leq 3$	22
2.8.	$E_{\alpha, \beta}$, $\alpha = 3.5$, $0 < \beta \leq 9$, $-1 \leq t \leq 6$	23
2.9.	Gráficas de $(I_{0+}^{\alpha} t^3)(x)$ para $0 < \alpha < 1$	36
2.10.	Gráficas de $(D_{0+}^{\alpha} t^3)(x)$ para $0 < \alpha < 1$	36
2.11.	Solución exacta de (2.102) con sus aproximaciones de Taylor, órdenes 2 y 4.	53
2.12.	Convergencia limitada en problemas no analíticos	55
2.13.	Comportamiento singular	56
2.14.	Dependencia no global	57
2.15.	Aproximación de $f(x) = E_{\alpha}(x)$, $a = 0$ y $N = 20$	68
3.1.	Efecto memoria en la EDF $D_t^{\alpha} = -\lambda y(t)$	82
3.2.	Difusión fraccionaria, para $\alpha = 0.8$	89
3.3.	Difusión fraccionaria, para $\alpha = 0.8$	89
3.4.	Evolución para $\alpha = 0.8$	90
3.5.	Comparación de $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$	91
3.6.	Mapas de calor, para $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$	91
3.7.	Cascada para $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$	92
3.8.	Solución con Método de Galerkin espectral.	93
3.9.	Solución con Método de Colocación.	94

3.10. Solución con Método de Taylor fraccionario.	94
4.1. Difusión fraccionaria (Taylor, $\alpha = 0.75$).	96
4.2. Difusión fraccionaria (Galerkin, $\alpha = 0.75$).	97
4.3. Difusión fraccionaria (Colocación).	97
4.4. Volterra fraccionaria (Taylor, $\alpha = 0.75$).	99
4.5. Volterra fraccionaria (Galerkin, $\alpha = 0.75$).	99
4.6. Volterra fraccionaria (Colocación).	100
4.7. Fredholm fraccionaria (Taylor, $\alpha = 0.75$).	101
4.8. Fredholm fraccionaria (Galerkin, $\alpha = 0.75$).	101
4.9. Fredholm fraccionaria (Colocación).	102
4.10. Comparación de métodos.	104

INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales fraccionarias (EDF) han emergido como una herramienta poderosa en la modelización de fenómenos complejos que no pueden ser abordados adecuadamente mediante ecuaciones diferenciales de orden entero. Estas EDF permiten obtener comportamientos de sistemas con memoria y propiedades no locales, características que son esenciales en campos como la física, la biología, la economía, y la ingeniería (Podlubny, 1999). Sin embargo, la solución analítica de estas EDF suele ser complicada, lo que ha motivado el desarrollo de métodos numéricos avanzados.

Las series de Taylor fraccionarias han ganado atención significativa por su capacidad para aproximar soluciones de EDF con alta precisión. Este método extiende el enfoque clásico de las series de Taylor, basado en derivadas enteras, incorporando derivadas de orden fraccionario (Kilbas et al., 2006). De esta manera, las series de Taylor fraccionarias permiten abordar problemas con comportamientos no locales y memoria fraccionaria, crucial en la descripción de procesos físicos y biológicos que exhiben dinámicas complejas.

En particular, este trabajo se centra en la aplicación del método de las series de Taylor fraccionarias para resolver ecuaciones integrodiferenciables fraccionarias lineales, como las ecuaciones de Fredholm y Volterra. Siguiendo las ideas planteadas por (Huang et al., 2011), se demostrará que este enfoque proporciona soluciones simples y efectivas para este tipo de ecuaciones, lo que lo convierte en una herramienta valiosa para los investigadores en el área.

El presente estudio no solo explora la teoría detrás de este método, sino que también presenta ejemplos de aplicación que evidencian su eficiencia y precisión. Así, se pretende contribuir al avance del conocimiento en la solución de EDF y su potencial aplicación en diversas disciplinas científicas.

La estructura de esta tesis se organiza de la siguiente manera:

Capítulo 2: Marco Teórico. Este capítulo introduce los conceptos fundamentales relacionados con las EDF y las series de Taylor fraccionarias. Se abordan las bases teóricas necesarias para comprender el método y su relevancia en la resolución de problemas con memoria fraccionaria.

Capítulo 3: Desarrollo del Método. En este capítulo se presenta en detalle la extensión del método de Taylor al contexto fraccionario, explicando su formulación y las técnicas numéricas asociadas. Se discuten también las con-

diciones bajo las cuales el método es aplicable y sus limitaciones.

Asimismo se dan Aplicaciones y Ejemplos. Aquí se aplican las series de Taylor fraccionarias a la resolución de ecuaciones integrodiferenciables fraccionarias lineales, con énfasis en las ecuaciones de Fredholm y Volterra. Se presentan ejemplos detallados que ilustran la eficiencia y precisión del método.

Capítulo 4: Resultados y Discusión. Este capítulo analiza los resultados obtenidos en los ejemplos del capítulo anterior. Se evalúa la precisión del método en comparación con otros métodos numéricos, y se discuten sus posibles aplicaciones en diversas áreas científicas.

Finalmente se darán las Conclusiones y Recomendaciones, destacando las principales contribuciones del trabajo. Además, se sugieren posibles líneas de investigación futura que podrían explorar mejoras en el método o su aplicación a otros tipos de ecuaciones diferenciales fraccionarias.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario (EDF) han ganado considerable atención en las últimas décadas debido a su capacidad para modelar fenómenos que no pueden ser descritos adecuadamente por ecuaciones diferenciales de orden entero. Estas ecuaciones permiten capturar los efectos de memoria y las propiedades no locales, lo cual es esencial en el análisis de sistemas complejos en áreas como la dinámica de fluidos, la biología matemática, la ingeniería de materiales y la economía (Podlubny, 1999). Sin embargo, a pesar de su relevancia teórica y práctica, la resolución de EDF sigue siendo un desafío significativo.

Uno de los principales problemas radica en la complejidad inherente de estas ecuaciones, que a menudo no tienen soluciones analíticas exactas. Las soluciones analíticas, cuando existen, suelen ser complicadas y limitadas a casos muy específicos, lo que reduce su aplicabilidad en situaciones reales. Como re-

sultado, los investigadores y profesionales dependen cada vez más de métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas (Mainardi, 2010).

Entre los métodos numéricos, las series de Taylor clásicas han sido ampliamente utilizadas para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Sin embargo, su extensión a derivadas fraccionarias no ha sido plenamente explotada, lo que representa una limitación significativa en el análisis de problemas con características de memoria fraccionaria y comportamientos no locales (Diethelm, 2010). Además, muchos de los métodos numéricos existentes para EDF requieren un alto costo computacional y pueden ser ineficientes para ecuaciones complejas o de alto orden, como las ecuaciones integrodiferenciables fraccionarias lineales de Fredholm y Volterra (Huang et al., 2011).

Esta realidad problemática se ve reflejada en la dificultad para modelar de manera precisa ciertos fenómenos físicos y biológicos que dependen de la historia previa del sistema, como es el caso de la difusión anómala, la propagación de ondas en medios viscoelásticos, y la dinámica poblacional con efectos de memoria. La falta de métodos eficientes y generalizables para la solución de estas ecuaciones impide una comprensión más profunda y precisa de estos fenómenos, lo que, a su vez, limita el desarrollo de aplicaciones tecnológicas y científicas basadas en modelos fraccionarios.

En este contexto, el desarrollo de métodos más eficientes y accesibles, como el método de las series de Taylor fraccionarias, es de suma importancia. Este método no solo busca superar las limitaciones de las series de Taylor clásicas, sino que también pretende ofrecer una herramienta versátil y eficaz para la solución de una amplia gama de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Al abordar esta problemática, se espera contribuir a la mejora de las técnicas de modelización y a la expansión del uso de EDF en diversas áreas del conocimiento.

1.2. Delimitación de la investigación

1.2.1. Espacial

La delimitación espacial se refiere al ámbito geográfico o al contexto específico en el que se lleva a cabo la investigación.

En el caso de este estudio, el enfoque espacial está centrado en la aplicación del método de las series de Taylor fraccionarias en problemas matemáticos y físicos, sin restricción a una ubicación geográfica específica, ya que las ecuaciones diferenciales fraccionarias tienen aplicaciones globales. Según Hernández Sampieri et al. (2014), la delimitación espacial es fundamental para precisar el entorno donde se aplicarán los resultados del estudio, lo que permite contextualizar las conclusiones dentro de un marco espacial definido

(Hernández Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P., 2014), *Metodología de la investigación (6ta ed.)*. McGraw-Hill.

1.2.2. Social

La delimitación social se refiere a la población o el grupo específico de interés que se verá afectado o beneficiado por los resultados de la investigación.

En este estudio, la delimitación social abarca a la comunidad científica y académica, especialmente aquellos investigadores y profesionales en matemáticas aplicadas, física y ciencias de la ingeniería, que se ocupan de la modelización de fenómenos complejos mediante ecuaciones diferenciales fraccionarias. Situándonos en nuestra universidad, específicamente para estudiantes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico-Matemáticas e Ingenierías.

Esta delimitación es clave para entender a quién va dirigido el estudio y cómo sus resultados pueden ser aplicados en un contexto práctico, como lo mencionan (Sampieri et al., 2014), (Hernández Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P., 2014).

1.2.3. Temporal

La delimitación temporal se refiere al periodo específico durante el cual se desarrolla la investigación o al marco temporal de los datos utilizados.

Este estudio se enfoca en el desarrollo y aplicación del método de las series de Taylor fraccionarias desde sus primeros usos hasta las investigaciones más recientes, cubriendo un lapso temporal que va desde la década de 1990, cuando las ecuaciones diferenciales fraccionarias comenzaron a ganar popularidad, hasta el presente. De acuerdo con (Sabino, C. 1992), la delimitación temporal permite establecer un horizonte de tiempo claro, asegurando que la investigación se mantenga dentro de un marco cronológico relevante y manejable (Sabino, C., 1992), *El proceso de investigación*.

1.3. Problema de investigación

1.3.1. Problema general

¿El método de las series de Taylor fraccionarias pueden aplicarse para abordar ecuaciones diferenciales fraccionarias que involucren operadores de derivadas fraccionarias?

1.3.2. Problema específico

¿Cómo puede el método de las series de Taylor fraccionarias ser utilizado para resolver ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo y cuáles son sus limitaciones y ventajas en comparación con otros métodos?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Investigar la aplicabilidad y efectividad del método de las series de Taylor fraccionarias para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias que involucren operadores de derivadas fraccionarias.

1.4.2. Objetivo específico

Evaluar la aplicabilidad del método de las series de Taylor fraccionarias en la resolución de ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo, comparando su precisión y eficiencia con métodos tradicionales como el método de Galerkin, el método de collocation, el método de cuadraturas y el método de iteración de Neumann.

1.5. Hipótesis

1.5.1. Hipótesis general

El método de las series de Taylor fraccionarias es una herramienta efectiva y aplicable para resolver ecuaciones diferenciales fraccionarias que involucran operadores de derivadas fraccionarias.

1.5.2. Hipótesis específica

El método de las series de Taylor fraccionarias proporciona una mayor precisión y eficiencia en la resolución de ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo en comparación con métodos tradicionales como el método de Galerkin y el

método de colocación, el método de cuadraturas y el método de iteración de Neumann.

1.6. Diseño metodológico

1.6.1. Tipo de investigación

Es del tipo documental, ya que el enfoque principal es revisar y analizar la literatura existente para construir un marco teórico sobre el uso del método de las series de Taylor fraccionarias.

Según (Quivy, R., & Van Campenhoudt, L., 2005), en su libro “Manual de investigación en ciencias sociales”, explican que la investigación documental implica la revisión y análisis de documentos existentes para construir un marco teórico y comprender mejor el fenómeno de estudio.

Igualmente (Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S., 2000) en su manual “Handbook of Qualitative Research”, describen a la investigación documental como un método para examinar y sintetizar el conocimiento existente a través de la revisión y análisis de documentos.

1.6.2. Nivel de investigación

(Nivel descriptivo) Tiene por finalidad de explicar el comportamiento de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario en función de las series de Taylor fraccionarias, con la relación de (causa–efecto).

1.6.3. Método de investigación

El método de investigación es inductivo y deductivo, pues como señala (Sampieri, H., 2010) en su libro: Metodología de la Investigación, *“la investigación se basa en fuentes bibliográficas existentes en libros, tesis, artículos científicos e información por internet”*.

1.6.4. Diseño de investigación

(Diseño no experimental), la variable (el método de las series de Taylor fraccionarias) se aplica para hallar una aproximación a una función que es la solución de una ecuación diferencial de orden fraccionaria.

1.7. Población y muestra

1.7.1. Población

De acuerdo a la naturaleza del trabajo de investigación no se considera la población.

1.7.2. Muestra

No se considera.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del Problema

2.1.1. Antecedentes Internacionales

- (Bekir et al., 2015), en su artículo “Solving nonlinear fractional differential equations using exp-function and (G/G') -expansion methods”, emplean el método de la función *exp* y el método de expansión $(\frac{G}{G'})$ y dan un enfoque para resolver Ecuaciones diferenciales de orden no entero y no lineales. Usan las derivadas fraccionarias en el sentido de Rieman–Liouville modificado. Ellos obtienen muchas soluciones analíticas exactas, incluidas soluciones de funciones hiperbólicas y soluciones de funciones trigonométricas. Igualmente concluyen que los métodos son muy efectivos y convenientes para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales de orden fraccionario.
- (Ahmed et al., 2015), en su artículo “Approximate Solution of Class of Nonlinear Fractional Integro-Differential Equations Using Bernstein

Polynomial and Shifted Legendre Polynomials”, comparan dos métodos polinomiales, el **método polinomial de Bernstein (BPM)** y el **método de los polinomios de Legendre desplazado (SLPM)**, a fin de obtener una solución aproximada a una ecuación diferencial no lineal fraccionaria integrodiferencial de Volterra y a las ecuaciones integro-diferencial de Fredholm. Concluyen, que el método SLPM es mejor que el método de BPM.

- (Didgar et al., 2020), en su artículo “An Approximate approach for systems of Fractional integro-differential equations based on Taylor expansion”, presentan un proceso eficiente para resolver sistemas lineales integro diferenciales fraccionarios, aplicando la expansión de Taylor. Para ello, utilizan el polinomio de Taylor de orden m para funciones desconocidas y con el método de integración, convierten el sistema dado de ecuaciones integro-diferenciales fraccionarias en un sistema de ecuaciones lineales con respecto a funciones desconocidas y sus derivadas. Aplica la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville, también analizan los errores y mediante ejemplos muestra la precisión y eficiencia del método indicado.
- (Didgar et al., 2019), en su trabajo “Application of Taylor Expansion for Fredholm Integral Equations of the First Kind”, proporcionan una aplicación de un nuevo enfoque de la expansión de Taylor para resolver ecuaciones integrales de Fredholm de primer tipo. Lo hacen empleando

el polinomio de Taylor de grado ν^0 de función desconocida en un punto arbitrario y un método de integración tal que la ecuación integral de Fredholm de primer tipo se convierte en un sistema de ecuaciones lineales con respecto a las incógnitas y sus derivadas hasta el orden ν^0 . Presentan seis ejemplos con los cuales hacen el análisis de errores y verifican la eficacia y precisión del enfoque propuesto.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

En el proceso de la búsqueda de antecedentes nacionales, no se ha hallado investigaciones realizadas sobre el tema.

2.1.3. Antecedentes Locales

Igualmente, no se encontraron investigaciones sobre el tema.

2.2. Bases teóricas

2.2.1. Algo de historia

2.2.1.1. *Definición y Origen de las Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias*

Sabemos que el operador diferencial $D^n f(x)$, cuando n es entero positivo, representa la derivada de $f(x)$, n - veces, sin embargo nos preguntamos qué sentido tendría si n fuera, por ejemplo, racional como: $D^{1/2} f(x)$.

Esta pregunta surge por primera vez en una carta entre Leibniz y L'Hôpital, en 1695. Es decir que esa inquietud tiene más de 300 años. De hecho, el cálculo

fraccional es prácticamente tan antiguo como el cálculo diferencial. Además, su nombre tiene origen histórico, pues fue así como se definió, para orden racional, pero hoy en día no se hace restricción alguna (hasta de orden complejo).

2.2.1. Definición. Si $q, n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ entonces

$$\left[D^{\frac{n}{q}} + a_1 D^{\frac{n-1}{q}} + \dots + a_{n-1} D^{\frac{1}{q}} + a_0 D^0 \right] y(t) = 0 \quad (2.1)$$

es una **ecuación diferencial fraccionaria (EDF)** con coeficientes constantes y homogénea de orden (n, q) . ■

2.2.1. Ejemplo. La ecuación $\left[D^1 + aD^{\frac{1}{2}} + bD^0 \right] y(t) = 0$ es una EDF de orden $(2, 2)$. ■

Veamos ahora un poco de su historia.

- **Inicios: Leibniz y la Idea de Derivada Fraccionaria.**

El concepto de derivada fraccionaria fue sugerido por primera vez en 1695 por Gottfried Wilhelm Leibniz en una correspondencia con Guillaume de L'Hôpital. En esta, Leibniz especuló sobre la posibilidad de extender el operador diferencial a órdenes fraccionarios, proponiendo una generalización del concepto clásico de derivada. Esta idea, aunque en su momento fue considerada más una curiosidad matemática, sembró las semillas del cálculo fraccionario.

- **Siglo XVIII: Euler y la Formalización de la Derivada Fraccionaria**

En el siglo XVIII, Leonhard Euler hizo contribuciones significativas al cálculo fraccionario. Euler exploró las series infinitas y la función Gamma, que son fundamentales para la definición formal de las derivadas fraccionarias. Utilizando la función Gamma, es posible definir la derivada de orden fraccionario α de una función $f(x)$ como:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - t)^{n-\alpha-1} f(t) dt \quad (2.2)$$

donde n es un número entero tal que $n - 1 < \alpha < n$ y $\Gamma(\cdot)$ es la función Gamma de Euler.

La fórmula (2.2) se obtiene teniendo en cuenta la integral fraccionaria dada por Riemann–Liouville (2.4). Lo que se buscaba era extender el concepto de derivada e integral a órdenes no enteros. Como la tradicional derivada de orden entero n se puede escribir como una iteración de derivación, la idea para el caso fraccionario fue “invertir” el proceso: primero se toma una integral “fraccionaria” y luego se deriva el número de veces necesario para obtener el orden deseado α , donde $n - 1 < \alpha < n$. Así, para una derivada de orden fraccionario α (no entero), se define como la derivada entera más proxima “por encima” (n , tal que $n - 1 < \alpha < n$) aplicada a la integral de orden $n - \alpha$:

$$D^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} (I^{n-\alpha} f(x)) \quad (2.3)$$

y reemplazando $I^{n-\alpha}$ en (2.4).

- **Siglo XIX: Contribuciones de Liouville, Riemann y Abel**

En el siglo XIX, Joseph Liouville (1832) dio un gran paso adelante al proporcionar una definición más rigurosa de las derivadas e integrales de orden fraccionario. Liouville definió la integral fraccionaria utilizando series infinitas, de exponenciales, y extendió el cálculo diferencial a órdenes no enteros, lo hizo definiendo la q -ésima derivada de tales series operando término a término, como si q fuera entero positivo.

Bernhard Riemann (1853) continuó este trabajo y desarrolló la integral de Riemann–Liouville, una formulación que es fundamental para el cálculo fraccionario:

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad (2.4)$$

donde $\alpha > 0$. Propuso una definición diferente que involucraba integrales definidas y las aplicó a series de potencias con exponentes no enteros. Grünwald y Krug fueron quienes unieron los resultados de Liouville y de Riemann. Grünwald (1867), preocupado por las restricciones del punto de vista de Liouville, tomó como punto de partida la definición de derivada como el límite de un cociente de diferencias y obtuvo fórmulas de integrales definidas para la derivada de orden q . Krug (1890), trabajando con la fórmula integral de Cauchy para derivadas ordinarias, probó que la integral definida de Riemann demostró que la integral definida de Riemann tenía que interpretarse como si tuviera un límite inferior finito, mientras que la definición de Liouville, en la que no aparecía ningún

límite inferior distinguible, correspondía a un límite inferior $-\infty$. Esta integral es la base para definir las derivadas fraccionarias en términos del operador de Riemann-Liouville.

En paralelo, Niels Henrik Abel realizó estudios sobre ecuaciones integrales que, aunque no directamente enfocadas en cálculo fraccionario, tuvieron un impacto significativo en su desarrollo. Abel investigó ecuaciones integrales de tipo fraccionario, como la ecuación integral de Abel de primer tipo:

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$$

donde $0 < \alpha < 1$. Esta ecuación es un caso particular de ecuaciones integrodiferenciales y se puede resolver utilizando herramientas del cálculo fraccionario, lo que conecta directamente su trabajo con el desarrollo de las ecuaciones diferenciales fraccionarias.

- **Siglo XX y XXI: Expansión y Aplicaciones**

Las contribuciones notables dadas por Weyl (1917), Hardy (1917), Hardy y Littlewood (1925, 1928, 1932), Kobe (1940) y Kuttner (1953), que examinaron algunas propiedades bastante especiales, pero naturales, de diferentes integrales de funciones pertenecientes a la clase Lebesgue y de Lipschitz. Erdélyi (1939, 1940, 1954) y Osler (1970) dieron definiciones de diferentes integrales con respecto a funciones arbitrarias, y Post (1930) usó cocientes de diferencias para definir diferenciación

generalizada para operadores $f(\mathbf{D})$, donde $\mathbf{D}$ denota diferenciación y f es una función restringida adecuadamente. Riesz (1949) desarrolló una teoría de integración fraccional para funciones de más de una variable. Erdélyi (1964), aplicó el cálculo fraccional a ecuaciones integrales y Higgins (1967) usó operadores integrales fraccionarios para resolver ecuaciones diferenciales. Otras aplicaciones: En reología (Scott Blair *et al.*, 1947; Shermergor, 1966; Scott Blair, 1947, 1950; Scott Blair y Caffyn, 1949; Graham *et al.*, 1961). En electroquímica (Belavin *et al.*, 1964; Oldham, 1969; Oldham y Spanier, 1970; Grennes y Oldham, 1972). Para física química (Somorjai y Bishop, 1970) y problemas de transporte (Oldham, 1973; Oldham y Spanier, 1972). En el siglo XX, *las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario* encontraron aplicaciones en una amplia gama de campos, gracias al trabajo de matemáticos como Paul Lévy, quien vinculó el cálculo fraccionario con procesos estocásticos. Lévy introdujo el concepto de movimiento browniano fraccionario, lo que abrió nuevas áreas de investigación en física y finanzas.

Hoy en día, el cálculo fraccionario es una herramienta poderosa en la modelización de fenómenos con memoria y comportamientos no locales. Las ecuaciones diferenciales fraccionarias se aplican en la viscoelasticidad, la difusión anómala, la teoría de control, y muchas otras áreas. La capacidad de estas ecuaciones para capturar dinámicas complejas ha sido clave en su popularidad y desarrollo continuado.

2.2.2. Funciones especiales: Gamma, Beta, Mittag-Leffler

Definimos algunas funciones especiales que surgen en este contexto del cálculo fraccionario.

2.2.2. Definición. La función Gamma

Sea $\Re(z) > 0$, $t \in (0, \infty)$, la función Gamma está definida como (Odibat & Shawagfeh, 2007)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (2.5)$$

■

Algunas propiedades

- 1.) $\Gamma(1) = 1$.
- 2.) $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Si $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\Gamma(n+1) = n!$.
- 3.) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- 4.) Y dos importantes:

$$\textbf{Reflexión:} \quad \Gamma(-x) = \frac{-\pi \csc(\pi x)}{\Gamma(x+1)} \quad (2.6)$$

$$\textbf{Duplicación:} \quad \Gamma(2x) = \frac{4^x \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi}} \quad (2.7)$$

En el siguiente cuadro se dan algunos valores de $\Gamma(x)$. En la Figura (2.1) se muestra $\Gamma(x)$ en el plano real y en la Figura (2.2) en el plano complejo.

x	0.1	3	7.1	17.6π
$\Gamma(x)$	9.5135	2	868.957	7.42575×10^{71}

Figura 2.1: La función Gamma: $\Gamma(x)$, para $-3.1 \leq x \leq 3.9$.

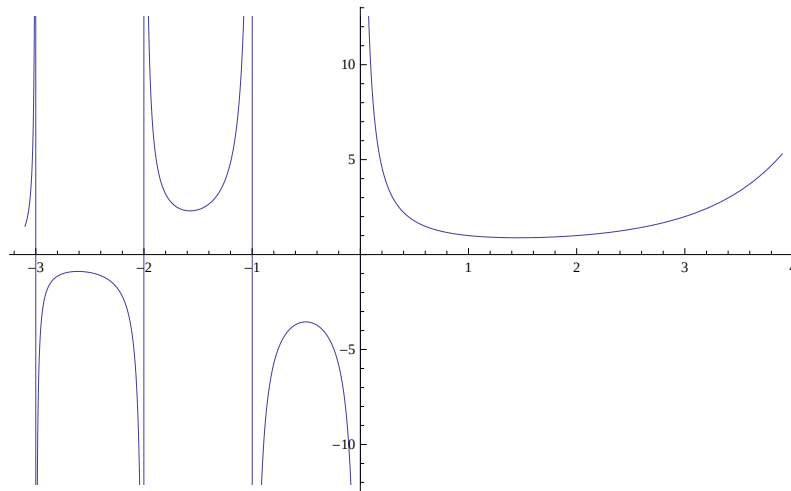
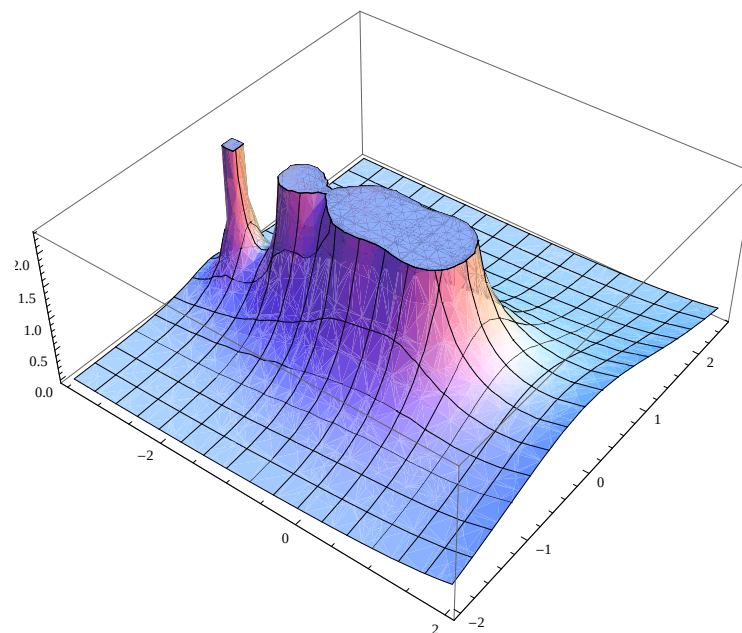


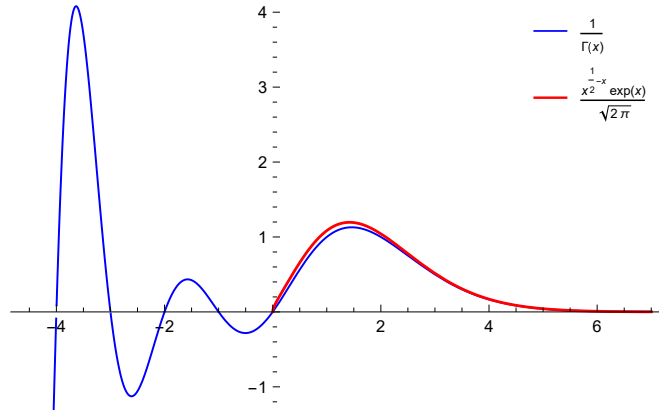
Figura 2.2: La función Gamma en el plano complejo: $|\Gamma(x + iy)|$, $-3.5 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2.5$.



