UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS:

“Visualización y análisis numérico del Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas”

Para optar el título profesional de:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:

Bach. Viviana Lisvet OCHANTE QUISPE

ASESOR:

M.Sc. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO

AYACUCHO - PERÚ

2026

DEDICATORIA

A la memoria de mi querida madre, quien partió a causa del COVID–19. Aunque su ausencia duele profundamente, su amor, su fortaleza y enseñanzas siguen guiando cada uno de mis pasos. Este logro también le pertenece, porque su ejemplo vive en mí y me enseñó a no rendirme.

A mi padre, por su apoyo constante, confianza y esfuerzo incondicional. Gracias por creer en mí incluso en los momentos más difíciles y por ser un pilar fundamental en mi formación personal y profesional.

A mi esposo y a mi hija, por ser mi mayor apoyo y motivación; y a mis familiares, por su aliento, comprensión y acompañamiento a lo largo de este camino.

Viviana O.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento:

- A Dios, por concederme la vida, la salud, la fortaleza y la sabiduría necesarias para culminar esta tesis, y por sostenerme con fe y esperanza hasta alcanzar este logro.

- Al profesor Daúl Paiva, asesor de la tesis, por su valiosa orientación, paciencia y dedicación durante el desarrollo del presente trabajo de investigación.

- A la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, en especial a la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas, por la formación académica brindada y por los conocimientos impartidos a lo largo de mi carrera.

- A los docentes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas por su dedicación y sus valiosas enseñanzas impartidas.

- A mis amigos y compañeros de estudio, por el apoyo sincero, el compañerismo y la solidaridad compartida a lo largo de este camino; su amistad fue un valioso sostén en cada esfuerzo y desafío.

RESUMEN

Esta tesis tiene como finalidad estudiar el Teorema de Sarkovskii desde un enfoque visual y numérico, utilizando funciones reales unidimensionales, con énfasis en la función logística. El trabajo pretende verificar mediante simulaciones computacionales, la aparición de órbitas periódicas de distintos órdenes y contrastarlas con el orden predicho por el Teorema de Sarkovskii. Asimismo, se busca fomentar la comprensión de la transición hacia el caos en sistemas dinámicos discretos mediante recursos gráficos y computacionales accesibles para el nivel de pregrado.

Palabras Clave

Sistemas dinámicos discretos, Teorema de Sarkovskii, mapa logístico.

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to study Sarkovskii's Theorem from a visual and numerical perspective, using one–dimensional real-world functions, with an emphasis on the logistic function. The work aims to verify, through computer simulations, the emergence of periodic orbits of different orders and compare them with the order predicted by Sarkovskii's Theorem. It also seeks to foster an understanding of the transition to chaos in discrete dynamical systems using graphical and computational resources accessible to the undergraduate level.

Keywords

Discrete dynamical systems, Sarkovskii's Theorem, Logistic map.

ÍNDICE GENERAL

Resumen **vi**

Abstract **vii**

Índice general **viii**

Índice de cuadros **xi**

Índice de figuras **xii**

Introducción **xiv**

I. Planteamiento del problema **1**

1.1. Descripción de la realidad problemática 1
1.2. Delimitación de la investigación 3
1.2.1. Espacial 3
1.2.2. Social 3
1.2.3. Temporal 4
1.3. Problema de investigación 5
1.3.1. Problema general 5
1.3.2. Problemas específicos 5
1.4. Objetivos 6
1.4.1. Objetivo general 6
1.4.2. Objetivo específico 6
1.5. Hipótesis 7
1.5.1. Hipótesis general 7
1.5.2. Hipótesis específica 7
1.6. Variables e indicadores 7
1.6.1. Variable independiente 7
1.6.2. Variable dependiente 8
1.7. Diseño metodológico 8
1.7.1. Tipo de investigación 8

1.7.2. Nivel de investigación 8
1.7.3. Método de investigación 9
1.7.4. Diseño de investigación 9
1.8. Población y muestra 9
1.8.1. Población 9
1.8.2. Muestra 9

II. Marco Teórico **10**
2.1. Antecedentes del Problema 10
2.1.1. Antecedentes Internacionales 10
2.1.2. Antecedentes Nacionales 12
2.1.3. Antecedentes Locales 12
2.2. Bases teóricas 12
2.2.1. Funciones continuas en $[a, b]$: Definiciones y propiedades básicas 13
2.2.2. Órbitas, puntos fijos y periódicos 17
2.2.2.1. Ejemplos en tiempo discreto 25
2.2.2.2. Ejemplos en tiempo continuo 30
2.2.2.3. Recordando potencias $\boldsymbol{A^n}$ 39
2.3. Marco conceptual 44
2.3.1. Orden de Sarkovskii 44
2.3.2. Teorema de Sarkovskii 45
2.3.2.1. Funciones Lipschitz 45
2.3.2.2. Conjuntos invariantes y conjuntos límite . . 51
2.3.2.3. Aplicaciones del intervalo 55
2.3.2.4. Teorema de Sarkovskii 61
2.3.3. Teorema de Li–Yorke y su conexión con el caos 61

III. Materiales y Métodos **68**
3.1. Dinámica del mapa logístico
$f_r(x) = rx\,(1 - x)$ 68
3.1.1. Transición al caos y duplicación de períodos 69
3.1.2. Simulación y análisis numérico: visualización en Python 69
3.2. Mapa discreto unidimensional 70
3.2.1. Bifurcación 71
3.2.1.1. Identificación de bifurcaciones 72
3.2.2. Caos determinista 72

3.2.3. Simulación numérica y visualización dinámica 73
3.3. Herramientas empleadas 73
3.3.1. Python y scrips propios 73
3.3.2. Referencias a software y bibliografía metodológica . . 74
3.4. Procedimiento 74
3.4.1. Definición y selección de la función de estudio: $f_r(x) = rx\,(1-x)$ 74
3.4.2. Iteración numérica para explorar órbitas 74
3.4.3. Detección de periodos mediante comparación de valores 74
3.4.4. Construcción del diagrama de bifurcación 75
3.4.5. Identificación de ciclos *3* y verificación empírica del Teorema de Sarkovskii 75
3.4.6. Visualización de resultados 75
3.4.7. Ejemplo de código Python 75
3.5. Coherencia entre la teoría y la simulación 75
3.5.1. Lineamientos metodológicos según Alligood et al. (1996) 76
3.5.2. Lineamientos metodológicos según Kuznetsov (2013) . 76
3.5.3. Procedimiento metodológico global 77

IV. Resultados y Discusión **78**
4.1. Sistema dinámico de estudio 78
4.2. Iteración numérica y análisis local 79
4.2.1. Parámetro $\boldsymbol{r}$=2.5 79
4.3. Identificación de puntos fijos y estabilidad 81
4.4. Detección de ciclos periódicos 81
4.4.1. Análisis del ciclo de período 2 84
4.5. Construcción del diagrama de bifurcación 84
4.6. Identificación explícita de un ciclo de período 3 87

Conclusiones **90**

Recomendaciones **93**

Anexos **94**
7.1. Programa ciclos de período 3 94
7.2. Programa diagrama de bifurcación 96
7.3. Programa punto fijo repulsor. 97
7.4. Programa Teorema de Li–Yorke. 98
7.5. Programa localizar puntos periódicos. 99
7.6. Programa puntos q–periódicos. 105
7.7. Programa Expansión. 107

ÍNDICE DE CUADROS

2.1. Número de puntos periódicos de E_m de período $q \leq 6$. 29
2.2. Puntos q–periódicos del Ejemplo (*2.2.5*). 34
2.3. Puntos q–periódicos del Ejemplo (*2.2.6*). 38
2.4. Valores de órbitas $f^n(x_i)$, $i = 1, 2$, $n = 0, ..., 200$ 65
2.5. Valores de $f^n(x_1 = 0.4)$ y $f^n(x_2 = 0.4000001)$, $n = 0, ..., 400$ 66

4.1. Valores de $f^n(x)$ para $x \in [0, 1]$ y $n = 1, ..., 5$ 79
4.2. Valores de $f^n(x)$ y $n = 1, ..., 23$ 82

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. $\boldsymbol{f(x) = rx(1-x)}$, $x_0 = 0.2$, $r = 2.7$ 23
2.2. $\boldsymbol{f(x) = rx(1-x)}$, $r = 3.5$ (repulsor) 23
2.3. $\boldsymbol{f(x) = rx(1-x)}$, $r = 3.5$ (repulsor) 24
2.4. Rotación R_θ. 26
2.5. Aplicación $E_2(x)$. 27
2.6. Puntos periódicos de E_2 de orden $q \leq 4$. 29
2.7. E_2, E_2^2 y E_2^3 junto con sus puntos q–periódicos (azul: orden $q = 1$, verde: orden $q = 2$, rojo: orden $q = 3$. 30
2.8. Puntos q–periódicos. 35
2.9. Puntos q–periódicos. 36
2.10. Puntos 2–periódicos y puntos fijos. 39
2.11. Órbitas $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x_0}$, para $n = 6$. 43
2.12. Cono $C(\boldsymbol{x_0}; L)$. 46
2.13. Conos $C(\boldsymbol{x_0}; L)$ de $f(x) = x^2$, para $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$. 47
2.14. Conos $C(\boldsymbol{x_0}; L)$ de $f(x) = |x|$, para $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$. 48
2.15. Conos $C(\boldsymbol{x_0}; L)$ de $f(x) = \sqrt{x}$, para $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$. 48
2.16. $f(x)$, $f'(x)$ y $L := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$. 51
2.17. $f(x) = E_4(x)$. 52
2.18. $E_4^{-n}(A)$ para $n = 1, 2, ..., 6$. 53
2.19. Órbitas $f^n(x_1)$ y $f^n(x_2)$ para $n = 0, 1, ..., 15$ 63
2.20. Órbitas $f^n(x_1)$ y $f^n(x_2)$ para $n = 0, 1, ..., 200$ 64
2.21. Órbitas $f^n(x_1)$ y $f^n(x_2)$ para $n = 0, 1, ..., 40$ 64
2.22. Órbitas $f^n(x_i)$, $i = 1, 2$ y para $n = 0, 1, ..., 400$ 67

4.1. Iteraciones $x_{n+1} = f_{\boldsymbol{2.5}}(x_n)$, en $x_n \in [0, 1]$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$. 80
4.2. Órbitas $f^n_{\boldsymbol{2.5}}(x)$, $n = 1, 2, ..., 20$. 83

4.3. Diagrama de bifurcación del mapa logístico. 86
4.4. Diagrama de bifurcación del mapa logístico. 88

INTRODUCCIÓN

El estudio de los sistemas dinámicos discretos ha cobrado relevancia en la comprensión de fenómenos naturales, económicos y sociales donde la evolución temporal se modela mediante iteraciones de funciones. En este marco, el *Teorema de Sarkovskii* (1964) constituye un resultado fundamental: establece un orden total en los números naturales tal que, si una función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ posee un ciclo de período n, entonces posee ciclos de todos los períodos que le siguen en el orden de Sarkovskii (Sarkovskii, 1964). Este teorema revela una jerarquía sorprendente en la aparición de órbitas periódicas y ha inspirado desarrollos posteriores en la teoría del caos.

La presente tesis, titulada *Visualización y análisis numérico del Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas*, surge de la necesidad de abordar los conceptos abstractos del teorema a un nivel computacional y gráfico, facilitando su comprensión en el contexto académico de pregrado en Matemática. En particular, se busca demostrar, a través de simulaciones, cómo la aparición de ciclos de diferentes períodos sigue el orden prescrito por Sar-

kovskii.

La importancia de este trabajo radica en varios aspectos. En primer lugar, el Teorema de Sarkovskii se considera un pilar en la teoría de los sistemas dinámicos, con conexiones directas al resultado de (Li & Yorke, 1975), que prueba que la existencia de un ciclo de período 3 implica caos (Li & Yorke, 1975). En segundo lugar, herramientas computacionales como el *mapa logístico* $f_r(x) = rx(1-x)$ ofrecen un ejemplo paradigmático de transición de comportamiento periódico a caótico al variar el parámetro r (Alligood et al., 1996; Devaney, 1989). Por último, en el contexto local, la formación matemática de los estudiantes de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga carece de recursos que combinen teoría rigurosa con experimentación computacional, por lo que este trabajo contribuye a fortalecer la enseñanza y la investigación de la dinámica no lineal en Ayacucho.

La justificación de la tesis se basa en la posibilidad de visualizar los resultados del teorema mediante gráficos de bifurcación, diagramas de órbitas periódicas y la identificación de ciclos, lo que permite comprobar numéricamente predicciones teóricas. De esta manera, se combina el rigor matemático con la exploración experimental.

En cuanto a la metodología, se seguirá un enfoque mixto teórico–computacional:

- Se presentarán las definiciones y resultados fundamentales de funciones continuas, puntos fijos y órbitas periódicas.
- Se implementarán algoritmos en Python para detectar y representar ciclos periódicos en funciones prototipo como el mapa logístico.
- Se contrastarán los resultados numéricos con las predicciones del orden de Sarkovskii, analizando las bifurcaciones y la transición al caos.

La investigación se limita a funciones continuas unidimensionales en intervalos compactos, especialmente al mapa logístico, por su relevancia pedagógica y facilidad de simulación. No se abordarán sistemas de mayor dimensión ni derivadas fraccionarias, restringiendo el alcance al contexto de enseñanza universitaria de Ayacucho–Perú.

La tesis se organiza de la siguiente manera:

Capítulo 1. Planteamiento del Problema: contextualiza el estudio, se formula el problema general y específicos, objetivos, hipótesis y variables de investigación.

Capítulo 2. Marco Teórico: presenta conceptos de funciones continuas en $[a, b]$, puntos fijos y periódicos, el Teorema de Sarkovskii y resultados relacionados como el Teorema de Li–Yorke.

Capítulo 3. Materiales y Métodos: describe los métodos numéricos, algoritmos y el software (Python, bibliotecas científicas) utilizados para la detección y visualización de órbitas periódicas.

Capítulo 4. Resultados y Análisis Numérico: muestra los diagramas de bifurcación, identifica ciclos de distintos períodos y verifica la jerarquía de Sarkovskii.

Conclusiones y recomendaciones: resume los hallazgos, discute limitaciones y propone líneas de investigación futura.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

La teoría de sistemas dinámicos discretos desempeña un papel fundamental en el estudio de fenómenos que evolucionan de forma iterativa en el tiempo. Uno de los resultados más fascinantes en este ámbito es el Teorema de Sarkovskii, el cual establece un orden total en los números naturales que determina la coexistencia de ciclos periódicos para funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Este orden implica que si una función tiene una órbita periódica de cierto período, necesariamente tendrá otras órbitas de períodos relacionados. En particular, si una función tiene una órbita de período 3, entonces tiene órbitas de todos los demás períodos enteros positivos (Li & Yorke, 1975). Esta idea se relaciona íntimamente con el concepto moderno de caos.

Sin embargo, en entornos universitarios peruanos y latinoamericanos, temas como el Teorema de Sarkovskii rara vez son abordados en profundidad en los cursos de pregrado en matemáticas. Más aún, su validación computacio-

nal y visualización numérica, a pesar de ser accesibles con herramientas como Python o MATLAB, no están suficientemente desarrolladas ni aprovechadas. En regiones como Ayacucho, donde la formación matemática tiene un fuerte componente teórico, existe una brecha significativa en el uso pedagógico de simulaciones computacionales para comprender conceptos abstractos como los ciclos periódicos, el orden de Sarkovskii y el caos determinista.

El **mapa logístico** $x_{n+1} = rx_n\,(1 - x_n)$, ampliamente estudiado por su comportamiento bifurcante y caótico, constituye un ejemplo paradigmático para explorar la aparición de órbitas periódicas y verificar numéricamente el Teorema de Sarkovskii. Diversos estudios (Alligood et al., 1996; Strogatz, 2014), han mostrado cómo la variación del parámetro $r \in [0, 4]$ genera periodos sucesivos 2^n culminando en un régimen caótico, lo cual puede ser observado mediante diagramas de bifurcación.

En el entorno local, debido a que no hay trabajos sobre este tema, la comprensión de parte de los estudiantes es mínima, es por ello que no lo aplican en otras áreas –como biología, economía o ingeniería– donde las soluciones numéricas y gráficas son herramientas esenciales.

Ante esta situación, el aporte de esta tesis es realizar un estudio que combine teoría, parte computacional y visualización gráfica, para fomentar una comprensión más detallada del comportamiento dinámico de funciones reales

y así cerrar la brecha entre lo teórico y lo aplicado en la formación matemática universitaria.

1.2. Delimitación de la investigación

1.2.1. Espacial

La presente investigación se desarrollará en la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga (UNSCH), ubicada en la ciudad de Ayacucho, Perú. Este contexto académico es particularmente relevante, dado que la enseñanza de los métodos numéricos y sistemas dinámicos discretos aún se encuentra en proceso de fortalecimiento en el plan de estudios del Programa de Matemática.

Según Hernández Sampieri et al. (2014), la delimitación espacial es fundamental para precisar el entorno donde se aplicarán los resultados del estudio, lo que permite contextualizar las conclusiones dentro de un marco espacial definido (Hernández Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P., 2014), *Metodología de la investigación (6ta ed.). McGraw–Hill.*

1.2.2. Social

El estudio está dirigido principalmente a la comunidad universitaria de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas de la UNSCH, en especial a los estudiantes de pregrado en Matemática y docentes vinculados a cursos de Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico, Matemática Computacional y

Sistemas Dinámicos.

Esta delimitación es clave para entender a quién va dirigido el estudio y cómo sus resultados pueden ser aplicados en un contexto práctico, como lo mencionan (Sampieri et al., 2014), (Hernández Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, P., 2014).

1.2.3. Temporal

El periodo de desarrollo de la investigación abarca desde el segundo semestre del año 2025 hasta el primer semestre del año 2026.

Durante esta etapa se contemplan tres fases principales:

- **Fase teórica (2025–II)**: revisión bibliográfica, sistematización del marco teórico y formulación del modelo matemático base.

- **Fase computacional (2026–I)**: desarrollo e implementación de los algoritmos computacionales en Python, obtención de diagramas de bifurcación y análisis de ciclos periódicos.

- **Fase analítica y de redacción (2026–I)**: interpretación de resultados, elaboración de conclusiones, redacción final y sustentación de la tesis.

De esta manera, la investigación se encuentra claramente delimitada en un espacio institucional concreto (UNSCH, Ayacucho), con una población

académica específica (docentes y estudiantes de Matemática), y en un marco temporal acotado a un año académico.

De acuerdo con (Sabino, C. 1992), la delimitación temporal permite establecer un horizonte de tiempo claro, asegurando que la investigación se mantenga dentro de un marco cronológico relevante y manejable (Sabino, C., 1992). *El proceso de investigación.*

1.3. Problema de investigación

1.3.1. Problema general

¿El Teorema de Sarkovskii puede visualizarse y analizarse numéricamente en funciones unidimensionales discretas?

1.3.2. Problemas específicos

• ¿Cómo presentar el Teorema de Sarkovskii de manera clara y accesible, resaltando su estructura jerárquica sobre los períodos de las órbitas periódicas de funciones continuas reales?

• ¿Qué métodos computacionales y herramientas numéricas permiten identificar y clasificar órbitas periódicas en funciones como el mapa logístico, asociadas al orden de Sarkovskii?

• ¿Cómo representar gráficamente, mediante diagramas de bifurcación y otras visualizaciones, la aparición progresiva de ciclos periódicos y su correspondencia con el orden establecido por el Teorema de Sarkovskii?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Desarrollar un enfoque visual y numérico que permita analizar y verificar el Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas, mediante simulaciones computacionales que evidencien la aparición y coexistencia de órbitas periódicas de distintos órdenes.

1.4.2. Objetivo específico

• Exponer el Teorema de Sarkovskii de forma clara y estructurada, destacando su aplicación al estudio jerárquico de órbitas periódicas en funciones continuas reales.

• Implementar métodos computacionales adecuados (como iteración numérica y detección de ciclos) que permitan identificar y clasificar órbitas periódicas en funciones discretas, como el mapa logístico.

• Generar representaciones gráficas, como diagramas de bifurcación, que permitan visualizar la evolución de ciclos periódicos y establecer su correspondencia con el orden de Sarkovskii.

1.5. Hipótesis

1.5.1. Hipótesis general

Es posible analizar y verificar el Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas mediante un enfoque visual y computacional, utilizando simulaciones numéricas que muestren la aparición y coexistencia de órbitas periódicas de distintos órdenes.

1.5.2. Hipótesis específica

• El Teorema de Sarkovskii expuesto de forma clara y estructurada, permite comprender su implicancia jerárquica en la aparición de órbitas periódicas.

• La implementación adecuada de métodos computacionales, hace posible identificar y clasificar numéricamente órbitas periódicas en funciones discretas como el mapa logístico.

• La generación de representaciones gráficas adecuadas, ayuda en la visualización de manera efectiva la aparición de ciclos periódicos y su relación con el orden del Teorema de Sarkovskii.

1.6. Variables e indicadores

1.6.1. Variable independiente

El Teorema de Sarkowskii.

1.6.2. Variable dependiente

Visualización y análisis numérico en funciones unidimensionales discretas.

1.7. Diseño metodológico

1.7.1. Tipo de investigación

Es del tipo documental, ya que el enfoque principal es revisar y analizar la literatura existente para construir un marco teórico y visual sobre el teorema de Sarkovskii.

Según Quivy, R., & Van Campenhoudt, L. (2005), en su libro "Manual de investigación en ciencias sociales", explican que la investigación documental implica la revisión y análisis de documentos existentes para construir un marco teórico y comprender mejor el fenómeno de estudio.

Igualmente Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2000) en su manual "Handbook of Qualitative Research", describen a la investigación documental como un método para examinar y sintetizar el conocimiento existente a través de la revisión y análisis de documentos

1.7.2. Nivel de investigación

Nivel descriptivo, tiene por finalidad de explicar el comportamiento del Teorema de Sarkovskii en las funciones unidimensionales discretas, con la relación de (causa–efecto).

1.7.3. Método de investigación

El método de investigación es inductivo y deductivo, pues como señala (Sampieri, H., 2010) en su libro: Metodología de la Investigación, *"la investigación se basa en fuentes bibliográficas existentes en libros, tesis, artículos científicos e información por internet"*

1.7.4. Diseño de investigación

Diseño no experimental, la variable, el Teorema de Sarkovskii, se aplica a las funciones discretas de una variable.

1.8. Población y muestra

1.8.1. Población

De acuerdo a la naturaleza del trabajo de investigación no se considera la población.

1.8.2. Muestra

No se considera.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del Problema

2.1.1. Antecedentes Internacionales

(Li & Yorke, 1975), en el artículo "Period three implies chaos. The American Mathematical Monthly", demostraron que para funciones unidimensionales discretas continuas $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow I$, la existencia de un ciclo de período 3 implica caos topológico y la presencia de periodos de todos los órdenes naturales. Este resultado fundamental –cuyo objetivo fue probar la existencia de caos mediante un período específico, mediante un diseño teórico–deductivo en espacios métricos compactos, utilizando análisis de invariantes topológicos como instrumento, y obteniendo como resultado la jerarquía de períodos y la densidad de órbitas periódicas– constituye un caso particular del teorema general de Sarkovskii (1964).

