

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE  
HUAMANGA  
*FACULTAD DE INGENIERÍA MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL*  
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**CARACTERIZACIÓN DEL CAOS DEL SISTEMA  
ESPÍN-BOSÓN MEDIANTE EL MÉTODO DEL  
ÍNDICE DE ALINEAMIENTO MÁS PEQUEÑO**

**TESIS**

Presentado por:

Bach. REDOLFO YUPANQUI, Jaime.

Asesorado por:

Mg. SOLANO REYNOSO, Walter.

Para optar el título profesional de Licenciado en Ciencias Físico  
Matemáticas, Especialidad de Física,

Ayacucho - Perú

2017

# Índice general

Índice general	I
Índice de tablas	IV
Índice de figuras	IV
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. SISTEMAS DINÁMICOS Y SISTEMAS HAMILTONIANOS . . .	6
2.1.1. Sistema Dinámico . . . . .	6
2.1.2. Sistema Dinámico Hamiltoniano . . . . .	7
2.1.2.1. Flujo Hamiltoniano . . . . .	8
2.1.2.2. Constantes de Movimiento . . . . .	9
2.1.3. Caracterización de Caos . . . . .	9
2.1.3.1. Mapas de Poincaré . . . . .	10
2.1.3.2. Exponentes de Liapunov . . . . .	11
<b>3. TEORIA DEL MÉTODO SMALLER ALIGNMENT INDEX (SALI)</b>	<b>18</b>
3.1. Definición del Índice de Alineamiento más Pequeño (SALI) . . . .	18
3.2. Definición del Índice de Alineamiento Generalizado (GALI) . . . .	21
<b>4. MÉTODOS Y RESULTADOS</b>	<b>23</b>

4.1. Algoritmo para determinar los índices SALI . . . . .	23
4.2. Método Numérico y Lenguaje de Programación . . . . .	25
4.3. Resultados . . . . .	28
4.3.1. Resultados de las secciones de Poincaré y SALI . . . . .	28
4.3.2. Resultados SALI con polarización plana, dependencia con las condiciones iniciales . . . . .	34
4.3.3. Resultados SALI con polarización plana, dependencia con la energía . . . . .	39
4.3.4. Resultados SALI con polarización plana para $G_+ \neq 0$ y $G_- \neq 0$	44
4.3.5. Escaneo de la SSP de sistemas hamiltonianos 2D: Una vi- sión global de la dinámica . . . . .	54
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>
<b>Apéndice</b>	<b>60</b>
.1. Definiciones Básicas . . . . .	61
.2. Programa Mathematica para las seccion de superficie de Poincaré	63
.3. Programa Mathematica para los índices SALI . . . . .	65

# Índice de figuras

2.1. Evolución temporal de un conjunto de trayectorias hamiltonianas en el caso unidimensional ( $n = 1$ ). De acuerdo al teorema de Liouville, las mismas encierran un área constante en el espacio de fases.	9
3.1. Evolución temporal del SALI . . . . .	20
4.1. Comportamiento del SALI. . . . .	24
4.2. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para $E=6.2$ , $G_+=1.5$ , $G_-=1.5$ , y condiciones iniciales $q_1=1.581139$ , $q_2=1.118034$ , $p_1 = 1.581139$ , $p_2=1.81922$ . . . . .	30
4.3. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para $E=15.0$ , $G_+=1.5$ , $G_-=1.5$ , y condiciones iniciales $q_1=1.581139$ , $q_2=1.118034$ , $p_1=1.581139$ , $p_2=3.66823$ . . . . .	31
4.4. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para $E=25.0$ , $G_+=2.0$ , $G_-=2.0$ , y condiciones iniciales $q_1=1.837117$ , $q_2=1.299038$ , $p_1=1.837171$ , $p_2=4.26836$ . . . . .	32
4.5. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para $E=6.2$ , $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0$ , $q_2=-4.51664$ , $p_1=0$ , $p_2=0.999982$ . . . . .	33
4.6. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para $E=6.2$ , $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0.3$ , $q_2=0.9$ , $p_1=0.4$ , $p_2=4.22267$ . . . . .	35

4.7. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0.4$ , $q_2=0.9$ , $p_1=0.5$ , $p_2=4.13577$ . . . . .	36
4.8. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0.15$ , $q_2=0.2$ , $p_1=0.3$ , $p_2=4.40296$ . . . . .	37
4.9. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=1.7$ , $q_2=0.4$ , $p_1=2$ , $p_2=2.80386$ . . . . .	38
4.10. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=-4.0, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0.1$ , $q_2=0.2$ , $p_1=0.3$ , $p_2=0.734986$ . . . . .	40
4.11. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=8.5, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0.4$ , $q_2=0.6$ , $p_1=0.2$ , $p_2=4.8923$ . . . . .	41
4.12. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=15.0, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=1.0$ , $q_2=1.2$ , $p_1=0.9$ , $p_2=5.35433$ . . . . .	42
4.13. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=25.0, $G_+=0.7$ , $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=2.0$ , $q_2=2.5$ , $p_1=3.0$ , $p_2=5.16966$ . . . . .	43
4.14. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=0.5$ , $G_-=0.5$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=4.00204$ . . . . .	45
4.15. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=1.0$ , $G_-=1.0$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=3.59157$ . . . . .	46