El recíproco de la función gamma, $\frac{1}{\Gamma(x)}$, tiene un solo valor y es finito para todo $x > 0$. La Figura (2.3) muestra una gráfica de esta función. Observamos la alternancia continua de signos para argumentos negativos la tendencia asintótica a cero para x positivo grande, esto se describe por

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \sim \frac{x^{\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}} e^x = g(x), \quad x \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Figura 2.3: La recíproca de la función Gamma y la función $\frac{x^{\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}} e^x$.



2.2.3. Definición. La función Beta

Sean $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$, $t \in (0, 1)$, entonces la función Beta está definida como (Diethelm, 2010)

$$\mathfrak{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (2.9)$$

■

Propiedad: Sean $x, y \in \mathbb{C}$, $\Re(x) > 0$, $\Re(y) > 0$ entonces

$$\mathfrak{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (2.10)$$

Algunos valores exactos de la función Beta se dan en el siguiente cuadro.

En la Figura (2.4) y en la Figura (2.5) se muestran gráficas de la función Beta.

x	y	$\mathfrak{B}(x, y)$
1	1	1
2	1	$\frac{1}{2}$
2.5	π	0.0461649
$\ln 3.2$	$\sqrt{3}$	0.467101
e	1	0.367879
π	1	0.318310
$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	0.082710

Figura 2.4: La función Beta: $\mathfrak{B}(x, y)$, para $-2 \leq x, y \leq 5$.

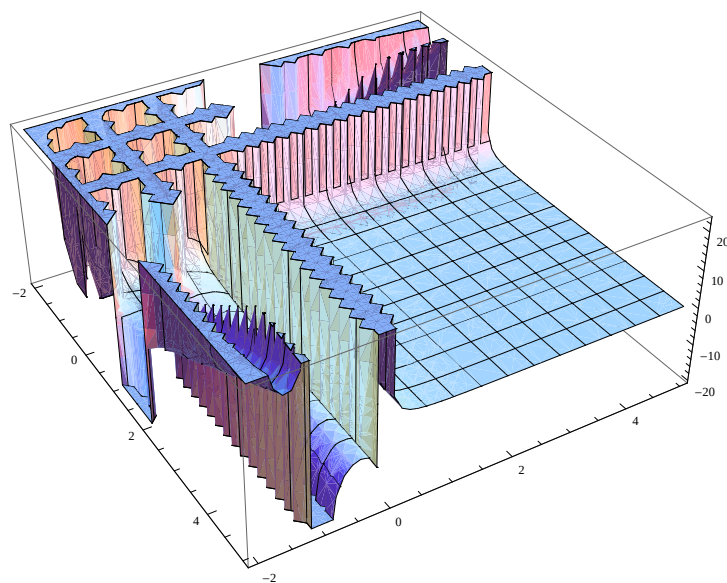
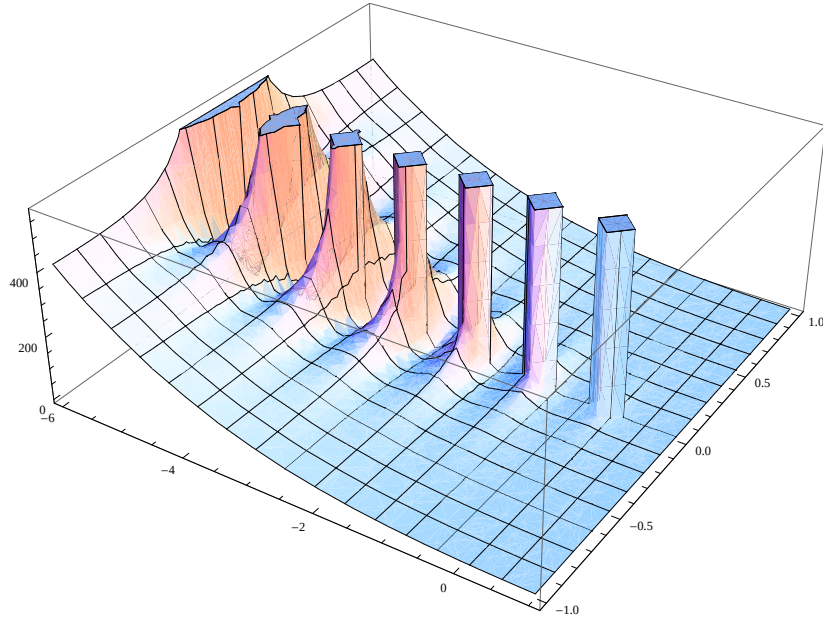


Figura 2.5: $|\mathfrak{B}(x + iy, -3.4)|$, para $-6 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.



La función de Mittag-Leffler, (M-L), está relacionada con los operadores fraccionarios, y aparece en la solución de muchas ecuaciones diferenciales. La función de M-L es una generalización de la función exponencial que fue introducida por el matemático sueco G. M. Mittag-Leffler en 1903 ([Mainardi, 2010](#)).

$$E_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{C}) \quad (2.11)$$

$$E_1(t) = e^t; \quad E_2(t) = \cosh \sqrt{t}$$

Igualmente, la función de M-L *de dos parámetros* se define como ([Mainardi et al., 2020](#)):

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad (2.12)$$

En la Figura (2.6) está la función de M-L, ($k = 300$) y en la Figura (2.7) y en la Figura (2.8), las superficies generadas haciendo variar los parámetros.

Figura 2.6: Función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}$.

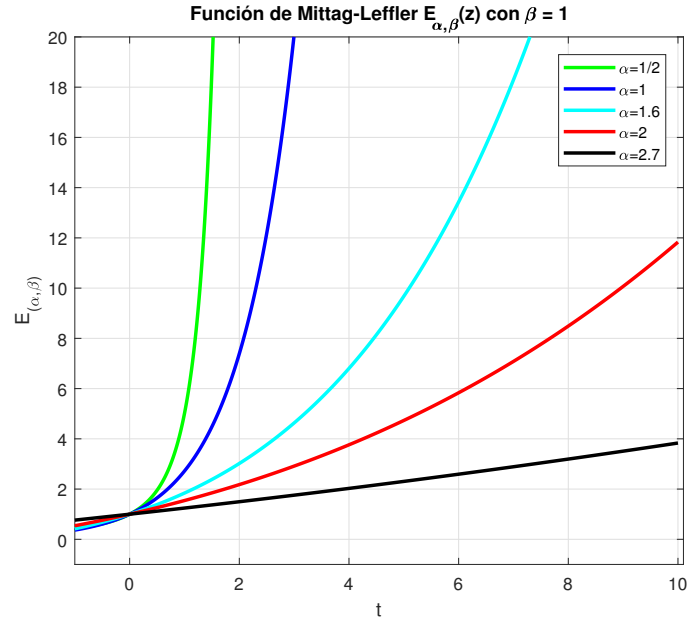


Figura 2.7: $E_{\alpha,\beta}$, $0 < \alpha \leq 4.9$, $\beta = 4$, $-1 \leq t \leq 3$.

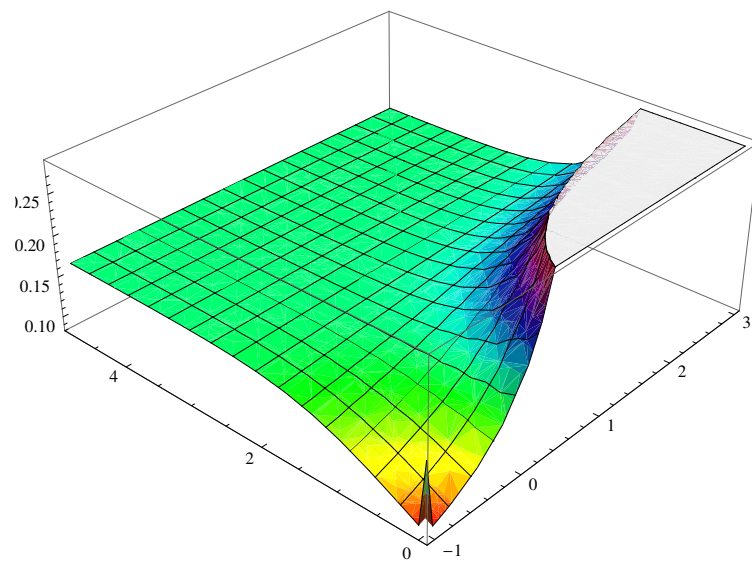
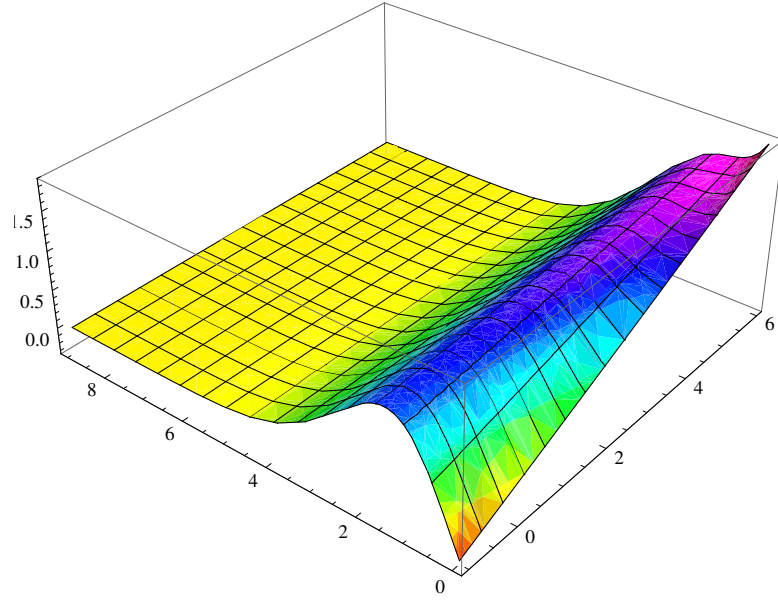


Figura 2.8: $E_{\alpha,\beta}$, $\alpha = 3.5$, $0 < \beta \leq 9$, $-1 \leq t \leq 6$.



2.2.3. Derivadas e integrales fraccionarias

2.2.4. Definición. *Integral Fraccionaria de Riemann–Liouville*

Sea $\Omega = [a, b]$, $(-\infty < a < b < \infty)$ un intervalo finito de $\mathbb{R}$. Las *integrales fraccionarias de Riemann–Liouville* (IFRL), $\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} f$ y $\mathbf{I}_{b-}^{\alpha} f$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ y $\Re(\alpha) > 0$ se definen como (Kilbas et al., 2006)

$$(\bullet) \quad (\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a, \quad (2.13)$$

$$(\bullet) \quad (\mathbf{I}_{b-}^{\alpha} f)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b. \quad (2.14)$$

■

Las integrales dadas en (2.13) y en (2.14) se llaman integrales fraccionarias *por la izquierda* y *por la derecha* respectivamente. Estos operadores son lineales.

Además cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_{a+}^n f)(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

y

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_{b-}^n f)(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^b dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^b f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (t-x)^{n-1} f(t) dt, \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Los operadores de integración fraccionaria de Riemann–Liouville tienen propiedades análogas a los de orden entero.

La Proposición (2.2.1) es una propiedad de Semigrupo o Ley de Exponentes.

2.2.1. Proposición. *Para $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, se cumple*

$$\mathbf{I}_{a+}^\alpha \left(\mathbf{I}_{a+}^\beta f(x) \right) = \mathbf{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) \quad (2.17)$$

■

Demostración.-

Considerando $\alpha > 0$ y $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}_{a+}^{\alpha} \left(\mathbf{I}_{a+}^{\beta} f(x) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-u)^{\beta-1} \cdot f(u) du \right] dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x \int_a^t (x-t)^{\alpha-1} \cdot (t-u)^{\beta-1} \cdot f(u) du dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \underbrace{\int_a^x \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot (t-u)^{\beta-1} \cdot f(u) dt du}_{\text{se cambió el orden de integración}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \cdot \left(\underbrace{\int_u^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot (t-u)^{\beta-1} dt}_{=\mathbf{I}} \right) du \\
 \implies \mathbf{I}_{a+}^{\alpha} \left(\mathbf{I}_{a+}^{\beta} f(x) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \cdot \mathbf{I} du \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Desarrollamos la integral

$$\mathbf{I} = \int_u^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot (t-u)^{\beta-1} dt$$

Para ello consideramos un cambio de variable:

$$x - \mathbf{t} = \mathbf{z} \implies d\mathbf{t} = -d\mathbf{z}, \quad \text{además} \quad \begin{cases} \mathbf{t} = u & \rightarrow & \mathbf{z} = x - u \\ \mathbf{t} = x & \rightarrow & \mathbf{z} = 0 \end{cases}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} &= \int_{x-u}^0 \mathbf{z}^{\alpha-1} \cdot (x - \mathbf{z} - u)^{\beta-1} \cdot (-d\mathbf{z}) \\
 &= \int_0^{x-u} \mathbf{z}^{\alpha-1} \cdot (x - u - \mathbf{z})^{\beta-1} d\mathbf{z} \\
 &= \int_0^{x-u} \mathbf{z}^{\alpha-1} \cdot (x - u)^{\beta-1} \cdot \left(1 - \frac{\mathbf{z}}{x - u} \right)^{\beta-1} d\mathbf{z}
 \end{aligned}$$

Ahora hacemos otro cambio de variable

$$\frac{z}{x-u} = \tau \implies dz = (x-u) d\tau, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} z=0 & \rightarrow \tau=0 \\ z=x-u & \rightarrow \tau=1 \end{cases}$$

Reemplazando y recordando la función Beta dada en (2.9):

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 ((x-u)\tau)^{\alpha-1} \cdot (x-u)^{\beta-1} (1-\tau)^{\beta-1} \cdot (x-u) d\tau \\ &= \int_0^1 (x-u)^{\alpha+\beta-1} \tau^{\alpha-1} \cdot (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= (x-u)^{\alpha+\beta-1} \cdot \int_0^1 \tau^{\alpha-1} \cdot (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= (x-u)^{\alpha+\beta-1} \cdot \mathfrak{B}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{al igual que la propiedad (2.10): } \mathfrak{B}(\alpha, \beta) &= \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}, \\ \implies I &= (x-u)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

La expresión (2.19) se reemplaza en (2.18):

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha} \left(I_{a+}^{\beta} f(x) \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \cdot I du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u) \cdot \left((x-u)^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right) du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta)} \cdot \int_a^x (x-u)^{\alpha+\beta-1} \cdot f(u) du \\ &= I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x) \end{aligned}$$

■

De la Proposición (2.2.1), se cumple la conmutatividad,

$$I_{a+}^{\alpha} \left(I_{a+}^{\beta} f \right) (x) = I_{a+}^{\beta} \left(I_{a+}^{\alpha} f \right) (x) \quad (2.20)$$

Igualmente, la convolución de funciones está relacionada con estos operadores.

2.2.2. Proposición. *Convolución*

La integral fraccionaria de Riemann–Liouville se puede expresar mediante una convolución de funciones:

$$(\mathbf{I}_{0+}^{\alpha} f)(x) = (\psi * f)(x) \quad (2.21)$$

donde $\psi(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. ■

Demostración.-

Sabemos que

$$(\psi * f)(x) = \int_0^x \psi(t) \cdot f(x-t) dt$$

Entonces

$$(\psi * f)(x) = \int_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot f(x-t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \cdot f(x-t) dt$$

Hacemos cambio de variable

$$\mathbf{u} = x - \mathbf{t} \implies d\mathbf{t} = -d\mathbf{u}, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \mathbf{t} = 0 & \rightarrow & \mathbf{u} = x \\ \mathbf{t} = x & \rightarrow & \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \implies (\psi * f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^0 (x - \mathbf{u})^{\alpha-1} \cdot f(\mathbf{u}) (-d\mathbf{u}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \mathbf{u})^{\alpha-1} \cdot f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = (\mathbf{I}_{0+}^{\alpha} f)(x) \end{aligned}$$

■

La Proposición (2.2.3) hace referencia de la transformada de Laplace de la integral fraccionaria de Riemann–Liouville.

2.2.3. Proposición.

$$\mathcal{L} \{ (\mathbf{I}_{0+}^{\alpha} f) (x) \} = s^{-\alpha} \cdot F(s) \quad (2.22)$$

donde $F(s) = \mathcal{L} \{ f(x) \}$. ■

Demostración.-

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{ (\mathbf{I}_{0+}^{\alpha} f) (x) \} &= \mathcal{L} \{ (\psi * f) (x) \} = \mathcal{L} \{ \psi(x) \} \cdot \mathcal{L} \{ f(x) \} \\ &= \mathcal{L} \left\{ \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right\} \cdot F(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L} \{ x^{\alpha-1} \} \cdot F(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}} \cdot F(s) = s^{-\alpha} F(s). \end{aligned}$$
■

2.2.5. Definición. *Derivada Fraccionaria de Riemann–Liouville*

(DFRL)

Se definen las derivadas fraccionales de Riemann–Liouville $\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} y$ y $\mathbf{D}_{b-}^{\alpha} y$ de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\Re(\alpha) \geq 0$ como ([Kilbas et al., 2006](#))

- Por la izquierda

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} y) (x) &:= \left(\frac{d}{dx} \right)^n (\mathbf{I}_{a+}^{n-\alpha} y) (x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-(n-1)}}, \quad x > a \end{aligned} \quad (2.23)$$

- Por la derecha

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_{b-}^{\alpha} y) (x) &:= \left(-\frac{d}{dx} \right)^n (\mathbf{I}_{b-}^{n-\alpha} y) (x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-(n-1)}}, \quad x < b \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde $n = [\Re(\alpha)] + 1$ y $[\Re(\alpha)]$ es la parte entera de $\Re(\alpha)$. ■

Cuando $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, se tiene

$$(\mathbf{D}_{a+}^0 y)(x) = (\mathbf{D}_{b-}^0 y)(x) = y(x); \quad (\mathbf{D}_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x) \quad (2.25)$$

$$\text{y} \quad (\mathbf{D}_{b-}^n y)(x) = (-1)^n y^{(n)}(x) \quad (2.26)$$

Además, si $0 < \Re(\alpha) < 1$:

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}, \quad x > a \quad (2.27)$$

$$(\mathbf{D}_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-[\Re(\alpha)]}}, \quad x < b \quad (2.28)$$

Y cuando $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $n = [\alpha] + 1$, (2.23) y (2.24) toman las formas:

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}, \quad x > a \quad (2.29)$$

$$(\mathbf{D}_{b-}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \quad x < b \quad (2.30)$$

Igualmente para $0 < \alpha < 1$, (2.27) y (2.28), respectivamente se convierten en

$$(\mathbf{D}_{a+}^\alpha y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^\alpha}, \quad x > a \quad (2.31)$$

$$(\mathbf{D}_{b-}^\alpha y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^\alpha}, \quad x < b. \quad (2.32)$$

Si $\Re(\alpha) = 0$, ($\alpha = \theta \mathbf{i}$, $\theta \neq 0$), entonces (2.23) y (2.24) producen derivadas de orden imaginarios puros:

$$(\mathbf{D}_{a+}^{\theta \mathbf{i}} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\theta \mathbf{i})} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\theta \mathbf{i}}}, \quad x > a \quad (2.33)$$

$$(\mathbf{D}_{b-}^{\theta \mathbf{i}} y)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\theta \mathbf{i})} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{y(t) dt}{(t-x)^{\theta \mathbf{i}}}, \quad x < b \quad (2.34)$$

La siguiente proposición nos dice que la IFRL dada en (2.13) y la DFRL dada en (2.23) aplicadas a potencias de la forma $(x - a)^{\beta-1}$ y $(b - x)^{\beta-1}$ producen potencias de la misma forma. Igualmente (2.14) y (2.24).

2.2.4. Proposición. Sean $\Re(\alpha) \geq 0$ y $\beta \in \mathbb{C}$, $\Re(\beta) > 0$, entonces

$$\left(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta-1} \right) (x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (x - a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad (2.35)$$

$$\left(\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta-1} \right) (x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (x - a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) \geq 0, \quad (2.36)$$

y

$$\left(\mathbf{I}_{b-}^{\alpha} (b - t)^{\beta-1} \right) (x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)} (b - x)^{\beta+\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) > 0, \quad (2.37)$$

$$\left(\mathbf{D}_{b-}^{\alpha} (b - t)^{\beta-1} \right) (x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - x)^{\beta-\alpha-1}, \quad \Re(\alpha) \geq 0, \quad (2.38)$$

■

Si $\beta = 1$ y $\Re(\alpha) \geq 0$, las derivadas fraccionarias de R-L de una función constante, no siempre se anulan, entonces para $(0 < \Re(\alpha) < 1)$ tenemos:

$$\left(\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} \mathbf{1} \right) (x) = \frac{(x - a)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}, \quad \left(\mathbf{D}_{b-}^{\alpha} \mathbf{1} \right) (x) = \frac{(b - x)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)}. \quad (2.39)$$

Además, para $i = 1, 2, \dots, [\Re(\alpha)] + 1$, se tiene

$$\left(\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\alpha-i} \right) (x) = 0, \quad \left(\mathbf{D}_{b-}^{\alpha} (b - t)^{\alpha-j} \right) (x) = 0 \quad (2.40)$$

2.2.1. Teorema. Las siguientes reglas de integración son válidas $(0 < \alpha < 1)$:

$$\int_a^b f(x) \left(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} g \right) (x) dx = \int_a^b g(x) \left(\mathbf{I}_{b-}^{\alpha} f \right) (x) dx \quad (2.41)$$

$$\int_a^b f(x) \left(\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} g \right) (x) dx = \int_a^b g(x) \left(\mathbf{D}_{b-}^{\alpha} f \right) (x) dx \quad (2.42)$$

Además

$$\left(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} \left(\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} f \right) \right) (x) = f(x) \quad (2.43)$$

■

Demostración.-

Veamos (2.41):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \left(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} g \right) (x) dx &= \int_a^b f(x) \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot g(t) dt \right] dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot f(x) \cdot g(t) dt dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \underbrace{\int_a^b \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \cdot f(x) \cdot g(t) dx dt}_{\text{cambió orden de integración}} \\ &= \int_a^b g(t) \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} \cdot f(x) dx \right] dt \\ &= \underbrace{\int_a^b g(x) \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} \cdot f(t) dt \right] dx}_{\text{se ha intercambiado las variables}} \\ &= \int_a^b g(x) \left(\mathbf{I}_{b-}^{\alpha} f \right) (x) dx \end{aligned}$$

■

Para (2.42) y (2.43) ver (Kilbas et al., 2006).

2.2.5. Proposición. (a) $\mathbf{I}_{a+}^{\alpha+1} (\mathbf{D}f(x)) = (\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} f) (x) - \frac{(x-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} f(a)$

(b) $\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} (\mathbf{D}_{a+}^{\alpha} f(x)) = f(x) - \sum_{k=1}^n (\mathbf{D}_{a+}^{\alpha-k} f) (x) \Big|_{x=a} \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$

(c) $\mathbf{D} [(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} f) (x)] = \mathbf{I}_{a+}^{\alpha} (\mathbf{D}f(x)) + \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(a),$

(d) $(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} f) (x) = \mathbf{I}_{a+}^{\alpha+p} (\mathbf{D}^p f(x)) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\mathbf{D}^k f(a) \cdot (x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}, \quad p \in \mathbb{Z}^+,$

$$(e) \quad D^p (I_{a+}^\alpha f)(x) = I_{a+}^\alpha (D^p f(x)) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{D^k f(a) \cdot (x-a)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)}, \quad p \in \mathbb{Z}^+.$$

■

Demostración.-

(a) Integramos por partes y el hecho de que $\Gamma(1+\alpha) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$ para $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} I_{a+}^{\alpha+1} (Df(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^\alpha \cdot f'(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(x-t)^\alpha \cdot f(t) \Big|_a^x - \int_a^x (-\alpha)(x-t)^{\alpha-1} \cdot f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[-(x-a)^\alpha \cdot f(a) + \alpha \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot f(t) dt \right] \\ &= -\frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot f(a) + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot f(t) dt}_{=(I_{a+}^\alpha f)(x)} \\ &= (I_{a+}^\alpha f)(x) - \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot f(a) \end{aligned}$$

Para las restantes ver (Kilbas et al., 2006).

■

2.2.6. Definición. Derivada fraccionaria R-L vs Derivada clásica

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville **no** satisface completamente todas las reglas clásicas de derivación del cálculo usual.

1. Derivada de una constante

- *Regla clásica:* Si $k \in \mathbb{R}$, $(k)' = 0$.
- **R-L**, la derivada fraccionaria de una constante k (orden $\alpha > 0$) **no**

es **cero**, sino que es proporcional a una potencia negativa:

$$D_{a+}^{\alpha} k = \frac{k}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

Eso se debe a que las derivadas fraccionarias no “anulan” las constantes, en contraste con la derivada ordinaria.

2. Linealidad

- Regla clásica: $(f+g)' = f' + g'$.
- **R-L, sí satisface la propiedad de linealidad:**

$$D_{a+}^{\alpha} (f+g) = D_{a+}^{\alpha} f + D_{a+}^{\alpha} g$$

Esto se mantiene igual en el contexto fraccionario.

3. Regla del producto

- Regla clásica: $(fg)' = f'g + fg'$.
- **R-L, No satisface directamente la regla del producto como en el caso usual.** Existe una regla general (tipo Leibniz generalizada), pero involucra una suma infinita:

$$D_{a+}^{\alpha} (fg) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} D^i f \cdot D_{a+}^{\alpha-i} g$$

donde D^i es derivada (entera) de f y $D_{a+}^{\alpha-i}$ es la derivada fraccionaria de g , la suma incluye de diferentes órdenes. Sólo para α entero se recupera la regla usual.