(Alseda et al., 2000), en una serie de artículos plasmados en "Combinatorial dynamics and entropy in dimension one. World Scientific.", de-

sarrollan condiciones combinatorias para órbitas periódicas en funciones unidimensionales, dando base teórica al orden de Sarkovskii y al análisis computacional de órbitas.

(Baldoma, 2002), en su tesis doctoral "Numerical detection of periodic orbits in discrete dynamical systems", presenta métodos numéricos y visuales para detectar órbitas periódicas en sistemas discretos. Aplica estos métodos al mapa logístico y otros mapas unidimensionales, apoyando empíricamente resultados como los del Teorema de Sarkovskii.

(Kocak & Palmer, 1995), en su artículo "A numerical study on period–doubling and chaos in the logistic map", estudia la bifurcación del mapa logístico usando simulaciones numéricas de alta precisión. Identifica ciclos de distintos órdenes y muestra experimentalmente la estructura de duplicación de períodos, vinculada al orden de Sarkovskii.

(Huang, 2008), en su tesis de maestría "On the Sarkovskii's theorem and its numerical verification using computer simulations", realiza una implementación computacional del Teorema de Sarkovskii y genera gráficos para mostrar la aparición de ciclos periódicos. Usa la función logística como caso principal y argumenta sobre la efectividad del enfoque visual para validar el orden del teorema.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

En el proceso de la búsqueda de antecedentes nacionales, no se ha hallado investigaciones realizadas sobre el tema.

2.1.3. Antecedentes Locales

Igualmente, no se encontraron investigaciones sobre el tema.

2.2. Bases teóricas

El estudio de las funciones unidimensionales discretas constituye un campo fundamental en la teoría moderna de los sistemas dinámicos. A través de iteraciones sucesivas de funciones continuas definidas sobre intervalos reales, se pueden observar fenómenos de periodicidad, estabilidad e incluso caos determinista, característicos de sistemas no lineales (Devaney, 1989).

El **Teorema de Sarkovskii (1964)** revela un orden jerárquico sorprendente en los períodos de las órbitas periódicas de funciones continuas en la recta real: la existencia de un ciclo de cierto período implica la existencia de ciclos de otros períodos determinados por un orden específico. Este resultado, posteriormente vinculado con el **Teorema de Li y Yorke (1975)**, constituye una piedra angular para comprender el surgimiento del caos en sistemas unidimensionales.

Desde una perspectiva computacional, el análisis numérico y la visualización de estos fenómenos permiten interpretar de manera tangible la coexistencia de órbitas periódicas, su estabilidad y las bifurcaciones que conducen al caos.

Desarrollamos los fundamentos teóricos y numéricos necesarios para analizar el Teorema de Sarkovskii, mediante ejemplos ilustrativos, demostraciones rigurosas y simulaciones en `MatLab` y `Python`.

2.2.1. Funciones continuas en $[a, b]$: Definiciones y propiedades básicas

Usamos $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., \}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$: conjunto de los enteros, $\mathbb{Q}$: conjunto de los números racionales, $\mathbb{R}$: conjunto de los números reales, $\mathbb{C}$: conjunto de los números complejos, $\mathbb{R}^+$ conjunto de los números reales positivos, $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R} \cup 0$.

2.2.1. Definición. *La función* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice que es continua en* $x_0 \in [a, b]$ *si cumple*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.1}$$

Las funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ poseen las siguientes propiedades fundamentales, dadas en las siguientes proposiciones.

2.2.1. Teorema. ***Teorema del Valor intermedio:***

Si $f \in C\,[a,b]$, entonces para cualquier valor N entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un punto $c \in \langle a,b\rangle$ tal que $f(c) = N$.

Demostración.-

Sea la función $g(x) = f(x) - c$, con c una constante arbitraria. Entonces,

(•) $g \in C[a,b]$ porque $f \in C[a,b]$ por hipótesis y al restarle una constante seguirá siendo continua.

(•) g en $x = a$: $g(a) = f(a) - c$, y si suponemos que $f(a) < c < f(b)$, entonces $g(a) < 0$. Y si evaluamos g en $x = b$: $g(b) = f(b) - c$, y aquí $g(b) > 0$.

(•) Tenemos que g es continua, además, $g(a) < 0$ y $g(b) > 0$, aplicamos el Teorema de Bolzano, que nos dice que existe un $c \in \langle a,b\rangle$ tal que $g(c) = 0$. Es decir, $\exists c \in \langle a,b\rangle$, tal que $\boldsymbol{f(c) = N}$. ∎

2.2.1. Proposición. *Sea $f \in C[a,b]$. Si la imagen de f contiene a $[a,b]$, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que*

$$f(c) = c. \tag{2.2}$$

Demostración.-

Puesto que la imagen de f contiene a $[a,b]$, existen $m_1, m_2 \in [a,b]$ tales que

$$f(m_1) \leq a \leq m_1,$$

$$m_2 \leq b \leq f(m_2)$$

Ahora, sea la función $g(x) = f(x) - x$, por el Teorema (*2.2.1*), existe un $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, es decir $f(c) = c$. ∎

2.2.2. Teorema. *Teorema de Weierstrass*

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua en el intervalo cerrado y acotado* $[a, b]$. *Entonces* f *alcanza un máximo y un mínimo en* $[a, b]$, *es decir, existen* $x_{min}, x_{máx} \in [a, b]$ *tales que*

$$f(x_{min}) = \min_{x\in[a,b]} f(x), \qquad f(x_{máx}) = \max_{x\in[a,b]} f(x). \tag{2.3}$$

Demostración.-

(•) Que f alcance su máximo y mínimo en $[a, b]$, indica que f es acotado. Probamos que $f([a, b])$ es acotada.

Supongamo, por contradicción, que f no es acotada superiormente. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$ existen números $x_n \in [a, b]$ tales que

$$f(x_n) > n.$$

Por tanto, al estar la sucesión $\{x_n\} \subset [a, b]$, que es compacto, por el teorema de Bolzano–Weierstrass, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a algún $c \in [a, b]$. Y como $f \in C[a, b]$ entonces, cuando $k \to \infty$, se tiene

$$f(x_k) \to f(c).$$

Pero por la construcción de f, tenemos que

$$f(x_{n_k}) > n_k, \quad \text{y} \quad n_k \to \infty$$

es decir

$$f(x_{n_k}) \ \to \ +\infty.$$

Y esto contradice el hecho de que $f(x_{n_k})$ converge a un número real $f(c)$.

Por tanto, f sí es acotada superiormente. En forma similar se tiene que f es acotada inferiormente. De ello se concluye que $f([a,b])$ es acotada.

($\bullet$) Existencia de $x_{\text{máx}}$ tal que $f(x_{\text{máx}}) = \underset{x\in[a,b]}{\text{máx}} f(x) = M$.

Por definición de supremo, existe una sucesión $\{x_n\} \subset [a,b]$ tal que

$$f(x_n) \ \to \ M, \quad \text{cuando} \quad n \ \to \ \infty.$$

Pero, $[a,b]$ es compacto, es decir que $\{x_n\}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ con

$$x_{n_k} \ \to \ c \in [a,b].$$

Y por continuidad de f en c, tenemos

$$f(x_{n_k}) \ \to \ f(c), \quad \text{cuando} \quad k \ \to \ \infty.$$

Sin embargo, como toda la subscesión $\{f(x_{n_k})\}$ converge a M, se deduce que $f(c) = M$. Es decir, que f alcanza su máximo en c, hacemos $x_{\text{máx}} = c$.

($\bullet$) Existencia de x_{min} tal que $f(x_{\text{min}}) = \underset{x\in[a,b]}{\text{mín}} f(x) = m$.

El argumento para el mínimo es similar, hacemos

$$m = \underset{x\in[a,b]}{\text{mín}} f(x).$$

Tomemos una sucesión $\{y_n\} \subset [a,b]$ tal que

$$f(y_n) \ \to \ m.$$

Extraemos una subsucesión convergente

$$y_{n_k} \rightarrow d \in [a, b],$$

que por continuidad de f se tiene

$$f(y_{n_k}) \rightarrow f(d)$$

y por unicidad del límite

$$f(d) = m.$$

Es decir, d es un punto donde f alcanza su mínimo. ∎

2.2.2. Órbitas, puntos fijos y periódicos

2.2.2. Definición. *Iteraciones*

Sea la función $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, se define la n–iterada de f como: (Devaney, 1989)

$$f^n(x) = \underbrace{f\left(f\left(\cdots f(x)\cdots\right)\right)}_{n-veces}. \tag{2.4}$$

2.2.3. Definición. *Sistema dinámico*

Un sistema dinámico de tiempo discreto o simplemente **sistema dinámico** *consta de X, un conjunto no vacío, y un mapeo $f : X \rightarrow X$. Para $n \in \mathbb{N}$, la n–ésima iteración de f es la composición n–veces (Devaney, 1989)*

$$f^n = f \circ \cdots \circ f. \tag{2.5}$$

Se define en forma recursiva, para $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{n+1} = f \circ f^n, \tag{2.6}$$

También

$$f^0 = \boldsymbol{Id} \tag{2.7}$$

donde $\boldsymbol{Id}$ denota el mapeo identidad.

Se observa que

$$f^{m+n} = f^m \circ f^n, \tag{2.8}$$

para cualesquier $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Si f es invertible, se define

$$f^{-n} = f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1} = \left(f^{-1}\right)^n, \quad n\text{–veces.} \tag{2.9}$$

En este caso, (2.9) se cumple para cualquier $m, n \in \mathbb{Z}$, puesto que $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, estos iterativos forman un grupo si es que f es invertible, y un semigrupo en caso contrario.

2.2.1. Ejemplo. *Sean los sistemas dinámicos* $f : X \to X$ *y* $g : Y \to Y$. *Se define un nuevo sistema dinámico*

$$h : X \times Y \to X \times Y$$

mediante $h(x, y) = (f(x), g(y))$.

La aplicación h *es invertible, si tanto* f *como* g *son invertibles, además*

$$h^{-1}(x, y) = \left(f^{-1}(x), g^{-1}(y)\right).$$

2.2.4. Definición. ***Semiflujo***

Una familia de mapeos

$$\phi_t : X \ \rightarrow \ X, \tag{2.10}$$

con $t \geq 0$, *tal que* $\phi_0(x) = \boldsymbol{Id}$ *y*

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \quad \textit{para } t, s \geq 0 \tag{2.11}$$

se denomina **semiflujo**.

Si en la Definición (*2.2.4*) las $\phi_t : X \ \rightarrow \ X$ con $t \in \mathbb{R}$, $\phi_0 = \boldsymbol{Id}$, se tiene que

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s, \quad \text{para } t, s \in \mathbb{R},$$

entonces a la familia ϕ_t se le llama **flujo**.

2.2.5. Definición. ***Sistema dinámico en tiempo continuo***

Una familia de mapeos ϕ_t *se dice que es un* **sistema dinámico en tiempo continuo** *o simplemente un* **sistema dinámico**, *si es un flujo o un semiflujo. Además, si* ϕ_t *es un flujo, entonces se tiene*

$$\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = \boldsymbol{Id}, \tag{2.12}$$

es decir que cada aplicación ϕ_t *es invertible, y su inversa está dada por*

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}. \tag{2.13}$$

2.2.2. Ejemplo. *Sea* $y \in \mathbb{R}^n$, *consideremos la familia*

$$\phi_t : \mathbb{R}^n \ \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

definida mediante

$$\phi_t(x) = x + ty, \quad \textit{para } t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.14}$$

Para $t = 0$*:*

$$\phi_0(x) = x + 0 \cdot y = x = \boldsymbol{Id}(x) \implies \phi_0 = \boldsymbol{Id}.$$

También

$$\begin{aligned} \phi_{t+s}(x) &= x + (t+s) \cdot y \\ &= (x + s \cdot y) + t \cdot y \;=\; \phi_t\left(\phi_s(x)\right) = \left(\phi_t \circ \phi_s\right)(x), \end{aligned}$$

es decir que la familia ϕ_t *es un flujo.*

2.2.3. Ejemplo. *Sean los flujos*

$$\phi_t : X \;\to\; X,$$

$$\psi_t : Y \;\to\; Y,$$

con $t \in \mathbb{R}$*. Para cada* $t \in \mathbb{R}$ *se define la familia*

$$\alpha_t : X \times Y \;\to\; X \times Y$$

mediante

$$\alpha_t\,(x, y) = \left(\phi_t(x),\, \psi_t(y)\right),$$

la cual será un flujo y

$$\alpha_t^{-1}\,(x, y) = \left(\phi_{-t}(x),\, \psi_{-t}(y)\right).$$

2.2.6. Definición. *Órbita*

Se define la órbita de un punto x_0 *bajo* f *como*

$$\mathcal{O}(x_0) = \left\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\right\} \tag{2.15}$$

2.2.7. Definición. *Punto fijo*

Un punto $x^* \in [a, b]$ se dice que es un punto fijo si

$$f(x^*) = x^*. \tag{2.16}$$

2.2.8. Definición. *Punto periódico*

Un punto x^* se dice que es un punto periódico de periodo $\boldsymbol{n}$ si

$$f^n(x^*) = x^*, \tag{2.17}$$

y para $1 \leq k < n$ se tiene que $f^k(x^*) \neq x^*$.

2.2.2. Proposición. *Estabilidad local*

Sea f diferenciable en $\langle a, b\rangle$ y sea x^* un punto fijo. Si $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es estable **(atractor)** *y si $|f'(x)| > 1$ es inestable* **(repulsor)**.

Demostración.-

Sea x_0 cercano a x^*. Por el Teorema de Taylor de primer orden:

$$f(x_0) = f(x^*) + (x_0 - x^*)f'(x^*) + O(x_0 - x^*).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x_1} = f(x_0) &= f(x^*) + (x_0 - x^*)f'(x^*) + O(x_0 - x^*) \\ &= x^* + (x_0 - x^*)f'(x^*) + O(x_0 - x^*) \\ &\approx \boldsymbol{x^* + (x_0 - x^*)f'(x^*)} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow x_1 - x^* \approx f'(x^*)\,(x_0 - x^*)}$$

Iterando,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_2 - x^* \approx} f'(x^*)\,(x_1 - x^*) &\approx f'(x^*)\cdot f'(x^*)\,(x_0 - x^*) \\
&\approx \boldsymbol{\left(f'(x^*)\right)^2 (x_0 - x^*)} \\
\boldsymbol{x_3 - x^* \approx} f'(x^*)\,(x_2 - x^*) &\approx f'(x^*)\cdot \left(f'(x^*)\right)^2 (x_0 - x^*) \\
&\approx \boldsymbol{\left(f'(x^*)\right)^3 (x_0 - x^*)} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x_n - x^*} &\boldsymbol{\approx \left(f'(x^*)\right)^n (x_0 - x^*)}
\end{aligned}$$

Si $|f'(x^*)| < 1$ se tiene que $(f'(x^*))^n \to 0$, y por tanto $\boldsymbol{x_n \to x^*}$, es decir que x^* es un atractor. ∎

En la Figura (*2.1*) se observa para $f(x) = rx(1-x)$, con $r = 2.7$, que el punto fijo $x^* \approx 0.6296$ es un atractor, pues $|f'(x^* \approx 0.6296)| = |-0.7| < 1$. En la Figura (*2.2*) se ve la evolución de los x_n, para $r = 3.5$, donde los x_n se alejan progresivamente del punto fijo $x^* \approx 0.7143$, es decir un repulsor, aquí $|f'(x^* \approx 0.7143)| = |-1.5| > 1$. Igualmente en la Figura (*2.3*), en la telaraña, las líneas rojas muestran cómo las iteraciones divergen del punto fijo $x^* \approx 0.7143$, ilustrando el comportamiento repulsor, con $x = 1 - \frac{1}{r}$, para $r = 3.5$

Figura 2.1: $f(x) = rx(1-x)$, $x_0 = 0.2$, $r = 2.7$

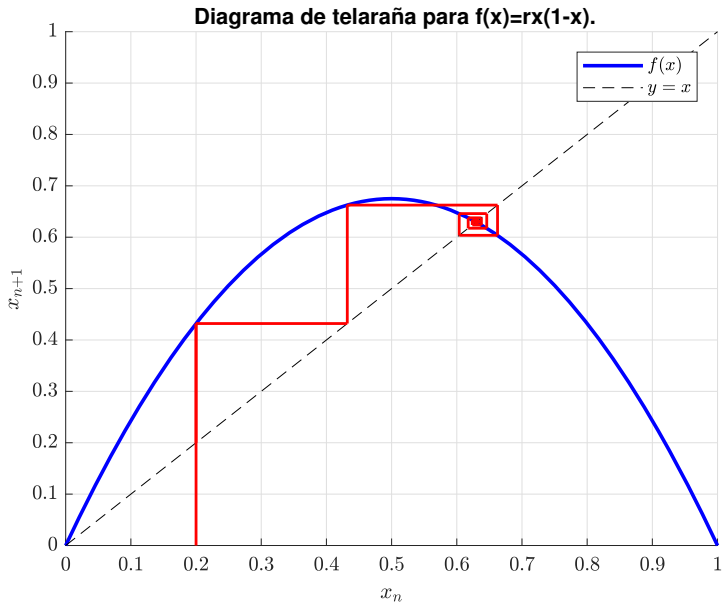


Figura 2.2: $f(x) = rx(1-x)$, $r = 3.5$ (repulsor)

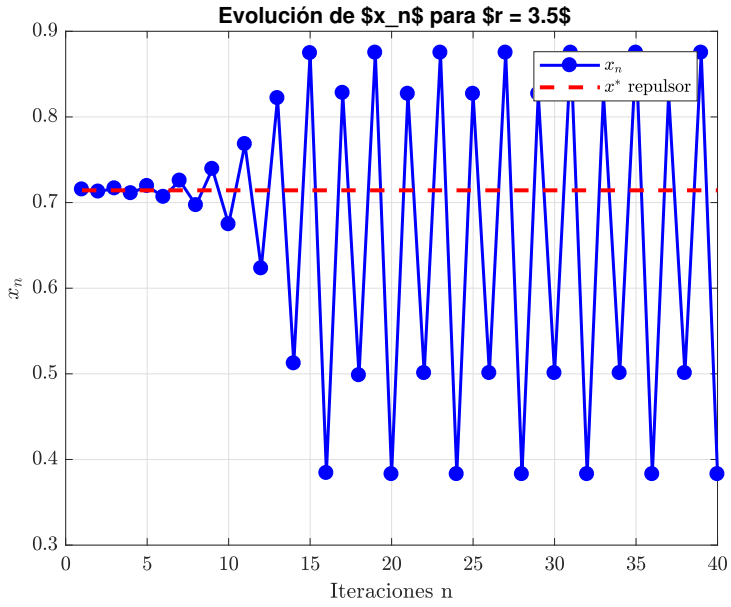
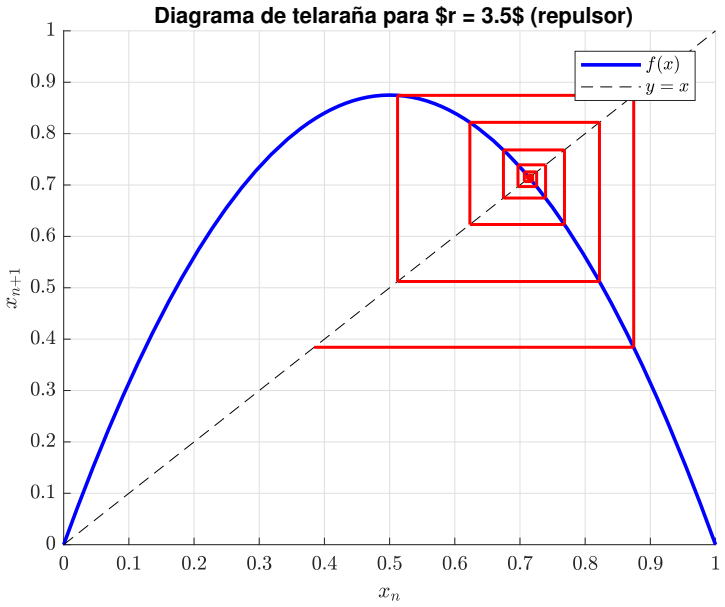


Figura 2.3: $\boldsymbol{f(x) = rx(1-x)}$, $r = 3.5$ (repulsor)



2.2.9. Definición. *Órbita periódica*

Sea x^* un punto n–periódico de f, entonces x^*, $f(x^*)$, $f^2(x^*)$, ..., $f^{n-1}(x^*)$ son todos distintos. Además, el conjunto

$$\left\{x^*, f(x^*), f^2(x^*), \ldots, f^{n-1}(x^*)\right\}$$

se denomina **órbita periódica de** f.

2.2.10. Definición. *q–periódico*

Sea $q \in \mathbb{N}$. Se dice que $x \in X$ es un punto q–periódico de un mapeo $f : X \to X$ si se cumple que $f^q(x) = x$. Además, se dice que $x \in X$ es un punto periódico de f si y sólo si, x es q–periódico para algún $q \in \mathbb{N}$ (Barreira & Valls, 2013).

Los puntos fijos de f, es decir los $x \in X$ tales que $f(x) = x$ son q–periódicos para cualquier $q \in \mathbb{N}$.

En forma similar, si x es q–periódico, entonces

$$f^{k\cdot q}(x) = \left(\underbrace{f^q \circ \cdots \circ f^q}_{k-veces} \right)(x) = x$$

es decir que es $k \cdot q$–periódico, para $k \in \mathbb{N}$.

2.2.11. Definición. *Se dice que un punto periódico x tiene período q si, y sólo si, x es q–periódico pero no es ℓ–periódico para ningún $\ell < q$.*

2.2.2.1. Ejemplos en tiempo discreto

2.2.4. Ejemplo. *Rotaciones de la circunferencia*

La circunferencia $\mathcal{S}^1$ se va a identificar con $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, es decir, en la recta real en la cual dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ están relacionados si $x - y \in \mathbb{Z}$. Se define (Barreira & Valls, 2013)

$$\mathcal{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{R}/\sim, \tag{2.18}$$

donde $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$, donde

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Las clases de equivalencia correspondientes, que son elementos de $\mathcal{S}^1$, se pueden representar como

$$[x] = \{x + m : \, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Es decir, $[x] + [y] = [x + y]$ y $[x] - [y] = [x - y]$.

2.2.12. Definición. ***Rotación***

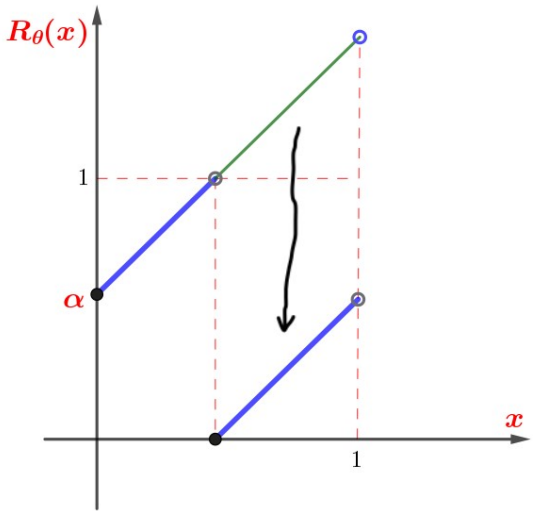
Para $\theta \in \mathbb{R}$ *se define la* **rotación** $R_\theta : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ *mediante (Barreira & Valls, 2013)*

$$R_\theta([x]) = [x + \theta] = x + \theta \ \boldsymbol{mod}\ 1. \tag{2.19}$$

Se observa que $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

En la Figura (2.4) se observa la rotación R_θ.