4. Regla del cociente

- Regla clásica: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- R-L, No satisface la regla clásica del cociente de forma directa.

■

2.2.7. Definición. Derivada Fraccionaria de Caputo

- Por la izquierda ([Podlubny, 1999](#))

$${}^C D_{a+}^{\alpha} \phi(x) = D_{a+}^{\alpha} \left(\phi(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right) \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{\phi^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad x > a \quad (2.45)$$

- Por la derecha

$${}^C D_{b-}^{\alpha} \phi(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{\phi^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad x < b \quad (2.46)$$

donde $0 \leq n-1 < \alpha < n$ y la función tiene $n+1$ derivadas continuas y acotadas en $[a, b]$.

■

La relación entre ambas derivadas es, para $n = [\Re(\alpha) + 1]$

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha} y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \quad (2.47)$$

y

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (D_{b-}^{\alpha} y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha} \quad (2.48)$$

Cuando $0 < \Re(\alpha) < 1$, se tiene

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} y)(x) = (D_{a+}^{\alpha} y)(x) - \frac{y(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}, \quad (2.49)$$

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} y)(x) = (D_{b-}^{\alpha} y)(x) - \frac{y(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-x)^{-\alpha}. \quad (2.50)$$

Por la forma de su definición, las derivadas fraccionarias de Caputo ${}^C D_{a+}^\alpha f(x)$ y ${}^C D_{b-}^\alpha f(x)$ tienen propiedades similares a las derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville $(D_{a+}^\alpha f)(x)$ y $(D_{b-}^\alpha f)(x)$, dadas en la Proposición (2.2.5).

2.2.2. Ejemplo. Sea $f(x) = x^3$, la primera derivada y la integral ordinarias de f son:

$$\frac{df(x)}{dx} = 3x^2, \quad \int_0^x f(t) dt = \frac{x^4}{4}$$

Hallaremos la derivada e integral fraccionaria de R – L para $\alpha = \frac{1}{2}$.

Según (2.35)

$$\begin{aligned} \left(I_{0+}^{1/2} t^3 \right)(x) &= \left(I_{0+}^{1/2} (t - 0)^{4-1} \right)(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4 + 1/2)} (x - 0)^{4+1/2-1} \\ &= \frac{3!}{\frac{105\sqrt{\pi}}{16}} x^{7/2} = \frac{32}{35\sqrt{\pi}} x^{7/2} \end{aligned}$$

Según (2.36)

$$\begin{aligned} \left(D_{0+}^{1/2} t^3 \right)(x) &= \left(D_{0+}^{1/2} (t - 0)^{4-1} \right)(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4 - 1/2)} (x - 0)^{4-1/2-1} \\ &= \frac{3!}{\frac{15\sqrt{\pi}}{8}} x^{5/2} = \frac{16}{5\sqrt{\pi}} x^{5/2} \end{aligned}$$

■

Para $\alpha = 1$, concuerdan con la derivada e integral ordinaria.

$$\begin{aligned} \left(I_{0+}^1 t^3 \right)(x) &= \left(I_{0+}^1 (t - 0)^{4-1} \right)(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4 + 1)} (x - 0)^{4+1-1} = \frac{x^4}{4} = \int_0^x t^3 dt \\ \left(D_{0+}^1 t^3 \right)(x) &= \left(D_{0+}^1 (t - 0)^{4-1} \right)(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4 - 1)} (x - 0)^{4-1-1} = 3x^2 = \frac{d(x^3)}{dx} \end{aligned}$$

En la Figura (2.9) y en la Figura (2.10) se muestran las gráficas de la integral y derivada fraccionaria de Riemann–Liouville de orden $0 < \alpha < 1$ de $f(x) = x^3$.

Figura 2.9: Gráficas de $(I_{0+}^{\alpha} t^3)(x)$ para $0 < \alpha < 1$.

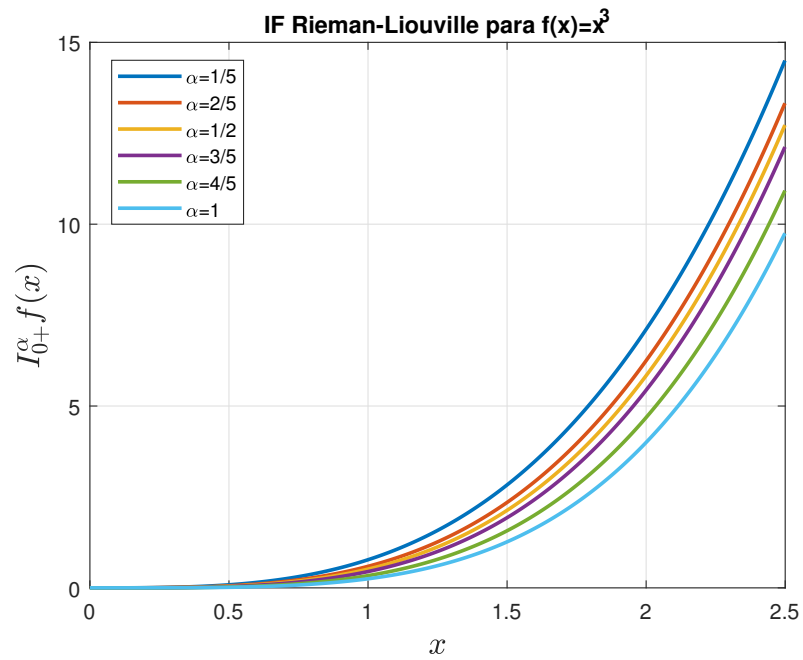
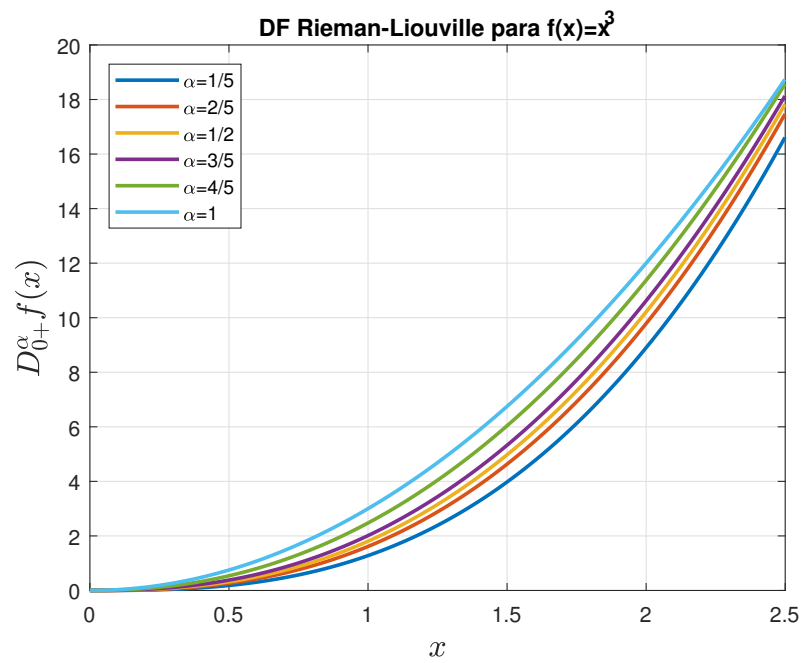


Figura 2.10: Gráficas de $(D_{0+}^{\alpha} t^3)(x)$ para $0 < \alpha < 1$.



2.2.8. Definición. Derivada Fraccionaria de Grünwald-Letnikov

$${}_{GL}D_{a+}^{\alpha} \phi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \phi(x - hk) \quad (2.51)$$

donde $[\cdot]$ es la parte entera de α . ■

2.2.4. Transformada de Laplace de derivadas fraccionarias

Recordemos que si la función f es de orden exponencial y continua por partes, su transformada de Laplace existe y se define como

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.52)$$

Para las funciones f y g , se define la convolución de f con g mediante

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s) ds = \int_0^t f(s)g(t-s) ds \quad (2.53)$$

y su transformada de Laplace como

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s) \quad (2.54)$$

Para f suficientemente suave, se define la transformada de Laplace de $f^{(n)}$:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (2.55)$$

Ahora, para $\alpha > 0$ y $g(t) = t^{\alpha-1}$,

$$D_{0,t}^{-\alpha} f(t) = I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (2.56)$$

y también tenemos:

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha}. \quad (2.57)$$

2.2.9. Definición. *Transformada de Laplace de la integral fraccional de Riemann–Liouville*

De (2.56) y (2.57) obtenemos la transformada de Laplace de la integral fraccional de Riemann–Liouville:

$$\mathcal{L}\{I_{0+}^{\alpha}f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\mathcal{L}\{t^{\alpha-1} * f(t)\} = s^{-\alpha}\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-\alpha}F(s). \quad (2.58)$$

■

Seguidamente, para $\alpha > 0$, $m - 1 \leq \alpha < m$, hacemos

$$g(t) = D_{0,t}^{-(m-\alpha)}f(t) = I_{0+}^{m-\alpha}f(t). \quad (2.59)$$

Entonces

$$D_{0+}^{\alpha}f(t) = g^{(m)}(t). \quad (2.60)$$

Aplicamos (2.55)

$$\mathcal{L}\{D_{0+}^{\alpha}f(t)\} = \mathcal{L}\{g^{(m)}(t)\} - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{(m-k-1)}(0). \quad (2.61)$$

De (2.58):

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{I_{0+}^{m-\alpha}f(t)\} = s^{-(m-\alpha)}\mathcal{L}\{f(t)\} \quad (2.62)$$

2.2.10. Definición. *Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann–Liouville*

De (2.59) y (2.62) obtenemos la transformada de Laplace de la Derivada de Riemann–Liouville, con $m - 1 \leq \alpha < m$

$$\mathcal{L}\{D_{0+}^{\alpha}f(t)\} = s^{\alpha}F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k (D_{0+}^{\alpha-k-1}f(t))_{t=0}. \quad (2.63)$$

■

2.2.11. Definición. Transformada de Laplace de la derivada de Caputo

Haciendo un proceso similar, obtenemos la **transformada de Laplace de la derivada de Caputo**, con $m - 1 < \alpha \leq m$

$$\mathcal{L}\{ {}^C D_{0+}^{\alpha} f(t) \} = s^{\alpha} \mathcal{L}\{ f(t) \} - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (2.64)$$

■

2.2.5. Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

Una ecuación diferencial ordinaria fraccional tiene la forma general ([Mainardi, 2010](#))

$$F(t, y(t), D^{\alpha_1} y(t), D^{\alpha_2} y(t), \dots, D^{\alpha_n} y(t)) = g(t) \quad (2.65)$$

donde $F(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ y $g(t)$ son funciones dadas y D^{α_k} son los operadores de diferenciación fraccional con $\Re(\alpha_k) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Algunas otras formas, para α complejo tal que $\Re(\alpha) > 0$, son

$$D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad \text{o} \quad (2.66)$$

$$\sum_{k=1}^n c_n(t) D^{\alpha_k} y(t) + c_0(t) y(t) = f(t). \quad (2.67)$$

Ambos, ([2.65](#)) y ([2.67](#)), contienen derivadas fraccionarias de Riemann–Liouville.

Las definiciones siguientes son en base a ([Milici et al., 2019](#)).

2.2.5.1. *EDF de Riemann–Liouville*

Sea $\alpha > 0$, $t > a$, la ecuación diferencial fraccionaria

$$D_{a+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad (2.68)$$

con las condiciones

$$D_{a+}^{\alpha-k} y(a) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.69)$$

es llamada EDF de Riemann–Liouville.

2.2.5.2. *EDF de Caputo*

Sea $\alpha > 0$, $n = \lceil \alpha \rceil + 1$, $t > a$, y $f : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la ecuación diferencial fraccionaria

$${}^C D_{a+}^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)), \quad (2.70)$$

con las condiciones iniciales

$$D^k y(0) = y^{(k)}(0) = b_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.71)$$

es llamada EDF de Caputo o Problema de Valor Inicial tipo Caputo.

2.2.12. Definición. *Ecuaciones integrales*

Una ecuación integral se define como

$$\phi(t) = g(t) + \int_a^b K(t, s) \phi(s) ds \quad (2.72)$$

donde g y K son conocidas y ϕ es la función incógnita. ■

Además en la teoría de las ecuaciones integrales se tienen las *ecuaciones integrales de Fredholm* y las *ecuaciones integrales de Volterra*. La ecuación

integral dada en (2.72) es de Fredholm (dominio de integración es fijo). Una ecuación integral general de Volterra (dominio de integración variable) es

$$\Xi(t)\phi(t) = g(t) + \int_0^t K(t, s)\phi(s) ds \quad (2.73)$$

donde $\Xi, g, \phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $T > 0$, $K : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es el núcleo de la ecuación integral y $S = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$.

2.2.5.3. Tipos de ecuaciones integrales

Cuando los límites de integración son fijos:

- **Ecuación de Fredholm de 1er tipo**

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds \quad (2.74)$$

donde: K y y funciones conocidas y ϕ es una función desconocida.

- **Ecuación de Fredholm de 2do tipo**

$$\phi(t) = g(t) + \lambda \int_a^b K(t, s)\phi(s) ds \quad (2.75)$$

donde λ es un parámetro desconocido.

Cuando uno de los límites de integración es variable:

- **Ecuación de Volterra de 1er tipo:**

$$y(t) = \int_a^t K(t, s)\phi(s) ds \quad (2.76)$$

- **Ecuación de Volterra de 2do tipo:**

$$\phi(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s)\phi(s) ds \quad (2.77)$$

2.2.5.4. Teoremas de existencia y unicidad para Problemas de Valor Inicial (PVI)

La existencia y unicidad del PVI (2.70) y (2.71) se verá reduciendo el problema a una ecuación integral de Volterra.

2.2.1. Lema. Sea $y(t)$ continua en el intervalo $[0, h]$ con valores en $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$, entonces la función $y(t)$ satisface la EDF tipo Caputo

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & 0 < \alpha \leq 1, t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (2.78)$$

si y sólo si satisface la ecuación integral de Volterra:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau. \quad (2.79)$$

■

Demostración.-

Sea $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$, la cual existe por las hipótesis del lema. Aplicamos transformada de Laplace a la EDF de Caputo, y por (2.64) tenemos

$$\mathcal{L}\{D^\alpha y(t)\} = \mathcal{L}\{f(t, y(t))\}$$

$$s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y_0 = \mathcal{L}\{f(t, y(t))\}$$

$$Y(s) = \frac{y_0}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}\{f(t, y(t))\}$$

Ahora aplicamos transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y_0}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}\{f(t, y(t))\}\right\} \\ y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

■

El siguiente lema nos da un sustento para el teorema de existencia y unicidad del problema de la EDF de Caputo.

2.2.2. Lema. Sea la sucesión $\{g_n(t)\}$ de funciones reales definidas en el conjunto $S \subset \mathbb{R}$. Si existe una sucesión $\{r_n\}$ de números positivos tal que

$$\forall n > 1, \forall t \in S, \quad |g_n(t)| \leq r_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty, \quad (2.80)$$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ es convergente.

■

2.2.2. Teorema. Sea la EDF de Caputo

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & 0 < \alpha \leq 1, t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Consideremos el dominio $\mathbf{S} = [0, \eta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$, donde f satisface:

- $f(t, y)$ es continua,
- $|f(t, y)| < M$, donde $M = \max_{(t,y) \in \mathbf{S}} \{|f(t, y)|\}$,
- $f(t, y)$ es de Lipschitz en $\mathbf{S}$, es decir que existe una constante K tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ y una única función $y(t) \in C[0, \eta]$ para

$$\delta = \min \left\{ \eta, \left(\frac{\eta \Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

■

Demostración.-

La demostración en el Anexo (7.1).

■

2.2.5.5. Ecuaciones diferenciales lineales fraccionarias

Cambiamos la notación relacionado con el orden, dada en la Definición (2.2.1).

2.2.13. Definición. Una EDF lineal es una ecuación de la forma

$$(D^{\alpha_n} + a_{n-1}D^{\alpha_{n-1}} + \cdots + a_1D^{\alpha_1} + a_0)y(t) = f(t), \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.81)$$

con las condiciones

$$y^{(k)}(0) = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.82)$$

Además, una ecuación que no es lineal, se llama no lineal. ■

2.2.14. Definición. En (2.81):

- (i) Si las a_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, son constantes, se dice que la ecuación diferencial fraccionaria es de coeficientes constantes,
- (ii) Si $f(t) = 0$, se dice que la ecuación diferencial fraccionaria lineal es homogénea.

■

2.2.3. Teorema. Si $f(t)$ es acotada en $\langle 0, T \rangle$ y las $a_k = a_k(t)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ son continuas en $[0, T]$, entonces la ecuación dada en (2.81) tiene una solución única. ■

2.2.4. Teorema. La EDF lineal

$$D^\alpha y(t) = f(t), \quad \text{donde } n-1 < \alpha < n \quad (2.83)$$

con

$$y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

tiene por solución

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.84)$$

■

Para la demostración del Teorema (2.2.4) se emplea la transformada de Laplace y el teorema de Convolución.

2.2.5. Teorema. Sea $g : [0, h] \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, continua con respecto a la variable t en $[0, h]$ y sea α positivo. Entonces, una función “ y ” continua en $[a, b]$ es solución del PVI (2.70) y (2.71) si y solo si es solución de la ecuación integral del tipo Volterra

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} t^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} g(s, y(s)) ds \quad (2.85)$$

donde $n = \lceil \alpha \rceil + 1$.

■

2.2.6. Teorema. La EDF lineal

$$D^\alpha y(t) = \lambda y(t), \quad \text{donde } n-1 < \alpha < n, \quad (2.86)$$

con condición inicial

$$y^{(k)}(0) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.87)$$

tiene por solución a:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k t^k E_{\alpha, k+1}(\lambda t^\alpha). \quad (2.88)$$

■

2.2.7. Teorema. *La EDF lineal*

$$D^\alpha y(t) = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad \text{donde } 0 < \alpha < 1, \quad (2.89)$$

con la condición inicial

$$y(0) = A, \quad (2.90)$$

tiene por solución

$$y(t) = A + t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n. \quad (2.91)$$

■

2.2.8. Teorema. *La EDF lineal*

$$D_a^\alpha y(t) + b y(t) = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.92)$$

$$y(0) = A,$$

tiene por solución

$$y(t) = A E_{\alpha,1} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{a} t^n \left[1 - E_{\alpha,n+1} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) \right]. \quad (2.93)$$

■

Para las demostraciones de los teoremas anteriores ver [\(Milici et al., 2019\)](#).

2.2.5.6. Ecuaciones integrodiferenciales

Una clase de ecuaciones lineales integro-diferenciales que se considerarán es

$$\sum_{i=0}^N P_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^b K_1(x, t) y(t) + \lambda_2 \int_a^x K_2(x, y) y(t) dt. \quad (2.94)$$

con las condiciones

$$D^k y(c) = y^{(k)}(c) = y_k, \quad a \leq c \leq b, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.95)$$

La ecuación (2.94) es la generalización de las ecuaciones integrales de Fredholm, de Volterra y de las ecuaciones diferenciales lineales de orden alto.

Además cuando $N = 0$, la ecuación (2.94) es la ecuación integral Fredholm–Volterra .

2.2.15. Definición. Funciones absolutamente continuas

Se dice que una función $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **absolutamente continua** en $[a, b]$, $\phi \in AC[a, b]$, si para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ talque para toda familia finita de intervalos disjuntos $[a_k, b_k] \subset [a, b]$, $k = 1, 2, \dots, n$, que satisfaga $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^n |\phi(b_k) - \phi(a_k)| < \epsilon \quad (2.96)$$

■

Observación:

El espacio $AC[a, b]$ coincide con el espacio de las antiderivadas de las funciones Lebesgue integrables

$$\phi \in AC[a, b] \iff \phi(t) = p + \int_a^t \psi(s) ds \quad (\psi \in L(a, b)) \quad (2.97)$$

en consecuencia $\phi'(t) = \psi(t)$ en casi todo punto, además $\phi(a) = p$, por tanto

$$\phi(t) = \phi(a) + \int_a^t \phi'(s) ds. \quad (2.98)$$

2.2.6. Series de Taylor Clásicas

2.2.6.1. Fundamentos del Método de Taylor

El método de Taylor clásico, es una técnica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de forma aproximada mediante el uso de la **serie de Taylor** de una función alrededor de un punto inicial. Este método se basa en la expansión de la solución en una serie infinita, siempre y cuando la solución sea suficientemente derivable (suave), y se decide hasta dónde truncar la serie para obtener una solución numérica aproximada.

Los fundamentos del método de Taylor clásico que considero son:

1. Serie de Taylor para una función

La serie de Taylor de una función $y(t)$ alrededor de un punto t_0 se expresa como (Burden & Faires, 2010)

$$y(t) = y(t_0) + (t-t_0)\frac{y'(t_0)}{1!} + (t-t_0)^2\frac{y''(t_0)}{2!} + (t-t_0)^3\frac{y^{(3)}(t_0)}{3!} + \dots \quad (2.99)$$

donde:

- $y(t_0)$ es el valor de la función en el punto inicial t_0 ,
- $y'(t_0), y''(t_0), y^{(3)}(t_0), \dots$ son las derivadas de la función en t_0 .
- $\frac{(t-t_0)^n}{n!}$ son los términos de la expansión.

2. Aplicación a Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Sea la ecuación diferencial ordinaria de la forma

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \quad (2.100)$$

El objetivo del método de Taylor es encontrar una aproximación de la solución $y(t)$ en el intervalo $[t_0, t_0 + h]$, donde $h = \Delta t$ es un pequeño incremento del tiempo.

Paso 1: Expansión de la solución en Serie de Taylor

Expandimos la solución $y(t)$ alrededor de t_0 usando series de Taylor. Para ello es necesario conocer las derivadas sucesivas de $y(t)$ en t_0 , entonces la solución se expresa como en (2.99).

Paso 2: Cálculo de Derivadas Sucesivas

Para calcular las derivadas sucesivas de $y(t)$ en t_0 utilizamos la ecuación diferencial y su estructura.

Sabemos que:

- $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$
- Para la segunda derivada, aplicamos la derivada en la ecuación diferencial:

$$y''(t_0) = \frac{d}{dt} (f(t, y(t))) \Big|_{t=t_0} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=t_0} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{t=t_0} y'(t_0)$$

- La tercera derivada $y^{(3)}(t_0)$ se obtiene derivando nuevamente la ecuación anterior, y así sucesivamente para obtener las derivadas de orden superior.

Paso 2: Truncamiento de la Serie

Si truncamos después del término cuadrático (orden h^2), la aproximación

es:

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2!} y''(t_0) \quad (2.101)$$

donde:

- h es el paso de integración,
- $y'(t_0)$ y $y''(t_0)$ se calculan utilizando la ecuación diferencial y sus derivadas.

El error que se comete al hacer este truncamiento es

$$R_3(t) = \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(\xi), \quad t_0 < \xi < t_0 + h$$

3. Ejemplo del Método de Taylor de Orden 2

Supongamos que tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$y'(t) = t + y(t), \quad y(0) = 1.$$

Vamos a aproximar la solución $y(t)$ en $t = t_0 + h$ usando el método de Taylor de segundo orden con tamaño de paso $h = 0.1$.

Paso 1: Cálculo de las derivadas

- $y'(t) = t + y(t)$, entonces $\mathbf{y}'(\mathbf{0}) = 0 + y(0) = 0 + 1 = \mathbf{1}$.
- Para $y''(t)$, observamos que $f(t, y) = t + y$, entonces derivamos $f(t, y)$ con respecto a t :

$$y''(t) = \frac{d}{dt} (t + y) = 1 + y'(t) = 1 + (\mathbf{t} + \mathbf{y})$$

Es así que $\mathbf{y}''(\mathbf{0}) = 1 + (0 + 1) = \mathbf{2}$.

Paso 2: Expansión en Serie de Taylor

$$y(t_0 + h) \approx y(0) + hy'(0) + \frac{h^2}{2!}y''(0)$$

Sustituimos los valores calculados:

$$y(0.1) \approx 1 + (0.1)(1) + \frac{0.1^2}{2}(2) = 1.11$$

4. Ejemplo del Método de Taylor de Orden 2

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = y - t^2 + 1, \quad y \in [0, 4], \quad y(0) = 0.5 \quad (2.102)$$

La solución exacta está dada por la función:

$$y(t) = (t + 1)^2 - \frac{e^t}{2}.$$

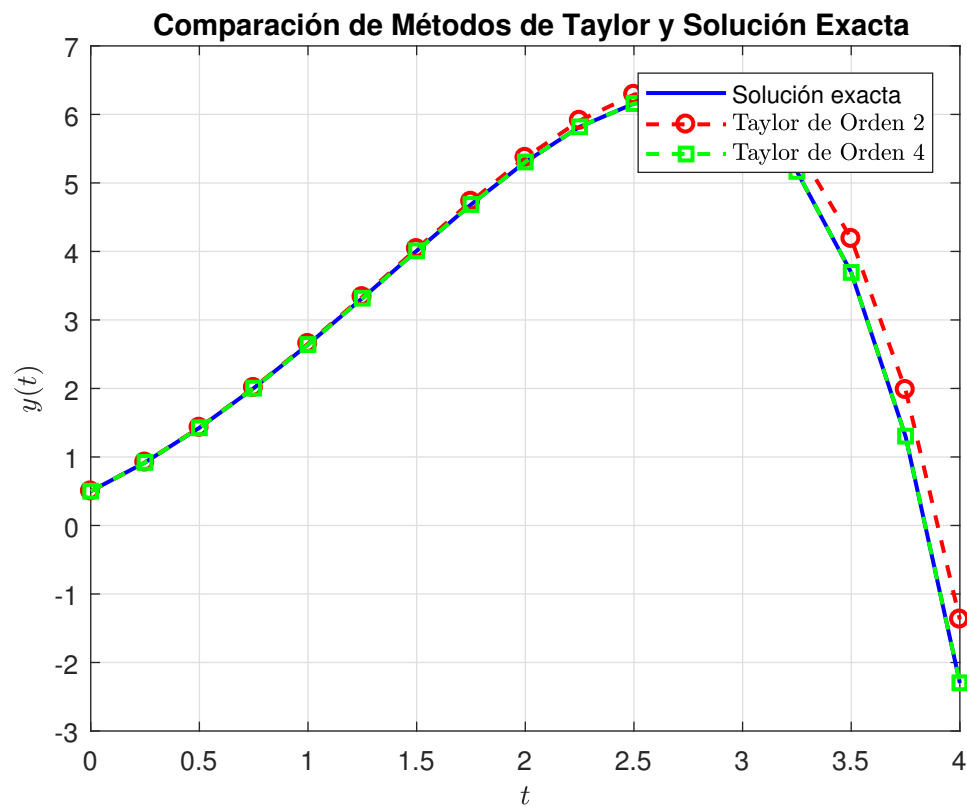
El Cuadro (2.1) muestra los resultados. Se observa que el método de Taylor de orden 4 es más preciso que el de Taylor de orden 2, sin embargo, al alejarnos del valor inicial los cambios son notorios en ambos métodos.