Figura 2.4: Rotación R_θ.



2.2.3. Proposición. *Sea* $\theta \in \mathbb{R}$*:*

(a) si $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$*, entonces* R_θ *no tiene puntos periódicos,*

(b) si $\theta = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$*, con* p *y* q *primos entre sí, entonces todos los puntos de* $\mathcal{S}^1$ *son puntos periódicos de* R_θ *y tienen periodo* q*.*

Demostración.-

$q\theta \in \mathbb{Z}$, si y sólo si $[x] \in \mathcal{S}^1$ es $q-$periódico $\Leftrightarrow [x + q \cdot \theta] = x$. ∎

Otra familia de aplicaciones que se dan en la circunferencia son las expansiones (o **mapa de expansión** o **mapa de multiplicación módulo 1**) (Barreira & Valls, 2013).

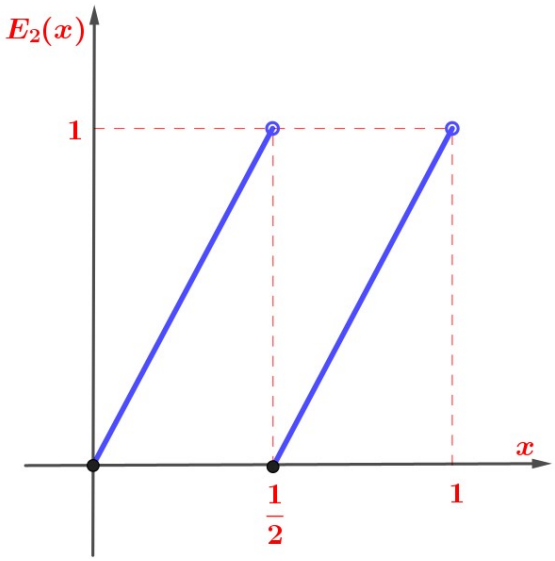
2.2.13. Definición. *Se define el mapeo, para un entero* $m > 1$,

$$E_m : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1, \quad por\ E_m(x) = mx \ \mathbf{mod\ 1} \tag{2.20}$$

En la Figura (2.5) se observa la gráfica de $E_m(x)$ para $m = 2$.

$$E_2(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 & , \quad \dfrac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases} .$$

Figura 2.5: Aplicación $E_2(x)$.



Los puntos periódicos de las E_m se hallan así:

$$E_m^q(x) = E_m \circ \cdots \circ E_m(x), \quad (q\text{–veces})$$

Sabemos que $E_m(x) = mx$ **mod 1**, entonces aplicamos sucesivamente.

1ra iteración:

$$E_m(x) = mx \,\textbf{mod 1}.$$

2da iteración:

$$E_m^2(x) = E_m\left(E_m(x)\right) = E_m\left(mx \,\textbf{mod 1}\right) = m\left(mx \,\textbf{mod 1}\right) \,\textbf{mod 1}$$

Aplicando la propiedad distributiva del módulo

$$E_m^2(x) = m^2x \,\textbf{mod 1}. \tag{2.21}$$

3ra iteración:

$$E_m^3(x) = E_m\left(E_m^2(x)\right) = E_m\left(m^2x \,\textbf{mod 1}\right) = m\left(m^2x \,\textbf{mod 1}\right) \,\textbf{mod 1}$$

$$\Longrightarrow E_m^3(x) = m^3x \,\textbf{mod 1}.$$

Generalizando,

$$E_m^q(x) = m^qx \,\textbf{mod 1}.$$

Entonces, un punto $x \in \mathcal{S}^1$ es q–periódico, si y solo si,

$$E_m^q(x) = x \implies m^qx \,\textbf{mod 1} = x \,\textbf{mod 1} \implies m^qx - x = \left(m^q - 1\right)x \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto los puntos q–periódicos de E_m son

$$x = \frac{p}{m^q - 1}, \quad \text{con} \quad p = 1, 2, ..., m^q - 1. \tag{2.22}$$

Hallaremos el número de puntos periódicos, $n_m(q)$, de E_m de período q.

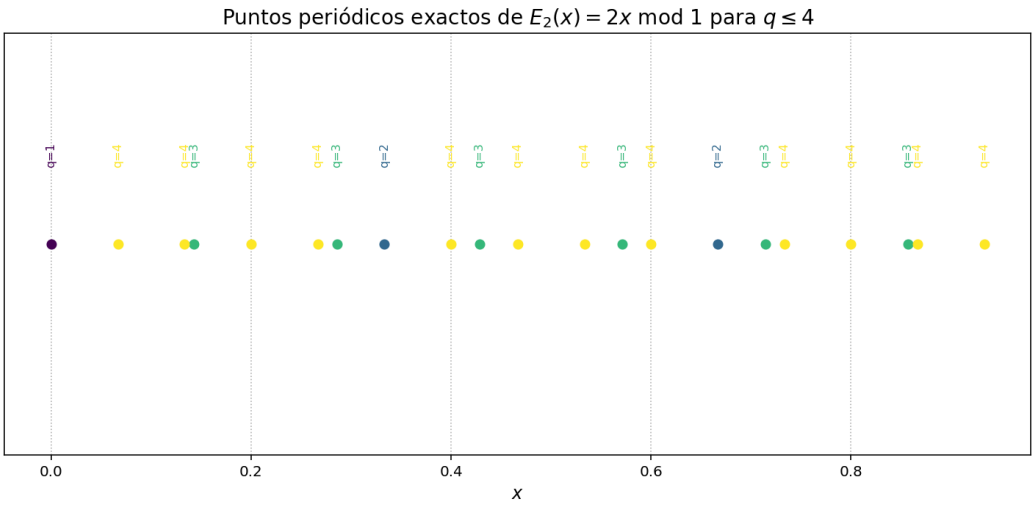
Si q es primo: $n_m(q) = m^q - m$, esto se muestra en el Cuadro (*2.1*).

Cuadro 2.1: Número de puntos periódicos de E_m de período $q \leq 6$.

q	$n_m(q)$
1	$m - 1$
2	$m^2 - m = m^2 - 1 - (m - 1)$
3	$m^3 - m = m^3 - 1 - (m - 1)$
4	$m^4 - m^2 = m^4 - 1 - (m^2 - 1)$
5	$m^5 - m = m^5 - 1 - (m - 1)$
6	$m^6 - m^3 - m^2 + m$

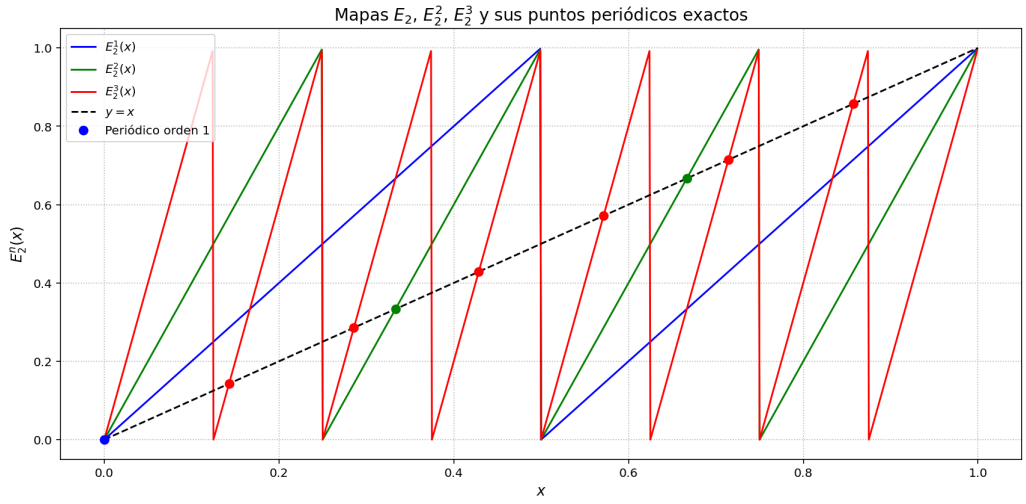
En la Figura (*2.6*) se muestran los x q–periódicos ($q \leq 4$) de E_2.

Figura 2.6: Puntos periódicos de E_2 de orden $q \leq 4$.



En la Figura (2.7) se visualiza a E_2, E_2^2 y E_2^3 junto con sus puntos q–periódicos ($q = 1, 2, 3$).

Figura 2.7: E_2, E_2^2 y E_2^3 junto con sus puntos q–periódicos (azul: orden $q = 1$, verde: orden $q = 2$, rojo: orden $q = 3$.



2.2.2.2. Ejemplos en tiempo continuo

Algunos ejemplos de sistemas dinámicos en tiempo continuo son las ecuaciones diferenciales autónomas (ordinarias), es decir ecuaciones diferenciales que no dependen del tiempo en forma explícita.

2.2.4. Proposición. *Sea dado* $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *y una aplicación continua* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. *El problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= f(\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0 \end{cases} \tag{2.23}$$

tiene una única solución $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0)$ *definida para* $t \in \mathbb{R}$. *Entonces la familia de aplicaciones* $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *definidas para cada* $t \in \mathbb{R}$ *mediante*

$$\phi_t(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) \tag{2.24}$$

es un flujo.

Demostración.-

Consideremos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, y un $s \in \mathbb{R}$ dado, se define por

$$g(t) = \boldsymbol{x}(t + s, \boldsymbol{x}_0) \tag{2.25}$$

Entonces, para $t = 0$ se tiene $g(0) = \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{x}_0)$ y para $t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = \boldsymbol{x}'(t + s, \boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}(t + s, \boldsymbol{x}_0)) = f(g(t)), \tag{2.26}$$

Esto indica que la función g es solución de la ecuación diferencial $\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$. Ahora, por hipótesis, el problema de valor inicial (*2.23*) tiene una única solución, obteniéndose que

$$g(t) = \boldsymbol{x}(t, g(0)) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{x}_0)), \tag{2.27}$$

es decir,

$$\boldsymbol{x}(t + s, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}(s, \boldsymbol{x}_0)), \tag{2.28}$$

para cualesquier $t, s \in \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

De (*2.28*) se obtiene que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Además,

$$\phi_0(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}(0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \to \quad \phi_0 = \boldsymbol{Id} \tag{2.29}$$

Por tanto, la familia de mapeos ϕ_t es un flujo. ∎

2.2.5. Ejemplo. *Sea la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} x' &= -y, \\ y' &= x \end{cases} \tag{2.30}$$

Si $(x, y) = (x(t), y(t))$ es una solución, tenemos que

$$\left(x^2 + y^2\right)' = 2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 2x \cdot (-y) + 2y \cdot (x) = 0$$

Entonces existe una constante $r \geq 0$ de manera que

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Si hacemos

$$x(t) = r\cos\theta(t) \quad \text{y} \quad y(t) = r\sin\theta(t)$$

con θ diferenciable, se deduce, de $x' = -y$,

$$-r \cdot \theta'(t) \cdot \sin\theta(t) = -r\sin\theta(t)$$

$$\implies \theta'(t) = 1 \ \rightarrow \theta(t) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Asimismo

$$\theta(0) = c$$

y

$$(x_0, y_0) = (r\cos c, r\sin c) \in \mathbb{R}^2$$

Entonces obtenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(t+c) \\ r\sin(t+s) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t \cdot r\cos c - \sin t \cdot r\sin c \\ \sin t \cdot r\cos c + \cos t \cdot r\sin c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La matriz $R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ es una matriz rotación para cada $t \in \mathbb{R}$. Además $R(0) = \boldsymbol{Id}$, y por la Proposición (*2.2.4*), la familia de aplicaciones $\phi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas mediante

$$\phi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = R(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

es un flujo. La composición $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ es equivalente a la identidad entre matrices de rotación

$$R(t+s) = R(t)R(s)$$

En el Ejemplo (*2.2.5*), la ecuación diferencial se puede escribir matricialmente

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Los puntos fijos (x^*, y^*) se hallan así

$$\boldsymbol{x'} = \boldsymbol{x} \implies (-y, x) = (x, y) \longrightarrow (x^*, y^*) = (0, 0)$$

o también así

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} \implies \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir que el único punto fijo es $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

Ahora, tenemos

$$\boldsymbol{A}^2 = -\boldsymbol{I}, \ \boldsymbol{A}^3 = -\boldsymbol{A}, \ \boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{I}$$

En general

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{cases} \boldsymbol{I} & , \quad n \equiv 0 \ (\mathbf{mod}\ 4)\,, \\ \boldsymbol{A} & , \quad n \equiv 1 \ (\mathbf{mod}\ 4)\,, \\ -\boldsymbol{I} & , \quad n \equiv 2 \ (\mathbf{mod}\ 4)\,, \\ -\boldsymbol{A} & , \quad n \equiv 3 \ (\mathbf{mod}\ 4)\,. \end{cases}$$

Veamos los puntos q–periódicos, los cuales satisfacen la ecuación $\boldsymbol{A^q x} = \boldsymbol{x}$. En el Cuadro (*2.2*) se ve caso por caso.

Cuadro 2.2: Puntos q–periódicos del Ejemplo (*2.2.5*).

$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{A^q}$	Ecuación $\boldsymbol{A^q x} = \boldsymbol{x}$	**Solución**
1	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x}$	Solo $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
2	$-\boldsymbol{I}$	$-\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$	Solo $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
3	$-\boldsymbol{A}$	$-\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{Ax} = -\boldsymbol{x}$	Solo $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$
4	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$	Todos los $\boldsymbol{x}$ son 4–periódicos

No hay puntos *2*– ni *3*–periódicos no triviales. Todos los puntos son *4*–periódicos, porque $\boldsymbol{A^4} = \boldsymbol{I}$.

Geométricamente, $\boldsymbol{A}$ rota los vectores 90° en sentido antihorario, y después de cuatro rotaciones (360°) todo vuelve al mismo punto.

En la Figura (*2.8*) se observa los puntos 4–periódicos y en la Figura (*2.9*) se visualiza las órbitas de la matriz $\boldsymbol{A}$.

Figura 2.8: Puntos q–periódicos.

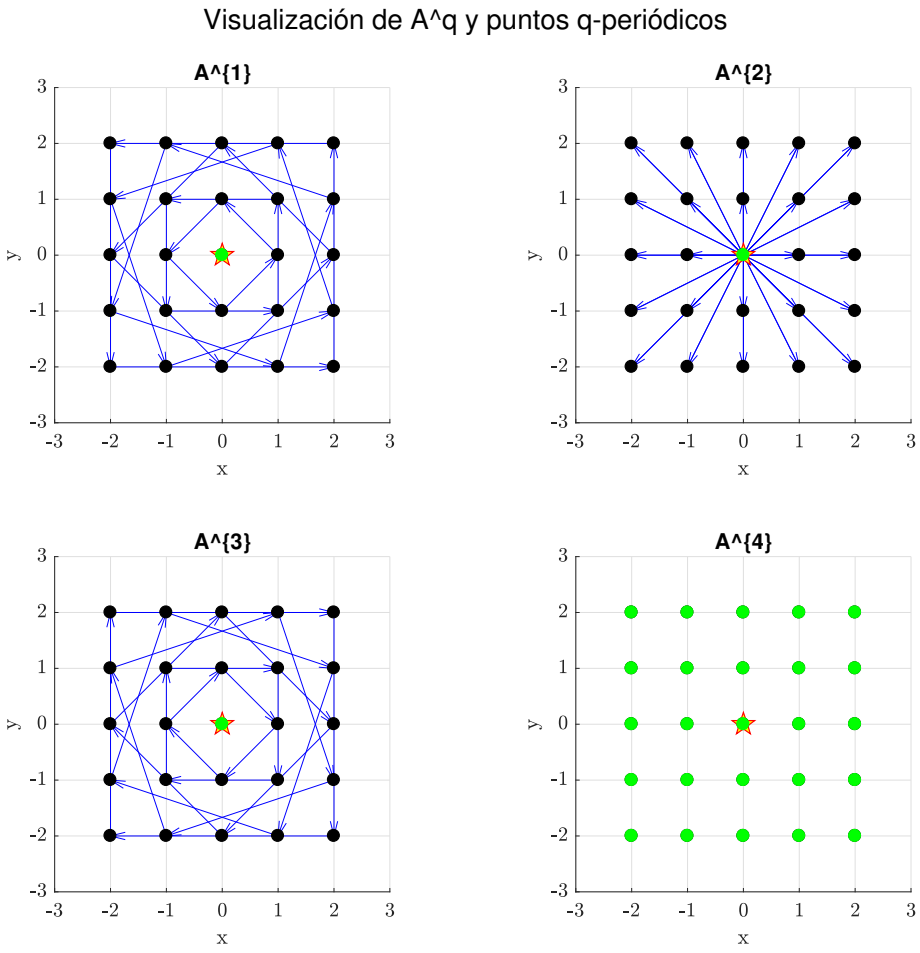
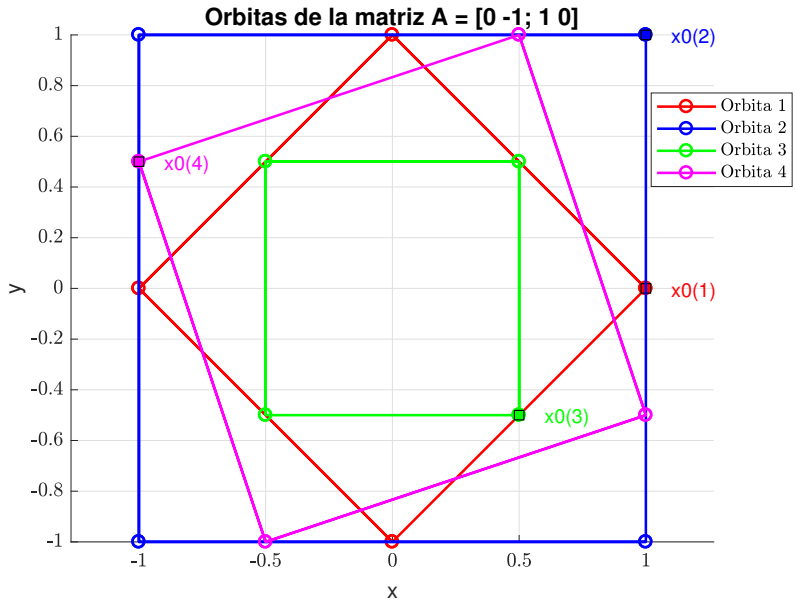


Figura 2.9: Puntos q–periódicos.



2.2.6. Ejemplo. *Consideremos ahora la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} x' &= y, \\ y' &= x \end{cases} \tag{2.32}$$

Si $(x, y) = (x(t), y(t))$ es una solución, tenemos que

$$x(t) = r\cosh\theta(t) \quad \text{y} \quad y(t) = r\sinh\theta(t)$$

con θ una función diferenciable. Deducimos, de $x' = y$,

$$r \cdot \theta'(t) \cdot \sinh\theta(t) = r\sinh\theta(t)$$

$$\Longrightarrow \ \theta'(t) = 1 \ \rightarrow \ \theta(t) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Asimismo $\theta(0) = c$, y

$$(x_0, y_0) = (r\cosh c, r\sinh c) \in \mathbb{R}^2,$$

entonces obtenemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cosh(t+c) \\ r\sinh(t+s) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh t \cdot r\cosh c + \sinh t \cdot r\sinh c \\ \sinh t \cdot r\cosh c + \cosh t \cdot r\sinh c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La matriz $S(t) = \left(\begin{smallmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{smallmatrix}\right)$ es una matriz tal que $S(0) = \boldsymbol{Id}$, y por la Proposición (*2.2.4*), la familia de mapeos $\psi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas mediante

$$\psi_t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

es un flujo. La composición $\psi_{t+s} = \psi_t \circ \psi_s$ nos permite deducir para cualesquiera sean $t, s \in \mathbb{R}$, que

$$S(t+s) = S(t)S(s)$$

En el Ejemplo (*2.2.6*), la ecuación diferencial se puede escribir matricialmente

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), \\ y'(t) = x(t) \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Los puntos fijos (x^*, y^*) se hallan así

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \implies (y, x) = (x, y) \longrightarrow (x^*, y^*) = (x, x)$$

o también así

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{x} \implies \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

Es decir que los puntos fijos están en la recta $\boldsymbol{y = x}$.

Ahora, tenemos

$$\boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^4 = \boldsymbol{I}, \ldots$$

En general

$$\boldsymbol{A}^n = \begin{cases} \boldsymbol{I} & , \quad n \equiv 0 \ (\mathbf{mod}\ 2)\,, \\ \boldsymbol{A} & , \quad n \equiv 1 \ (\mathbf{mod}\ 2)\,. \end{cases}$$

Es decir que la matriz $\boldsymbol{A}$ es *involutiva*. Además, cualquier punto $\boldsymbol{x}$ cumple $\boldsymbol{A^2 x = x}$.

Veamos los puntos q–periódicos, los cuales satisfacen la ecuación $\boldsymbol{A^q x = x}$.

En el Cuadro (*2.3*) se ve caso por caso.

Cuadro 2.3: Puntos q–periódicos del Ejemplo (*2.2.6*).

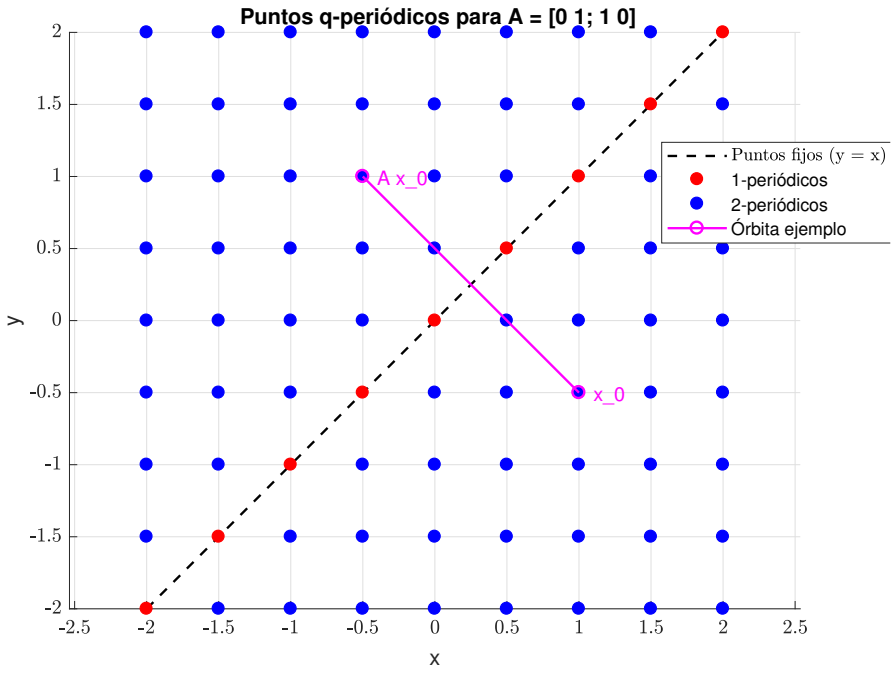
$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{A^q}$	Ecuación $\boldsymbol{A^q x = x}$	**Solución**
1	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{Ax = x} \ \Rightarrow\ (y, x) = (x, y)$	Puntos en la recta $\mathcal{L}_{id} : \boldsymbol{y = x}$
2	$\boldsymbol{I}$	$\boldsymbol{A^2 x = x} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{x = x}$	Todo $\boldsymbol{x} \notin \mathcal{L}_{id}$ son 2–periódicos

Todos los puntos que no estén en la recta $y = x$ son *2*–periódicos, porque $\boldsymbol{A^2 = I}$.

Geométricamente, $\boldsymbol{A}$ intercambia las coordenadas de $\boldsymbol{x} = (x, y)$ a (y, x).

En la Figura (*2.10*) se observan los puntos fijos sobre la recta $y = x$ y los puntos 2–periódicos fuera de esa recta, asimismo se observa una órbita, en la que $\boldsymbol{x_0} \leftrightarrow \boldsymbol{Ax_0}$ se intercambian.

Figura 2.10: Puntos 2–periódicos y puntos fijos.



2.2.2.3. Recordando potencias A^n

Como se vió en el Ejemplo (*2.2.5*) y en el Ejemplo (*2.2.6*), en la ecuación diferencial aparecía una matriz constante, aunque no siempre es así, y se

hallaron sus órbitas, que implica hallar potencias de esa matriz $\boldsymbol{A^n}$. Veamos cómo determinar esas potencias.

2.2.7. Ejemplo. *Consideremos la matriz* $\boldsymbol{A}$ *y el vector* $\boldsymbol{x} = (1,0)^T \in \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. **Autovalores de** $\boldsymbol{A}$.

   La ecuación característica es

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \implies \begin{vmatrix} 0.8-\lambda & 0.2 \\ \\ 0.1 & 0.9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.34}$$

   Calculamos el determinante:

$$(0.8-\lambda)(0.9-\lambda) - (0.2)\cdot(0.1) = 0 \implies \lambda^2 - 1.7\lambda + 0.70 = 0$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = 1.0 \\ \\ \lambda_2 = 0.7 \end{cases}$$

2. **Autovectores**

   (*) Para $\boldsymbol{\lambda_1 = 1} \rightarrow \boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^T$*:*

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{v} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -0.2 & 0.2 \\ \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

   de la primera ecuación: $-0.2v_1 + 0.2v_2 = 0$ *se obtiene* $v_1 = v_2$*. Consideramos*

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

(*) Para $\boldsymbol{\lambda_2 = 0.7} \rightarrow \boldsymbol{w} = (w_1, w_2)^T$*:*

$$(\boldsymbol{A} - 0.7\boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{w} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \\ w_2 \end{pmatrix} = 0$$

de la ecuación: $0.1w_1 + 0.2w_2 = 0$ *se obtiene* $w_1 = -2w_2$*. Consideremos*

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formamos la matriz de autovalores, $\boldsymbol{S}$*, y hallamos su determinante,* $\det(\boldsymbol{S})$*, para luego calcular su inversa* $\boldsymbol{S}^{-1}$*,*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= [\boldsymbol{v}\ \boldsymbol{w}] = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \det(\boldsymbol{S}) &= 3 \neq 0 \\ \boldsymbol{S}^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. **Diagonalización y** $\boldsymbol{A^n}$

Recordemos que

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} \tag{2.35}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} \\ \Rightarrow \boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} \\ \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. $\boldsymbol{A^n x}$, expresión cerrada y límite

Usamos la diagonalización para obtener $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$ exactamente.

(*) Primero $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}$.

$$\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos por la matriz diagonal $\boldsymbol{\Lambda}^n = \operatorname{diag}(1,\, 0.7^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{pmatrix}$

y se obtiene

$$\boldsymbol{\Lambda}^n \left(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}\right) = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -\frac{1}{3}0.7^n \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^n\cdot\left(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 \\ -\frac{1}{3}0.7^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 + \frac{2}{3}0.7^n \\ 1/3 - \frac{1}{3}0.7^n \end{pmatrix}$$

y tomando límites

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

En conclusión, para $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$ *y* $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, tenemos*

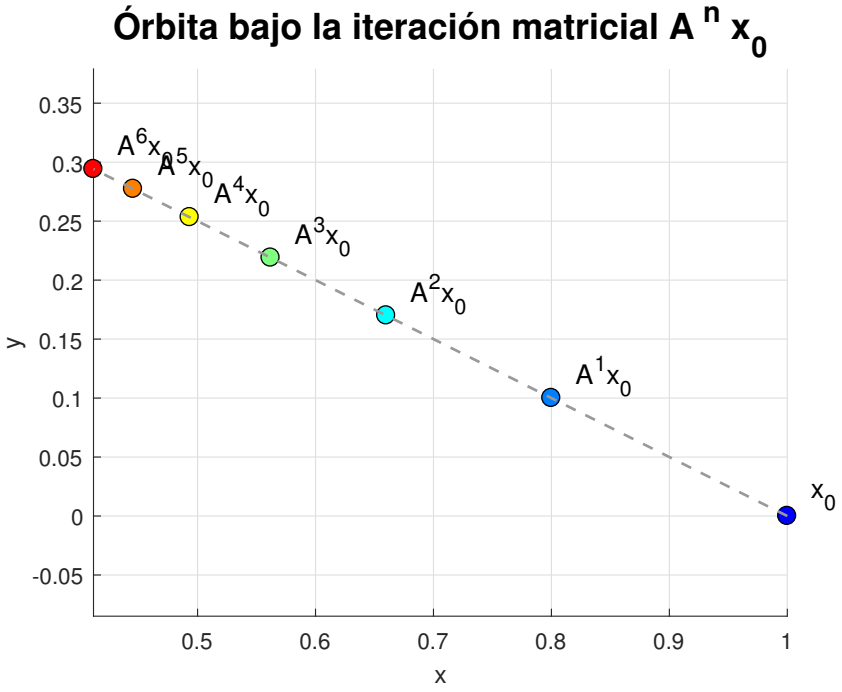
$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/3 + \frac{2}{3}0.7^n \\ 1/3 - \frac{1}{3}0.7^n \end{pmatrix}, \quad \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

En la Figura (*2.11*) se ven las órbitas $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$, para $n = 6$ y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{(1,0)^T}$:

$$\mathcal{O}(\boldsymbol{x_0}) = \{\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x},\ n \in \mathbb{N}_0\} = \{\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{A}^5\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{A}^6\boldsymbol{x_0}, \ldots\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.8\\0.1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.66\\0.17\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.562\\0.219\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.4934\\0.2533\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.44538\\0.27731\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0.411766\\0.294117\end{pmatrix}, \ldots\right\}$$

Figura 2.11: Órbitas $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x_0}$, para $n = 6$.



2.3. Marco conceptual

2.3.1. Orden de Sarkovskii

El Teorema de Sarkovskii (1964) es uno de los resultados más sorprendentes en la teoría de sistemas dinámicos unidimensionales. Establece un *orden total sobre los números naturales*, que determina qué períodos de órbitas periódicas implican la existencia de otros períodos en funciones continuas del intervalo real. El orden que él definió se da en la Definición (*2.3.1*), la cual es una caraterización del *caos*.

2.3.1. Definición. *Se denomina* **orden de Sarkovskii** *al orden de los números naturales como sigue:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
3 & \prec & 5 & \prec & 7 & \prec & 9 & \prec & \cdots & \prec & (2n+1)\cdot 2^0 & \prec & \cdots \\
3\cdot 2^1 & \prec & 5\cdot 2^1 & \prec & 7\cdot 2^1 & \prec & 9\cdot 2^1 & \prec & \cdots & \prec & (2n+1)\cdot 2^1 & \prec & \cdots \\
3\cdot 2^2 & \prec & 5\cdot 2^2 & \prec & 7\cdot 2^2 & \prec & 9\cdot 2^2 & \prec & \cdots & \prec & (2n+1)\cdot 2^2 & \prec & \cdots \\
3\cdot 2^3 & \prec & 5\cdot 2^3 & \prec & 7\cdot 2^3 & \prec & 9\cdot 2^3 & \prec & \cdots & \prec & (2n+1)\cdot 2^3 & \prec & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \cdots \\
2^n & \prec & 2^{n-1} & \prec & \cdots & \prec & 2^3 & \prec & 2^2 & \prec & 2^1 & \prec & 1
\end{array} \tag{2.36}$$

donde $\prec$ *indica precedencia en la jerarquía de aparición de ciclos periódicos.*

Esto significa que si una función continua tiene un punto de período 3, entonces tiene puntos de todos los periodos.

2.3.2. Teorema de Sarkovskii

2.3.2.1. Funciones Lipschitz

2.3.2. Definición. ***Funciones Lipschitz***

Se dice que la aplicación $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es (globalmente) Lipschitz en el conjunto* U *cuando existe una constante* $L > 0$ *tal que*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y})| \leq L \cdot |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|, \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U. \tag{2.37}$$

Hay que recordar que las normas en el espacio $\mathbb{R}^n$ (espacio vectorial de dimensión finita) son equivalentes, es decir que las normas en (*2.37*) no alteran a f, seguirá siendo de Lipschitz, posiblemente con otra constante L.

2.3.3. Definición. *Cualquier aplicación* L*–Lipschitz, con* $L < 1$ *se le denomina* L*–contractiva.*

Analizaremos geométricamente (*2.37*) cuando $n = m = 1$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es L–Lipschitz, si su gráfica satisface

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y = f(x)\right\} \subset \bigcap_{\boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}} C\left(\boldsymbol{x_0}; L\right) \tag{2.38}$$

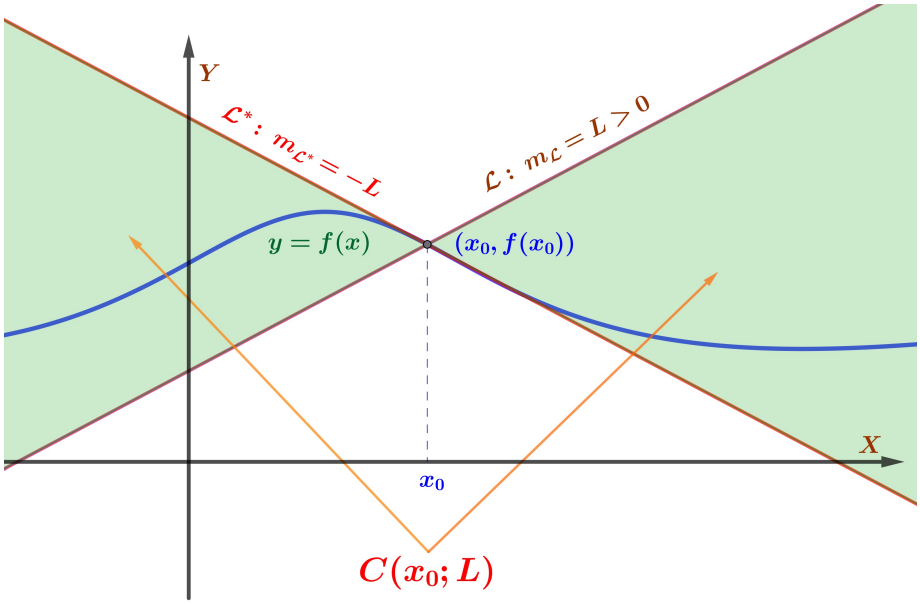
donde

$$C\left(\boldsymbol{x_0}; L\right) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, |y - f(\boldsymbol{x_0})| \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|\right\} \tag{2.39}$$

es llamado un cono de vértice en $(\boldsymbol{x_0}; f(\boldsymbol{x_0}))$.

En la Figura (*2.12*) se observa los conos $C(\boldsymbol{x_0}, L)$ para una función $f(x)$.

Figura 2.12: Cono $C(\boldsymbol{x_0}; L)$.



2.3.1. Ejemplo. *La función* $f(x) = x^2$, *no es Lipschitz en todo* $\mathbb{R}$. *Esto se puede verificar si suponemos que sí es* L*–Lipschitz en* $\mathbb{R}$ *para alguna constante* $L > 0$. *Es decir, que* $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$, *se cumple*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})| \leq L\,|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|.$$

Al ser la función derivable en $\mathbb{R}$ *(es polinomial), tenemos*

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0}} \frac{|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})|}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|} = |f'(\boldsymbol{x_0})|, \quad \forall \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$$

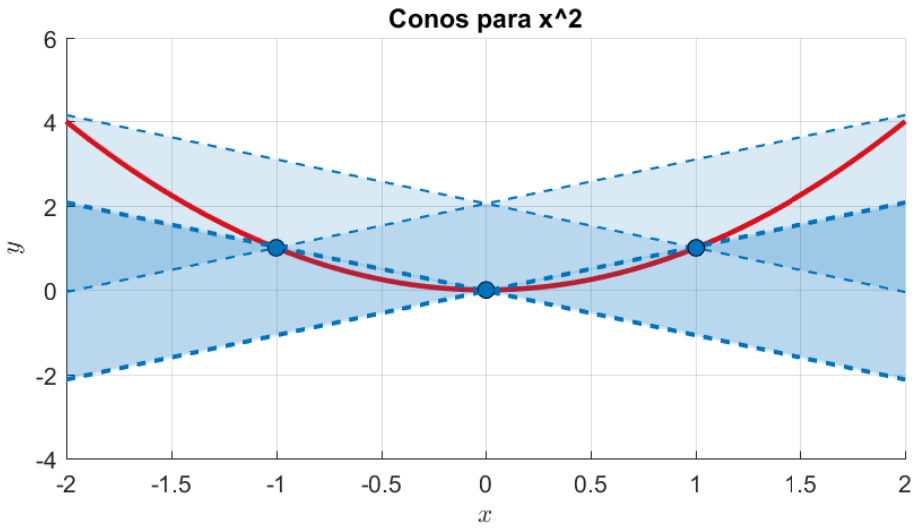
Esto nos indica que f *es* L*–Lipschitz y*

$$|f'(\boldsymbol{x})| \leq L, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R},$$

y esto es absurdo.

En la Figura (*2.13*) se visualizan conos para $f(x) = x^2$, con $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$.

Figura 2.13: Conos $C(\boldsymbol{x_0}; L)$ de $f(x) = x^2$, para $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$.



2.3.2. Ejemplo. *La función $f(x) = |x|$, es (globalmente) 1–Lipschitz en todo $\mathbb{R}$. Esto se puede comprobar:*

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x_0})| \leq L \left| |\boldsymbol{x}| - |\boldsymbol{x_0}| \right| \leq \mathbf{1} \cdot |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|,$$

para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_0} \in \mathbb{R}$.

En la Figura (*2.14*) se visualizan algunos conos para $f(x) = |x|$, en $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$.

2.3.3. Ejemplo. *$f(x) = \sqrt{x}$, no es Lipschitz en $\langle 0, 1\rangle$. Por reducción al absurdo se llega a $|f'(x)| \leq L$, $\forall x \in \langle 0, 1\rangle$, sin embargo $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$.*

En la Figura (2.15) se visualizan conos en $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$.

Figura 2.14: Conos $C(\boldsymbol{x_0}; L)$ de $f(x) = |x|$, para $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$.

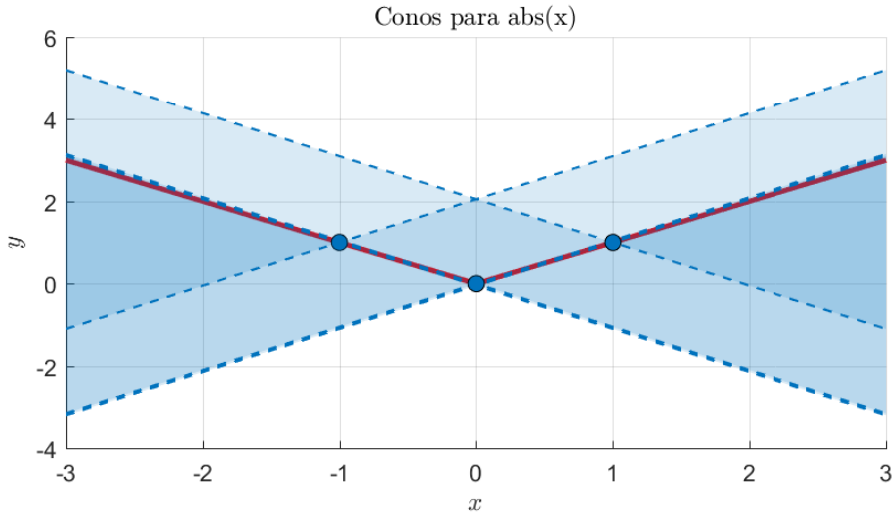
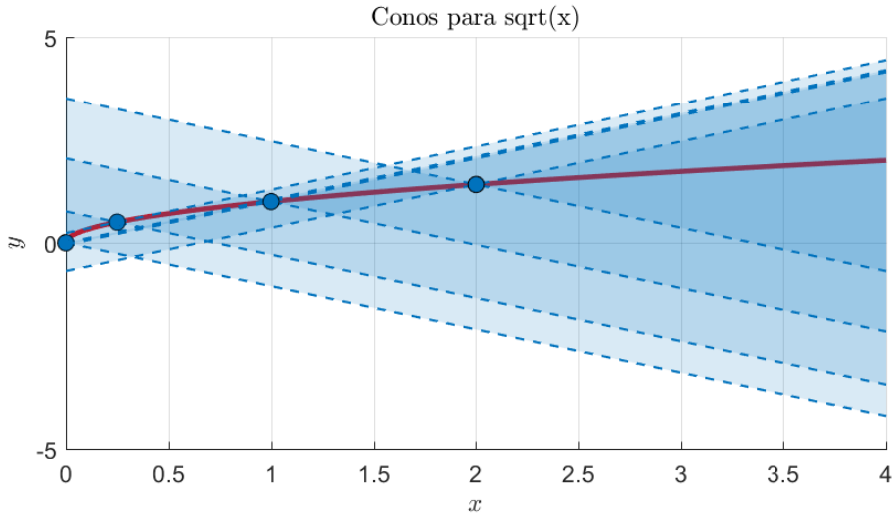


Figura 2.15: Conos $C(\boldsymbol{x_0}; L)$ de $f(x) = \sqrt{x}$, para $\boldsymbol{x_0} = -1, 0, 1$.



Una forma de determinar la constante de Lipschitz L lo da el siguiente Teorema (*2.3.1*).

2.3.1. Teorema. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ (abierto y convexo), sea $\boldsymbol{f} \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$ y*

$$L := \sup_U \|D\boldsymbol{f}\|, \tag{2.40}$$

donde $\|D\boldsymbol{f}\|$ denota la norma matricial asociada a las normas vectoriales elegidas en el espacio de salida $U \subset \mathbb{R}^n$ y en el espacio de llegada $\mathbb{R}^m$. Entonces:

1. *$L < \infty \implies \boldsymbol{f}$ es (globalmente) L–Lipschitz en U.*

2. *$L = \infty \implies \boldsymbol{f}$ no es (globalmente) Lipschitz en U.*

Demostración.-

Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ puntos arbitrarios y diferentes. Puesto que U es convexo, el segmento de extremos $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ está contenido en U,

$$[\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}] := \{\boldsymbol{y} + t\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) : 0 \le t \le 1\} \subset U.$$

Necesitamos probar la desigualdad

$$\big|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\big| \le \sup_{\boldsymbol{\zeta} \in [\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}]} \|D\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\zeta})\| \big|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\big|.$$

Para ello consideremos la parametrización $\boldsymbol{\zeta} : [0,1] \to U \subset \mathbb{R}^n$ y la función $\boldsymbol{g} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ definidas mediante

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \boldsymbol{y} + t\,(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{g}(t) = \boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{\zeta}(t))\,.$$

Usamos el Teorema Fundamental del Cálculo, obteniendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{g}(1) - \boldsymbol{g}(0) &= \int_0^1 \boldsymbol{g}'(t)\, dt = \int_0^1 D\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{\zeta})\; \boldsymbol{\zeta}'(t)\, dt \\ &= \left(\int_0^1 D\boldsymbol{f}\,(\boldsymbol{\zeta}(t))\; dt\right)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\,. \end{aligned}$$

Tomando normas y sus acotaciones tenemos

$$\left|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\right| \leq \left\| \int_0^1 D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\zeta}(t)\right) dt \right\| |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leq \left(\int_0^1 \|D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\zeta}(t)\right)\| dt \right) |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{\zeta}\in[\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}]} \|D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\zeta}\right)\| |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|.$$

Si $L := \sup_U \|D\boldsymbol{f}\| < \infty$, entonces

$$\left|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})\right| \leq \sup_{\boldsymbol{\zeta}\in[\boldsymbol{x},\,\boldsymbol{y}]} \|D\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{\zeta}\right)\| |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \leq L|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|, \quad \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U.$$

lo cual prueba (*1*). Para (*2*) se siguen las ideas del Ejemplo (*2.3.1*). ∎

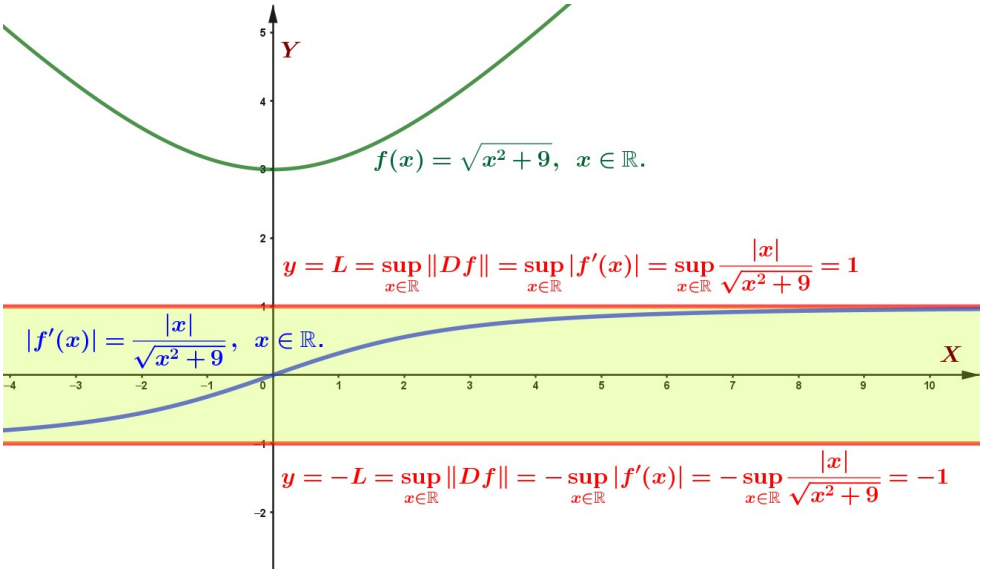
2.3.4. Ejemplo. *La función* $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ *es de clase* $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, *además*

$$L := \sup_{x\in\mathbb{R}} \|D\boldsymbol{f}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = 1.$$

Por tanto $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ *es (globalmente)* 1*–Lipschitz en* $\mathbb{R}$.

En la Figura (*2.16*) se visualiza a la función $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ junto con su derivada, $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, además se observa que $L := \sup_{x\in\mathbb{R}} \|D\boldsymbol{f}\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = 1$.

Figura 2.16: $f(x)$, $f'(x)$ y $L := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 1$.



Se da la definición de *conjuntos invariantes* y *conjuntos límite*.