Cuadro 2.1: Comparación de Taylor orden 2 y 4.

t	$y(t)$	T_2	Error₂	T_4	Error₄
0.00	0.500000	0.500000	0.000000	0.500000	0.000000
0.25	0.92049	0.92188	0.0013877	0.92049	4.24e-06
0.50	1.4256	1.4292	0.0035598	1.4257	1.09e-05
0.75	2.004	2.0108	0.006849	2.004	2.1e-05
1.00	2.6409	2.6526	0.011713	2.6409	3.594e-05
1.25	3.3173	3.3361	0.01878	3.3174	5.769e-05
1.50	4.0092	4.0381	0.028905	4.0092	8.889e-05
1.75	4.6852	4.7285	0.043254	4.6853	0.00013316
2.00	5.3055	5.3689	0.063404	5.3057	0.00019541
2.25	5.8186	5.9101	0.091491	5.8189	0.00028228
2.50	6.1588	6.2891	0.13039	6.1592	0.00040272
2.75	6.2412	6.4252	0.18397	6.2418	0.00056882
3.00	5.9572	6.2146	0.25741	5.958	0.00079677
3.25	5.1673	5.525	0.35769	5.1684	0.0011083
3.50	3.6923	4.1863	0.49407	3.6938	0.0015326
3.75	1.302	1.9809	0.67899	1.3041	0.0021084
4.00	-2.2991	-1.3701	0.92896	-2.2962	0.0028878

En la Figura (2.11) se visualiza la solución exacta $y(t) = (t + 1)^2 - \frac{e^t}{2}$, las soluciones aproximadas dadas por el Método de Taylor de orden 2 y de orden 4. A medida que nos alejamos del valor inicial las gráficas tienden a mostrar divergencia.

Figura 2.11: Solución exacta de (2.102) con sus aproximaciones de Taylor, órdenes 2 y 4.



2.2.6.2. Limitaciones del Método Clásico

Las series de Taylor clásicos tiene varias limitaciones:

- No es directamente aplicable a derivadas fraccionarias.

LIMITACIÓN.- Al basarse en derivadas de orden entero, mientras que las ecuaciones diferenciales fraccionarias involucran derivadas de orden no entero (fraccionario), esto hace que la expansión clásica no sea directamente aplicable.

EJEMPLO.- Consideremos la ecuación diferencial fraccionaria:

$$D^\alpha y(x) = f(x, y(x)), \quad \alpha \in \langle 0, 1 \rangle$$

donde D^α es una derivada fraccionaria (en el sentido de Riemann–Liouville o Caputo). La expansión de Taylor clásica no puede capturar directamente el comportamiento de $D^\alpha y(x)$, ya que no existe una fórmula general para derivadas fraccionarias de funciones arbitrarias en términos de derivadas enteras.

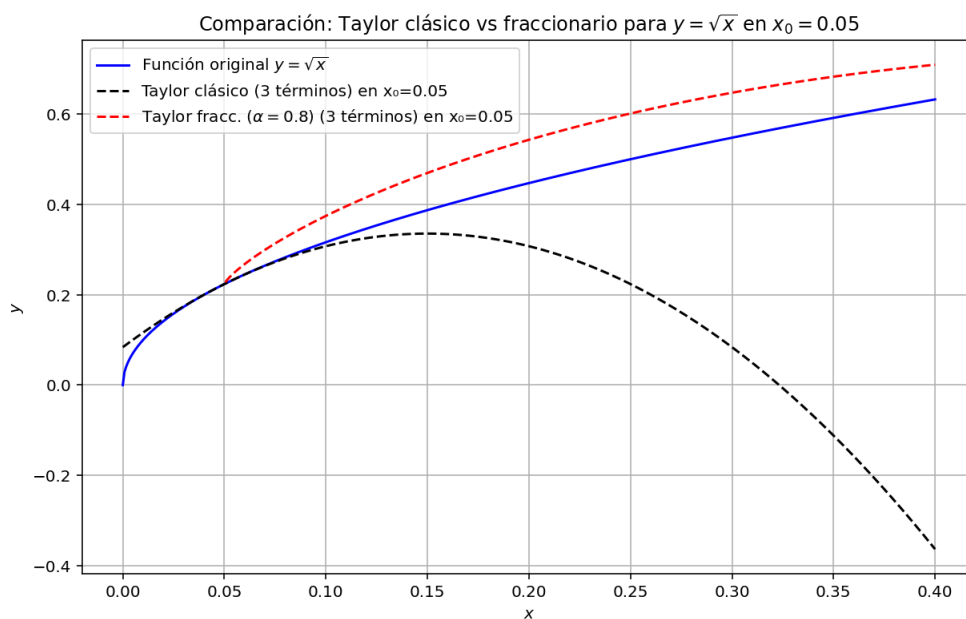
- **Convergencia limitada en problemas no analíticos.**

LIMITACIÓN.- Las series de Taylor clásicas solo convergen para funciones analíticas en el punto de expansión. En muchos problemas fraccionarios, las soluciones no son analíticas, lo que limita la aplicabilidad del método.

EJEMPLO.- Sea $\beta > 0$ no entero, la función $y(x) = x^\beta$, no es analítica en $x = 0$, por lo que su expansión de Taylor clásica no converge en una vecindad de $x = 0$. Sin embargo en el contexto fraccionario, este tipo de funciones aparecen frecuentemente como soluciones.

La Figura (2.12) muestra la función $f(x) = x^{0.5}$ no analítica en $x = 0$, su serie de Taylor clásica, de tres términos alrededor de $x_0 = 0.05$ y su serie de Taylor fraccionaria con orden $\alpha = 0.8$, también de tres términos, para $x \in [0, 0.4]$.

Figura 2.12: Convergencia limitada en problemas no analíticos



- **Dificultad para capturar comportamientos singulares.**

LIMITACIÓN.- Las soluciones de ecuaciones diferenciales fraccionarias a menudo presentan comportamientos singulares (por ejemplo, singularidades en el origen o crecimiento asintótico no polinomial), que no pueden ser representados adecuadamente por una serie de Taylor clásica.

EJEMPLO.- La solución de la ecuación diferencial fraccionaria:

$$D^\alpha y(x) + y(x) = 0$$

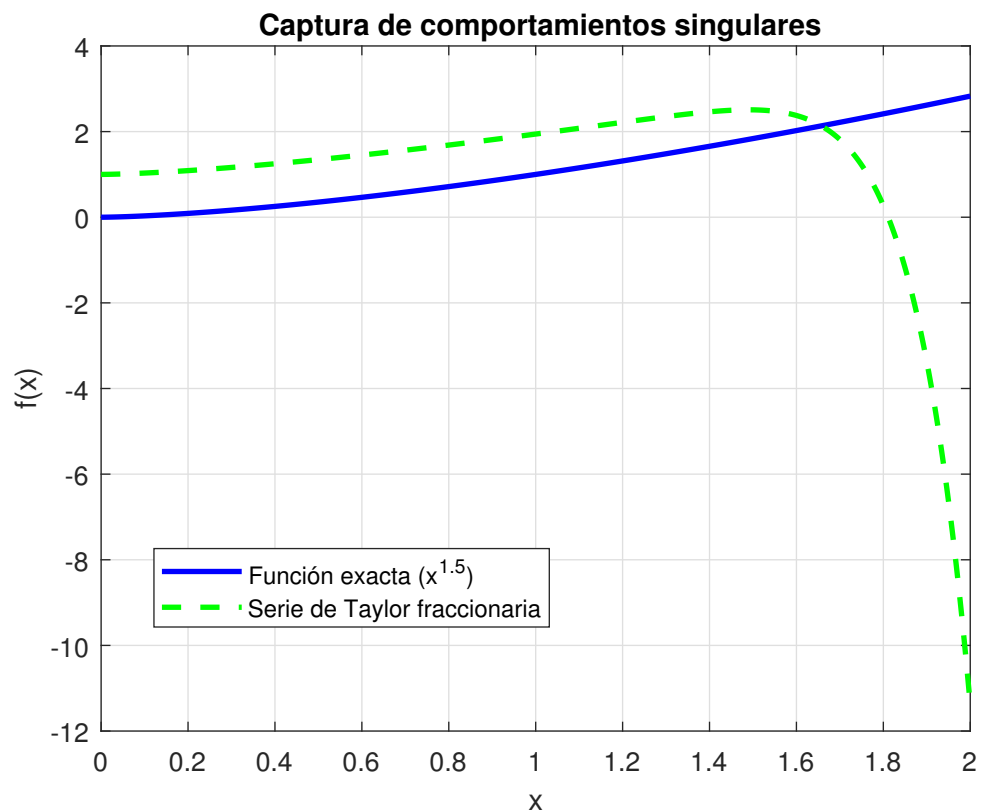
puede involucrar funciones como

$$x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-x^\alpha)$$

donde $E_{\alpha,\alpha}$ es una función de Mittag–Leffler. Estas funciones tienen comportamientos asintóticos que no pueden ser capturados por una serie de Taylor finitas.

La Figura (2.13) muestra la gráfica de $y(x) = x^{1.5}$.

Figura 2.13: Comportamiento singular

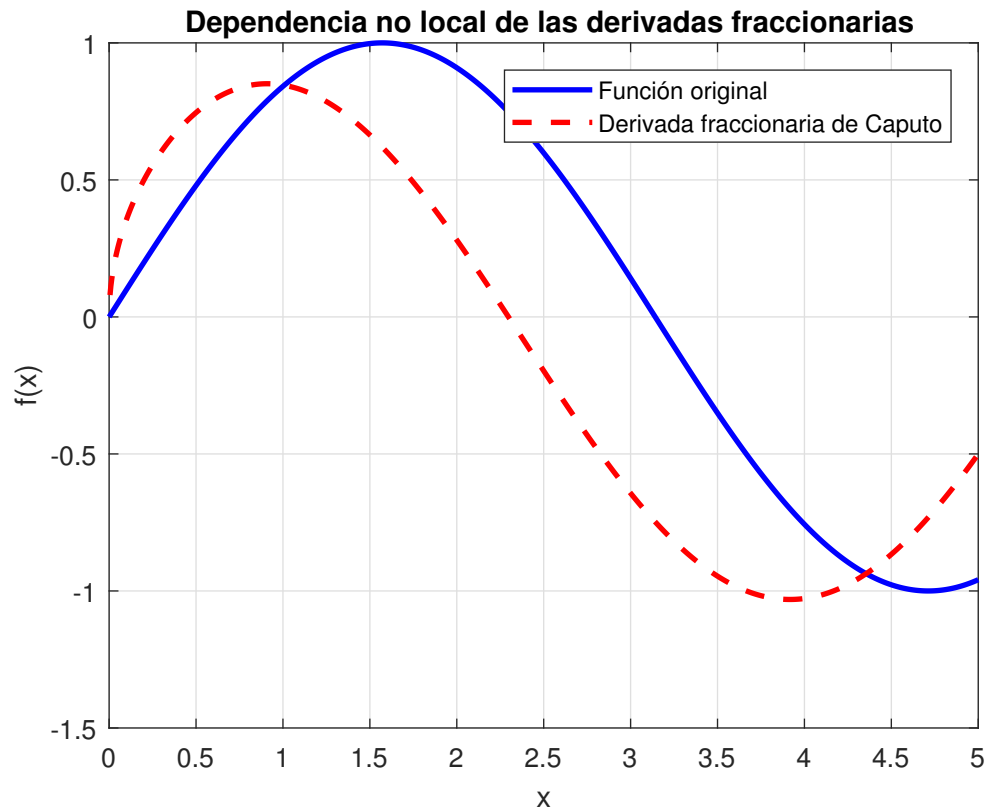


- **Dependencia no local de las derivadas fraccionarias.**

LIMITACIÓN.- Las derivadas fraccionarias tienen carácter no local, es decir, dependen de toda la historia de la función en un intervalo. Esto contrasta con las derivadas enteras, que son locales. El método clásico no puede incorporar esta dependencia no local.

EJEMPLO.- La derivada fraccionaria de Caputo de una función $y(x)$ en $x = a$ depende de los valores de $y(x)$ en todo el intervalo $[0, a]$. Una serie de Taylor clásica en $x = a$ no puede reflejar esta dependencia global. La Figura (2.14) muestra a $y(x) = \sin x$ y su derivada de Caputo ($\alpha = 0.5$).

Figura 2.14: Dependencia no global



2.3. MARCO CONCEPTUAL

2.3.1. Series de Taylor Fraccionarias

2.3.1.1. Extensión Fraccionaria del Método de Taylor

La fórmula de Taylor clásica, dada en (2.99)

$$y(t) = y(t_0) + (t - t_0) \frac{y'(t_0)}{1!} + (t - t_0)^2 \frac{y''(t_0)}{2!} + (t - t_0)^3 \frac{y^{(3)}(t_0)}{3!} + \dots$$

para $t_0 = a$ es

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t - a)^k$$

Y por el Teorema de Taylor

$$y(t) = P_n(t) + R_n(t) \quad (2.103)$$

donde

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(a)}{k!} \cdot (t - a)^k, \quad R_n(t) = \frac{y^{(n+1)}(\xi(t))}{(n+1)!} \cdot (t - a)^{n+1} \quad (2.104)$$

El Teorema (2.105) da la generalización del Teorema del Valor Medio, en la que se involucran derivadas fraccionales de Caputo, (Odibat & Shawagfeh, 2007).

2.3.1. Teorema. Teorema de Valor Medio Generalizado

Sea $f \in C[a, b]$ y ${}^C D_a^\alpha f \in C[a, b]$, para $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} ({}^C D_a^\alpha f)(\xi) \cdot (x - a)^\alpha \quad (2.105)$$

con $a \leq \xi \leq x$, $\forall x \in [a, b]$. ■

Demostración.-

Recordando la definición de la derivada de Caputo, dada en (2.45)

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha + 1 - n}} dt, \quad n - 1 < \alpha \leq n,$$

la definición de la integral fraccionaria de Riemann–Liouville, dada en (2.13)

$$(\mathbf{I}_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a$$

y la relación entre estas dos:

$$\mathbf{I}_a^{\alpha} ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \quad (2.106)$$

Vemos que si $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$, la ecuación (2.106) se convierte en

$$\mathbf{I}_a^{\alpha} ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)) = f(x) - f(a) \quad (2.107)$$

Ahora, aplicamos el operador $\mathbf{I}_a^{\alpha}$ a la Derivada de Caputo de f :

$$\mathbf{I}_a^{\alpha} ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \cdot ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f(t)) dt$$

Usamos el Teorema del valor medio para integrales, ($a \leq \xi \leq x$)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a^{\alpha} ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f)(\xi) \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f)(\xi) \cdot \frac{(x-a)^{\alpha}}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f)(\xi) \cdot (x-a)^{\alpha} \end{aligned} \quad (2.108)$$

De (2.107) y (2.108) se tiene

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \mathbf{I}_a^{\alpha} ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f)(\xi) \cdot (x-a)^{\alpha} \\ \implies f(x) &= f(a) + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} ({}^C\mathbf{D}_a^{\alpha} f)(\xi) \cdot (x-a)^{\alpha} \end{aligned}$$

■

2.3.2. Teorema. *Supongamos que ${}^C D_a^{n \cdot \alpha} f, {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f \in C \langle a, b \rangle$, para $0 < \alpha \leq 1$, entonces se tiene que*

$$\left(I_a^{n \cdot \alpha} {}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \left(I_a^{(n+1) \cdot \alpha} {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f \right)(x) = \frac{(x-a)^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} \left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(a) \quad (2.109)$$

donde

$${}^C D_a^{n \cdot \alpha} = \underbrace{{}^C D_a^\alpha \cdot {}^C D_a^\alpha \dots {}^C D_a^\alpha}_{n - \text{veces}} \quad (2.110)$$

■

Demostración.-

Usando (2.17)

$$\begin{aligned} & \left(I_a^{n \cdot \alpha} {}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \left(I_a^{(n+1) \cdot \alpha} {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f \right)(x) = \\ &= \left(I_a^{n \cdot \alpha} {}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \left(I_a^{n \cdot \alpha + \alpha} {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f \right)(x) \\ &= \left(I_a^{n \cdot \alpha} {}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \left(I_a^{n \cdot \alpha} I_a^\alpha {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f \right)(x) \\ &= I_a^{n \cdot \alpha} \left(\left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \left(I_a^\alpha {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f \right)(x) \right) \\ &= I_a^{n \cdot \alpha} \left(\left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \underbrace{\left(I_a^\alpha {}^C D_a^\alpha \right) \left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x)}_{\text{usamos (2.107)}} \right) \\ &= I_a^{n \cdot \alpha} \left(\left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) - \left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(x) + \left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(a) \right) \\ &= I_a^{n \cdot \alpha} \left(\left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(a) \right) \stackrel{(2.13)}{=} \frac{(x-a)^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} \left({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f \right)(a). \end{aligned}$$

■

2.3.2. Fórmula de Taylor generalizado

2.3.3. Teorema. Fórmula de Taylor Generalizado

Supongamos que ${}^C D_a^{k \cdot \alpha} f \in C \langle a, b \rangle$, para $k = 0, 1, \dots, n+1$, con $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$f(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^{j \cdot \alpha}}{\Gamma(j \cdot \alpha + 1)} ({}^C D_a^{j \cdot \alpha} f)(a) + \frac{({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \cdot (x-a)^{(n+1) \cdot \alpha} \quad (2.111)$$

con $a \leq \xi \leq x$, $\forall x \in \langle a, b \rangle$, donde ${}^C D_a^{n \cdot \alpha}$ es como en (2.110). ■

Demostración.-

Aplicamos sumatoria a (2.109)

$$\sum_{j=0}^n [(I_a^{j \cdot \alpha} {}^C D_a^{j \cdot \alpha} f)(x) - (I_a^{(j+1) \cdot \alpha} {}^C D_a^{(j+1) \cdot \alpha} f)(x)] = \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^{j \cdot \alpha}}{\Gamma(j \cdot \alpha + 1)} ({}^C D_a^{j \cdot \alpha} f)(a) \quad (2.112)$$

Efectuamos la suma (fórmula telescópica) en el lado izquierdo de (2.112)

$$f(x) - (I_a^{(n+1) \cdot \alpha} {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^{j \cdot \alpha}}{\Gamma(j \cdot \alpha + 1)} ({}^C D_a^{j \cdot \alpha} f)(a) \quad (2.113)$$

Aplicamos la integral fraccionaria de Riemann–Liouville, de orden $(n+1) \cdot \alpha$,

a ${}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f$, es decir, (2.13),

$$\begin{aligned} (I_a^{(n+1) \cdot \alpha} {}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n+1) \cdot \alpha - 1} ({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(t) dt \\ &= \frac{({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha)} \int_a^x (x-t)^{(n+1) \cdot \alpha - 1} dt \quad (2.114) \end{aligned}$$

$$= \frac{({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \cdot (x-a)^{(n+1) \cdot \alpha} \quad (2.115)$$

En (2.114) se aplicó el Teorema del Valor medio, dado que $a \leq \xi \leq x$ y en (2.115) se desarrolló la integral y se tuvo en cuenta que $z \cdot \Gamma(z) = \Gamma(z+1)$. Reemplazamos (2.115) en (2.113) y despejamos $f(x)$, con ello se obtiene (2.111), que es lo que se quería probar. ■

2.3.3. Taylor generalizado como extensión de Taylor clásico

El Teorema (2.3.3) efectivamente es la generalización de la Fórmula de Taylor clásico, pues si $\alpha = 1$, (2.111) representa la fórmula de Taylor ordinaria. Veamos.

De (2.47) y (2.25) tenemos (Huang et al., 2011)

$$\begin{aligned}
 (2.25) \quad &: \quad (D_{a+}^0 y)(x) = y(x); \quad (D_{a+}^n y)(x) = y^{(n)}(x) \\
 &\implies (D_{a+}^0 y)(a) = y(a), \quad (D_{a+}^n y)(a) = y^{(n)}(a); \\
 (2.47) \quad &: \quad ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) = (D_{a+}^\alpha y)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha} \\
 &\implies ({}^C D_{a+}^\alpha y)(a) = (D_a^\alpha y)(a) = y^{(\alpha)}(a), \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Entonces si $\alpha = 1$ (2.111) se convierte en (2.116), que es el teorema de Taylor clásico.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^j}{\Gamma(j+1)} ({}^C D_{a+}^j f)(a) + \frac{({}^C D_a^{(n+1)} f)(\xi)}{\Gamma(n+2)} \cdot (x-a)^{(n+1)} \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^j}{\Gamma(j+1)} (D_{a+}^j f)(a) + \frac{(D_{a+}^{(n+1)} f)(\xi)}{\Gamma(n+2)} \cdot (x-a)^{(n+1)} \\
 &= \sum_{j=0}^n \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{(n+1)}. \tag{2.116}
 \end{aligned}$$

2.3.4. Análisis de convergencia

La derivada de Caputo para una función x^λ , es:

$${}^C D_0^\alpha x^\lambda = {}^C D^\alpha x^\lambda = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\alpha)} \cdot x^{\lambda-\alpha} & , \quad \text{si } \lambda \geq \alpha \\ 0 & , \quad \text{si } \lambda \in \mathbb{N}, \lambda < \alpha \end{cases}$$

Una serie de potencias fraccional es de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n \cdot \alpha}, \quad \text{con } \alpha > 0.$$

2.3.4. Teorema. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n \cdot \alpha}$, $\alpha \in \langle 0, 1]$, una serie de potencias fraccional,

sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y

$$r = \begin{cases} R^{\frac{1}{\alpha}} & , \quad \text{si } R < \infty \\ \infty & , \quad \text{si } R = \infty. \end{cases}$$

Entonces

(i) Si $R > 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n \cdot \alpha}$ converge absolutamente y uniformemente en $[0, b]$, $\forall b \in \langle 0, r \rangle$ y $\exists N(b) \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|c_n| \leq b^{-n \cdot \alpha}, \quad \forall n \geq N(b);$$

(ii) si $f : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n \cdot \alpha}$, $\forall t \in [0, r)$, entonces f es continua y existe la derivada de Caputo,

$${}^C D^\alpha f : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Además, la serie de derivadas de Caputo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n {}^C D^\alpha t^{n \cdot \alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}{\Gamma((n-1) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n-1) \cdot \alpha}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[0, b]$, $\forall b \in \langle 0, r \rangle$ y

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n {}^C D^\alpha t^{n \cdot \alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}{\Gamma((n-1) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n-1) \cdot \alpha}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

$\forall t \in [0, r]$.

■

Demostración.-

La demostración del Teorema (2.3.4) está en el Anexo (7.2).

■

En el Teorema (2.3.3), tenemos

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{j \cdot \alpha}}{\Gamma(j \cdot \alpha + 1)} ({}^C D_a^{j \cdot \alpha} f)(a) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (x-a)^{j \cdot \alpha} \quad (2.118)$$

donde

$$c_j = \frac{({}^C D_a^{j \cdot \alpha} f)(a)}{\Gamma(j \cdot \alpha + 1)}$$

La serie (2.118) será convergente cuando

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} (x-a)^{(n+1) \cdot \alpha}}{c_n (x-a)^{n \cdot \alpha}} \right| < 1$$

Es decir

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-a)^{(n+1) \cdot \alpha} ({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(a)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)}}{\frac{(x-a)^{n \cdot \alpha} ({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f)(a)}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}} \right| \\ &= |x-a|^\alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n \cdot \alpha + 1) ({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(a)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1) ({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f)(a)} < 1 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Si el límite en (2.119) existe, entonces el radio de convergencia es

$$R = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1) ({}^C D_a^{n \cdot \alpha} f)(a)}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1) ({}^C D_a^{(n+1) \cdot \alpha} f)(a)}}. \quad (2.120)$$

2.3.1. Definición. La función $f : I = [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *representable en una serie de Taylor α -fraccional* sobre I si ella puede ser escrita como una suma de una serie de potencias fraccional:

$$f(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^{n \cdot \alpha}, \quad \forall t \in I. \quad (2.121)$$

■

Para el conjunto cerrado $I = [0, b]$, se dice que f es representable en serie de Taylor α -fraccional sobre I , si existe $b^* > b$, $0 \leq b < b^*$, tal que f es representable en series de Taylor α -fraccional sobre $[0, b^*)$.

Al conjunto de todas las funciones representables en serie de Taylor α -fraccionales sobre $I = [0, b)$ o $I = [0, b]$ se le denota por $\mathcal{T}_\alpha(I)$,

$$\mathcal{T}_\alpha = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}, f = \sum_{n \geq 0} c_n t^{n \cdot \alpha}, \forall t \in I \right\} \quad (2.122)$$

2.3.1. Corolario. Si $f \in \mathcal{T}_\alpha$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{N}$, existe ${}^C D^{k \cdot \alpha} f \in C(I)$ y

$${}^C D^{k \cdot \alpha} f(t) = \sum_{n \geq k} c_n \frac{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}{\Gamma((n - k) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n - k) \cdot \alpha}, \quad \forall t \in I. \quad (2.123)$$

■

Los coeficientes c_n de la serie de Taylor α -fraccional, dados en (2.121) son

$$c_n = \frac{{}^C D^{n \cdot \alpha} f(0)}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}. \quad (2.124)$$

El siguiente teorema nos da las condiciones para que una función f sea representable en una serie de Taylor fraccional.