2.3.2.2. Conjuntos invariantes y conjuntos límite

2.3.4. Definición. *Sea* $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ *un sistema dinámico, se dice que el conjunto* $A \subset \boldsymbol{X}$ *es:*

(a) f**–invariante** *si* $f^{-1}A = A$*, donde*

$$f^{-1}A = \{x \in \boldsymbol{X} :\ f(x) \in A\}\,; \tag{2.41}$$

(b) **positivamente** f**–invariante** *si* $f(A) \subset A$*;*

(c) **negativamente** f**–invariante** *si* $f^{-1}A \subset A$*.*

2.3.5. Ejemplo. *En la Definición (2.2.13) la aplicación dada en (2.20),*

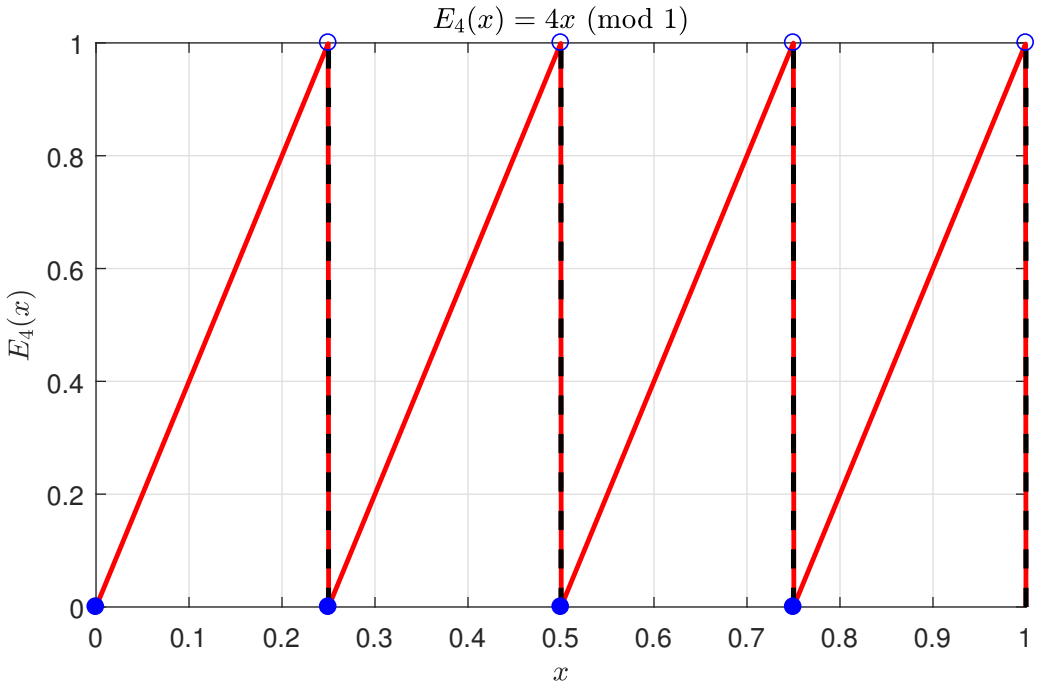
$$E_m(x) = mx \bmod 1,\ \ m > 1 \in \mathbb{Z}$$

la trabajaremos para $m = 4$. Entonces

$$E_4(x) = \begin{cases} 4x & , \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right\rangle, \\ 4x - 1 & , \text{ si } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right\rangle, \\ 4x - 2 & , \text{ si } x \in \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\rangle, \\ 4x - 3 & , \text{ si } x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right\rangle \end{cases} \tag{2.42}$$

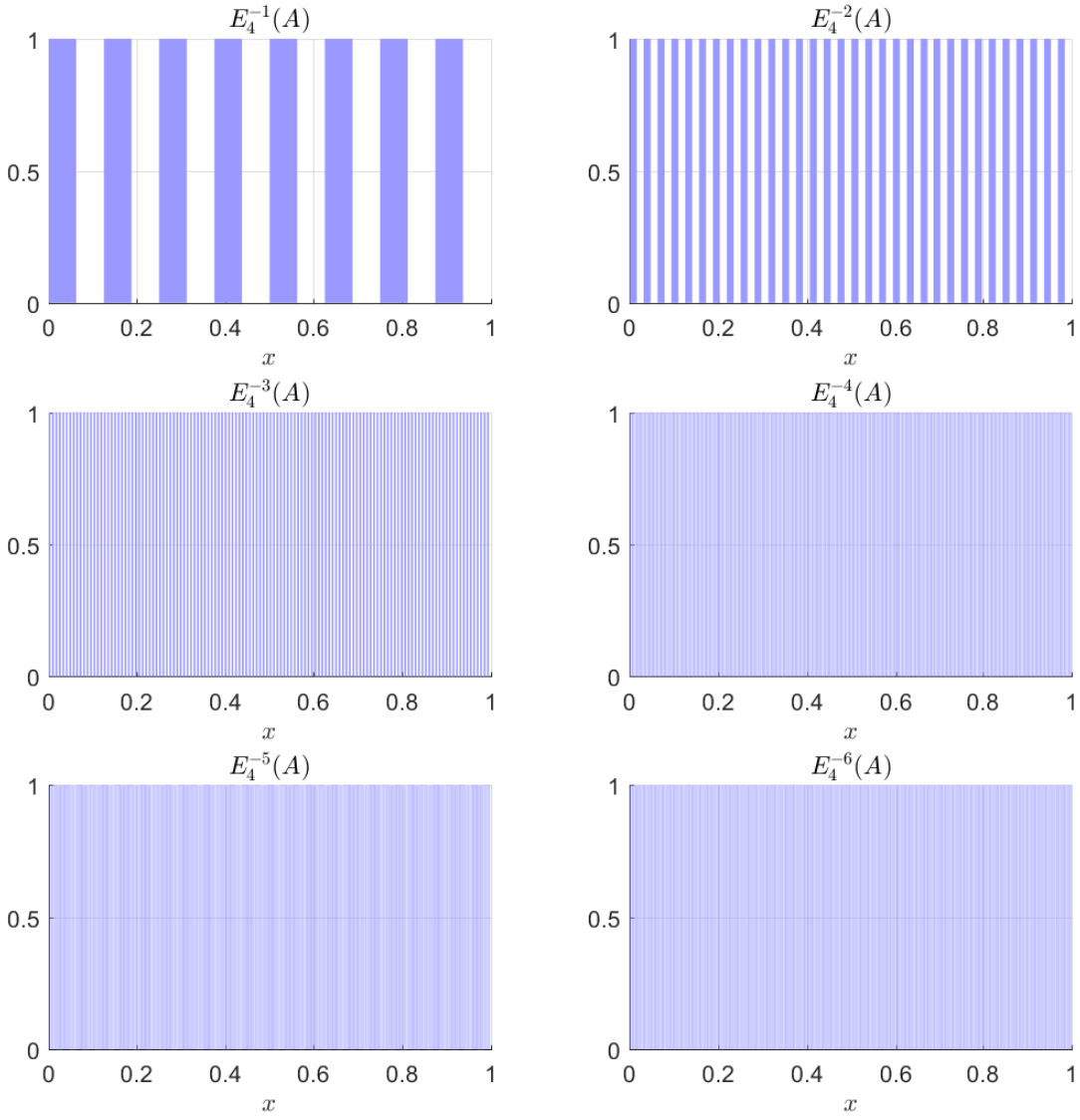
En la Figura (*2.17*) se visualiza la gráfica de $E_4(x)$.

Figura 2.17: $f(x) = E_4(x)$.



Sea $A = \left[0, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right\rangle$. En la Figura (*2.18*) se observa las inversas iteradas $E_4^{-n}(A)$ para los valores $n = 1, 2, ..., 6$.

Figura 2.18: $E_4^{-n}(A)$ para $n = 1, 2, ..., 6$.



2.3.5. Definición. *Sea $f : X \to X$ un mapeo (no necesariamente continuo). Sea $x \in X$. Se define el conjunto* ω**–límite** *de x mediante*

$$\omega(x) = \omega_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^m(x) : \ m \geq n\}}. \tag{2.43}$$

Si f es invertible, se define también el conjunto α**–límite** *de x mediante*

$$\alpha(x) = \alpha_f(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{f^{-m}(x) : \ m \geq n\}}. \tag{2.44}$$

2.3.6. Ejemplo. *Sea el mapeo $E_2 : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$ y sea*

$$x = 0.0100011011\cdots,$$

puesto que

$$E_2^m(0.x_1x_2\cdots) = 0.x_{m+1}x_{m+2}\cdots,$$

cada conjunto $\{E_2^m(x) : \ m \geq n\}$ es denso en $\mathcal{S}^1$, y por tanto,

$$\omega(x) = \mathcal{S}^1.$$

2.3.6. Definición. *Se dice que el mapeo $f : X \to X$ es (*positivamente*)* **expansiva** *si existe un $\delta > 0$ tal que si*

$$d\left(f^n(x),\ f^m(y)\right) < \delta, \quad \textit{para cualquier} \ \ n \geq 0, \tag{2.45}$$

entonces $x = y$.

2.3.7. Ejemplo. *Sea $E_m : \mathcal{S}^1 \to \mathcal{S}^1$. Si $d(x, y) < \dfrac{1}{m^2} = \delta$ para $x \neq y$, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$d\left(E_m^n(x), E_m^n(y)\right) = m^n\, d\left(x, y\right) \geq \frac{1}{m^2}.$$

Esto indica que si

$$d\left(E_m^n(x), E_m^n(y)\right) < \frac{1}{m^2}, \quad \textit{para cualquier} \quad n \geq 0,$$

entonces

$$\frac{1}{m^2} \leq d\left(E_m^n(x), E_m^n(y)\right) < \frac{1}{m^2}$$

lo que implica que $x = y$, y por tanto E_m es expansiva.

2.3.2.3. Aplicaciones del intervalo

La existencia de puntos periódicos nos lleva al Teorema de Sarkovskii, sin embargo requerimos de algunos resultados previos (Collet & Eckmann, 1980).

El siguiente Lema (*2.3.1*) nos indica otra forma de verificar la existencia de puntos fijos a través de conjuntos.

2.3.1. Lema. *Sea la función $f : J \to J$ continua en el intervalo $J \subset \mathbb{R}$. Si $K \subset J$ es un intervalo compacto tal que $f(K) \supset K$, entonces f tiene un punto fijo en K.*

Demostración.-

Puesto que $K \subset J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto, existen α y β, reales, tal que tiene la forma $K = [\alpha, \beta]$. También se tiene por dato que $f(K) \supset K$, entonces existen $a, b \in K$ tales que

$$f(a) = \alpha \leq a \ \text{ y } \ f(b) = \beta \geq b.$$

De ello:

$$f(a) - a \leq 0 \ \text{ y } \ f(b) - b \geq 0,$$

es decir que la función continua

$$g : K \subset J \ \rightarrow \ K \subset J$$

definida mediante

$$g(x) = f(x) - x$$

tiene necesariamente un cero en K (Teorema de Bolzano), es decir, que ese cero es un punto fijo en f. ∎

2.3.1. Aserción. *Consideremos la función $f : I \ \rightarrow \ J$, con I, J intervalos cerrados, de manera que $I \subset J$ y $J \subset f(I)$, entonces f tiene un punto fijo en I.*

2.3.7. Definición. *Sean los intervalos $J, K \subset I$, tal que $f(J) \supset K$. Se dice que J* **cubre** *K, y se denota $J \ \rightarrow \ K$.*

2.3.1. Proposición. *Sea la función $f : I \ \rightarrow \ I$ continua en el intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$. Si existen intervalos cerrados $I_0, I_1, I_2, ..., I_{n-1} \subset I$ tales que*

$$I_0 \ \rightarrow \ I_1 \ \rightarrow \ I_2 \ \rightarrow \cdots \rightarrow \ I_{n-1} \ \rightarrow \ I_0, \tag{2.46}$$

entonces f tiene un punto n–periódico $x \in I$ tal que

$$f^m(x) \in I_m, \ \ \textit{para} \ \ m = 0, 1, 2, ..., n-1. \tag{2.47}$$

Demostración.-

Verificaremos que existe un conjunto de partida (intervalo cerrado) $J_0 \subset I_0$ con la condición de que $f(J_0) = I_1$. Además (2.46) implica que $f(I_0) \supset I_1$,

es decir que existen puntos $a_0, b_0 \in I_0$ tal que sus imágenes a través de f son los extremos del intervalo I_1. Si $J_0 = [a_0, b_0]$, entonces $f(J_0) = I_1$. Se puede construir intervalos cerrados

$$J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_{m-1}$$

que estén dentro de I_0, para algún $m < n$, con la propiedad de que

$$\begin{cases} f^1(J_0) = I_1 \\ f^2(J_1) = I_2 \\ f^3(J_2) = I_3 \\ \quad \vdots \end{cases} \Longrightarrow f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}, \;\; k = 0, 1, ..., m-1$$

Para $k = m - 1$ se tiene

$$f^m(J_{m-1}) = I_m$$

y se aplicamos f, tenemos

$$f^{m+1}(J_{m-1}) = f(I_m) \supset I_{m+1}$$

En forma similar se prueba que existe un intervalo cerrado $J_m \subset J_{m-1}$ tal que $f^{m+1}(J_m) = I_{m+1}$, obteniéndose intervalos cerrados

$$J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_{n-1}$$

que cumplen

$$f^{k+1}(J_k) = I_{k+1}, \;\; \text{para} \;\; k = 0, 1, ..., n-1,$$

donde $I_n = I_0$. En particular, tomando $k = n - 1$ se tiene

$$f^n(J_{n-1}) = I_n = I_0 \supset J_{n-1} \tag{2.48}$$

y cada punto $x \in J_{n-1}$ cumple

$$f^m(x) \in f^m(J_{n-1}) \subset f^m(J_{m-1}) = I_m, \tag{2.49}$$

para $m = 1, ..., n-1$. Ahora, de (*2.48*) y del Lema (*2.3.1*) se concluye que f^n tiene un punto fijo en J_{n-1} y así f tiene un punto n–periódico en J_{n-1} que satisface (*2.49*). ∎

2.3.8. Ejemplo. *Sea la aplicación* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax(1-x)$. *Para* $a > 4$ *se tiene*

$$f\left(\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[1 - \frac{1}{a}, \frac{a}{4}\right] \subset \left[1 - \frac{1}{a}, 1\right]$$

también

$$f\left(\left[1 - \frac{1}{a}, 1\right]\right) = \left[0, 1 - \frac{1}{a}\right] \subset \left[\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right].$$

Sin embargo, si queremos continuar aplicando f *observamos que los conjuntos son disjuntos:*

$$\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right] \cap \left[1 - \frac{1}{a}, 1\right] = \emptyset,$$

es decir, de la Proposición (2.3.1) se deduce que f *tiene un punto periódico de período 2 en el intervalo* $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{2}\right]$.

2.3.2. Teorema. *Sea la función* $f : I \to I$, *si* x *está en el conjunto de los puntos periódicos de* f, *de período* p, *entonces cada punto en la órbita de* x *es también un punto periódico de* f *de período* p.

Demostración.-

Sea $\mathcal{O}(x, f) = \left\{x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x), f^p(x) = x, ...\right\}$ y tomemos $f^j(x) \in$

$\mathcal{O}(x, f)$, para $j \in \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, entonces

$$f^p\left(f^j(x)\right) = f^j(x).$$

Supongamos que $\exists\, q \in \mathbb{N}$ con $q < p$ tal que

$$f^q\left(f^j(x)\right) = f^j(x).$$

Sabemos que

$$f^{p-j}\left(f^j(x)\right) = f^p(x) = x,$$

igualmente

$$f^{p-j}\left(f^q\left(f^j(x)\right)\right) = f^{p-j}\left(f^j(x)\right) = f^p(x),$$

y

$$f^{p+q}(x) = x \implies f^q\left(f^p(x)\right) = x,$$

por tanto

$$f^q(x) = x,$$

esto contradice el hecho de que p es el período, entonces p es el período de $f(x)$. ∎

2.3.3. <u>Teorema</u>. *Sea el intervalo $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \to A$ una función continua. Si f tiene un punto de período 3, entonces f tiene un punto de período 2.*

<u>Demostración</u>.-

Sea $a \in A$, de tal manera que su órbita es

$$\mathcal{O}_a(f) = \left\{a, f(a), f^2(a)\right\}.$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que

$$a < f(a) < f^2(a) \text{ y hagamos que } I = [0, f(a)], \quad J = \left[f(a), f^2(a)\right],$$

entonces,

$$f(I) = [f(a), f^2(a)] \implies J \subset f(I)$$

y $\left[a, f^2(a)\right] \subset I \cup J$.

Sin embargo

$$f(J) = \left[f^2(a), f^3(a)\right] = \left[a, f^2(a)\right] \implies I \subset f(J),$$

por lo que existe un intervalo cerrado $A_1 \subset J$ tal que $f(A_1) = I$.

Además se tiene que

$$f(I) = f\left([a, f(a)]\right) = \left[f(a), f^2(a)\right],$$

entonces

$$A_1 \subset J \subset f(I)$$

Luego, existe $A_2 \subset I$ tal que $f(A_2) = A_1$ y aplicando f,

$$f^2(A_2) = f(A_1) = I \implies f^2(A_2) = I,$$

esto indica que

$$A_2 \subset I = f^2(A_2) \implies A_2 \subset f^2(A_2),$$

es decir que existe un $x_0 \in A_2 \subset I$ tal que $f^2(x_0) = x_0$. ∎

Con la Proposición (*2.3.1*) se puede particularizar el Teorema de Sarkovskii (Teorema (*2.3.4*)). Las demostraciones de los teoremas de Sarkovskii y de Li–Yorke se encuentran en Barreira y Valls (2013).

2.3.4. Teorema. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo compacto I. Si f tiene un punto periódico de período 3, entonces tiene puntos periódicos de todos los períodos.*

2.3.2.4. Teorema de Sarkovskii

Para el Torema de Sarkovskii (Teorema (*2.3.5*)), tenemos en cuenta el orden de Sarkovskii, dado en la Definición (*2.3.1*).

2.3.5. Teorema. *Consideremos una función continua $f : I \to I$ en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ compacto. Si f tiene un punto periódico de período p y $p \prec q$, entonces f tiene un punto periódico de período q.*

2.3.3. Teorema de Li–Yorke y su conexión con el caos

En 1975, Tien–Yien Li y James Yorke publicaron el célebre artículo: Li y Yorke (1975) *Period three implies chaos.* Este trabajo cambió radicalmente el estudio de los sistemas dinámicos unidimensionales, proporcionando una primera definición formal de "caos" a través del comportamiento de las órbitas.

El resultado central establece:

2.3.6. Teorema. ***(Li–Yorke)***

Si una función continua $f : I \to I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo compacto, posee un punto periódico de período 3, entonces:

1. *Existen puntos periódicos de todos los períodos naturales.*

2. *Existe un conjunto no numerable $S \subset I$ tal que:*

   - $\forall x \neq y \in S$*: la pareja* (x, y) *es caótica en el sentido de Li–Yorke.*

3. *Para cualquier punto periódico p de período distinto a 1:*

   - *La pareja* (x, p) *también es una pareja caótica para cualquier* $x \in S$.

El término *par caótico* se explica en la Definición (*2.3.8*).

2.3.8. Definición. *Dos puntos $x, y \in I$ forman un* ***par caótico*** *o* ***scrambled pair****, según Li–Yorke, si:*

$$\liminf_{n \to \infty} \left| f^n(x) - f^n(y) \right| = 0 \quad \text{pero} \quad \limsup_{n \to \infty} \left| f^n(x) - f^n(y) \right| > 0. \tag{2.50}$$

La Definición (*2.3.8*) nos indica que si x y y, distintos, son caóticos, entonces

- sus órbitas se acercan arbitrariamente,

- pero también se separan una distancia apreciable.

2.3.9. Definición. *Un conjunto $S \subset I$ es* ***caótico en el sentido de Li–Yorke*** *si:*

- *es* ***no numerable****, y*

- *para todo $x, y \in S$, distintos, ellos son* ***scrambled****.*

2.3.9. Ejemplo. *Consideremos la función $f(x) = rx(1-x)$, con $r = 3.828$ y valores iniciales distintos: $x = x_1 = 0.4$ y $y = x_2 = 0.7$.*

En la Figura (*2.19*) y en la Figura (*2.20*) se muestran las órbitas de $x_1 = 0.4$ (color azul) y las órbitas de $x_2 = 0.7$ (color rojo), se observa que para $72 \leq n \leq 80$ las órbitas son prácticamente iguales, asimismo para otros valores de n. Esto se confirma en el Cuadro (*2.4*).

Pero en la Figura (*2.21*) y en la Figura (*2.22*) se muestran las órbitas de $x_1 = 0.4$ (color azul) y las órbitas de $x_2 = 0.4000001$ (color rojo), puntos diferentes pero muy cercanos, se ve que en las primeras iteraciones sus órbitas son casi iguales, después de cierto tiempo se separan drásticamente, luego vuelven a acercarse y luego a separarse, lo que verifica que

$$\liminf_{n \to \infty} \left| f^n(x) - f^n(y) \right| = 0, \quad \limsup_{n \to \infty} \left| f^n(x) - f^n(y) \right| > 0.$$

En en el Cuadro (*2.5*) se dan los valores numéricos.