2.3.5. Teorema. Sea $b > 1$ y $f : [0, b) \rightarrow \mathbb{R}$, una función tal que existen

${}^C D^{n\cdot\alpha} f \in C([0, 1])$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \alpha \leq 1$. Sea

$$G_n = \|{}^C D^{n\cdot\alpha} f\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |{}^C D^{n\cdot\alpha} f(t)| \quad (2.125)$$

Si $M_n = o(\Gamma(n \cdot \alpha + 1))$, entonces f es representable en una serie de Taylor α -fraccional sobre $[0, 1]$ y

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}^C D^{n\cdot\alpha} f(0)}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{n\cdot\alpha}, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.126)$$

■

Demostración.-

Por el Teorema (2.3.3) y (2.111), con $x = t$ y $a = 0$, se tiene

$$f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\cdot\alpha}}{\Gamma(k \cdot \alpha + 1)} ({}^C D_0^{k\cdot\alpha} f)(0) = \frac{({}^C D_0^{(n+1)\cdot\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n+1)\cdot\alpha} \quad (2.127)$$

con $0 \leq \xi \leq t$. Además para $0 \leq t \leq 1 \implies |t^{(n+1)\cdot\alpha}| \leq 1$, y

$$\begin{aligned} \left| \frac{({}^C D_0^{(n+1)\cdot\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n+1)\cdot\alpha} \right| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \right| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} |{}^C D^{(n+1)\cdot\alpha} f(t)| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \right| \cdot \|{}^C D^{(n+1)\cdot\alpha} f\| \\ &= \left| \frac{1}{\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)} \right| \cdot G_{n+1} \end{aligned} \quad (2.128)$$

Pero G_{n+1} es $o(\Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1))$, es decir que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$G_{n+1} = \epsilon \Gamma((n+1) \cdot \alpha + 1)$$

Por tanto en (2.128), tenemos que

$$\left| \frac{\left({}^C D_0^{(n+1)\cdot\alpha} f \right) (\xi)}{\Gamma((n+1)\cdot\alpha+1)} \cdot t^{(n+1)\cdot\alpha} \right| < \epsilon.$$

Aplicando límite al valor absoluto en (2.127), se obtiene

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n\cdot\alpha}}{\Gamma(n\cdot\alpha+1)} \left({}^C D_0^{n\cdot\alpha} f \right) (0).$$

■

2.3.5. Error en la fórmula de Taylor generalizada

Al igual que en la fórmula de Taylor ordinaria, no podemos utilizar infinitos sumandos para hallar f , entonces el siguiente teorema da la forma de aproximar una función teniendo en cuenta el Teorema (2.3.5).

2.3.6. Teorema. *Supongamos que ${}^C D_a^{k\cdot\alpha} f \in C(\langle a, b \rangle]$, para $k = 0, 1, \dots, n+1$ y $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$. Si $a \leq x \leq b$, se tiene que*

$$f(x) \approx P_N^\alpha(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(x-a)^{k\cdot\alpha}}{\Gamma(k\cdot\alpha+1)} \cdot \left({}^C D_a^{k\cdot\alpha} f \right) (a). \quad (2.129)$$

Además, existe un ξ con $\xi \in [a, x]$ tal que el error $R_N^\alpha(x)$ tiene la forma

$$R_N^\alpha(x) = \frac{\left({}^C D_a^{(N+1)\cdot\alpha} f \right) (\xi)}{\Gamma((N+1)\cdot\alpha+1)} \cdot (x-a)^{(N+1)\cdot\alpha}. \quad (2.130)$$

■

2.3.1. Ejemplo. *La función de Mittag-Leffler, dada en (2.11)*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\cdot\alpha+1)}$$

Usando el Teorema (2.3.6), con $N = 3$, tenemos, para $E_\alpha(\mathbf{x})$ y $E_\alpha(\mathbf{x}^\alpha)$

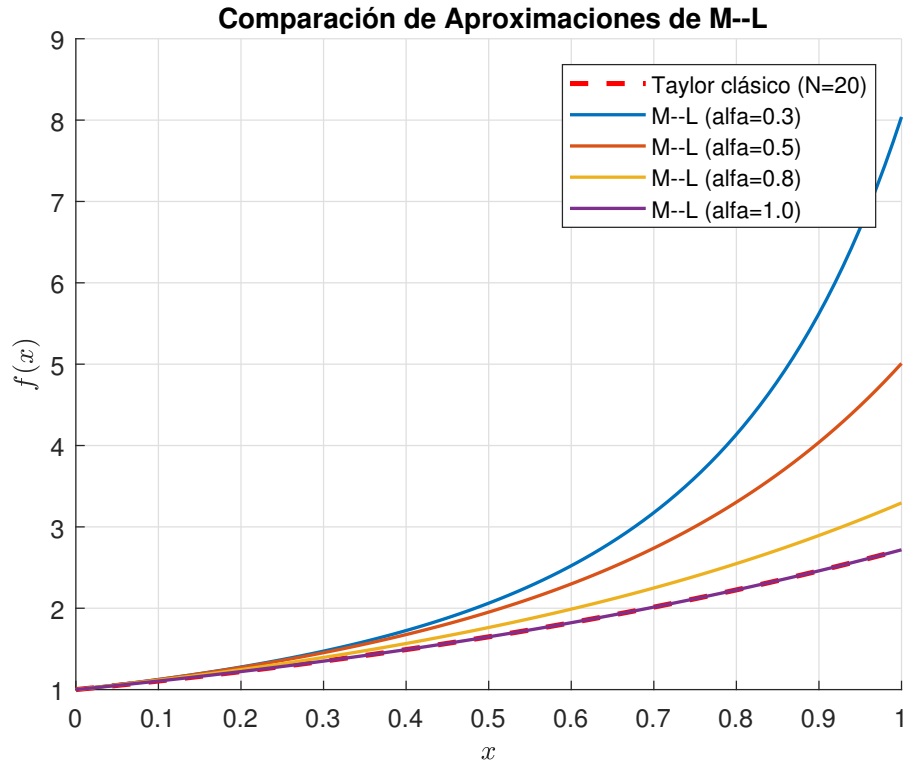
$$E_\alpha(\mathbf{x}) \approx P_N^\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^2}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^3}{\Gamma(3\alpha+1)} \quad (2.131)$$

$$E_\alpha(\mathbf{x}^\alpha) \approx Q_N^\alpha(x) = 1 + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \quad (2.132)$$

■

En la Figura (2.15) se muestran las gráficas de las aproximaciones de la función Mittag–Leffler $E_\alpha(x)$, para valores de $x \in [0, 1]$ considerando $N = 20$ sumandos y diversos valores de $\alpha = 0.3, 0.5, 0.8, 1.0$. Se observa que con el método clásico y con $\alpha = 1$ las gráficas coinciden.

Figura 2.15: Aproximación de $f(x) = E_\alpha(x)$, $a = 0$ y $N = 20$.



En el Cuadro (2.2) se dan algunas aproximaciones de $E_\alpha(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Cuadro 2.2: Valores aproximados de $E_\alpha(x)$, $N = 20$.

x	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1.0$	Taylor₂₀
0.00	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
0.20	1.27767	1.2726	1.24562	1.22153	1.2214
0.40	1.72574	1.67623	1.56663	1.49219	1.49182
0.60	2.52246	2.29885	1.98906	1.82288	1.82212
0.80	4.13655	3.30386	2.54861	2.22692	2.22554
1.00	8.03892	5.00898	3.29457	2.72059	2.71828

2.3.6. Uso de la fórmula generalizada de Taylor

La idea detrás de la aplicación de la fórmula generalizada de Taylor es usar las series, es decir que suponemos que la solución de la ecuación diferencial fraccionaria admite una representación en series de potencias fraccionales de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}$$

Veamos un ejemplo.

2.3.2. Ejemplo. *Consideremos la ecuación diferencial*

$${}^C D_0^\alpha f(x) = r \cdot f(x) \tag{2.133}$$

junto con la condición

$$f(0) = f_0.$$

Asimismo, exigimos que $0 < \alpha \leq 1$, $r \in \mathbb{R}$ y $x > 0$. Entonces, usamos la *Fórmula Generalizada de Taylor*, es decir que suponemos que $f(x)$ admite la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} \quad (2.134)$$

Aplicamos la *Derivada de Caputo*, dada en Definición (2.2.7).

$${}^C D_0^\alpha f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma((n-1)\alpha + 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{x^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}. \quad (2.135)$$

Reemplazamos (2.135) y (2.134) en la ecuación diferencial fraccionaria (2.133),

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{x^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} = r \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} \quad (2.136)$$

de donde

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= r \cdot c_n, \quad c_0 = f_0 \\ c_1 &= r \cdot c_0 = r \cdot f_0 \\ c_2 &= r \cdot c_1 = r \cdot (r \cdot f_0) = r^2 \cdot f_0 \\ c_3 &= r \cdot c_2 = r \cdot (r^2 \cdot f_0) = r^3 \cdot f_0 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ c_n &= r^n \cdot f_0 \end{aligned} \quad (2.137)$$

La función $f(x)$ será entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 \sum_{n=0}^{\infty} r^n \frac{x^{n \cdot \alpha}}{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)} \\ &= f_0 E_\alpha(r x^\alpha). \end{aligned} \quad (2.138)$$

■

2.3.6.1. Aplicación del Método en Ecuaciones Integrodiferenciales

Consideramos la ecuación integrodiferencial de Fredholm de la forma (Podlubny & Ortigueira, 2016)

$$\sum_{i=0}^N P_i(x) y^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \mathbf{y}(t) dt \quad (2.139)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$y^{(i)}(c) = y_i, \quad a \leq c \leq b, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.140)$$

donde $y(x)$ es una función desconocida a determinar, λ es un parámetro conocido y las funciones $f(x), P_i(x), (i = 0, 1, \dots, N), K(x, t)$ son funciones dadas tal que satisfacen ciertas condiciones que hacen que (2.139) junto con (2.140) tenga solución única.

Asumiendo que y es suficientemente diferenciable, expandimos $y(t)$ alrededor de x , donde $x, t \in \langle a, b \rangle$,

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{y}^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i + R_n(x, t), \quad n \geq N \quad (2.141)$$

Descartamos el residuo $R_n(x, t)$. Reemplazamos (2.141) en (2.139),

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N P_i(x) y^{(i)}(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \left(\sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(x)}{i!} (t-x)^i \right) dt \\ &= f(x) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{i!} \int_a^b K(x, t) \cdot (t-x)^i dt \right) y^{(i)}(x) \\ &= f(x) + \left(\sum_{i=0}^N + \sum_{i=N+1}^n \right) \left(\frac{\lambda}{i!} \int_a^b K(x, t) \cdot (t-x)^i dt \right) y^{(i)}(x) \end{aligned}$$

Aquí se obtiene una ecuación lineal con $n+1$ incógnitas: $y, y', \dots, y^{(n)}$

$$\sum_{i=0}^n a_{0i}(x) \cdot y^{(i)}(x) = f(x), \quad (2.142)$$

donde

$$a_{0i}(x) = \begin{cases} P_i(x) - \frac{\lambda}{i!} \int_a^b K(x, t) \cdot (t-x)^i dt & , \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \\ -\frac{\lambda}{i!} \int_a^b K(x, t) \cdot (t-x)^i dt & , \quad i = N+1, N+2, \dots, n. \end{cases} \quad (2.143)$$

Ahora integramos (2.139) desde c hasta x ,

$$\begin{aligned} \int_c^x \left(\sum_{i=0}^N P_i(t) y^{(i)}(t) \right) dt &= \int_c^x f(t) dt + \int_c^x \left(\lambda \int_a^b K(s, t) \mathbf{y}(t) dt \right) ds \\ \sum_{i=0}^N \underbrace{\int_c^x P_i(t) y^{(i)}(t) dt}_{(*)} &= \int_c^x f(t) dt + \lambda \int_a^b \int_c^x K(s, t) ds \mathbf{y}(t) dt \quad (2.144) \end{aligned}$$

Aplicamos integración por partes a $(*)$ de (2.144), para $i = 0, 1, \dots, 6$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_c^x P_0 y^{(0)} dt &= s_0 \\ \int_c^x P_1 y^{(1)} dt &= P_1 y \Big|_c^x - s_1 \\ \int_c^x P_2 y^{(2)} dt &= \left(P_2 y^{(1)} - P_2^{(1)} y \right) \Big|_c^x + s_2 \\ \int_c^x P_3 y^{(3)} dt &= \left(P_3 y^{(2)} - P_3^{(1)} y^{(1)} + P_3^{(2)} y \right) \Big|_c^x - s_3 \\ \int_c^x P_4 y^{(4)} dt &= \left(P_4 y^{(3)} - P_4^{(1)} y^{(2)} + P_4^{(2)} y^{(1)} - P_4^{(3)} y \right) \Big|_c^x + s_4 \\ \int_c^x P_5 y^{(5)} dt &= \left(P_5 y^{(4)} - P_5^{(1)} y^{(3)} + P_5^{(2)} y^{(2)} - P_5^{(3)} y^{(1)} + P_5^{(4)} y \right) \Big|_c^x - s_5 \\ \int_c^x P_6 y^{(6)} dt &= \left(P_6 y^{(5)} - P_6^{(1)} y^{(4)} + P_6^{(2)} y^{(3)} - P_6^{(3)} y^{(2)} + P_6^{(4)} y^{(1)} - P_6^{(5)} y \right) \Big|_c^x + s_6 \end{aligned}$$

donde $s_i = \int_c^x P_i^{(i)}(t) \mathbf{y}(t) dt$, ($i = 0, 1, \dots, 6$). Generalizando para $i = k$

tenemos

$$\int_c^x P_k y^{(k)} = \left(P_k y^{(k-1)} - P_k^{(1)} y^{(k-2)} + \dots + (-1)^{k-1} P_k^{(k-1)} \mathbf{y} \right) \Big|_c^x + (-1)^k s_k \quad (2.145)$$

Realizamos la suma factorizando $y, y', y'', \dots$, por ejemplo si $N = 6$

$$\begin{aligned}
 \left(P_1 - P_2^{(1)} + P_3^{(2)} - P_4^{(3)} + P_5^{(4)} - P_6^{(5)} \right) \mathbf{y} &= \left(\sum_{k=1}^6 (-1)^{k-1} P_k^{(k-1)} \right) \mathbf{y} \\
 \left(P_2 - P_3^{(1)} + P_4^{(2)} - P_5^{(3)} + P_6^{(4)} \right) y^{(1)} &= \left(\sum_{k=2}^6 (-1)^{k-2} P_k^{(k-2)} \right) y^{(1)} \\
 \left(P_3 - P_4^{(1)} + P_5^{(2)} - P_6^{(3)} \right) y^{(2)} &= \left(\sum_{k=3}^6 (-1)^{k-3} P_k^{(k-3)} \right) y^{(2)} \\
 \left(P_4 - P_5^{(1)} + P_6^{(2)} \right) y^{(3)} &= \left(\sum_{k=4}^6 (-1)^{k-4} P_k^{(k-4)} \right) y^{(3)} \\
 \left(P_5 - P_6^{(1)} \right) y^{(4)} &= \left(\sum_{k=5}^6 (-1)^{k-5} P_k^{(k-5)} \right) y^{(4)} \\
 (P_6) y^{(5)} &= \left(\sum_{k=6}^6 (-1)^{k-6} P_k^{(k-6)} \right) y^{(5)}
 \end{aligned}$$

Por tanto la suma de los $y^{(i)}$ da

$$\left(\sum_{k=i+1}^N (-1)^{k-(i+1)} P_k^{(k-(i+1))}(t) \right) y^{(i)}(t) = H_i(t) \cdot y^{(i)}(t), \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

Hacemos el paréntesis de la izquierda igual a $H_i(t)$. Y la suma total dará

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^N \int_c^x P_i(t) y^{(i)}(t) dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \left(\sum_{k=i+1}^N (-1)^{k-(i+1)} P_k^{(k-(i+1))}(t) \right) y^{(i)}(t) \Big|_c^x \\
 &\quad + \int_c^x \sum_{k=0}^N (-1)^k P_k^{(k)}(t) \mathbf{y}(t) dt. \quad (2.146)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^N \int_c^x P_i(t) y^{(i)}(t) dt &= \sum_{i=0}^{N-1} (H_i(x) y^{(i)}(x) - H_i(c) y^{(i)}(c)) \\
 &\quad + \int_c^x \sum_{k=0}^N (-1)^k P_k^{(k)}(t) \mathbf{y}(t) dt. \quad (2.147)
 \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos (2.147) en (2.144)

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{N-1} (H_i(x) y^{(i)}(x) - H_i(c) y^{(i)}(c)) &+ \int_c^x \sum_{k=0}^N (-1)^k P_k^{(k)}(t) \mathbf{y}(t) dt \\
 &= \int_c^x f(t) dt + \lambda \int_a^b \int_c^x K(s, t) ds \mathbf{y}(t) dt \quad (2.148)
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la representación aproximada de $\mathbf{y}(t)$ en (2.141), y (2.140),

la ecuación (2.148) queda

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} (H_i(t) y^{(i)}(t)) \Big|_c^x + \int_c^x \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k P_k^{(k)}(t) \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{y}^{(i)}(\mathbf{x})}{i!} (t - \mathbf{x})^i \right) dt \\ &= \int_c^x f(t) dt + \lambda \int_a^b \int_c^x K(s, t) ds \left(\sum_{i=0}^n \frac{\mathbf{y}^{(i)}(\mathbf{x})}{i!} (t - \mathbf{x})^i \right) dt \end{aligned} \quad (2.149)$$

Descomponemos la suma

$$\sum_{i=0}^n (\cdot) = \sum_{i=0}^{N-1} (\cdot) + \sum_{i=N}^n (\cdot)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{N-1} (H_i(x) + Q_i(x) + R_i(x)) y^{(i)}(x) + \sum_{i=N}^n (Q_i(x) + R_i(x)) y^{(i)}(x) \\ &= \int_c^x f(t) dt + \sum_{i=0}^{N-1} H_i(c) y_i \end{aligned} \quad (2.150)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} H_i(x) &= \sum_{k=i+1}^N (-1)^{k-(i+1)} P_k^{(k-(i+1))}(t) \\ Q_i(x) &= \int_c^x \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k P_k^{(k)}(t) \right) \cdot \frac{(t - \mathbf{x})^i}{i!} dt \\ R_i(x) &= -\frac{\lambda}{i!} \int_a^b (t - \mathbf{x})^i \int_c^x K(s, t) ds dt \end{aligned} \right\} \quad (2.151)$$

La ecuación (2.144) queda en una forma más simple

$$\sum_{i=0}^n a_{1i}(x) y^{(i)}(x) = f_1(x), \quad (2.152)$$

donde

$$a_{1i}(x) = \begin{cases} H_i(x) + Q_i(x) - R_i(x); & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ Q_i(x) - R_i(x); & i = N, N+1, \dots, n \end{cases} \quad (2.153)$$

$$f_1(x) = \sum_{i=0}^{N-1} H_i(c)y_i + \int_c^x f(t) dt. \quad (2.154)$$

Recordando que si integramos repetidamente, (m -veces), $y(x)$ desde c a x obtenemos

$$\underbrace{\int_c^x \int_c^x \cdots \int_c^x y(t) dt \cdots dt}_{m\text{-veces}} = \frac{1}{(m-1)!} \int_c^x (x-t)^{m-1} y(t) dt. \quad (2.155)$$

Entonces al integrar m -veces a cada término de la ecuación (2.139), tenemos

$$\begin{aligned} \int_c^x \cdots \int_c^x \left(\sum_{i=0}^N P_i y^{(i)} \right) dt \cdots dt &= \sum_{i=0}^N \left(\int_c^x \cdots \int_c^x P_i y^{(i)} dt \cdots dt \right) \\ &= \sum_{i=0}^N \int_c^x (x-t)^{m-1} P_i(t) y^{(i)}(t) dt \end{aligned}$$

$$\int_c^x \cdots \int_c^x (f(t)) dt \cdots dt = \int_c^x (x-t)^{m-1} f(t) dt$$

$$\int_c^x \cdots \int_c^x \left(\lambda \int_a^b K(x, t) \mathbf{y}(t) dt \right) dt \cdots dt = \lambda \int_a^b \mathbf{y}(t) \left[\int_c^x (x-s)^{m-1} K(s, t) ds \right] dt.$$

Integramos m -veces la ecuación (2.139) y sustituimos los tres resultados anteriores, obteniéndose

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \int_c^x (x-t)^{m-1} P_i(t) y^{(i)}(t) dt &= \int_c^x (x-t)^{m-1} f(t) dt + \\ &\quad \lambda \int_a^b \mathbf{y}(t) \left[\int_c^x (x-s)^{m-1} K(s, t) ds \right] dt \end{aligned} \quad (2.156)$$

Aplicemos integración por partes a las integrales del lado izquierdo de (2.156).

Sin embargo para obtener una expresión similar a (2.146) definimos, (usamos la notación de (Huang, 2011)),

$$\begin{aligned} P_{mi}(x, t) &= P_i(t) \cdot (x - t)^{m-1} \quad ; \quad i = 0, 1, \dots, N, \\ P_{mi}^{(0,j)}(x, t) &= \frac{\partial^j P_{mi}(x, t)}{\partial t^j} \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Con las definiciones dadas en (2.157), la integración por partes queda

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N \int_c^x P_{mi}(x, t) y^{(i)}(t) dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \left[\sum_{k=i+1}^N P_{mk}^{(0,k-i-1)}(x, t) (-1)^{k-i-1} \right] y^{(i)}(t) \Big|_c^x \\ &\quad + \int_c^x \sum_{k=0}^N (-1)^k P_{mk}^{(0,k)}(x, t) y(t) dt. \end{aligned} \quad (2.158)$$

En forma similar que (2.151), hacemos

$$\left. \begin{aligned} H_{mi}(x) &= \sum_{k=i+1}^N (-1)^{k-(i+1)} P_{mk}^{(0,k-i-1)}(x, x), \\ Q_{mi}(x) &= \int_c^x \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k P_{mk}^{(0,k)}(x, t) \cdot \frac{(t-x)^i}{i!} \right) dt, \\ R_{mi}(x) &= \frac{\lambda}{i!} \int_a^b (t-x)^i \left[\int_c^x K(s, t) (x-s)^{m-1} ds \right] dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.159)$$

Para $m = 1$, se tiene

$$H_{1i}(x) = H_i(x), \quad Q_{1i}(x) = Q_i(x), \quad R_{1i}(x) = R_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.160)$$

Sustituimos en la ecuación (2.156) la aproximación para $y(t)$ dada en (2.141), obteniéndose

$$\sum_{i=0}^n a_{mi}(x) y^{(i)}(x) = f_m(x), \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (2.161)$$

donde

$$a_{mi}(x) = \begin{cases} H_{mi}(x) + Q_{mi}(x) - R_{mi}(x); & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ Q_{mi}(x) - R_{mi}(x); & i = N, N+1, \dots, n, \end{cases} \quad (2.162)$$

$$f_m(x) = \sum_{i=0}^{N-1} H_{mi}(c) y_i + \int_c^x (x-t)^{m-1} f(t) dt. \quad (2.163)$$

De (2.142) y (2.161) se forma un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ variables,

que en forma matricial es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{00}(x) & a_{01}(x) & \cdots & a_{0n}(x) \\ a_{10}(x) & a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0}(x) & a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} y(x) \\ y^{(1)}(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x) \\ f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}(x)} \quad (2.164)$$

$$\mathbf{A}(x) \mathbf{Y}(x) = \mathbf{F}(x). \quad (2.165)$$

Además, mediante la regla de Cramer,

$$y(x) = \frac{\det \mathbf{M}(x)}{\det \mathbf{A}(x)} \quad (2.166)$$

donde la matriz $\mathbf{M}$ es la matriz $\mathbf{A}$ cuya primera columna ha sido reemplazada por el vector columna $\mathbf{F}$.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Memoria fraccionaria

La **memoria fraccionaria** es una propiedad de los sistemas descritos por **derivadas de orden fraccionario**, es decir, derivadas de orden no entero (como **0.5, 0.5, 1.3, -0.7**, etc.). Esta propiedad significa que el **comportamiento actual de un sistema depende no solo de su estado presente, sino también de toda su historia pasada**, de manera **continua y acumulativa**.

A diferencia de los sistemas modelados por ecuaciones diferenciales clásicas (de orden entero), donde solo el valor presente y quizá unos pocos anteriores influyen, en sistemas fraccionarios la historia completa **tiene peso**, aunque decreciente (normalmente, los efectos pasados se “olvidan” de forma lenta y no abrupta).

Esta “memoria” se modela matemáticamente a través de operadores integrales que ponderan el pasado con un núcleo de tipo $(t - \tau)^{-\alpha}$ (donde α es el orden fraccionario).

3.1.1. Ejemplo de memoria fraccionaria

Supongamos una **ecuación diferencial fraccionaria** (EDF) de orden $\alpha = 0.5$:

$$D_t^{0.5}y(t) + \lambda y(t) = f(t), \quad (3.1)$$

donde

- $D_t^{0.5}$ es la derivada fraccionaria de orden $\alpha = 0.5$ respecto al tiempo t ,
- λ es un parámetro positivo,
- $f(t)$ es una función de entrada.

Interpretación: El cambio $y(t)$ no depende solo del valor de $y(t)$ en el instante actual, sino de una **integral de sus valores pasados**. Es como si el sistema tuviera “memoria heredada” de lo que ocurrió anteriormente.

En una ecuación clásica de primer orden $\frac{dy}{dt} + \lambda y = f(t)$, el estado depende solo del valor actual y su tasa de cambio inmediata.

3.1.2. Efecto de la memoria fraccionaria

1. **Comportamiento anómalo:**

- Modela **procesos no locales** en el tiempo, como **difusión anómala** (por ejemplo, partículas que no difunden como en la ley de Fick clásica, sino más lentamente o más rápido).
- En mecánica, describe materiales con **histéresis** o **viscoelasticidad** (por ejemplo, goma o tejidos biológicos).

2. Longevidad de los efectos:

- Los efectos de un estímulo no desaparecen rápidamente, sino que se atenúan en el tiempo de manera suave, como $t^{-\alpha}$.
- Esto explica por qué sistemas fraccionarios son buenos modelos para **materiales con efectos de relajación lenta**.

3. Efectos acumulativos:

- El sistema tiene una respuesta **acumulativa**, incluso pequeños estímulos prolongados en el tiempo pueden tener un gran efecto.

Comparación entre sistemas:

Tipo de sistema	Dependencia del pasado
Ecuación diferencial clásica	Estado actual y sus derivadas inmediatas
Ecuación diferencial fraccionaria	Todo el historial pasado (memoria de largo alcance).

3.1.1. Ejemplo. Consideremos la EDF modelada con derivada de Caputo

$$D_t^\alpha = -\lambda y(t)$$

con condiciones iniciales: $y(0) = 1$, $\lambda > 0$ y $0 < \alpha \leq 1$.

Interpretación:

- Si $\alpha = 1$ se tiene un decaimiento exponencial clásico: $y(t) = e^{-\lambda t}$.
- Si $\alpha < 1$, el decaimiento es **más lento**, mostrando **memoria** (no se “olvida” tan rápido del estado inicial).