Figura 2.19: Órbitas $f^n(x_1)$ y $f^n(x_2)$ para $n = 0, 1, ..., 15$

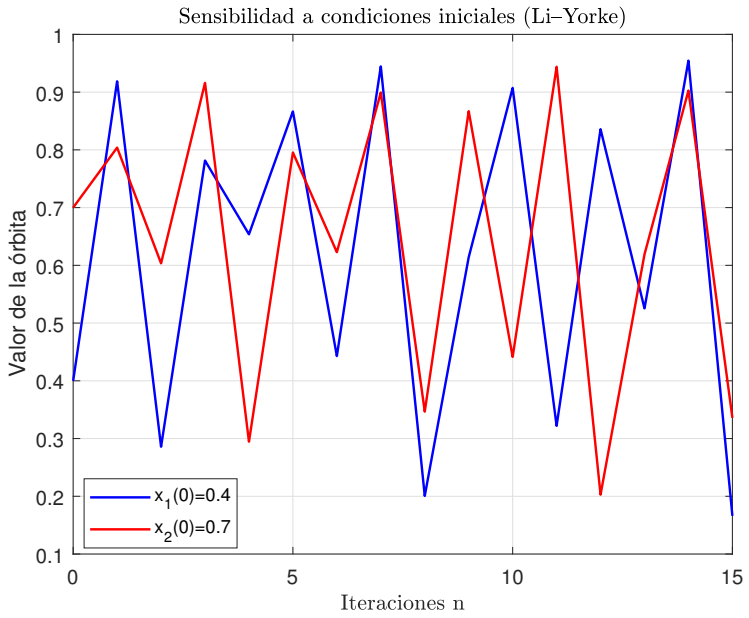


Figura 2.20: Órbitas $f^n(x_1)$ y $f^n(x_2)$ para $n = 0, 1, ..., 200$

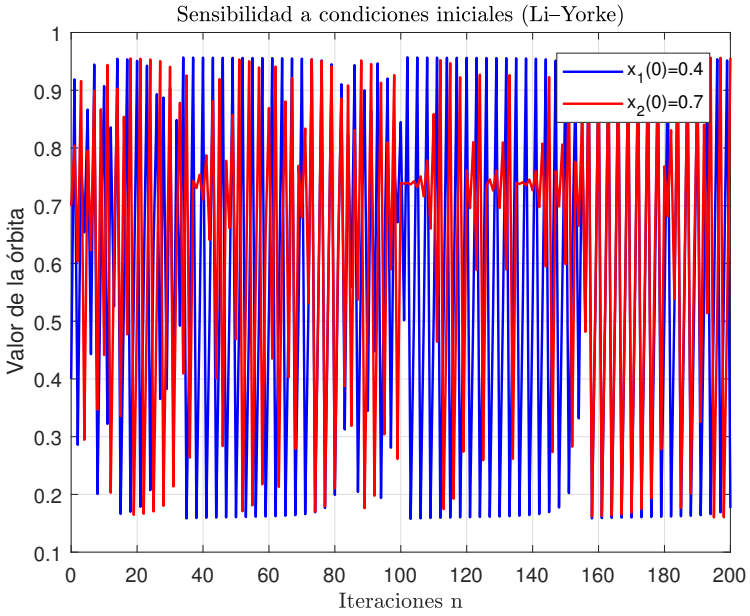
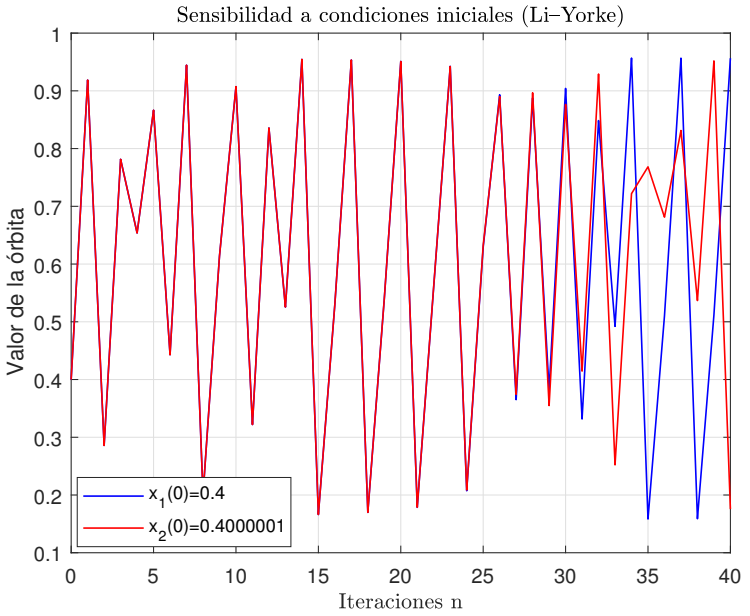


Figura 2.21: Órbitas $f^n(x_1)$ y $f^n(x_2)$ para $n = 0, 1, ..., 40$



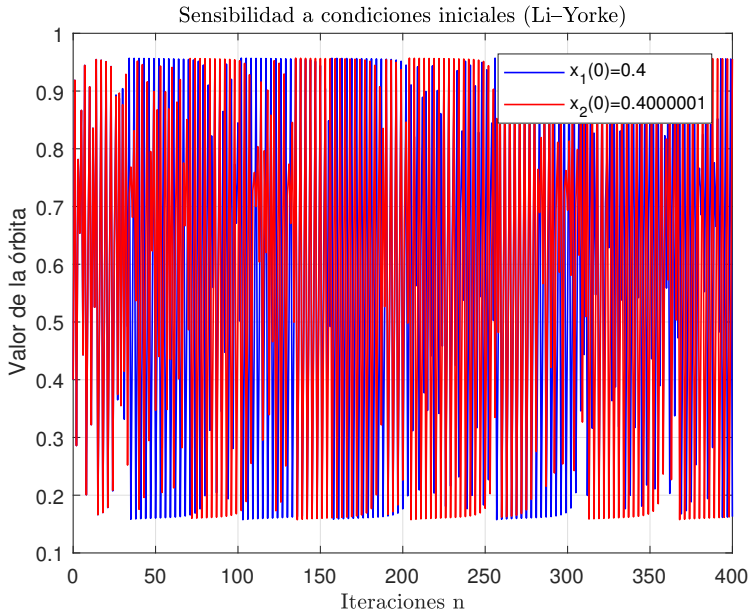
Cuadro 2.4: Valores de órbitas $f^n(x_i)$, $i = 1, 2$, $n = 0, ..., 200$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{f^n(x_1 = 0.4)}$	$\boldsymbol{f^n(x_2 = 0.7)}$	$\boldsymbol{\left\|f^n(x_1) - f^n(x_2)\right\|}$
0	0.4000	0.7000	0.3000
1	0.9187	0.8039	0.1148
2	0.2859	0.6035	0.3177
3	0.7814	0.9160	0.1345
4	0.6538	0.2946	0.3592
5	0.8665	0.7955	0.0710
6	0.4429	0.6228	0.1799
7	0.9445	0.8993	0.0452
⋮			⋮
72	0.5293	0.5308	0.0014
73	0.9537	0.9534	0.0003
74	0.1690	0.1702	0.0011
⋮			⋮
79	0.9450	0.9416	0.0034
80	0.1991	0.2106	0.0115
81	0.6104	0.6364	0.0260
82	0.9104	0.8858	0.0246
⋮			⋮
198	0.5376	0.1604	0.3772
199	0.9516	0.5155	0.4361
200	0.1763	0.9561	0.7797

Cuadro 2.5: Valores de $f^n(x_1 = 0.4)$ y $f^n(x_2 = 0.4000001)$, $n = 0, ..., 400$

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{f^n(x_1)}$	$\boldsymbol{f^n(x_2)}$	$\boldsymbol{\left\|f^n(x_1) - f^n(x_2)\right\|}$
0	x_1	x_2	0.0000
1	0.9187	0.9187	0.0000
2	0.2859	0.2859	0.0000
3	0.7814	0.7814	0.0000
4	0.6538	0.6538	0.0000
5	0.8665	0.8665	0.0000
6	0.4429	0.4429	0.0000
7	0.9445	0.9445	0.0000
⋮			⋮
32	0.8485	0.9291	0.0806
33	0.4921	0.2522	0.2399
34	0.9568	0.7220	0.2348
⋮			⋮
266	0.1594	0.1638	0.0044
267	0.5129	0.5243	0.0113
268	0.9564	0.9547	0.0016
269	0.1598	0.1654	0.0056
⋮			⋮
398	0.5200	0.1623	0.3577
399	0.9555	0.5204	0.4351
400	0.1629	0.9554	0.7926

Figura 2.22: Órbitas $f^n(x_i)$, $i = 1, 2$ y para $n = 0, 1, ..., 400$



CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Dinámica del mapa logístico

$$f_r(x) = rx\,(1-x)$$

En este trabajo se adopta como sistema dinámico de referencia el *mapa logístico unidimensional*

$$f : [0,1] \;\to\; [0,1]\,, \quad f_r(x) = rx(1-x),$$

donde $r > 0$ es un parámetro real de control.

La elección de esta función es por los criterios metodológicos ya establecidos en la literatura: es simple analíticamente, tiene riqueza dinámica y amplia documentación teórica y numérica (May, 1976; Devaney, 1989; Collet & Eckmann, 1980).

El mapa logístico se utiliza como **caso de estudio representativo**, desde el punto de vista metodológico, para:

- implementar algoritmos de iteración numérica,

- detectar órbitas periódicas,
- construir diagramas de bifurcación,
- y verificar empíricamente las consecuencias del Teorema de Sarkovskii.

3.1.1. Transición al caos y duplicación de períodos

La transición al caos se analiza mediante el **procedimiento numérico de duplicación de períodos**, que consiste en:

1. fijar un valor inicial $x_0 \in \langle 0, 1 \rangle$,
2. iterar la función para distintos valores crecientes del parámetro r,
3. observar el número de valores distintos que adopta la órbita estable.

Esta transición se visualiza, metodológicamente, mediante:

- diagramas de bifurcación,
- identificación de ciclos de período 2^n,
- y cálculo del exponente de Lyapunov como indicador cuantitativo de caos.

Este enfoque sigue los protocolos clásicos descritos en May (1976) y Strogatz (2014).

3.1.2. Simulación y análisis numérico: visualización en Python

La dinámica del sistema se estudia solo mediante **simulación numérica**, puesto que no existen fórmulas generales para las órbitas de orden superior.

Las simulaciones nos permiten:

- observar la estabilidad o inestabilidad de puntos fijos,
- identificar ciclos periódicos,
- evidenciar la sensibilidad a condiciones iniciales,
- y visualizar el comportamiento caótico.

Las visualizaciones incluyen:

- gráficas de órbitas,
- diagramas de telaraña,
- diagramas de bifurcación,
- evolución temporal de dos condiciones iniciales próximas

3.2. Mapa discreto unidimensional

Desde el punto de vista metodológico, un **mapa discreto unidimensional** se implementa computacionalmente como un esquema iterativo

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{3.1}$$

donde f es una función continua de valor real, definida en un intervalo compacto.

3.2.1. Bifurcación

Una **bifurcación** se identifica numéricamente como un cambio cualitativo en el comportamiento dinámico al variar un parámetro.

En esta tesis, las bifurcaciones se detectan mediante:

- análisis visual del diagrama de bifurcación,
- pérdida de estabilidad de puntos fijos,
- aparición de ciclos de mayor periodo.

Este procedimiento sigue los criterios metodológicos descritos en Kuznetsov (2013).

3.2.1. Definición. *Sea un sistema dinámico unidimensional dependiente del parámetro r:*

$$x_{n+1} = f_r(x_n)$$

Se dice que ocurre una **bifurcación** *en $r = r_0$ si:*

1. *Para $r < r_0$, el sistema tiene cierta estructura dinámica (puntos fijos,estabilidad)*
2. *Para $r > r_0$, la estructura cambia, por ejemplo:*
   - *aparece o desaparece un punto fijo;*
   - *un punto fijo pierde estabilidad;*
   - *surge un ciclo periódico;*

- *aparecen infinitos ciclos;*
- *aparece caos.*

Esto se formaliza diciendo que la topología del sistema cambia cuando cruzamos r_0.

3.2.1.1. Identificación de bifurcaciones

Si x^* es un punto fijo, una bifurcación ocurre cuando

$$|f'_r(x^*)| = 1.$$

Ese valor crítico del parámetro r indica:

- pérdida de estabilidad,
- surgimiento de nuevos comportamientos.

3.2.2. Caos determinista

El caos determinista se caracteriza computacionalmente por:

- sensibilidad a condiciones iniciales,
- órbitas no periódicas,
- exponente de Lyapunov positivo.

Metodológicamente, se verifica comparando dos órbitas con condiciones iniciales muy cercanas y observando su separación exponencial en el tiempo.

3.2.3. Simulación numérica y visualización dinámica

La visualización dinámica se realiza mediante gráficos iterativos que permiten observar:

- convergencia a atractores,
- comportamiento periódico,
- dispersión caótica.

Estas visualizaciones constituyen una herramienta central del enfoque metodológico del trabajo de tesis.

3.3. Herramientas empleadas

3.3.1. Python y scrips propios

La principal herramienta computacional que se ha utilizado para este trabajo es `Python` y `MatLab 2017a`, debido a:

- su capacidad de cálculo numérico eficiente,
- facilidad para graficar,
- compatibilidad con scripts reproducibles.

Se desarrollan scripts propios para:

- iteración del mapa,
- detección de períodos,
- construcción de diagramas de bifurcación,

3.3.2. Referencias a software y bibliografía metodológica

Las implementaciones siguen lineamientos descritos en textos clásicos de dinámica no lineal y caos (Alligood et al., 1996; Strogatz, 2014)

3.4. Procedimiento

3.4.1. Definición y selección de la función de estudio: $f_r(x) = rx\,(1-x)$

Se selecciona el mapa logístico como función base por su relevancia teórica y capacidad para mostrar todos los fenómenos necesarios para verificar empíricamente el Teorema de Sarkovskii.

3.4.2. Iteración numérica para explorar órbitas

Se implementa el esquema iterativo

$$x_{n+1} = f_r(x_n), \tag{3.2}$$

descartando transitorios para asegurar que las observaciones correspondan al régimen asintótico.

3.4.3. Detección de periodos mediante comparación de valores

Los períodos se detectan numéricamente verificando si:

$$|f^p(x) - x| < \epsilon \tag{3.3}$$

y comprobando que no existen períodos menores divisores de p.

3.4.4. Construcción del diagrama de bifurcación

El diagrama de bifurcación se construye registrando los valores asintóticos de la órbita para una malla de valores del parámetro r.

3.4.5. Identificación de ciclos *3* y verificación empírica del Teorema de Sarkovskii

La detección de ciclos de período *3* se utiliza como evidencia empírica clave, ya que, de acuerdo con el Teorema de Sarkovskii, implica la existencia de ciclos de todos los períodos naturales.

3.4.6. Visualización de resultados

Los resultados obtenidos se contrastan con los descritos en trabajos clásicos de Collet y Eckmann (1980), Devaney (1989), Li y Yorke (1975) y May (1976), verificando la coherencia entre la teoría y la simulación.

3.4.7. Ejemplo de código Python

En los anexos se incluyen scripts completos que permiten reproducir las simulaciones y visualizaciones presentadas en el capítulo de resultados.

3.5. Coherencia entre la teoría y la simulación

Se presenta un desarrollo metodológico–experimental coherente, alineado con Alligood et al. (1996) y Kuznetsov (2013), donde se muestra cómo la teoría (Sarkovskii, Li–Yorke, bifurcaciones) se verifica numéricamente mediante simulaciones en MatLab.

3.5.1. Lineamientos metodológicos según Alligood et al. (1996)

En el trabajo *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, Allingoo et al. establecen una metodología estándar para el estudio de sistemas dinámicos discretos, basada en los siguientes principios:

1. Seleccionar un sistema simple pero dinámicamente prometedor.
2. Analizar primero la dinámica local (puntos fijos, estabilidad).
3. Estudiar la aparición de órbitas periódicas.
4. Visualizar la evolución global mediante diagramas de bifurcación.
5. Relacionar numéricamente la aparición de ciclos con resultados teóricos (Sarkovskii, Li–Yorke).

En esta tesis, el mapa logístico cumple exactamente este rol metodológico.

3.5.2. Lineamientos metodológicos según Kuznetsov (2013)

Kuznetsov establece criterios claros para el análisis computacional de bifurcaciones:

- Toda bifurcación debe:
  - (-) corresponder a un cambio cualitativo en la dinámica,
  - (-) ser robusta numéricamente,
  - (-) verificarse bajo variaciones pequeñas de condiciones iniciales.

- El análisis debe:

  (-) identificar el objeto dinámico (punto fijo, ciclo),

  (-) analizar su estabilidad,

  (-) estudiar su dependencia respecto al parámetro.

3.5.3. Procedimiento metodológico global

Se sigue el siguiente esquema metodológico:

1. Definición del sistema dinámico.

2. Iteración numérica y análisis local.

3. Identificación de puntos fijos y estabilidad.

4. Detección de ciclos periódicos.

5. Construcción del diagrama de bifurcación.

6. Identificación explícita de un ciclo de período *3*.

7. Verificación empírica del Teorema de Sarkovskii.

8. Contraste con teoría clásica (Devaney, Alligood, Li–Yorke).

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Sistema dinámico de estudio

El sistema dinámico de estudio, es el mapa logístico

$$f_r(x) = rx(1-x), \quad x \in [0,1], \quad r \in \langle 0,4].$$

Este sistema es continuo, unidimensional, no lineal y cumple las hipótesis del Teorema de Sarkovskii.

Los puntos fijos satisfacen:

$$f_r(x) = x \implies x = 0, \quad x^* = \frac{r-1}{r}.$$

La estabilidad se determina por:

$$|f_r'(x^*)| < 1 \ \text{(atractor)}, \quad |f_r'(x^*)| > 1 \ \text{(repulsor)}.$$

Consideramos para el parámetro r el valor de $r = 2.5$

4.2. Iteración numérica y análisis local

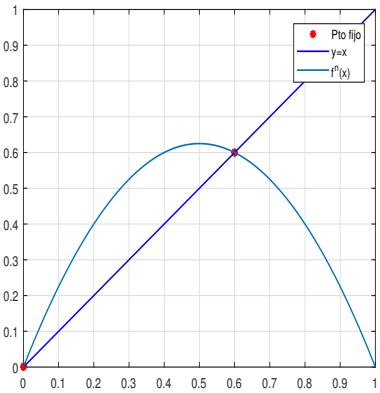
4.2.1. Parámetro r=2.5

En la Cuadro (*4.1*) se muestran las iteraciones $f^n(x)$, con $n = 1, 2, 3, 4, 5$, para el parámetro $\boldsymbol{r = 2.5}$. El punto fijo es $\boldsymbol{x^* = 0.60}$. Además, en la Figura (*4.1*) se visualizan las gráficas respectivas, el punto fijo sigue siendo el mismo.

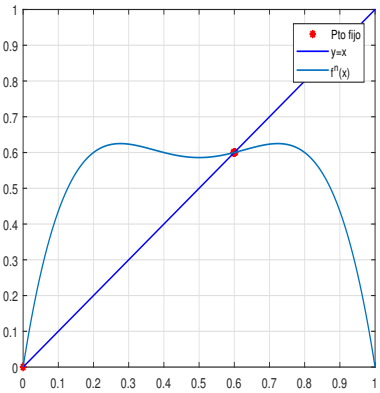
Cuadro 4.1: Valores de $f^n(x)$ para $x \in [0, 1]$ y $n = 1, ..., 5$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f^1(x)}$	$\boldsymbol{f^2(x)}$	$\boldsymbol{f^3(x)}$	$\boldsymbol{f^4(x)}$	$\boldsymbol{f^5(x)}$
0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.01	0.02499	0.06093	0.14305	0.30646	0.53136
0.02	0.04949	0.11759	0.25941	0.48029	0.62403
0.03	0.07346	0.17016	0.35302	0.57099	0.61240
0.04	0.09693	0.21883	0.42736	0.61181	0.59375
⋮					...
0.58	0.61065	0.59439	0.60273	0.59862	0.60069
0.59	0.606571	0.59661	0.60167	0.59916	0.60042
0.60	0.60198	0.59900	0.60049	0.59975	0.60012
0.61	0.59688	0.60154	0.59923	0.60039	0.59981
0.62	0.59127	0.60418	0.59787	0.60105	0.59947
⋮					⋮
0.79	0.41782	0.60811	0.59578	0.60207	0.59896
0.80	0.40302	0.60149	0.59925	0.60037	0.59981
0.81	0.38772	0.59348	0.603153	0.598398	0.600794
⋮					⋮
0.98	0.04949	0.11759	0.25941	0.48029	0.62403
0.99	0.02499	0.06093	0.14305	0.30646	0.53136
1.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

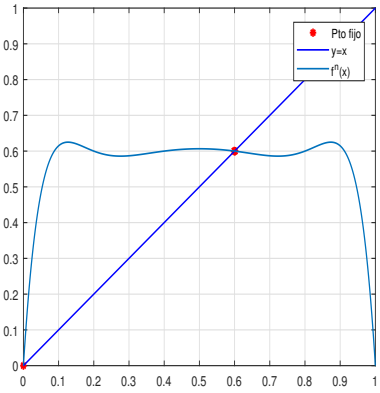
Figura 4.1: Iteraciones $x_{n+1} = f_{\mathbf{2.5}}(x_n)$, en $x_n \in [0,1]$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.



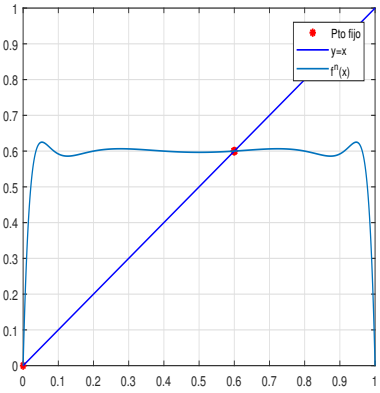
(a) $n = 1$.



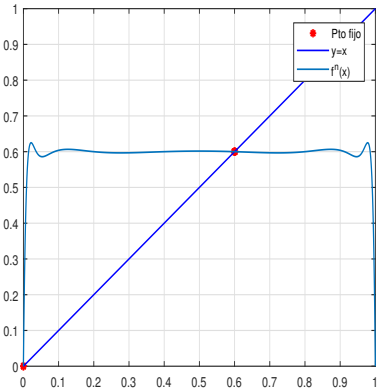
(b) $n = 2$.



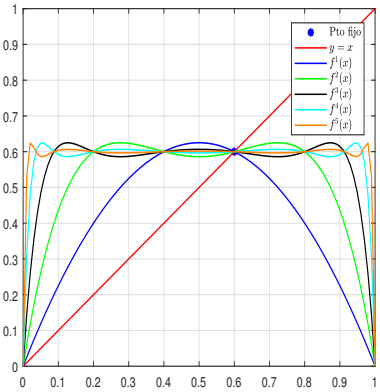
(c) $n = 3$.



(d) $n = 4$.



(e) $n = 5$.



(f) $n = 1, ..., 5$.

4.3. Identificación de puntos fijos y estabilidad

El punto fijo, para $r = 2.5$ es $x^* = \dfrac{\boldsymbol{r} - 1}{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\mathbf{2.5} - 1}{\mathbf{2.5}} = \mathbf{0.6}$.

Para la estabilidad, derivamos

$$f_r'(x^*) = r(1 - 2x^*) \implies f_r'(x^*) = r\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{r}\right)\right) = 2 - r.$$

$$\text{Estable: } |f_r'(x^*)| = |2 - r| < 1 \implies \mathbf{1 < r < 3}.$$

En esta caso, para $r = 2.5$, hay estabilidad, pues

$$|f_r'(x^*)| = |2 - 2.5| = \mathbf{0.5 < 1}.$$

4.4. Detección de ciclos periódicos

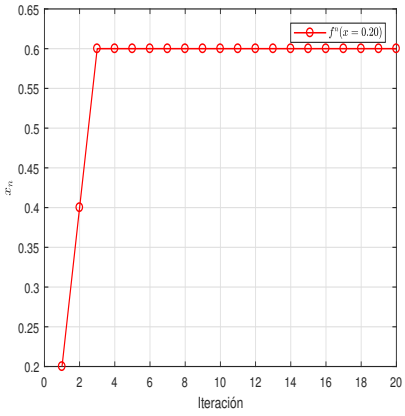
En la Cuadro (*4.2*) se plasma la estabilidad, tomando para diferentes valores de $x \in [0, 1]$ y a medida que n crece se observa periodicidad, convergen al punto fijo.

En la Figura (*4.2*) se visualizan las órbitas para algunos valores de x, igualmente, a medida que n crece, tienden a estabilizarse y convergen al punto fijo $\boldsymbol{x^* = 0.60}$.