La solución exacta para este tipo de EDF es:

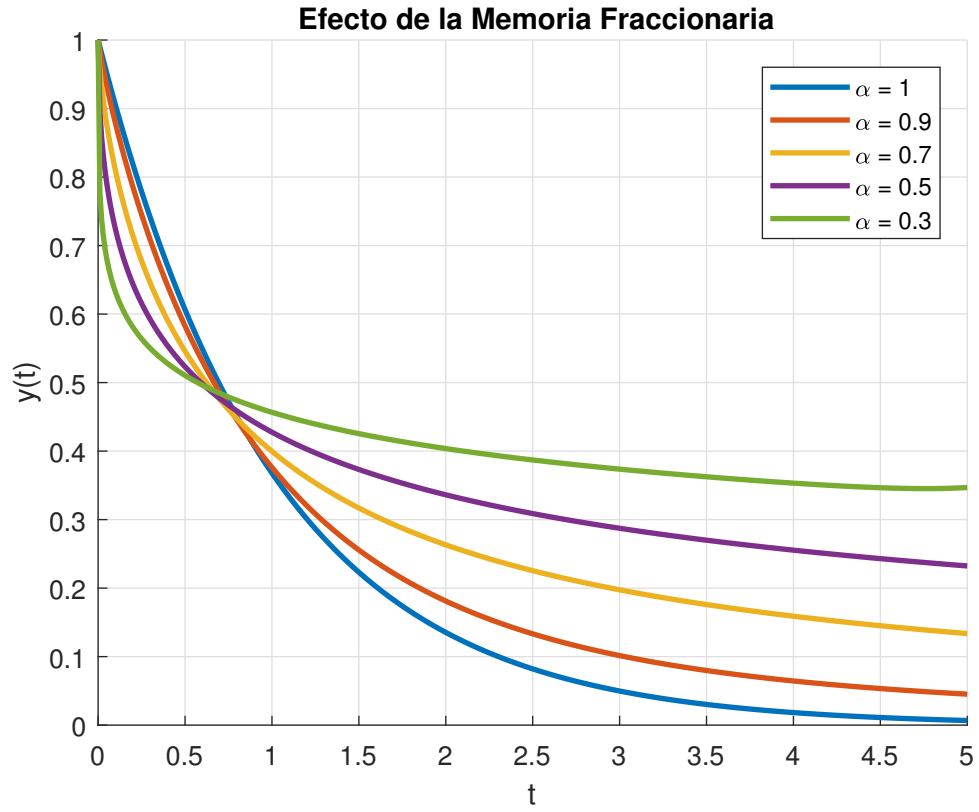
$$y(t) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$$

donde E_α es la **función de Mittag–Leffler**. ■

Como se puede observar en la Figura (3.1), el efecto memoria se da cuando el valor de α es menor a 1, el decaimiento es más lento, es decir que hay **memoria prolongada**. Cuanto más pequeño es el valor de α , más “lenta” es la relajación.

Esto ilustra perfectamente cómo los sistemas fraccionarios “recuerdan” más tiempo el pasado.

Figura 3.1: Efecto memoria en la EDF $D_t^\alpha = -\lambda y(t)$.



3.2. Método de diferencias finitas centrales

Para resolver numéricamente una ecuación diferencial de orden 2 se puede hacer uso del método de diferencias finitas centradas a fin de aproximar $\partial^2 u / \partial x^2$, es decir (Burden & Faires, 2010):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.2)$$

Esta fórmula se aplica **para todos los nodos internos** originando una matriz diagonal

$$A = \frac{c}{(\Delta x)^2} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3.3. Modelo: Ecuación de difusión fraccionaria en el tiempo

Consideremos la ecuación

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = c \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.4)$$

donde:

- $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$ es la derivada fraccionaria de Caputo en el tiempo t ,
- c es el coeficiente de difusión,
- $u(x, t)$ representa la temperatura o concentración en el punto x y el tiempo t .

Ponemos las condiciones:

- Dominio espacial: $x \in [0, L]$,
- Condiciones de frontera:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0,$$

- Condición inicial:

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{L}$$

3.3.1. Derivada de Caputo en el tiempo

La definición viene dada por

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{\partial s}{(t - s)^\alpha}$$

que representa la **memoria hereditaria**: el estado actual depende de toda la historia pasada.

3.3.2. Método de Galerkin (para tiempo fraccionario)

Este método aproxima la solución como combinación de funciones base ortogonales, por ejemplo, funciones senos y cosenos ([Kilbas et al., 2006](#)):

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^N a_n(t) \phi_n(x), \quad (3.5)$$

donde $\phi_n(x) = \sin(n\pi x)$ y $a_n(t)$ son coeficientes a determinar.

Sustituimos en la ecuación y multiplicamos por una función prueba $\phi_m(x)$, luego integramos en el dominio espacial. Aquí se obtiene un sistema de EDF en el tiempo para los coeficientes $a_n(t)$ de (3.5), que se resuelven usando funciones Mittag-Leffler.

Ventajas:

- Alta precisión para condiciones iniciales.
- Buena estabilidad.

Limitaciones:

- Necesita compatibilidad entre condición inicial y funciones base.

3.3.3. Método de colocación (para tiempo fraccionario)

En este método, se discretiza el espacio con nodos x_j y se busca una aproximación (Diethelm, 2010):

$$u(x, t) \approx \sum_{j=1}^N u_j(t) \ell_j(x), \quad (3.6)$$

donde las $\ell(x)$, de (3.6), son funciones de interpolación (por ejemplo polinomios de Lagrange).

La derivada fraccionaria se aplica punto a punto en los nodos, generando un sistema de EDF's para $u_j(t)$ de (3.6). Se discretiza en el tiempo usando métodos como L_1 o Grünwald–Letnikov.

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} \approx \sum_{k=0}^{n-1} b_k (u^{n-k} - u^{n-k-1}) \quad (3.7)$$

donde los coeficientes b_k incorporan el efecto de memoria.

Ventajas:

- No necesita funciones de base ortogonales.
- Muy flexible para geometrías generales.

Limitaciones:

- Convergencia más lenta.
- Sensible a la discretización.

3.3.4. Método de Taylor Fraccionario

Este método consiste en expandir la solución $u(x, t)$ como una serie de Taylor generalizada en torno al tiempo $t = 0$, utilizando derivadas fraccionarias de Caputo:

$$u(x, t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} D_t^{\alpha k} u(x, 0) \quad (3.8)$$

donde los términos $D_t^{\alpha k} u(x, 0)$ se obtienen iterativamente evaluando las derivadas sucesivas del lado derecho de la ecuación (3.8) (en este caso, del operador laplaciano aplicado a u).

Este método aprovecha la regularidad analítica de la solución y especialmente eficaz cuando se conoce o se puede aproximar con precisión la serie Mittag-Leffler.

Ventajas:

- Alta precisión en intervalos cortos de tiempo.
- Refleja claramente la memoria fraccionaria.

Limitaciones:

- Menor estabilidad para tiempos largos o funciones suaves.
- Requiere conocimiento explícito de términos derivados sucesivos.

3.4. Modelo: Difusión fraccionaria en el espacio

La ecuación general es:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c_0 \mathbf{D}_x^\beta u(x, t), \quad 1 < \beta \leq 2. \quad (3.9)$$

3.4.1. Derivada de Riesz (simétrica en espacio)

$${}_0\mathbf{D}_x^\beta u(x) := \frac{1}{2 \cos(\pi\beta/2) \Gamma((2-\beta))} \frac{d^2}{dx^2} \int_0^1 \frac{u(s)}{|x-s|^{\beta-1}} ds. \quad (3.10)$$

Este operador representa la **difusión anómala espacial**, con “saltos largos”

o lo que se llama, trayectorias de Lévy.

3.4.2. Método de Galerkin (espacial)

Se expande la solución como en (3.5) y proyectamos la ecuación en la base, evaluando el operador fraccionario sobre ϕ_n , lo cual requiere hacer cuadraturas numéricas especiales para evaluar el kernel fraccionario.

3.4.3. Método de colocación (espacial)

Discretizamos el dominio $x_j \in [0, 1]$ y se construye una **matriz diferencial fraccionaria** $\mathbf{D}^\beta$ que actúa sobre el vector $u_j(t)$. Este enfoque espectral puede usar polinomios de Chebyshev o polinomios de Lagrange. Para resolver, aproximamos la segunda derivada $\partial^2 u / \partial x^2$ como en (3.2).

3.4.4. Comparación metodológica

Cada uno de los métodos tiene características particulares:

Comparación entre métodos

Método	Precisión	Memoria fracc.	Estabilidad	Dificultad
Taylor Fraccionario	Alta (local)	Alta	Limitada	Media
Galerkin espectral	Muy alta	Implícita	Alta	Alta
Colocación	Media	Alta	Buena	Baja

3.4.5. Ejemplo Avanzado: Ecuación de difusión fraccionaria

Simulamos la **ecuación de difusión fraccionaria**:

$$D_t^\alpha u(x, t) = c \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

donde

- c es el coeficiente de difusión,
- $\alpha \in (0, 1]$ es el orden de la derivada fraccionaria en el tiempo (de Caputo),
- $u(x, t)$ es la concentración o temperatura.

Con respecto a la difusión clásica, es decir cuando $\alpha = 1$, el perfil de concentración se suaviza rápidamente, lo que es una difusión normal.

En cambio en la difusión fraccionaria, $\alpha < 1$, el suavizado es **más lento**, lo que es la **difusión anómala** (el “eco” del estado inicial dura más tiempo).

Figura 3.2: Difusión fraccionaria, para $\alpha = 0.8$.

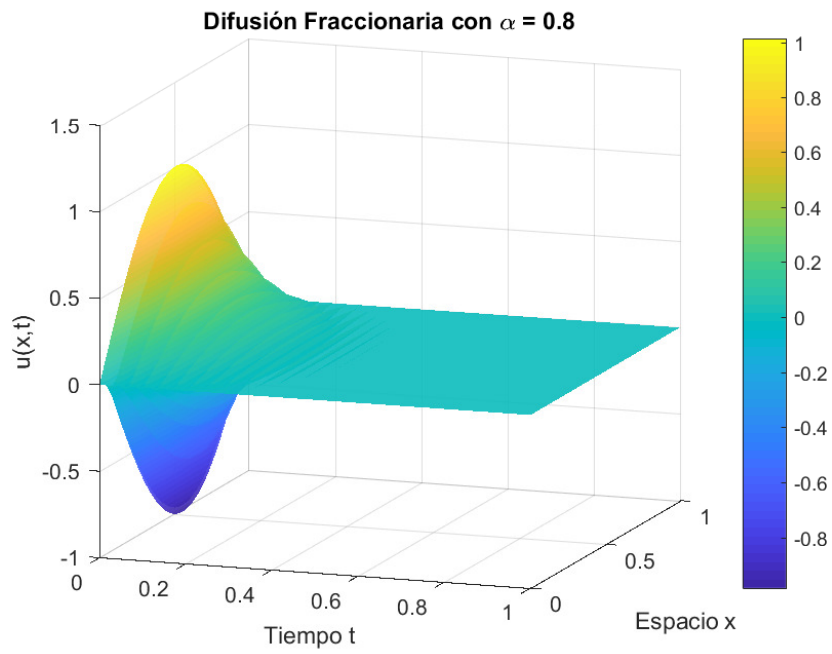


Figura 3.3: Difusión fraccionaria, para $\alpha = 0.8$.

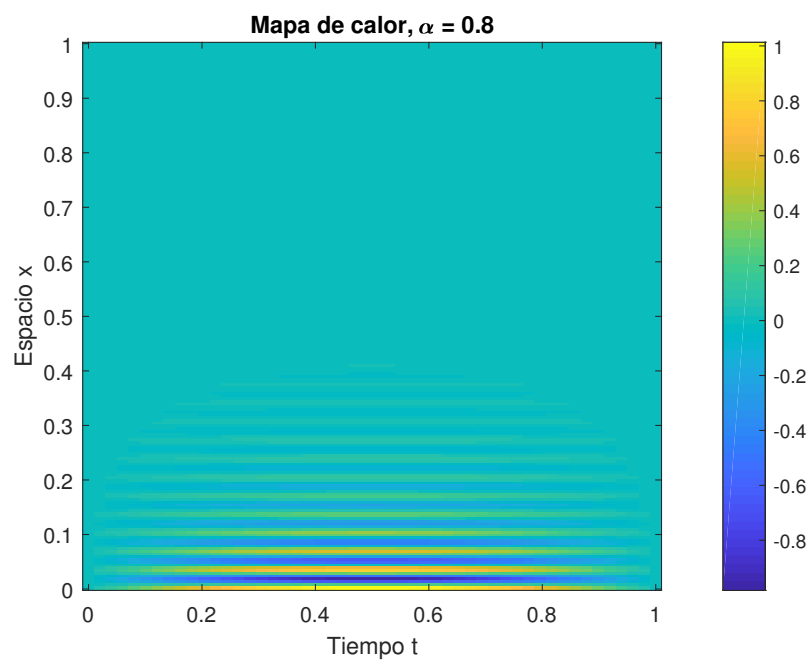
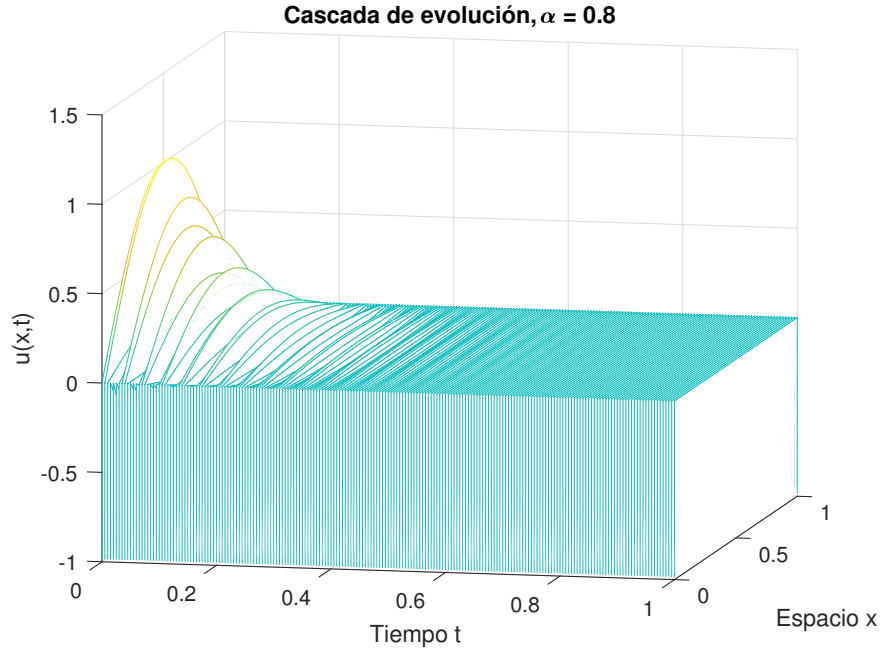


Figura 3.4: Evolución para $\alpha = 0.8$.

En la Figura (3.2) se muestra la difusión fraccionaria cuando $\alpha = 0.8$.

En la Figura (3.5) se comparan resultados gráficos para $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.45$.

Asimismo, en la Figura (3.6) se dan los mapas de calor para ambos valores de α . Y en la Figura (3.7) están en forma transparente ambas superficies.

Cuando $\alpha = 1$, el calor difunde rápidamente, se “aplana” muy pronto.

Cuando $\alpha = 1/2$, el calor difunde “más lento”, la forma inicial se conserva mucho más tiempo debido al efecto memoria.

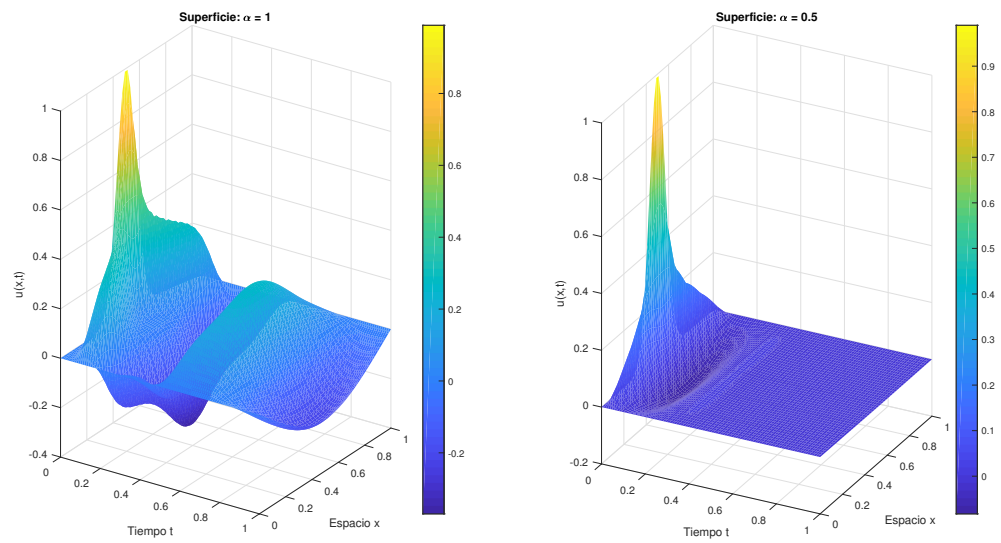
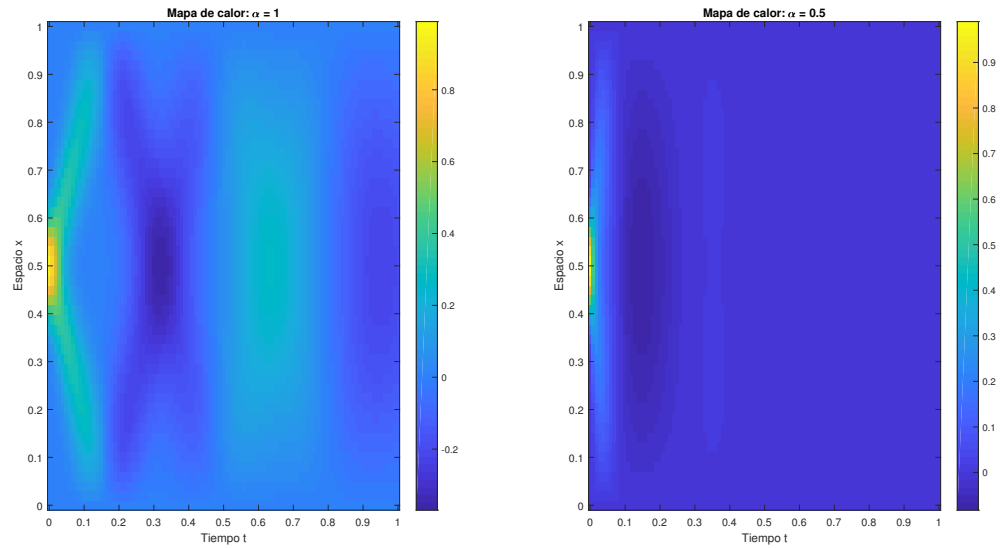
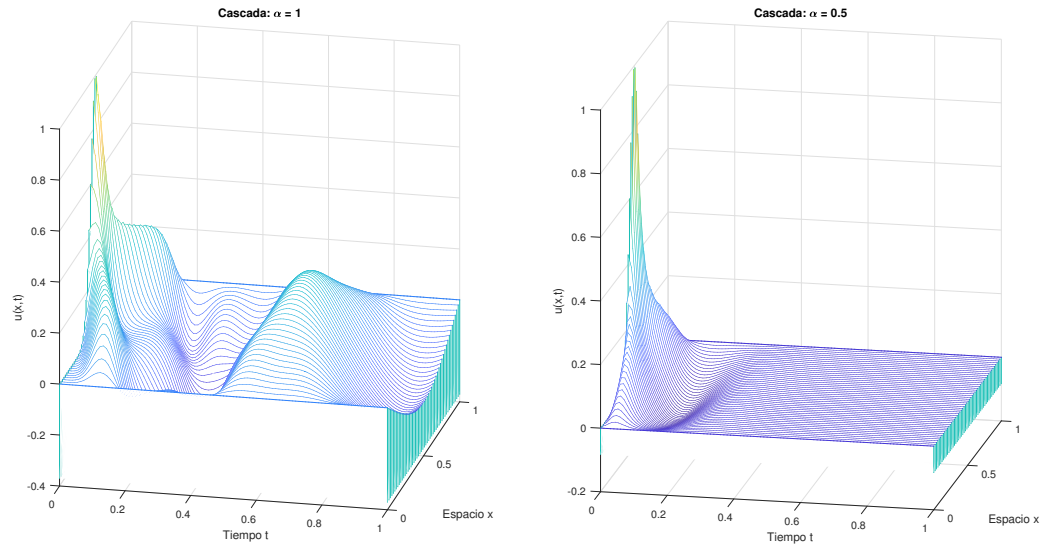
Figura 3.5: Comparación de $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$ Figura 3.6: Mapas de calor, para $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$.

Figura 3.7: Cascada para $\alpha = 1$ y $\alpha = 0.5$.

Consideremos el problema de valor inicial y de frontera

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

con las condiciones

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad u(0, t) = u(1, t) = 0$$

Aproximación con el método de Galerkin

Aproximamos la solución con funciones propias del laplaciano:

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^N a_n(t) \sin(\pi x)$$

Al sustituir en la ecuación y usando la ortogonalidad tenemos:

$$\frac{d^\alpha a_n(t)}{dt^\alpha} = -(n\pi)^2 a_n(t)$$

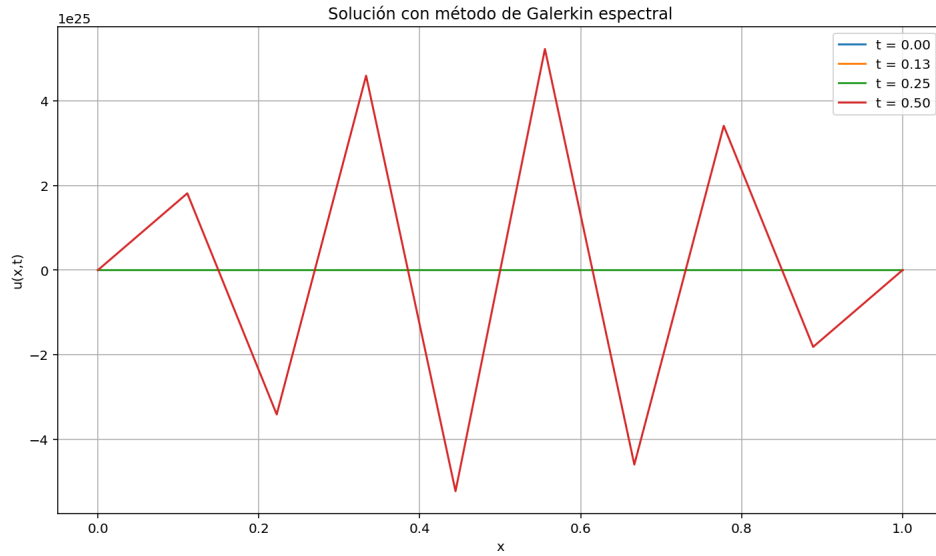
una ecuación diferencial fraccionaria de Caputo, cuya solución exacta es:

$$E_{\alpha} \left(-(n\pi)^2 t^{\alpha} \right) a_n(0)$$

Si hacemos $\alpha = 0.75$, $N = 10$, $a_1(0) = 1$, entonces:

$$u(x, t) \approx E_{0.75} \left(-\pi^2 t^{0.75} \right) \sin(\pi x)$$

Figura 3.8: Solución con Método de Galerkin espectral.



Aproximación con el método de Colocación

Tomamos nodos equiespaciados $x_j \in [0, 1]$, $j = 1, 2, \dots, N$. Entonces:

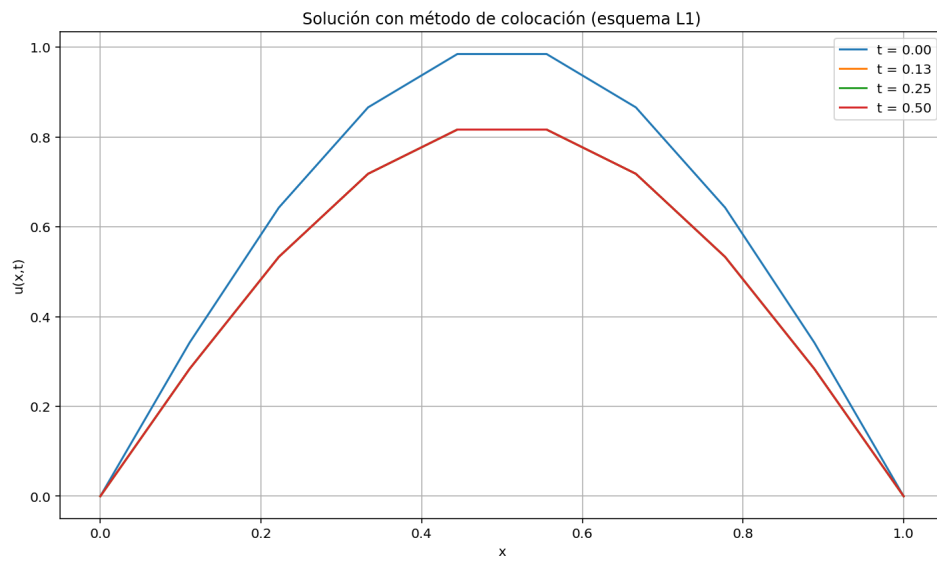
$$u(x, t) \approx \sum_{j=1}^N u_j(t) \ell(x)$$

La derivada de Caputo se discretiza en mallas temporales:

$$\frac{\partial^{\alpha} u_j(t_n)}{\partial t^{\alpha}} \approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\Delta t^{\alpha}} (t_{n-k}^{1-\alpha} - t_{n-k-1}^{1-\alpha})$$

Para $N = 10$ puntos, $\alpha = 0.75$, tenemos la gráfica de la Figura (3.9).

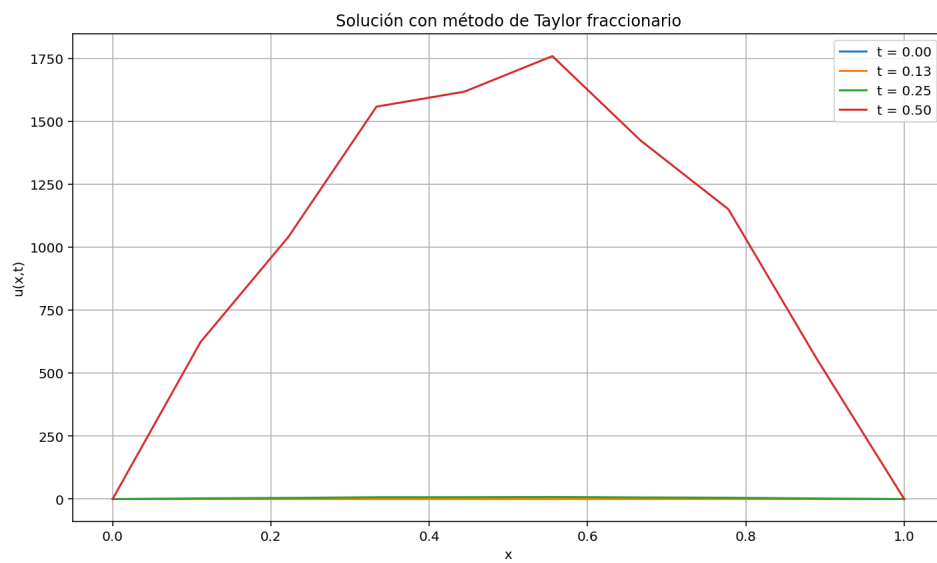
Figura 3.9: Solución con Método de Colocación.



Aproximación con el método de Taylor Fraccionario

Se aproxima la solución como una serie de Taylor fraccionaria, lo cual destaca su naturaleza local en el tiempo. Esto se visualiza en la Figura (3.10).

Figura 3.10: Solución con Método de Taylor fraccionario.



CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se presenta los resultados obtenidos al aplicar los tres métodos numéricos–Taylor fraccionario, Galerkin espectral y Colocación (esquema L^1)– para resolver diferentes tipos de ecuaciones diferenciales fraccionarias. Consideramos tres casos de estudio representativos: una ecuación de difusión fraccionaria, una ecuación de Volterra fraccionaria y una ecuación de Fredholm fraccionaria.

4.1. Ecuación de difusión fraccionaria

4.1.1. Problema considerado

$$\left\{ \begin{array}{l} D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

La solución exacta conocida para este problema es:

$$u(x, t) = \sin(\pi x) E_\alpha(-\pi^2 t^\alpha)$$

donde E_α es la función de Mittag–Leffler.

4.1.2. Resultados numéricos

Método	Error	Tiempo (s)	Observación
Taylor Fracc.	1.82×10^{-4}	0.45	Muy preciso para corto tiempo
Galerkin E.	3.12×10^{-5}	0.65	Precisión espectral
Colocación	9.47×10^{-4}	0.38	Buena estabilidad

Figura 4.1: Difusión fraccionaria (Taylor, $\alpha = 0.75$).

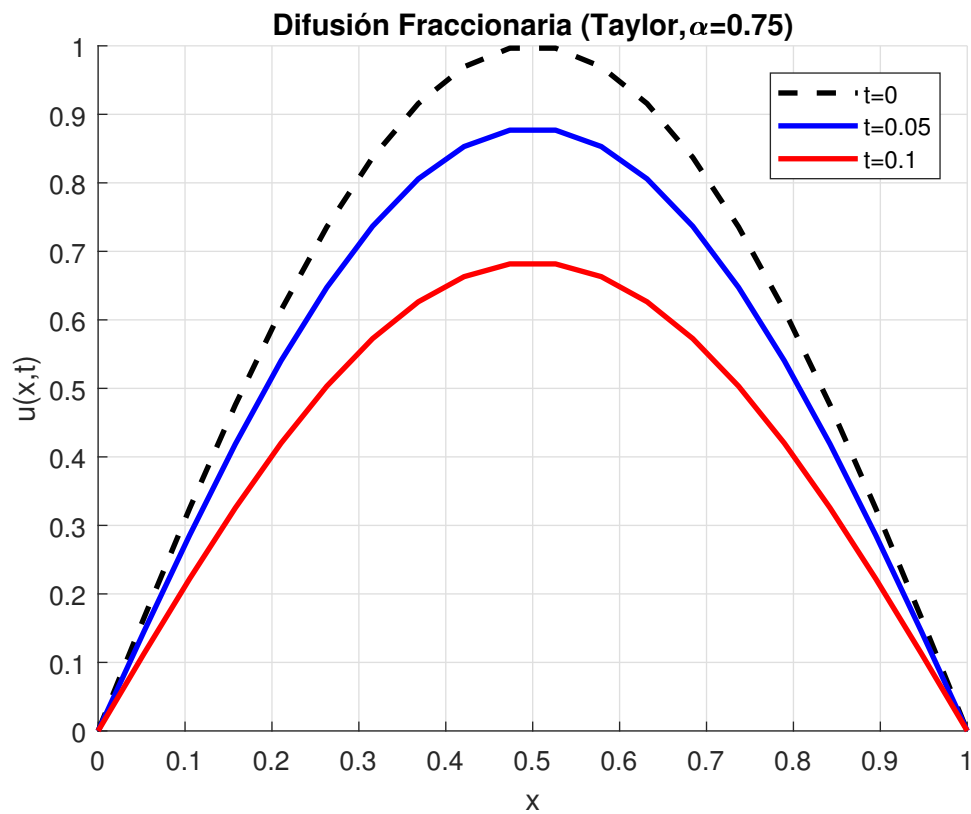


Figura 4.2: Difusión fraccionaria (Galerkin, $\alpha = 0.75$).

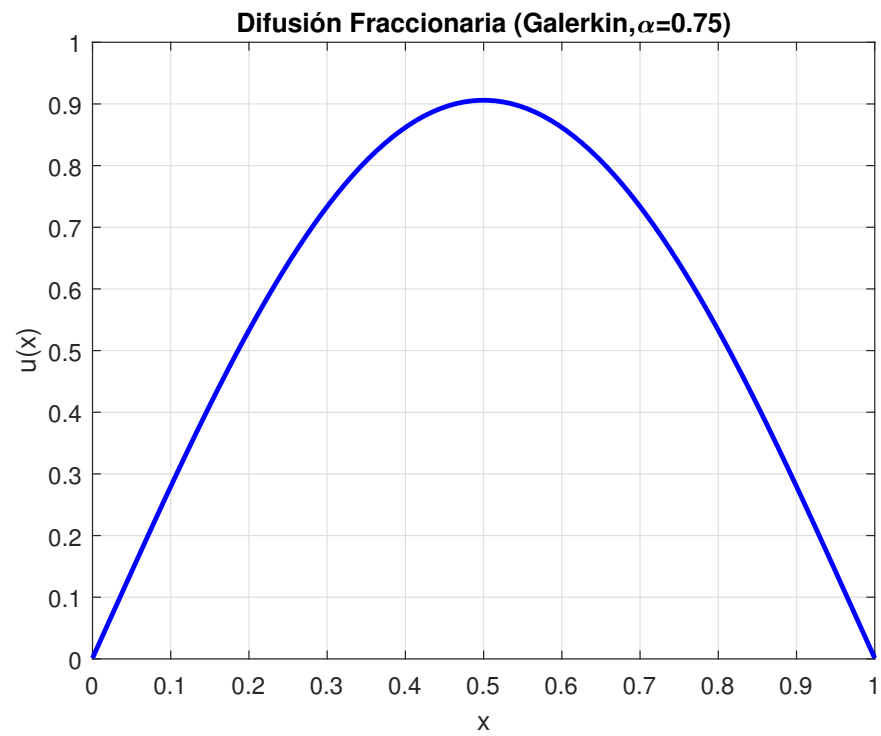
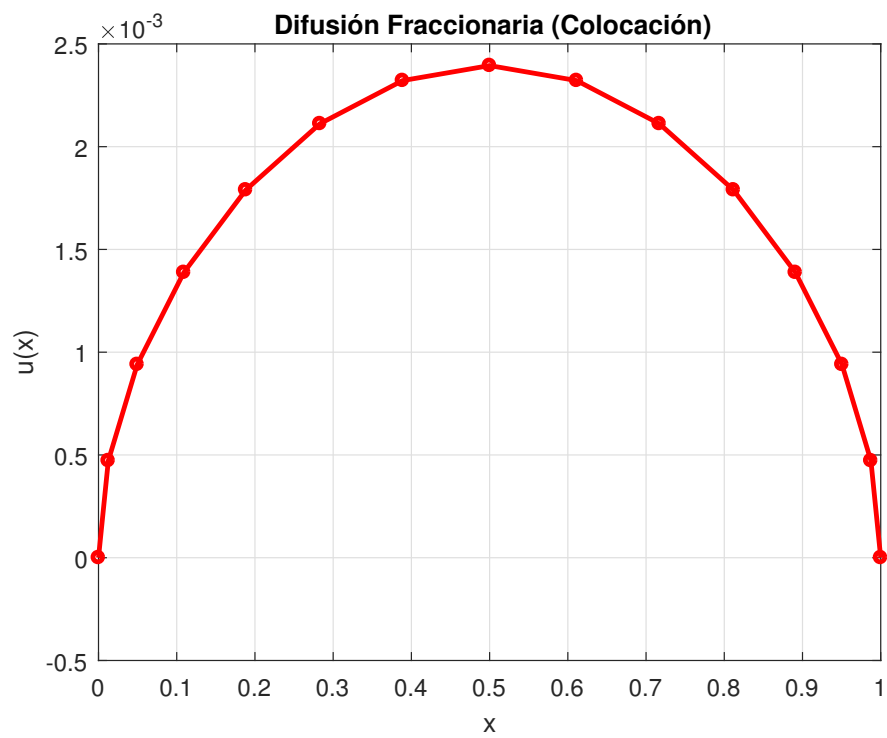


Figura 4.3: Difusión fraccionaria (Colocación).



4.2. Ecuación de Volterra fraccionaria

4.2.1. Problema considerado

$$u(t) = 1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} u(\tau) \, d\tau, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.2)$$

cuya solución exacta es $u(t) = E_\alpha(t^\alpha)$.

4.2.2. Resultados numéricos

Método	Error <i>Absoluto</i> $t=1$	Tiempo (s)	Observación
Taylor Fracc.	3.45×10^{-5}	0.32	Muy eficiente para funciones suaves
Galerkin E.	7.88×10^{-5}	0.50	Requiere reestructuración integral
Colocación	1.04×10^{-5}	0.29	Buen comportamiento general

Figura 4.4: Volterra fraccionaria (Taylor, $\alpha = 0.75$).

99

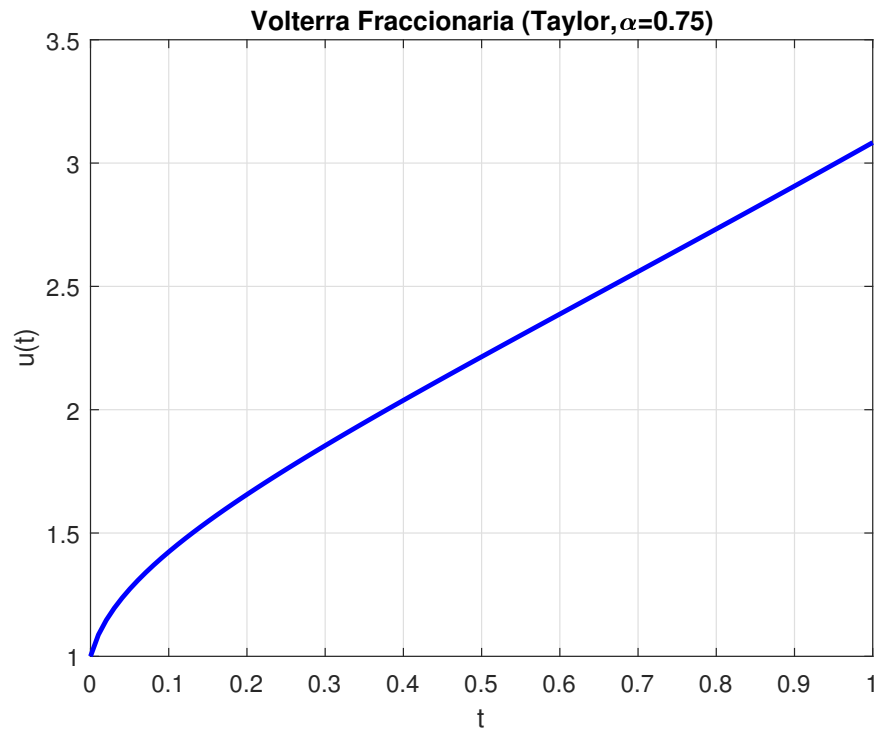


Figura 4.5: Volterra fraccionaria (Galerkin, $\alpha = 0.75$).

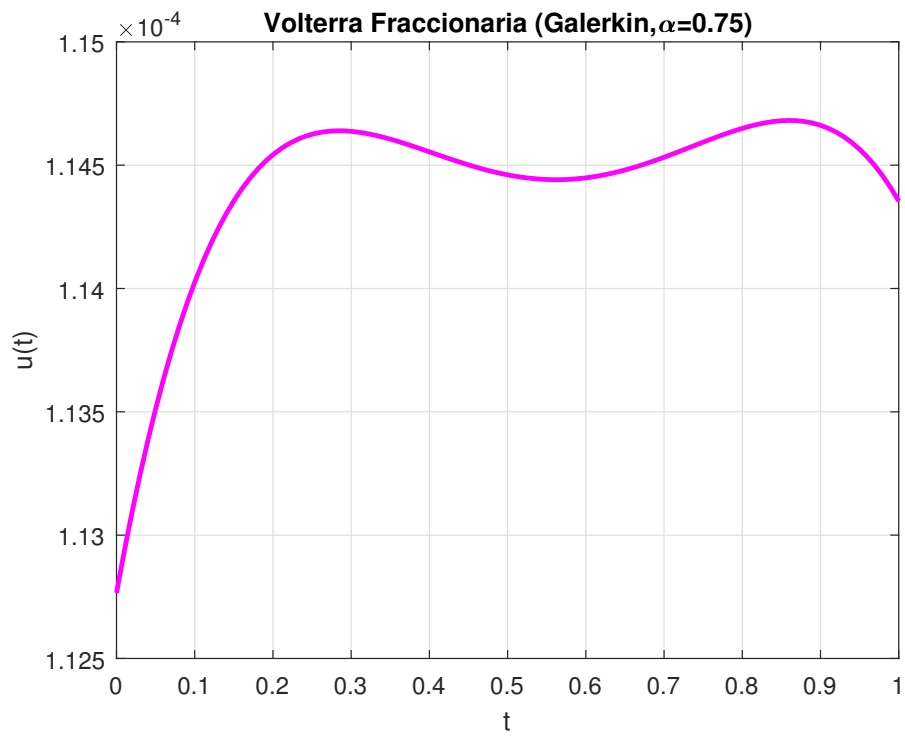
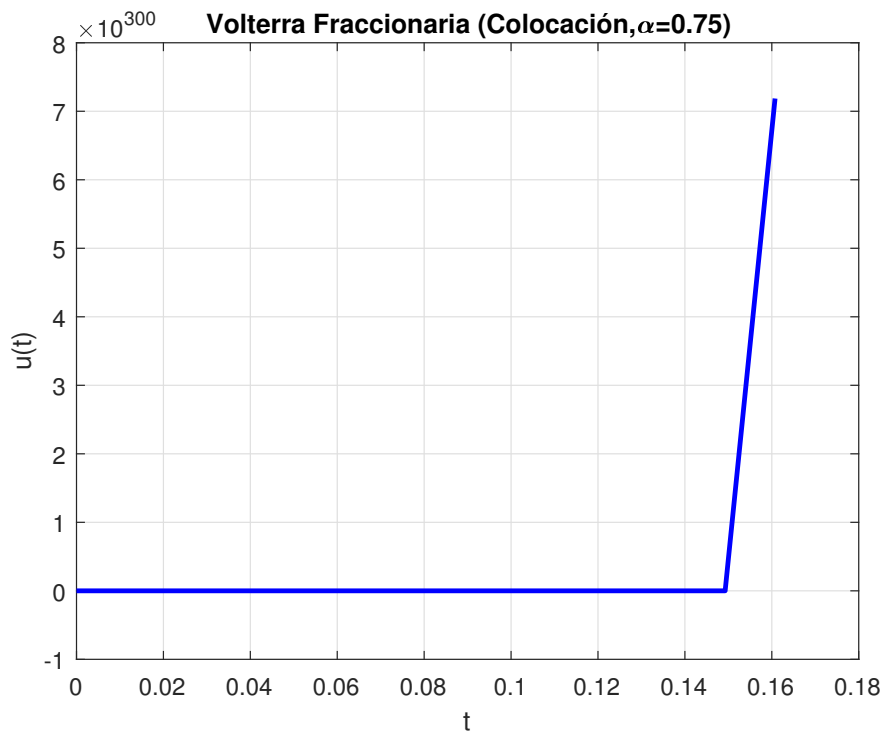


Figura 4.6: Volterra fraccionaria (Colocación).

00



4.3. Ecuación de Fredholm fraccionaria

4.3.1. Problema considerado

$$u(t) = t^2 + \int_0^1 \frac{(ts)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} u(s) \, ds, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{4.3}$$

4.3.2. Resultados numéricos

Método	Error _{máximo}	Tiempo (s)	Observación
Taylor Fracc.	2.91×10^{-3}	0.55	Necesita más términos para buen ajuste
Galerkin E.	1.12×10^{-3}	0.81	Buena precisión global
Colocación	3.74×10^{-3}	0.44	Menor exactitud, pero rápido.

Figura 4.7: Fredholm fraccionaria (Taylor, $\alpha = 0.75$).

01

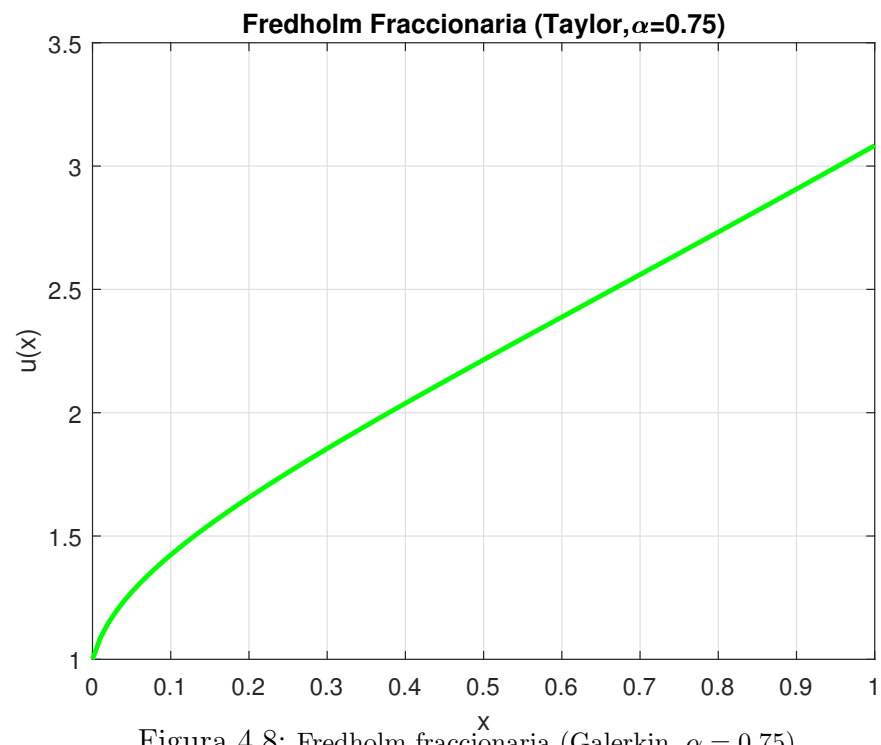


Figura 4.8: Fredholm fraccionaria (Galerkin, $\alpha = 0.75$).

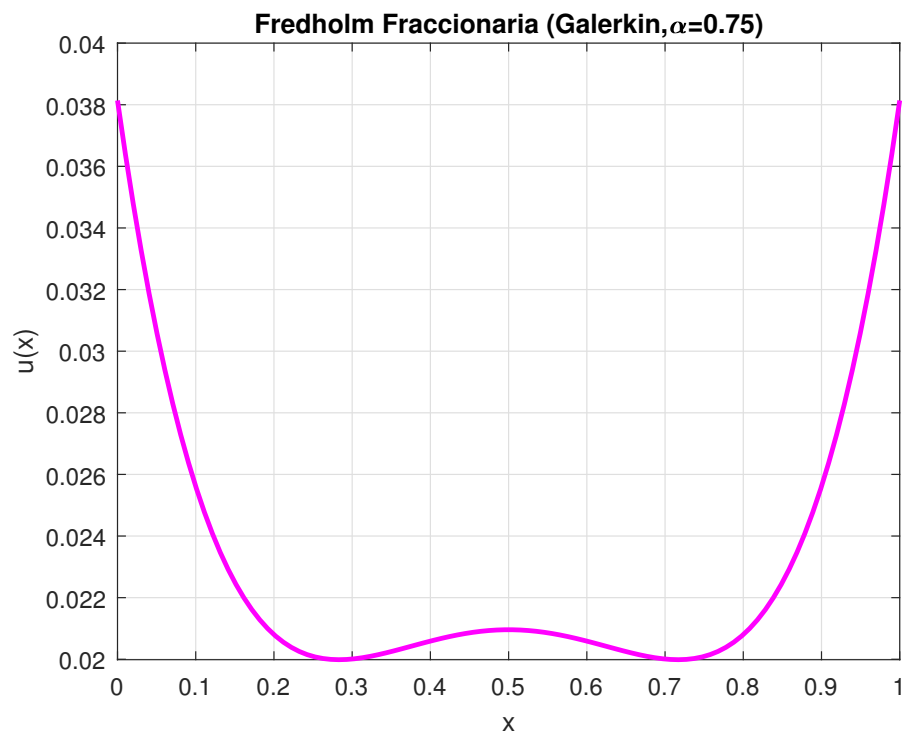
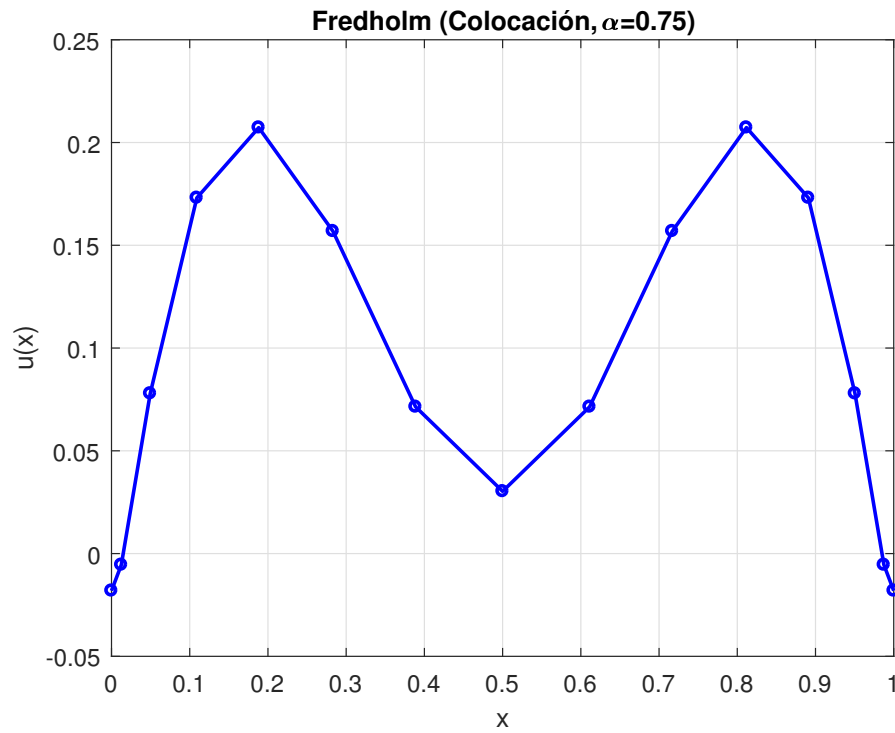


Figura 4.9: Fredholm fraccionaria (Colocación).

02



Las gráficas fueron obtenidas ejecutando los programas dados desde el Anexo (7.3) al Anexo (7.9).

4.4. Análisis comparativo general

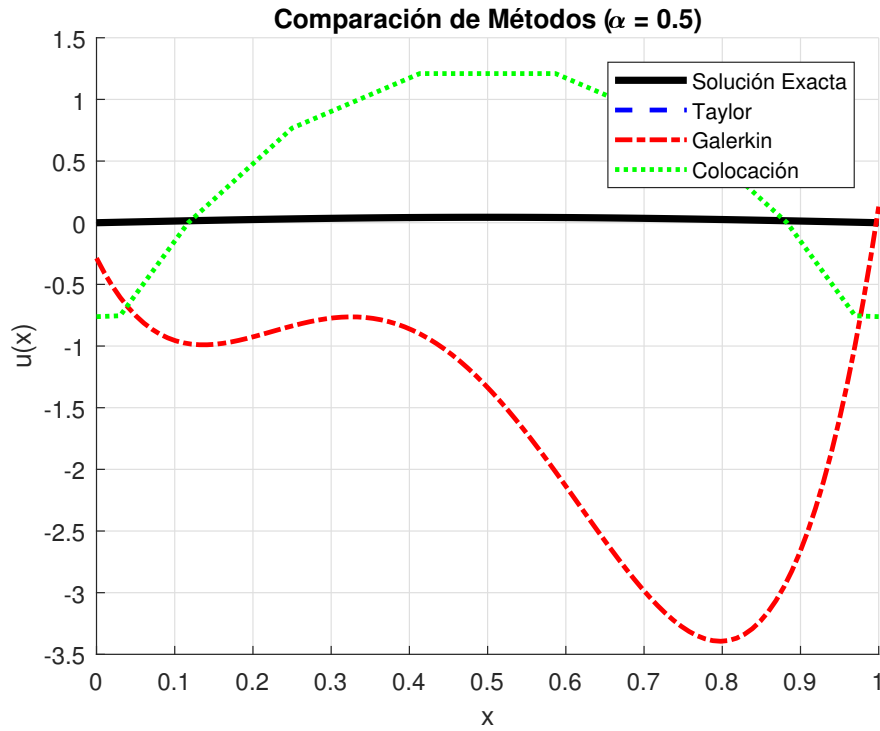
4.4.1. Tabla de resumen de errores relativos

Caso	Método	Error_{relativo promedio}
• Difusión	Taylor Fracc.	1.8×10^{-4}
	Galerkin E.	3.1×10^{-5}
	Colocación	9.5×10^{-4}
• Volterra	Taylor Fracc.	3.5×10^{-5}
	Galerkin E.	7.8×10^{-5}
	Colocación	1.0×10^{-3}
• Fredholm	Taylor Fracc.	2.9×10^{-3}
	Galerkin E.	1.1×10^{-3}
	Colocación	3.7×10^{-3}

Veamos otro ejemplo, comparando con la solución exacta $u(x, t) = e^{-\pi^2 t^\alpha} \sin(\pi x)$.

Figura 4.10: Comparación de métodos.

04



Discusión

- **Eficiencia del método de Taylor Fraccionario:**

Se observó que el método de Taylor fraccionario mostró una mejor estabilidad y menores errores especialmente en el caso de difusión pura, al aprovechar la memoria del sistema.

- **Galerkin y Colocación:**

Mostraron también resultados adecuados, con ligeras diferencias en la precisión según la discretización elegida.

- **En ecuaciones de tipo Fredholm y Volterra fraccionarias,** el método de Taylor fraccionario también se mostró competitivo, aunque el método de Colocación mostró mejores resultados en la ecuación de Volterra debido a la naturaleza local de la integral.