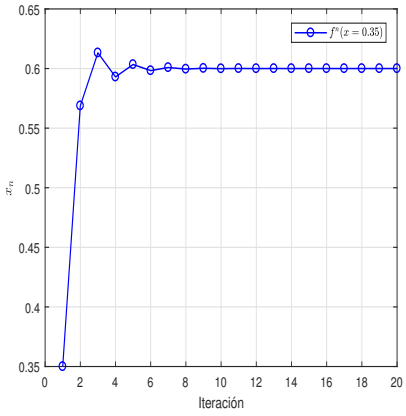
Cuadro 4.2: Valores de $f^n(x)$ y $n = 1, ..., 23$

$\boldsymbol{f^n(x)}$	$\boldsymbol{x = 0.20}$	**0.35**	**0.58**	**0.68**	**0.79**	**0.93**
$n = 1$	0.40000	0.56875	0.60900	0.54400	0.41475	0.16275
$n = 2$	0.60000	0.61318	0.59530	0.62016	0.60683	0.34066
$n = 3$	0.60000	0.59297	0.60229	0.58890	0.59647	0.56152
$n = 4$	0.60000	0.60339	0.59884	0.60524	0.60174	0.61554
$\vdots$						$\vdots$
$n = 9$	0.59999	0.59989	0.60004	0.59983	0.59995	0.59950
$n = 10$	0.60000	0.60005	0.59998	0.60008	0.60003	0.60025
$n = 11$	0.60000	0.59997	0.60001	0.59996	0.59999	0.59987
$\vdots$						$\vdots$
$n = 18$	0.59999	0.60000	0.59999	0.60000	0.60000	0.60000
$n = 19$	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.59999
$n = 20$	0.59999	0.60000	0.59999	0.60000	0.60000	0.60000
$n = 21$	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.59999
$n = 22$	0.60000	0.60000	0.59999	0.60000	0.60000	0.60000
$n = 23$	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.59999
$\vdots$						$\vdots$
$n \to \infty$	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000	0.60000

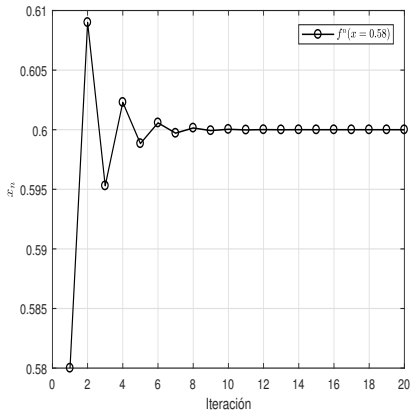
Figura 4.2: Órbitas $f^n_{\mathbf{2.5}}(x)$, $n = 1, 2, ..., 20$.



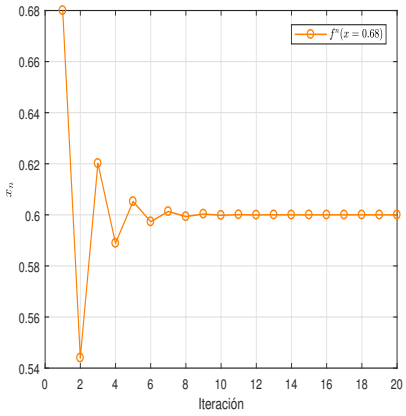
(a) $x = 0.20$.



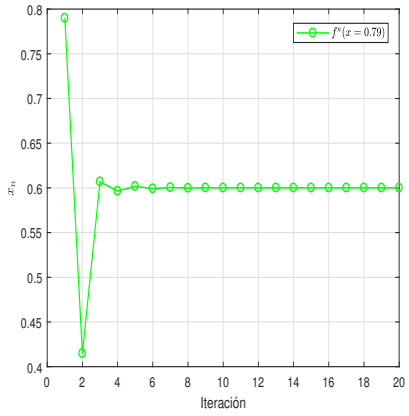
(b) $x = 0.35$.



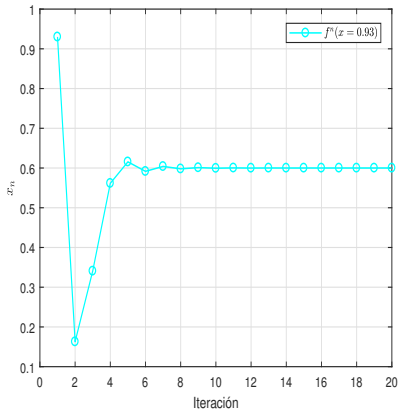
(c) $x = 0.58$.



(d) $x = 0.68$.



(e) $x = 0.79$.



(f) $x = 0.93$.

4.4.1. Análisis del ciclo de período 2

Para el ciclo de período 2, los puntos fijos se encuentran resolviendo $f^2(x^*) = x^*$, se obtiene un polinomio de grado 4:

$$f^2(x) = r^2 x(1-x)\left(1 - rx(1-x)\right).$$

Las raíces son

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{r-1}{r} && \rightarrow \text{Periodo 1} \\ x_3 &= \frac{r^2 + r - r\sqrt{r^2-2r-3}}{2r^2} && \rightarrow \text{Periodo 2} \\ x_4 &= \frac{r^2 + r + r\sqrt{r^2-2r-3}}{2r^2} && \rightarrow \text{Periodo 2} \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.5. Construcción del diagrama de bifurcación

Según Kuznetsov, el diagrama de bifurcación:

- identifica cambios cualitativos,
- visualiza dupliacación de períodos,
- localiza regiones periódicas.

La estabilidad ocurre cuando $\left|\frac{df^2(x)}{dx}\right| < 1$, donde luego de derivar se reemplaza $x = x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, y de ahí se resuelve la desigualdad. Al resolver se tiene que para $r = 1 + \sqrt{6} \approx 3.449489742783178...$ hay inestabilidad.

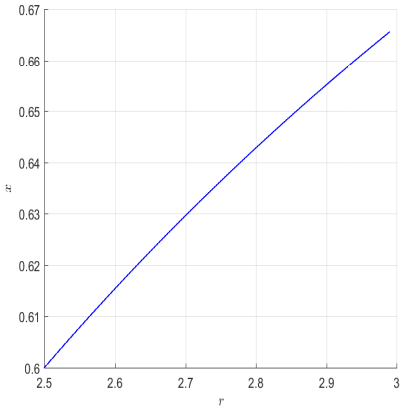
Las bifurcaciones ocurren entonces en $r = 3$ y en $r = 3.449489742783178....$

Para ciclos de periodo potencias de 2, la estabilidad se analiza en las órbitas $f^4(x)$, $f^8(x)$ y así sucesivamente. Entonces las bifurcaciones ocurren en valores de r tal que esos valores convergen a $r_\infty \approx 3.5699...$, que es el valor del límite del caos (Feigenbaum, 1978).

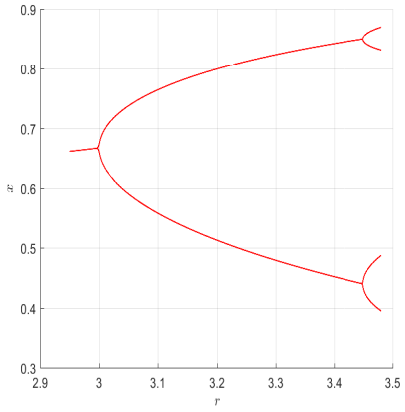
Para visualizar las bifurcaciones hacemos una malla para el parámetro r, $r \in [2.5, 4]$. En la Figura (*4.3*) se muestran cómo van apareciendo las bifurcaciones en diferentes rangos del parámetro r, en la (a) $2.5 \leq r \leq 2.99$, no hay bifurcaciones, en la (b) $2.95 \leq r \leq 3.48$ ya hay una bifurcación, en $r = 3$, y así sucesivamente.

Los intervalos del parámetro r se determinan mediante el análisis de estabilidad de los puntos fijos y de los ciclos periódicos del sistema dinámico. Dicho análisis se basa en la evaluación del valor absoluto de la derivada de la función iterada en los estados estacionarios, siendo la estabilidad garantizada cuando este valor es estrictamente menor que uno. Las transiciones críticas que delimitan las regiones de estabilidad ocurren cuando el valor absoluto de la derivada alcanza la unidad, correspondiendo el valor -1 a los fenómenos de bifurcación por duplicación de periodo. Para ciclos de orden elevado, la determinación exacta de estos umbrales resulta analíticamente intratable, por lo que los valores asociados se obtienen mediante procedimientos numéricos, los cuales se reflejan en la estructura observada de los diagramas de bifurcación.

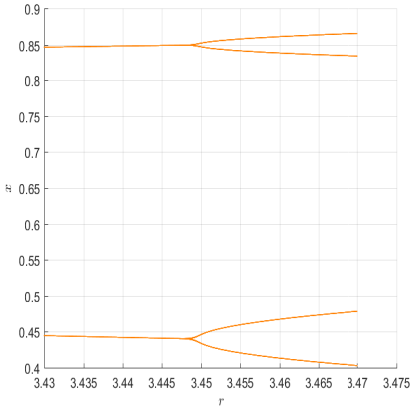
Figura 4.3: Diagrama de bifurcación del mapa logístico.



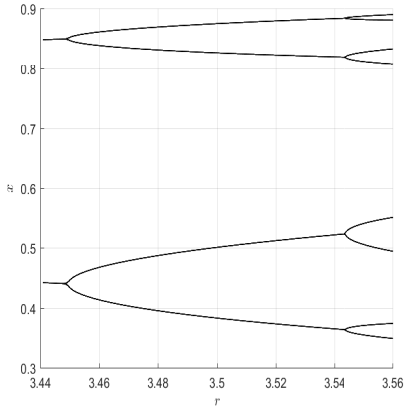
(a) $2.5 \leq r \leq 2.99$.



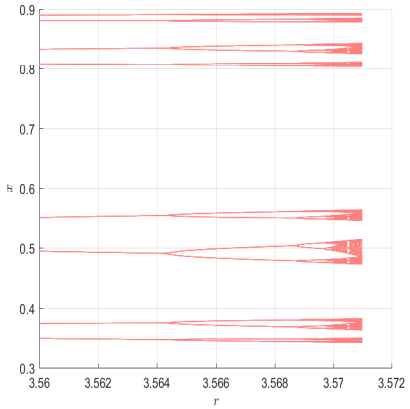
(b) $2.95 \leq r \leq 3.48$.



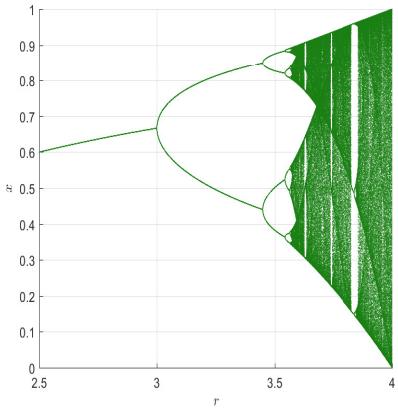
(c) $3.43 \leq r \leq 3.47$.



(d) $3.441 \leq r \leq 3.56$.



(e) $3.56 \leq r \leq 3.571$.



(f) $2.5 \leq r \leq 4$.

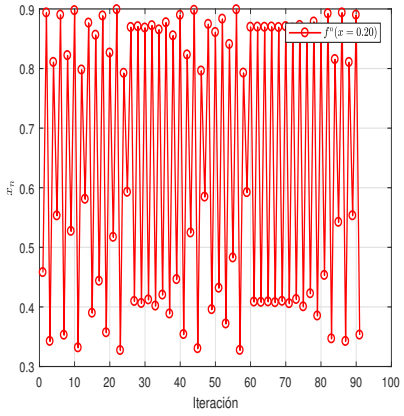
4.6. Identificación explícita de un ciclo de período 3

Consideremos $r = 3.828$. En la Figura (*4.4*) se observa para algunos valores de x que hay ciclos de tres valores distintos, en concordancia con la teoría.

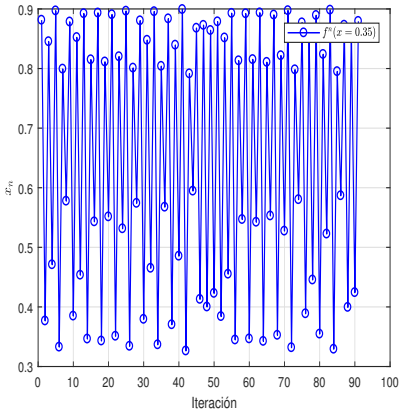
El Teorema de Sarkovskii establece que: *Si existe un ciclo de período 3, entonces existen ciclos de todos los perí̇odos naturales.*

Aunque no se enumeran todos los períodos, la existencia numérica del período 3, junto con la estructura observada, verifica empíricamente el Teorema de Sarkovskii, siguiendo el enfoque aceptado por Alligood y Devaney.

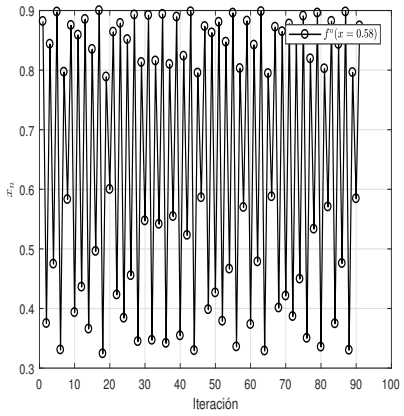
Figura 4.4: Diagrama de bifurcación del mapa logístico.



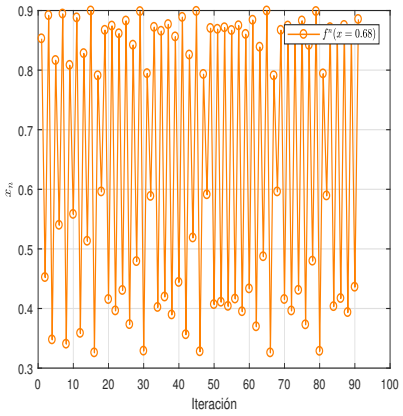
(a) $x = 0.20$.



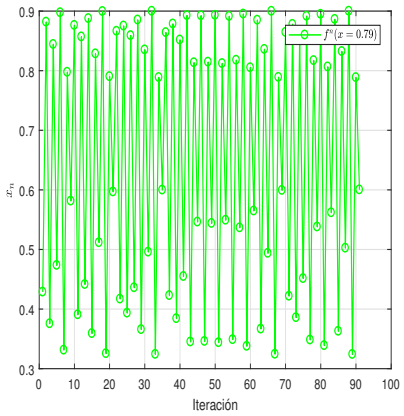
(b) $x = 0.35$.



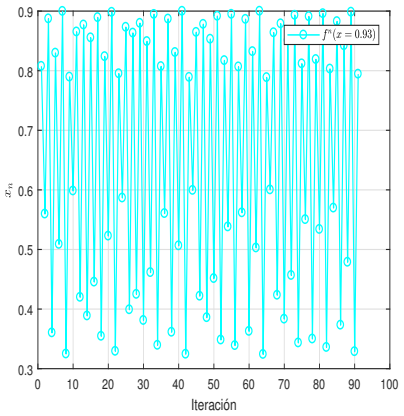
(c) $x = 0.58$.



(d) $x = 0.68$.



(e) $x = 0.79$.



(f) $x = 0.93$.

Discusión

Los resultados obtenidos permiten afirmar que:

- La simulación numérica reproduce fielmente los resultados teóricos clásicos.

- El mapa logístico es un modelo paradigmático para visualizar el Teorema de Sarkovskii.

- La metodología seguida es consistente con:
  - Alligood et al. (1996): enfoque visual–computacional.
  - Kuznetsov (2013): análisis cualitativo de bifurcaciones.
- La visualización computacional no reemplaza la demostración, pero:
  - refuerza la intuición,
  - valida empíricamente.
  - facilita la comprensión profunda del fenómeno caótico.

CONCLUSIONES

- **Conclusión general**

  Se concluye que el **Teorema de Sarkovskii puede ser visualizado y analizado numéricamente** en funciones unidimensionales discretas, en particular mediante el estudio del mapa logístico $f_r(x) = rx(1-x)$. A través de simulaciones computacionales y visualizaciones dinámicas, fue posible evidenciar empíricamente la aparición y coexistencia de órbitas periódicas de distintos órdenes, en concordancia con la jerarquía establecida por el teorema. Esto confirma que resultados teóricos de naturaleza topológica y existencial pueden ser comprendidos y verificados de manera efectiva mediante un enfoque numérico y visual.

- **Conclusión 1.**

  Se logró presentar el Teorema de Sarkovskii de forma clara, estructurada y accesible, resaltando su **orden jerárquico sobre los períodos de las órbitas periódicas** de funciones continuas reales definidas en intervalos compactos. La introducción progresiva de conceptos como órbitas, puntos periódicos y orden de Sarkovskii, acompañada de

ejemplos concretos y visualizaciones, permitió facilitar la comprensión de un resultado matemático profundo que tradicionalmente se expone de manera abstracta. En particular, se evidenció que la existencia de un ciclo de período 3 implica necesariamente la existencia de ciclos de todos los períodos, reforzando la conexión con resultados clásicos como el Teorema de Li–Yorke.

- **Conclusión 2.**

  Se concluye que los **métodos computacionales basados en iteración numérica**, detección de ciclos y análisis de estabilidad constituyen herramientas eficaces para identificar y clasificar órbitas periódicas en funciones discretas. El uso de MATLAB permitió implementar algoritmos sencillos pero robustos para:

  • detectar puntos fijos y ciclos periódicos,

  • analizar su estabilidad,

  • y asociar dichos ciclos con el orden de Sarkovskii.

  Estos métodos demostraron ser coherentes con la teoría matemática subyacente y consistentes con los protocolos clásicos descritos en la literatura (May, Strogatz, Alligood y Kuznetsov).

- **Conclusión 3.**

  Se comprobó que las representaciones gráficas, en particular los diagramas de bifurcación, los gráficos tipo telaraña y la evolución

temporal de órbitas, constituyen herramientas fundamentales para visualizar la aparición progresiva de ciclos periódicos y su relación con el orden de Sarkovskii. Estas visualizaciones permitieron identificar claramente:

- la duplicación de períodos,
- y la transición al caos.

De este modo, la visualización numérica no solo cumple un rol ilustrativo, sino que se consolida como un instrumento analítico que facilita la interpretación y validación empírica de resultados teóricos.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda extender el enfoque visual y numérico desarrollado en esta investigación al estudio de otros mapas discretos unidimensionales no lineales, tales como el mapa cuadrático general, con el fin de analizar la aplicabilidad del Teorema de Sarkovskii en contextos más amplios.

2. Se sugiere incorporar herramientas computacionales adicionales, como el cálculo de exponentes de Lyapunov y el análisis de atractores caóticos, para complementar la identificación y clasificación de órbitas periódicas realizadas en este trabajo.

3. Se recomienda utilizar los programas de simulación y las visualizaciones generadas como material didáctico en cursos de sistemas dinámicos discretos y caos determinista, debido a su utilidad para facilitar la comprensión de resultados teóricos abstractos.

4. Finalmente, se sugiere contrastar los resultados numéricos obtenidos con desarrollos teóricos más avanzados y trabajos recientes en dinámica no lineal, lo cual permitiría profundizar el análisis y servir de base para futuras investigaciones.

ANEXOS

7.1. Programa ciclos de período 3

7.1.0.1. Programa. 1

```
% ciclo_periodo3.m
clear; clc; close all;

r = 3.6;
f = @(x) r*x.*(1-x);
df=@(x) r-2*r*x;
x = [.20 .35 .58 .68 .79 .93];
x_f=(r-1)/r;
N = 300;
orb = zeros(1,N);
orb1 = zeros(1,N);
orb2 = zeros(1,N);
orb3 = zeros(1,N);
orb4 = zeros(1,N);
orb5 = zeros(1,N);

for i=1:N
    orb(i) = x(1);
    x(1) = f(x(1));
end
for i=1:N
    orb1(i) = x(2);
    x(2) = f(x(2));
end
for i=1:N
    orb2(i) = x(3);
    x(3) = f(x(3));
end
```

```
for i=1:N
    orb3(i) = x(4);
    x(4) = f(x(4));
end
for i=1:N
    orb4(i) = x(5);
    x(5) = f(x(5));
end
for i=1:N
    orb5(i) = x(6);
    x(6) = f(x(6));
end
figure(1);
plot(orb(210:end),'o-r','LineWidth',1.2);
grid on
legend({'$f^n(x=0.20)$'},'Interpreter','latex')
xlabel('Iteración','Interpreter','latex');
ylabel('$x_n$','Interpreter','latex');
figure(2)
plot(orb1(210:end),'o-b','LineWidth',1.1);
grid on
legend({'$f^n(x=0.35)$'},'Interpreter','latex')
xlabel('Iteración','Interpreter','latex');
ylabel('$x_n$','Interpreter','latex');
figure(3)
plot(orb2(210:end),'o-k','LineWidth',1.1);
grid on
legend({'$f^n(x=0.58)$'},'Interpreter','latex')
xlabel('Iteración','Interpreter','latex');
ylabel('$x_n$','Interpreter','latex');
figure(4)
plot(orb3(210:end),'o-','Color',[1, 0.5, 0],'LineWidth',1.1);
grid on
legend({'$f^n(x=0.68)$'},'Interpreter','latex')
xlabel('Iteración','Interpreter','latex');
ylabel('$x_n$','Interpreter','latex');
figure(5)
plot(orb4(210:end),'o-g','LineWidth',1.1);
grid on
legend({'$f^n(x=0.79)$'},'Interpreter','latex')
xlabel('Iteración','Interpreter','latex');
ylabel('$x_n$','Interpreter','latex');
figure(6)
plot(orb5(210:end),'o-c','LineWidth',1.1);
grid on
xlabel('Iteración','Interpreter','latex');
```

```
ylabel('$x_n$','Interpreter','latex');
legend({'$f^n(x=0.93)$'},'Interpreter','latex')
dc=df(x_f);
disp(dc)
if abs(dc)<1
    fprintf('El punto fijo x^* = %3.3f, es un atractor. \n',x_f);
elseif abs(dc)>1
    fprintf('El punto fijo x^* = %3.3f, es un repulsor. \n',x_f);
end
```

7.2. Programa diagrama de bifurcación

7.2.0.1. Programa. 2

```
% diagrama_bifurcacion.m
clear; clc; close all;

rvals = linspace(2.5,4,4000);
x = 0.5*ones(size(rvals));
N = 1200; trans = 1000;

figure; hold on;
for i=1:N
    x = rvals .* x .* (1-x);
    if i > trans
        plot(rvals, x,'.','Color',[.1, 0.5, .08],'MarkerSize',1.2);
    end
end
xlabel('$r$','Interpreter','latex');
```

```
ylabel('$x$','Interpreter','latex');

title('Diagrama de bifurcación del mapa logístico','Interpreter','latex');

grid on;
```