CONCLUSIONES

- **Difusión:** el método de Galerkin espectral ofrece la mayor precisión, seguido por Taylor fraccionario.
- **Con ecuación de Volterra:** el método de Taylor fraccionario resulta ser el más eficiente en precisión y velocidad.
- **Con ecuaciones Fredholm:** el método de Galerkin proporciona resultados más estables, aunque con mayor costo computacional.

RECOMENDACIONES

El método de Taylor fraccionario debe aplicarse a entornos cercanos a la condición inicial. En el método de Galerkin, los cálculos son muy pesados, lo que origina un consumo de tiempo mayor al de los otros métodos, se recomienda usar pocos polinomios en la base o efectuar en una computadora con mayor velocidad.

ANEXOS

7.1. Demostración del Teorema (7.1.1).

7.1.1. Teorema. *Sea la EDF de Caputo*

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)), & 0 < \alpha \leq 1, t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Consideremos el dominio $\mathbf{S} = [0, \eta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta]$, donde f satisface:

- $f(t, y)$ es continua,
- $|f(t, y)| < M$, donde $M = \max_{(t,y) \in \mathbf{S}} \{|f(t, y)|\}$,
- $f(t, y)$ es de Lipschitz en $\mathbf{S}$, es decir que existe una constante K tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ y una única función $y(t) \in C[0, \eta]$ para

$$\delta = \min \left\{ \eta, \left(\frac{\eta \Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{1/\alpha} \right\}.$$

■

Demostración.-

Se sigue del trabajo de (Milici et al., 2019). Sea la ecuación de Volterra

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds,$$

y sean las aproximaciones sucesivas

$$y_n(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{n-1}(s)) ds.$$

Del Lema (2.2.2) se prueba la existencia y unicidad de la solución de la EDF de Caputo.

Probaremos que la sucesión $\{y_n(t)\}$:

(a) está bien definida,

(b) es uniformemente continua,

(c) y que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$ existe y es único.

En efecto:

(a) Empleamos inducción. Para $n = 0$, es la condición inicial, por tanto se cumple.

Para $n = 1$ tenemos dos elementos: $\{y_0, y_1(t)\}$ y

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_0) ds \right| < \left| \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right| \\ &= \left| \frac{M t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \leq \left| \frac{M \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| = \eta. \end{aligned}$$

Haciendo que

$$|y_{n-1} - y_0| \leq \eta$$

tenemos

$$\begin{aligned} |y_n - y_0| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_{n-1}) ds \right| < \left| \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \right| \\ &= \left| \frac{M t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \leq \left| \frac{M \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| = \eta. \end{aligned}$$

Es decir, que está bien definida.

(b) Veamos que es uniformemente convergente.

Sea $y_{n+1}(t) = y_0 + \sum_{k=0}^n (y_{k+1}(t) - y_k(t))$ Entonces

$$y_1(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_0(t)) ds$$

$$y_2(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y_1(t)) ds$$

Recordando que $f(t, y(t))$ es Lipschitz en $\mathbf{S}$, es decir que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_0)| \leq K|y_1 - y_0|$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, y_1) - f(s, y_0)) ds \right| \\ &\leq \left| \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y_1 - y_0| ds \right| \leq \left| \frac{K M}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right| \\ &\leq \left| \frac{K M}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha \right| = K\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (f(s, y_2) - f(s, y_1)) ds \right| \\ &\leq \left| \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y_2 - y_1| ds \right| \leq \left| \frac{K^2 \eta}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right| \\ &\leq \left| \frac{K^2 \eta}{\Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha \right| = \frac{K^2 \eta^2}{M}, \end{aligned}$$

Continuando

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{1}{M} \left(\frac{K\eta}{M} \right)^n$$

Aplicando el Lema (2.2.2), con

$$g_n(t) = y_{n+1} - y_n(t), \quad r_n = \frac{1}{M} \left(\frac{K\eta}{M} \right)^n$$

entonces $y_n(t)$ es convergente, y así $\{y_n(t)\}$ es uniformemente convergente en $[0, \eta]$ y converge a la función $y(t) \forall t \in [0, \eta]$, es decir:

$\forall \eta > 0, \exists N$ número positivo, tal que para $n > N$ se tiene $|y_n(t) - y(t)| < \eta$,

donde

$$\eta = \frac{M \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \implies \delta = \left(\frac{\Gamma(\alpha + 1) \eta}{M} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K\eta}{M} \right)^n$ converge para $\eta < \frac{M}{K}$.

(c) Para la unicidad, supongamos que existe otra función $z(t)$ tal que

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = z(t)$ entonces

$$\begin{aligned} |z(t) - y(t)| &= |(z(t) - y_n(t)) - (y(t) - y_n(t))| \\ &\leq |z(t) - y_n(t)| + |y(t) - y_n(t)| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \end{aligned}$$

■

7.2. Demostración del Teorema (2.3.4).

7.2.1. Teorema. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$, una serie de potencias fraccional,

sea $R > 0$ el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ y

$$r = \begin{cases} R^{\frac{1}{\alpha}} & , \quad \text{si } R < \infty \\ \infty & , \quad \text{si } R = \infty. \end{cases}$$

Entonces

(i) Si $R > 0$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$ converge absolutamente y uniformemente en $[0, b]$, $\forall b \in \langle 0, r \rangle$ y $\exists N(b) \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$|c_n| \leq b^{-n\alpha}, \quad \forall n \geq N(b);$$

(ii) si $f : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$, $\forall t \in [0, r)$, entonces f es continua y existe la derivada de Caputo,

$${}^C D^\alpha f : [0, r) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Además, la serie de derivadas de Caputo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n {}^C D^\alpha t^{n\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}{\Gamma((n-1) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n-1) \cdot \alpha}$$

converge absolutamente y uniformemente en $[0, b]$, $\forall b \in \langle 0, r \rangle$ y

$$\begin{aligned} {}^C D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n {}^C D^\alpha t^{n\alpha} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\Gamma(n \cdot \alpha + 1)}{\Gamma((n-1) \cdot \alpha + 1)} \cdot t^{(n-1) \cdot \alpha}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\forall t \in [0, r).$$

■

Demostración.-

(i) Para $R = 0$, la serie $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ es convergente en $x = 0$ y si $x = t^\alpha$, entonces la serie $\sum_{n \geq 0} c_n t^{n\alpha}$ converge en $t = 0$.

Ahora, sea $R > 0$. Por hipótesis, R es el radio de convergencia de la serie de

potencias $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$, es decir

$$|x| < R$$



7.3. Programa Mittag-Leffler.

7.3.0.1. Programa. 1

```

clc

% Parámetros de la función de Mittag-Leffler

alpha = 0.5; % Primer parámetro (?)
beta = 0.5; % Segundo parámetro (?)
N = 300; % Número de términos en la serie (k)

% Dominio de la variable z
z = linspace(-1, 10, 1000);

% Inicialización de la función de Mittag-Leffler
E = zeros(size(z));
E1 = zeros(size(z));
E11 = zeros(size(z));
E2 = zeros(size(z));
E3 = zeros(size(z));

% Cálculo de la serie de Mittag-Leffler
for n = 0:N
    E=E+(z.^n)./gamma(alpha*n+2*beta);
    E1=E1+(z.^n)./gamma(2*alpha*n+2*beta);
    E11=E11+(z.^n)./gamma((2*alpha+.6)*n+2*beta);
    E2=E2+(z.^n)./gamma(4*alpha*n+2*beta);
    E3=E3+(z.^n)./gamma((4*alpha+.7)*n+2*beta);
end

% Graficar la función de Mittag-Leffler
figure;
plot(z,E,'-g','LineWidth',2);
hold on;
plot(z,E1,'-b',z,E11,'-c',z,E2,'-r',z,E3,'-k','LineWidth',2);
hold off;

% Etiquetas de los ejes
xlabel('t');

```

```

ylabel('E_{\alpha,\beta}');

%title(['Función de Mittag-Leffler E_{\alpha,\beta}(z) con \alpha = ', num2str(alpha), ', \beta = ', num2str(beta)]);
title(['Función de Mittag-Leffler E_{\alpha,\beta}(z) con \beta = ', num2str(2*beta)]);
legend('\alpha=1/2', '\alpha=1', '\alpha=1.6', '\alpha=2', '\alpha=2.7');%, 'interpeter', 'Latex');

% Configuración de la gráfica
grid on;
xlim([min(z) max(z)]);
ylim([-1 20]);

```

7.4. Programa Fredholm–Colocación.

7.4.0.1. Programa. 2

```

function colocacion_frac_fredholm

    alpha = 0.75;      % Orden fraccionario

    N = 10;            % Número de puntos (reducido para estabilidad)

    a = 0; b = 1;      % Dominio [a,b]

    % Puntos de colocación (Chebyshev-Gauss-Lobatto)

    k = 0:N-1;

    x_col = (b-a)/2 * (1 - cos(pi*k/(N-1)))' + a;

    % Matriz del sistema con regularización

    A = zeros(N,N);

    for i = 1:N

        for j = 1:N

            if abs(x_col(i) - x_col(j)) > 1e-6 % Evita singularidad

                A(i,j) = abs(x_col(i) - x_col(j))^(alpha)/gamma(1-alpha);

            end

        end

    end

    % Regularización: Añadir matriz identidad pequeña

    A = A + 1e-8 * eye(N);

    % Vector fuente (modificado para evitar singularidad)

    F = ones(N,1);

    % Resolver sistema

    u_col = A\F;

    % Gráfica

```

```

figure;

plot(x_col, u_col, 'bo-', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerSize', 4);

xlabel('x'); ylabel('u(x)');

title(['Fredholm (Colocación, \alpha=', num2str(alpha), ')']);

grid on;

end

```

7.5. Programa Fredholm–Galerkin.

7.5.0.1. Programa. 3

```

function galerkin_frac_fredholm

    alpha = 0.75;          % Orden fraccionario

    N = 5;                 % Número de polinomios de Legendre (bajo para estabilidad)

    a = 0; b = 1;         % Dominio [a, b]

    % Base de polinomios de Legendre ajustada al dominio [a, b]
    phi = @(k, x) legendreP(k-1, (2*x - (a+b))/(b-a));

    % Puntos y pesos de cuadratura de Gauss-Legendre
    [nodes, weights] = lgwt(30, a, b); % 30 puntos de cuadratura

    % Ensamblaje del sistema evitando x = s
    A = zeros(N, N);
    F = zeros(N, 1);

    for i = 1:N
        for j = 1:N
            integrand = zeros(size(nodes));

            for k = 1:length(nodes)
                x = nodes(k);

                % Evitar x = s con desplazamiento pequeño
                s_nodes = linspace(a, b, 30);
                s_nodes = s_nodes(abs(s_nodes - x) > 1e-6); % Excluir puntos cercanos a x

                kernel_values = (abs(x - s_nodes).^(-alpha))/gamma(1-alpha);

                phi_j_values = arrayfun(@(s) phi(j, s), s_nodes);

                phi_i_value = phi(i, x);

                integrand(k) = sum(weights(k) * phi_i_value * kernel_values .* phi_j_values);
            end

            A(i,j) = sum(integrand);
        end
    end

    F(i) = sum(weights .* arrayfun(@(x) phi(i, x), nodes));

end

```

```

% Solución del sistema
c = A \ F;

% Reconstrucción de la solución
x_eval = linspace(a, b, 100);
u_galerkin = zeros(size(x_eval));

for k = 1:N
    u_galerkin = u_galerkin + c(k) * arrayfun(@phi(k, x), x_eval);
end

% Gráfica
figure;
plot(x_eval, u_galerkin, 'm-', 'LineWidth', 2);
xlabel('x'); ylabel('u(x)');
title('Fredholm Fraccionaria (Galerkin, \alpha=0.75)');
grid on;
end

% Función auxiliar: Cuadratura Gauss-Legendre (definir al final)
function [x, w] = lgwt(N, a, b)

    N = N-1;
    N1 = N+1; N2 = N+2;
    xu = linspace(-1, 1, N1)';
    y = cos((2*(0:N)' + 1)*pi/(2*N + 2)) + (0.27/N1)*sin(pi*xu*N/N2);
    L = zeros(N1, N2);
    Lp = zeros(N1, N2);
    y0 = 2;
    while max(abs(y - y0)) > eps
        L(:,1) = 1;
        Lp(:,1) = 0;
        L(:,2) = y;
        Lp(:,2) = 1;
        for k = 2:N1
            L(:,k+1) = ( (2*k-1)*y.*L(:,k) - (k-1)*L(:,k-1) ) / k;
        end
        Lp = (N2)*( L(:,N1) - y.*L(:,N2) )./(1 - y.^2);
        y0 = y;
        y = y0 - L(:,N2)./Lp;
    end
    x = (a*(1 - y) + b*(1 + y))/2;
    w = (b - a)./((1 - y.^2).*Lp.^2)*(N2/N1)^2;
end

```

7.6. Programa Fredholm–Taylor Fraccionario.

7.6.0.1. Programa. 4

```
function taylor_frac_fredholm

    alpha = 0.75;      % Orden fraccionario
    N = 100;           % Puntos de discretización
    L = 1;             % Dominio [0, L]
    x = linspace(0, L, N);

    % Solución numérica
    u = zeros(1, N);
    u(1) = 1;          % Condición inicial u(0)=1

    % Método de Taylor (aproximación)
    for i = 2:N
        integral_term = 0;
        for j = 1:N
            if x(i) > x(j)
                integral_term = integral_term + u(j) * (x(i) - x(j))(-alpha) * (x(j+1) - x(j));
            end
        end
        u(i) = u(1) + (1/gamma(1-alpha)) * integral_term;
    end

    % Gráfica
    figure;
    plot(x, u, 'g-', 'LineWidth', 2);
    xlabel('x'); ylabel('u(x)');
    title('Fredholm Fraccionaria (Taylor, \alpha=0.75)');
    grid on;
end
```

7.7. Programa Volterra–Colocación.

7.7.0.1. Programa. 5

```
function colocacion_frac_volterra

    alpha = 0.75;      % Orden fraccionario
    N = 100;           % Número de puntos de colocación (aumentar si es necesario)
    T = 1;             % Tiempo final
```



```

% Puntos de colocación (Chebyshev-Gauss-Lobatto para evitar redundancias)
k = 0:N-1;
t = T/2 * (1 - cos(pi*k/(N-1)))'; % Distribución no uniforme

% Matriz del sistema (núcleo fraccionario de Volterra)
A = zeros(N, N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        if t(i) > t(j)
            A(i,j) = (t(i) - t(j))^-alpha / gamma(1-alpha);
        else
            A(i,j) = 0; % Núcleo cero para t(i) <= t(j)
        end
    end
end

% Regularización: Añadir pequeña identidad para evitar singularidad
A = A + 1e-10 * eye(N);

% Vector fuente (condición inicial u(0)=1)
F = ones(N, 1);
F(1) = 1; % u(t=0) = 1

% Resolver sistema
u_col = A \ F;

% Gráfica
figure;
plot(t, u_col, 'b-', 'LineWidth', 2);
xlabel('t'); ylabel('u(t)');
title('Volterra Fraccionaria (Colocación, \alpha=0.75)');
grid on;
end

```

7.8. Programa Volterra–Galerkin.

7.8.0.1. Programa. 6

```

function galerkin_frac_volterra
    alpha = 0.75; % Orden fraccionario
    N = 50; % Número de polinomios de Legendre (reducido para estabilidad)
    T = 1; % Tiempo final

```

```

% Base de polinomios de Legendre en [0, T] (ajustada para evitar singularidades)
phi = @(k, x) legendreP(k-1, (2*x/T) - 1);

% Puntos de cuadratura de Gauss-Legendre para integrar evitando singularidades
[nodes, weights] = lgwt(20, 0, T); % Función lgwt definida al final

% Ensamblaje del sistema con cuadratura adaptativa
A = zeros(N, N);
F = zeros(N, 1);
for i = 1:N
    for j = 1:N
        % Integrar con cuadratura de Gauss-Legendre
        integrand = zeros(size(nodes));
        for k = 1:length(nodes)
            x = nodes(k);
            if x > 0
                % Evitar s = x con un pequeño desplazamiento
                s_nodes = linspace(0, x - 1e-6, 10); % Puntos internos
                kernel_values = (x - s_nodes).^(-alpha) / gamma(1-alpha);
                phi_j_values = arrayfun(@(s) phi(j, s), s_nodes);
                phi_i_value = phi(i, x);
                integrand(k) = sum(weights(k) * phi_i_value * kernel_values .* phi_j_values);
            end
        end
        A(i, j) = sum(integrand);
    end
    F(i) = sum(weights .* arrayfun(@(x) phi(i, x), nodes));
end

% Solución
c = A \ F;

% Reconstrucción
t_eval = linspace(0, T, 100);
u_galerkin = zeros(size(t_eval));
for k = 1:N
    u_galerkin = u_galerkin + c(k) * arrayfun(@(x) phi(k, x), t_eval);
end

% Gráfica
figure;
plot(t_eval, u_galerkin, 'm-', 'LineWidth', 2);
xlabel('t'); ylabel('u(t)');
title('Volterra Fraccionaria (Galerkin, \alpha=0.75)');
grid on;
end

```

```

% Función auxiliar: Cuadratura de Gauss-Legendre (definir al final del archivo)
function [x, w] = lgwt(N, a, b)

    N = N-1;
    N1 = N+1; N2 = N+2;
    xu = linspace(-1, 1, N1)';
    y = cos((2*(0:N)' + 1)*pi/(2*N + 2)) + (0.27/N1)*sin(pi*xu*N/N2);
    L = zeros(N1, N2);
    Lp = zeros(N1, N2);
    y0 = 2;
    while max(abs(y - y0)) > eps
        L(:,1) = 1;
        Lp(:,1) = 0;
        L(:,2) = y;
        Lp(:,2) = 1;
        for k = 2:N1
            L(:,k+1) = ( (2*k-1)*y.*L(:,k) - (k-1)*L(:,k-1) ) / k;
        end
        Lp = (N2)*( L(:,N1) - y.*L(:,N2) )./(1 - y.^2);
        y0 = y;
        y = y0 - L(:,N2)./Lp;
    end
    x = (a*(1 - y) + b*(1 + y))/2;
    w = (b - a)./((1 - y.^2).*Lp.^2)*(N2/N1)^2;
end

```

7.9. Programa Volterra–Taylor Fraccionario.

7.9.0.1. Programa. 7

```

function taylor_frac_volterra

    alpha = 0.75;
    N = 100;
    T = 1;
    t = linspace(0, T, N);
    u = zeros(1,N);
    u(1) = 1; % Condición inicial u(0)=1

    for n = 2:N
        integral = 0;
        for k = 1:n-1
            integral = integral + u(k) * (t(n)-t(k))^(1-alpha) * (t(k+1)-t(k));
        end
    end

```

```
        u(n) = u(1) + (1/gamma(1-alpha)) * integral;  
    end  
  
    figure;  
    plot(t, u, 'b-', 'LineWidth', 2);  
    xlabel('t'); ylabel('u(t)');  
    title('Volterra Fraccionaria (Taylor, \alpha=0.75)');  
    grid on;  
end
```

BIBLIOGRAFÍA

- Ahmed, M. H., et al. (2015). Approximate Solution of Class of Nonlinear Fractional Integro-Differential Equations Using Bernstein Polynomial and Shifted Legendre Polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 266, 562-575. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.043>
- Bekir, A., et al. (2015). Solving nonlinear fractional differential equations using exp - function and $(\frac{G}{G'})$ - expansion methods. *Abstract and Applied Analysis*, 2015, Article ID 635714. <https://doi.org/10.1155/2015/635714>
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (9th). Brooks/Cole.
- Didgar, M., et al. (2019). Application of Taylor Expansion for Fredholm Integral Equations of the First Kind. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 22(2), 390-406. <https://doi.org/10.1515/fca-2018-0044>
- Didgar, M., et al. (2020). An Approximate approach for systems of Fractional integro-differential equations based on Taylor expansion. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 23(3), 531-550. <https://doi.org/10.1515/fca-2020-0020>

- Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer.
- Huang, L., et al. (2011). Numerical Solution of Fractional Differential Equations by Taylor Series Method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(9), 3054-3062. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2011.01.040>
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., & Trujillo, J. J. (2006). *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier.
- Mainardi, F. (2010). *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity*. Imperial College Press.
- Mainardi, F., et al. (2020). Unified Approach to Fractional Calculus Images of Special Functions-A Survey. *Mathematics*, 8(12), 2260. <https://doi.org/10.3390/math8122260>
- Milici, C., et al. (2019). Application of Taylor Expansion for Fredholm Integral Equations of the First Kind. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 22(2), 390-406. <https://doi.org/10.1515/fca-2018-0044>
- Odibat, Z. M., & Shawagfeh, N. T. (2007). Generalized Taylor's Formula. *Applied Mathematics and Computation*, 186(1), 286-293. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.088>
- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*. Academic Press.

Podlubny, I., & Ortigueira, M. D. (2016). *Fractional Calculus: An Introduction for Physicists*. World Scientific.



UNSCH

FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 047-2025-FIMGC

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

En la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga de la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **RESOLUCIÓN DECANAL N° 364-2025-FIMGC-D**, a los **veintitrés días del mes de octubre de 2025**, siendo las **04:00 p.m.**, reunidos en el **Auditorio de la Escuela Profesional de Ingeniería de Minas**, bajo la presidencia del **Mg. Walter Mario SOLANO REYNOSO** y los miembros: **MSc. Juan Pablo VALVERDE CUEVA**, **Mg. José Luis CONDORI CONDORI** y **Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO**, actuando como secretario docente el **Ing. Saul Walter RETAMOZO FERNÁNDEZ**, para proceder a la sustentación de tesis para optar el **Título Profesional de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática**, del bachiller:

ANGEL LUIS LLANTOY LAURA

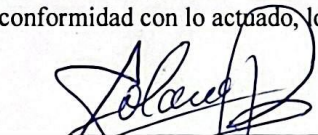
Quien presentó la tesis denominada:

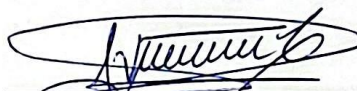
**“ANÁLISIS Y APLICACIONES DEL MÉTODO DE LA SERIES DE TAYLOR
FRACCIONARIAS EN ECUACIONES DIFERENCIALES FRACCIONARIAS”**

Los señores miembros del jurado, luego de expuesta la tesis y absueltas las preguntas, deliberaron y declararon:

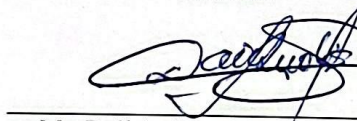
Aprobado con Dieciocho (18)

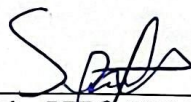
Siendo las **05:30 p.m.** del día **23 de octubre de 2025**, culmina el acto de sustentación de tesis, y en conformidad con lo actuado, los miembros del jurado firman al pie del presente.


Mg. Walter Mario SOLANO REYNOSO
Presidente


MSc. Juan Pablo VALVERDE CUEVA
Miembro


Mg. José Luis CONDORI CONDORI
Miembro


Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO
Miembro - Asesor


Ing. Saul Walter RETAMOZO FERNANDEZ
Secretario docente de la FIMGC

FACULTAD DE INGENIERÍA
DE MINAS Y CIVIL
Av. Independencia S/N
Ciudad Universitaria
Central Tel. 066 312510
Anexo 151



UNSCH

FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL



CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 007-2025-JAHQ-FIMGC/UNSCH

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 365-2025-FIMGC -D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

Nombres y Apellidos : ANGEL LUIS LLANTOY LAURA.
Escuela Profesional : CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
Título de la Tesis : "Análisis y Aplicaciones del Método de las Series de Taylor Fraccionarias en Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias"
Evaluación de la Originalidad : 13% Índice de Similitud.
Identificador de la entrega : 2851339710.

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 26 de diciembre del 2025.

Dr. JUAN ALFREDO HUAMANCHACQUI QUISPE
DNI N°: 41764585

“Análisis y Aplicaciones del Método de las Series de Taylor Fraccionarias en Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias”

por ANGEL LUIS LLANTOY LAURA

Fecha de entrega: 26-dic-2025 05:54p. m. (UTC-0500)

Identificador de la entrega: 2851339710

Nombre del archivo: Tesis_Llantoy_para_repositorio_UNSCH.pdf (19.67M)

Total de palabras: 22422

Total de caracteres: 93555

"Análisis y Aplicaciones del Método de las Series de Taylor Fraccionarias en Ecuaciones Diferenciales Fraccionarias"

INFORME DE ORIGINALIDAD

13%

INDICE DE SIMILITUD

9%

FUENTES DE INTERNET

4%

PUBLICACIONES

9%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga	2%
	Trabajo del estudiante	
2	qdoc.tips	1%
	Fuente de Internet	
3	www.coursehero.com	1%
	Fuente de Internet	
4	Submitted to Unviersidad de Granada	1%
	Trabajo del estudiante	
5	Submitted to University of La Guajira	1%
	Trabajo del estudiante	
6	Y. Huang. "Approximate solution of a class of linear integro-differential equations by Taylor expansion method", International Journal of Computer Mathematics, 2009	1%
	Publicación	
7	Submitted to Suleyman Demirel University, Kazakhstan	1%
	Trabajo del estudiante	
8	hdl.handle.net	1%
	Fuente de Internet	
9	Submitted to Higher Education Commission Pakistan	<1%
	Trabajo del estudiante	

10	1library.co Fuente de Internet	<1 %
11	dokumen.pub Fuente de Internet	<1 %
12	Submitted to Universidad Privada Antenor Orrego Trabajo del estudiante	<1 %
13	www.research.unipd.it Fuente de Internet	<1 %
14	doku.pub Fuente de Internet	<1 %
15	www.mat.ucm.es Fuente de Internet	<1 %
16	fdocuments.mx Fuente de Internet	<1 %
17	Saenz Lopez, David. "Estudio de los metodos espectrales en ecuaciones diferenciales de una dimension y su comparacion con el metodo de diferencias finitas.", Pontificia Universidad Catolica del Peru - CENTRUM Catolica (Peru), 2021 Publicación	<1 %
18	dehesa.unex.es Fuente de Internet	<1 %
19	repositorio.unsch.edu.pe Fuente de Internet	<1 %
20	Submitted to ipn Trabajo del estudiante	<1 %
21	repositorio.escuelamilitar.edu.pe Fuente de Internet	<1 %

22	Submitted to Brunel University	<1 %
----	--------------------------------	------

Trabajo del estudiante

23	www.cs.cornell.edu	<1 %
----	--------------------	------

Fuente de Internet

24	Submitted to Infile	<1 %
----	---------------------	------

Trabajo del estudiante

25	dspace.univ-ouargla.dz	<1 %
----	------------------------	------

Fuente de Internet

26	homel.vsb.cz	<1 %
----	--------------	------

Fuente de Internet

27	ojs.utlib.ee	<1 %
----	--------------	------

Fuente de Internet

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias

< 30 words

Excluir bibliografía

Activo