7.3. Programa punto fijo repulsor.

7.3.0.1. Programa. 3

```
% Ejemplo: Punto fijo repulsor en el mapa logístico
% Parámetro r > 3
clear; clc; close all;

r = 3.28;                    % Parámetro
f = @(x) r*x.*(1 - x);       % Mapa logístico
xstar = 1 - 1/r;             % Punto fijo no trivial

% Condición inicial ligeramente perturbada
%x0 = xstar + 0.001;
x0 =0.4;%5 xstar + 0.001;
N = 40;                      % Número de iteraciones

x = zeros(1, N);
x(1) = x0;
for n = 2:N
    x(n) = f(x(n-1));
end

% Gráfico 1: Evolución temporal
figure;
plot(1:N, x, 'bo-', 'LineWidth', 1.5, 'MarkerFaceColor', 'b'); hold on;
plot([1 N], [xstar xstar], 'r--', 'LineWidth', 2); % línea horizontal
xlabel('Iteraciones n', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$x_n$', 'Interpreter', 'latex');
title(['Evolución de $x_n$ para $r = ', num2str(r), '$'], 'Interpreter', 'latex');
legend({'$x_n$', '$x^*$ repulsor'}, 'Interpreter', 'latex');
grid on;

% Gráfico 2: Diagrama de telaraña (Cobweb plot)
figure; hold on;
fplot(f, [0 1], 'b', 'LineWidth', 1.8);
fplot(@(x) x, [0 1], 'k--');
```

```
xn = x0;
plot(x0,f(x0),'*g',xstar,f(xstar),'*b','Linewidth',1.6);
for n = 1:15
    plot([xn xn], [xn f(xn)], 'r','LineWidth', 1.5);
    plot([xn f(xn)], [f(xn) f(xn)], 'r','LineWidth', 1.5);
    quiver(xn, xn, 0,f(xn)-xn,'MaxHeadSize', 0.5, 'LineWidth', 1.5);
    quiver(xn, f(xn),f(xn)-xn,0,'MaxHeadSize', 0.1, 'LineWidth', 1.5);
    axis([0 1 0 1]) % Ajustar límites para ver la flecha);
    xn = f(xn);
end
title(['Diagrama de telaraña para $r = ', num2str(r), '$ (repulsor)'], 'Interpreter', 'latex');
xlabel('$x_n$', 'Interpreter', 'latex');
ylabel('$x_{n+1}$', 'Interpreter', 'latex');
legend({'$f(x)$', '$y=x$','Pto inicio','Pto fijo'}, 'Interpreter', 'latex');
grid on;
```

7.4. Programa Teorema de Li–Yorke.

7.4.0.1. Programa. 4

```
% Verificación numérica del Teorema de Li--Yorke
% Mapa logístico para r = 3.828 (región con periodo 3)
clear; clc;

% Parámetro
r = 3.828;
f = @(x) r*x.*(1 - x);

% Condiciones iniciales casi iguales
x1 = 0.4;
x2 = 0.4000001;

% Cantidad total de iteraciones para la gráfica
N = 400;

% Para la tabla mostramos solo los primeros 11 (0 al 10)
M = N;

% Vectores para la gráfica
X1 = zeros(1,N+1);
X2 = zeros(1,N+1);

% Guardar valores iniciales
```

```
X1(1) = x1;
X2(1) = x2;

% Tabla temporal
Tabla = zeros(M+1,4); % columnas: n, f^n(x1), f^n(x2), |diferencia|
Tabla(1,:) = [0, x1, x2, abs(x1 - x2)];

% Iterar
for n=1:N
    x1 = f(x1);
    x2 = f(x2);
    X1(n+1) = x1;
    X2(n+1) = x2;
    % Llenado de tabla
    if n <= M
        Tabla(n+1,:) = [n, x1, x2, abs(x1 - x2)];
    end
end

%% Mostrar tabla en pantalla
disp('------------------------------------------------');
disp('  n        f^n(x1)        f^n(x2)     |diff|   ');
disp('------------------------------------------------');
disp(Tabla);

%% Gráfica
figure;
plot(0:N, X1, 'b', 'LineWidth', 0.8); hold on;
plot(0:N, X2, 'r', 'LineWidth', 0.8);
legend('x_1(0)=0.4','x_2(0)=0.4000001');%0.4000001
xlabel('Iteraciones n','Interpreter','latex');
ylabel('Valor de la órbita','Interpreter','latex');
title('Sensibilidad a condiciones iniciales (Li--Yorke)','Interpreter','latex');
grid on;
```

7.5. Programa localizar puntos periódicos.

7.5.0.1. Programa. 5

```
% ================================================================
% localizar_periodicos_visualizar.m
% Busca puntos periódicos de periodo n en [1/a, 1/2] para f(x)=a x (1-x)
```

```
% y visualiza la cadena de intervalos I0 -> I1 -> ... -> I_{n-1} -> I0.
% Compatible con MATLAB 2017a.
% ================================================================
clear; clc; close all;

% ---------------- Parámetros (modifica según convenga) --------------
a = 8;            % elegir a > 4 (ejemplo)
n = 3;              % periodo buscado
x_min = 1 / a;
x_max = 0.5;
tol_root = 1e-10;   % tolerancia para filtrar raíces repetidas
eps_frac = 0.01;     % fracción para construir intervalos alrededor del punto (0<eps_frac<0.5)
% ---------------------------------------------------------------------

% Definir f y la iterada f^n de forma anidada
f = @(x) a .* x .* (1 - x);

% Función que calcula f^n(x) (vectorizada)
f_iter = @(x, k) iter_f(x, f, k); % usa función auxiliar iter_f

% Definir g_n(x) = f^n(x) - x
g_n = @(x) f_iter(x, n) - x;

% Muestreo inicial en [1/a, 1/2] para localizar cambios de signo
Nsam = 4000;
xs = linspace(x_min, x_max, Nsam);
gvals = g_n(xs);

% Buscar intervalos donde g_n cambia de signo (candidatos)
candidates = [];
for k = 1:(length(xs)-1)
    if gvals(k) == 0
        candidates = [candidates; xs(k)];
    elseif gvals(k) * gvals(k+1) < 0
        a0 = xs(k); b0 = xs(k+1);
        try
            root = fzero(g_n, (a0 + b0)/2);
            if root >= x_min && root <= x_max
                candidates = [candidates; root];
            end
        catch
            % ignorar si fzero falla
        end
    end
end
```

```
% Filtrar raíces duplicadas (por cercanía)
if isempty(candidates)
    disp('No se encontraron raíces iniciales en el muestreo. Pruebe aumentar Nsam o cambiar a.');
    return
end
candidates = unique(round(candidates, 12)); % redondeo para agrupar muy cercanas

% Mejor filtrado: eliminar duplicados por distancia
roots_unique = [];
for r = candidates'
    if isempty(roots_unique) || min(abs(roots_unique - r)) > tol_root
        roots_unique = [roots_unique; r];
    end
end

% Filtrar por periodo mínimo: comprobar divisores
roots_period_n = [];
for r = roots_unique'
    is_minimal = true;
    divisors = 1:(n-1);
    for d = divisors
        if mod(n, d) == 0
            y = r;
            % calcular f^d(r)
            y = f_iter(y, d);
            if abs(y - r) < 1e-8
                is_minimal = false;
                break;
            end
        end
    end
    if is_minimal
        roots_period_n = [roots_period_n; r];
    end
end

if isempty(roots_period_n)
    disp('No se encontraron puntos de periodo mínimo n en [1/a,1/2] con el muestreo actual.');
    disp('Pruebe aumentar Nsam, variar a, o reducir tolerancias.');
    % mostrar candidatos (aunque no sean de periodo mínimo)
    disp('Raices candidatas (sin filtrar por periodo mínimo):');
    disp(roots_unique);
    return
end

% Para cada raíz encontrada, construir orbitas y visualizar
```

```
for idx = 1:length(roots_period_n)
    x0 = roots_period_n(idx);
    % Obtener órbita (n puntos)
    orbit = zeros(1,n);
    orbit(1) = x0;
    for k = 2:n
        orbit(k) = f(orbit(k-1));
    end
    % ajustar órbita para exactitud
    orbit = mod(orbit, 1); % mantener en [0,1] por si acaso

    % Ordenar la órbita en el orden de iteración (x0, x1, ..., x_{n-1})
    % Mostrar por consola:
    disp(['Órbita encontrada (periodo ', num2str(n), '), semilla: ', num2str(x0)]);
    disp(orbit);

    % Construir intervalos I_k alrededor de cada punto de la órbita
    % eps_k elegido como fracción de la distancia mínima al vecino y a los extremos
    I = zeros(n,2); % filas: [left, right]
    for k = 1:n
        xk = orbit(k);
        % distancia al vecino derecho e izquierdo en la órbita (circular)
        dx1 = abs(xk - orbit(mod(k, n) + 1));
        dx2 = abs(xk - orbit(mod(k-2, n) + 1)); % previous (indexing careful)
        dmin = min([dx1, dx2]);
        % distancia a los límites [x_min, x_max]
        dlim = min([xk - x_min, x_max - xk]);
        delta = min(dmin/2, dlim);
        if delta <= 0
            delta = (x_max - x_min) * 1e-3; % fallback
        end
        eps_k = eps_frac * delta;
        % construir intervalo y asegurarse que queda en [x_min,x_max]
        left = max(x_min, xk - eps_k);
        right = min(x_max, xk + eps_k);
        % si intervalo muy pequeño, ampliar ligeramente
        if right - left < 1e-8
            left = max(x_min, xk - 1e-4);
            right = min(x_max, xk + 1e-4);
        end
        I(k, :) = [left, right];
    end

    % Verificar numéricamente f(I_k) contiene I_{k+1}
    inclusion_ok = true;
    inclusion_results = false(1, n);
```

```
for k = 1:n
    left = I(k,1); right = I(k,2);
    % evaluar f en una malla sobre I_k
    mx = linspace(left, right, 200);
    fy = f(mx);
    im = [min(fy), max(fy)];
    % índice del siguiente (circular)
    j = mod(k, n) + 1;
    target = I(j, :);
    if im(1) <= target(1) + 1e-10 && im(2) >= target(2) - 1e-10
        inclusion_results(k) = true;
    else
        inclusion_results(k) = false;
        inclusion_ok = false;
    end
end

% -------------------- Dibujar la figura -----------------------
figure('Name', ['Órbita periodo ', num2str(n), ' - semilla ', num2str(x0)], ...
       'NumberTitle', 'off', 'Units', 'normalized', 'OuterPosition', [0 0 1 1]);
% Subplot 1: gráfica f y recta y=x, con intervalos I_k
subplot(2,1,1); hold on;
% graficar f en [0,1]
plot_x = linspace(0,1,1000);
plot(plot_x, f(plot_x), 'b', 'LineWidth', 1.4);
plot(plot_x, plot_x, 'k--'); % y = x
% dibujar intervalos I_k con patches semi-transparente
colors = hsv(n); % colores distintos
for k = 1:n
    left = I(k,1); right = I(k,2);
    % dibujar rectángulo en la gráfica (en altura mostrar como banda)
    % para su visualización ubicamos la banda en y entre y_bottom y y_top
    y_bottom = -0.05; y_top = -0.01; % banda por debajo del eje x para destacar
    patch([left right right left], [y_bottom y_bottom y_top y_top], colors(k,:), ...
        'FaceAlpha', 0.45, 'EdgeColor', colors(k,:));
    % marcar el punto central de I_k en la curva (x, f(x))
    xc = mean([left right]); yc = f(xc);
    plot(xc, yc, 'o', 'MarkerFaceColor', colors(k,:), 'MarkerEdgeColor','k', 'MarkerSize',6);
    % poner etiqueta I_k
    text(mean([left right]), y_top - 0.02, ['I_{' num2str(k-1) '}'], 'HorizontalAlignment', 'center');
end
xlim([0 1]); ylim([-0.06 max(1.05, max(f(plot_x))*1.05)]);
xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex'); ylabel('$f(x)$', 'Interpreter', 'latex');
title(['Función f(x)=a x(1-x) con a=', num2str(a), ' ; intervalos I_k'], 'Interpreter', 'latex');
grid on; box on;
```

```
% Subplot 2: ilustrar flechas de I_k -> I_{k+1} y mostrar comprobaciones
subplot(2,1,2); hold on;
% Dibujar una representación vertical de los intervalos en el eje x cartesiano
% Representamos cada I_k como barra horizontal en distintos niveles y dibujamos flechas
y_levels = n:-1:1;
for k = 1:n
    left = I(k,1); right = I(k,2);
    yl = y_levels(k);
    plot([left right], [yl yl], '-', 'LineWidth', 8, 'Color', colors(k,:));
    text(mean([left right]), yl + 0.15, ['I_{' num2str(k-1) '}: [' num2str(left,'%.6f') ', ' num2str(right,'%.6f') ']'], ...
        'HorizontalAlignment', 'center', 'FontSize', 9);
end
% flechas entre niveles: de centro(I_k) mapeado por f a centro(I_{k+1})
for k = 1:n
    j = mod(k, n) + 1;
    xc = mean(I(k,:)); yc = mean(I(j,:));
    % imagen del centro por f
    fc = f(xc);
    % dibujar flecha desde (xc, level k) hasta (fc, level j)
    % representarlo con una flecha curvada (usamos annotation en normalized units => convert)
    plot([xc fc], [y_levels(k) y_levels(j)], '-k', 'LineWidth', 1);
    % marcar puntos
    plot(xc, y_levels(k), 'ko', 'MarkerFaceColor', colors(k,:));
    plot(fc, y_levels(j), 'ks', 'MarkerFaceColor', colors(j,:));
end
xlim([x_min-0.02 x_max+0.02]);
ylim([0.5 n+0.5]);
xlabel('$x$ (dominio)', 'Interpreter', 'latex');
yticks([]);
title(['Comprobación visual: I_k \rightarrow I_{k+1} (k mod n)   - Inclusiones comprobadas: '], 'Interpreter', 'latex');
% mostrar resultados de inclusión en texto
incl_text = '';
for k = 1:n
    incl_text = [incl_text, ['I_{' num2str(k-1) '} -> ' num2str(inclusion_results(k)) '; ']];
end
text(0.02, 0.02, ['Inclusiones: ', incl_text], 'Units', 'normalized', 'FontSize', 10);
grid on; box on;

% Mostrar en consola si todas las inclusiones se cumplen
if all(inclusion_results)
    disp('Verificación: todas las inclusiones f(I_k) ? I_{k+1} se cumplen (según muestreo).');
else
    disp('Aviso: alguna inclusión f(I_k) ? I_{k+1} no se cumple con los intervalos actuales.');
    disp('Se recomiendan reducir eps_frac o elegir otra raíz/orbita.');
end
```

```
    % Pausa para inspeccionar la figura antes de la siguiente órbita
    disp('Pulse una tecla para continuar a la siguiente órbita (si la hay).');
    pause;
end

% ---------------------- Funciones auxiliares -------------------------
function y = iter_f(x, fhandle, k)
% Devuelve f^k(x) aplicado elemento a elemento (vectorizable)
    y = x;
    for ii = 1:k
        y = fhandle(y);
    end
end
```

7.6. Programa puntos q–periódicos.

7.6.0.1. Programa. 6

```
% ================================================================
%   puntos_qperiodicos.m   (Compatible con MATLAB 2017a)
%   Autor: [Tu Nombre]
%   Descripción:
%       Muestra los puntos q-periódicos del sistema lineal
%       x' = -y, y' = x  con matriz A = [0 -1; 1 0].
% ================================================================

clear; clc; close all;

% ------------------------------
% Definir matriz A y potencias
% ------------------------------
A = [0 -1; 1 0];
q_values = 1:4;   % valores de q a mostrar

% ------------------------------
% Definir puntos iniciales
% ------------------------------
[X, Y] = meshgrid(-2:1:2, -2:1:2);
pts = [X(:)'; Y(:)'];

figure('Name','Puntos q-periodicos','NumberTitle','off');
set(gcf,'Position',[200 200 800 700]);
```

```
for i = 1:length(q_values)
    q = q_values(i);
    Aq = A^q;

    % Transformar los puntos
    pts_q = Aq * pts;

    % Subgráfico
    subplot(2,2,i);
    hold on; axis equal; grid on;

    % Flechas: muestran el efecto de A^q
    quiver(pts(1,:), pts(2,:), pts_q(1,:)-pts(1,:), pts_q(2,:)-pts(2,:), 0, 'b');
    plot(pts(1,:), pts(2,:), 'ko', 'MarkerFaceColor', 'k');
    plot(0,0,'rp','MarkerFaceColor','y','MarkerSize',12);

    % Detectar puntos fijos (usando norma clásica)
    diff = sqrt(sum((pts_q - pts).^2, 1));
    idx_fixed = find(abs(diff) < 1e-10);
    if ~isempty(idx_fixed)
        plot(pts(1,idx_fixed), pts(2,idx_fixed), 'go', 'MarkerFaceColor','g');
    end

    title(sprintf('A^{%d}', q), 'FontWeight','bold');
    xlabel('x'); ylabel('y');
    xlim([-3 3]); ylim([-3 3]);
end

% Título general
suptitle('Visualización de A^q y puntos q-periódicos');

% ------------------------------
% Resultados teóricos en consola
% ------------------------------
disp('=== Matrices A^q ===');
for q = q_values
    disp(['q = ' num2str(q) ':']);
    disp(A^q);
end
disp('El único punto fijo es (0,0); todos los puntos son 4-periódicos.');
```

7.7. Programa Expansión.

7.7.0.1. Programa. 7

```
x = linspace(0, 1, 1000);
m_values = [2, 3, 4, 5];
colors = {'b', 'g', [1 0.5 0], 'r'};
figure;
hold on;
for idx = 1:length(m_values)
    m = m_values(idx);
    y = mod(m * x, 1);
    figure(idx)
    plot(x, y, 'Color', colors{idx}, 'DisplayName', sprintf('E_%d(x) = %dx mod 1', m, m));

    % Puntos periódicos de orden 1
    if m > 1
        pts = (0:(m-2)) / (m - 1);
        figure(idx)
        plot(pts, mod(m * pts, 1), 'o', 'Color', colors{idx}, ...
            'DisplayName', sprintf('Periódicos orden 1, m = %d', m));
    end
end

plot([0 1], [0 1], 'k--', 'DisplayName', 'y = x');
xlabel('x');
ylabel('E_m(x)');
title('Transformaciones E_m(x) = m x mod 1 para m = 2, 3, 4, 5');
legend('show', 'Location', 'best');
grid on;
```

BIBLIOGRAFÍA

Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer.

Alseda, L., Llibre, J., & Misiurewicz, M. (2000). *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One* (Vol. 5). World Scientific.

Baldoma, I. (2002). *Numerical detection of periodic orbits in discrete dynamical systems* [Tesis doctoral, Universitat de Barcelona].

Barreira, L., & Valls, C. (2013). *Sistemas Dinámicos: una introducción* (1.ª ed.). Delta Publicaciones.

Collet, P., & Eckmann, J.-P. (1980). *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser.

Devaney, R. L. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (2nd). Addison–Wesley.

Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, *19*(1), 25-52.

Huang, L. (2008). *On the Sarkovskii's theorem and its numerical verification using computer simulations* [Tesis de maestría, Department of Mathematics].

Kocak, H., & Palmer, K. (1995). A numerical study on period–doubling and chaos in the logistic map. *Journal of Computational Physics*, *123*(2), 143-155.

Kuznetsov, Y. A. (2013). *Elements of Applied Bifurcation Theory* (3rd). Springer.

Li, T. Y., & Yorke, J. A. (1975). Period three implies chaos. *American Mathematical Monthly*, *82*(10), 985-992.

May, R. M. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, *261*, 459-467.

Sarkovskii, A. N. (1964). Co–existence of cycles of a continuous map of a line into itself. *Ukrainian Mathematical Journal*, *16*, 61-71.

Strogatz, S. H. (2014). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* (2nd). Westview Press.

UNSCH FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 55-2026-FIMGC

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA

En la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, en la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **Resolución Decanal No 261-2026-FIMGC-D**, a los **veintitrés días del mes de julio de 2026**, siendo las **4:13 p.m.**, reunidos en el **Auditorio de la Escuela Profesional de Ingeniería de Minas**, bajo la presidencia del **MSc. Ing. José Ernesto ESTRADA CARDENAS**, y los miembros: **Mg. Lic. Daul Andrés PAIVA YANAYACO**, **Mg. Lic. José Carlos JUAREZ PULACHE** y **Mg. Lic. Guillermo Jesús ZELA QUISPE**, actuando como secretario docente el **Ing. Saul Walter RETAMOZO FERNANDEZ**, para proceder a la sustentación de tesis para optar el **Título Profesional de Licenciada en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática**, de la Bachiller en Ciencias Físico Matemáticas:

VIVIANA LISVET OCHANTE QUISPE

Quien presentó la tesis denominada:

"Visualización y análisis numérico del Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas"

Los señores miembros del jurado luego de expuesta la tesis y absueltas las preguntas, deliberaron y declararon:

Aprobado con 18 (dieciocho)

Siendo las **5:33 p.m.** del día **23 de julio del 2026**, culmina el acto de sustentación de tesis, y en conformidad de lo actuado los miembros del jurado firmamos al pie del presente.

MSc. Ing. José Ernesto ESTRADA CARDENAS
Presidente

Mg. Lic. José Carlos JUAREZ PULACHE
Miembro

Mg. Lic. Guillermo Jesús ZELA QUISPE
Miembro

Mg. Lic. Daul Andrés PAIVA YANAYACO
Miembro - Asesor

Ing. Saul Walter RETAMOZO FERNANDEZ
Secretario

FACULTAD DE INGENIERÍA
DE MINAS Y CIVIL
Av. Independencia S/N
Ciudad Universitaria
Central Tel. 066 312510
Anexo 151

UNSCH FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

turnitin

CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 002-2026-JAHQ-FIMGC/UNSCH

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal Nº 365-2025-FIMGC -D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

Nombres y Apellidos	:	VIVIANA LISVET OCHANTE QUISPE.
Escuela Profesional	:	CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
Título de la Tesis	:	"Visualización y análisis numérico del Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas"
Evaluación de la Originalidad	:	**10%** Índice de Similitud.
Identificador de la entrega	:	3036695551.

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 20 de setiembre del 2026.

Dr. JUAN ALFREDO HUAMANCHAQUI QUISPE
DNI Nº: 41764585

Con depósito para Sustentación y Tramites
C.c. Archivo

FACULTAD DE INGENIERIA DE MINAS, GEOLOGIA Y CIVIL
Av. Independencia S/N Ciudad Universitaria
Central Tel. 066 312510
Anexo 151

“Visualización y análisis numérico del Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas”

por VIVIANA LISVET OCHANTE QUISPE

Fecha de entrega: 20-sept-2026 04:08a. m. (UTC-0500)
Identificador de la entrega: 3036695551
Nombre del archivo: Tesis_corregida_Viviana_16_marzo_2026.pdf (2.58M)
Total de palabras: 18502
Total de caracteres: 85340

“Visualización y análisis numérico del Teorema de Sarkovskii en funciones unidimensionales discretas”

INFORME DE ORIGINALIDAD

10%	8%	2%	6%
INDICE DE SIMILITUD	FUENTES DE INTERNET	PUBLICACIONES	TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	3%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	2%
3	web.mat.upc.edu Fuente de Internet	1%
4	www.slideshare.net Fuente de Internet	1%
5	vdoc.pub Fuente de Internet	<1%
6	Ofer Aluf. "Advanced Microwave RF Antennas and Circuits", Springer Science and Business Media LLC, 2025 Publicación	<1%
7	repositorio.unsch.edu.pe Fuente de Internet	<1%
8	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	<1%
9	1library.co Fuente de Internet	<1%
10	Submitted to Universidad de Oviedo Trabajo del estudiante	<1%
11	zaguan.unizar.es Fuente de Internet	<1%
12	idoc.tips Fuente de Internet	<1%
13	idus.us.es Fuente de Internet	<1%
14	mafiadoc.com Fuente de Internet	<1%

15	Submitted to Unviersidad de Granada Trabajo del estudiante	<1 %
16	repositorio.unal.edu.co Fuente de Internet	<1 %
17	repositorio.continental.edu.pe Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas	Activo	Excluir coincidencias	< 30 words
Excluir bibliografía	Activo		