4.16. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=1.5$ , $G_- = 0.5$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=3.29748$ . . . . .	47
4.17. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=3.0$ , $G_- = 0.0$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=3.54895$ . . . . .	48
4.18. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=2.5$ , $G_- = -0.5$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=2.81264$ . . . . .	49
4.19. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=20, $G_+=1.0$ , $G_- = 1.0$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=3.59157$ . . . . .	50
4.20. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=6.2, $G_+=0.7$ , $G_- = 0.3$ , y condiciones iniciales $q_1=0.1$ , $q_2=0.2$ , $p_1=0.3$ , $p_2=4.4049$ . . . . .	51
4.21. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=20, $G_+=1.0$ , $G_- = 1.0$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=3.59157$ . . . . .	52
4.22. a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para E=20, $G_+=1.0$ , $G_- = 1.0$ , y condiciones iniciales $q_1=0.5$ , $q_2=0.7$ , $p_1=0.9$ , $p_2=3.59157$ . . . . .	53
4.23. a) Valores del índice de alineamiento más pequeño(SALI) para un tiempo de integración $t_f = 1000$ para órbitas con condiciones iniciales en el eje $p_1 = 0$ para la sección de Poincaré b) Mapa de Poincaré $(q_1, p_1)$ del hamiltoniano (4.1) para E=6.2 , $w=1$ , $j=9/2$ , $G_+=0.7$ y $G_- = 0.3$ . . . . .	55

## Resumen

La caracterización de caos para sistemas hamiltonianos de dos grados de libertad se pueden realizar usando los mapas de Poincare, para más de dos grados de libertad, se hace uso de otros métodos tales como: Los exponentes de Liapunov y últimamente el SALI (del ingles Smaller Alignment Index ) que trabaja para sistemas conservativos. El modelo que estudiamos es un sistema que consta de átomos independientes en interacción con el campo electromagnético cuantizado. El objeto central en la presente Tesis es caracterizar caos utilizando el método SALI, para el sistema espín-bosón con polarización plana implementado en el software Mathematica, a partir de ello obtener los resultados requeridos y luego hacer un análisis cualitativo del sistema hamiltoniano en cuanto a su comportamiento regular o caótico bajo ciertas condiciones iniciales. Se utilizó el método SALI para caracterizar el sistema hamiltoniano de átomos hidrogenoides con polarización plana, determinando así que el SALI es una mejor opción para caracterizar caos debido a su sencillo uso y mayor rapidez con respecto a otros métodos.

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente trabajo se hace un estudio acerca del sistema físico Espín-Bosón (sistema que consta de átomos independientes en interacción con un campo electromagnético cuantizado cuya polarización es plana) para determinar el comportamiento caótico o regular de dicho sistema utilizando el método SALI e implementando este método en el lenguaje de programación Mathematica para cuyo efecto se ha tomado en cuenta publicaciones o artículos científicos que tenemos a la mano y algunas tesis de referencia. Los sistemas de átomos independientes en interacción con un campo electromagnético cuantizado cuya polarización es plana fue planteado por Dicke [1] quien encontró un hamiltoniano para este tipo de sistemas con el propósito de explicar la superradiancia, por lo que se denomina también modelo de Dicke. Luego Jaynes-Cummings [2] restringieron los términos que no conservan energía en el modelo de Dicke y encontraron un hamiltoniano que ahora es uno de los modelos importantes en óptica cuántica, denominado modelo de Jaynes-Cummings. La interacción entre el campo de radiación electromagnética y los átomos es solamente entre dos niveles de energía de tal modo que cada átomo puede considerarse como un sistema de dos niveles de energía, y por lo tanto, pueda representarse como espín  $\frac{1}{2}$  ficticio [3, 4]. Como el campo electromagnético consta de fotones, son bosones, el sistema que tratamos se denomina también Espin-Bosón. Para el campo electromagnético con polarización

plana, este sistema fue estudiado en diversos contextos, especialmente en óptica cuántica, como puede verse en la revisión de Shone y Night [5]. En nuestro caso, la motivación original fue realizar estudios de caos en el sistema espín-bosón con polarización plana del campo electromagnético, para lo cual había que obtener previamente el hamiltoniano cuántico y clásico del sistema que se considera. En la literatura se encuentran estudios con polarización plana y las primeras publicaciones en esta dirección datan desde 1976, con Belebrov y otros [6], posteriormente Milonni y otros [7] y Graham y Höhnerbach [8], que han reportado propiedades caóticas del hamiltoniano en cuanto a su formulación en términos del campo electromagnético linealmente polarizado. En las décadas de los años 80 y 90, grupos brasileños han reportado numerosos trabajos en caos sobre el modelo de Dicke, tanto del sistema cuántico como su contraparte clásico [9–13] y la caracterización de caos se llevó a cabo mediante los mapas de Poincaré [14], debido a que con polarización plana se obtiene un hamiltoniano de dos grados de libertad. Recientemente la caracterización de caos del mismo hamiltoniano se realizó utilizando los exponentes de Lyapunov, concordando con los resultados obtenidos mediante los mapas de Poincaré, lo cual se puede encontrar en la tesis de Berrocal [15]. Sin embargo, en la última década se ha planteado una propuesta interesante y más simple que los exponentes de Lyapunov para caracterizar los sistemas dinámicos hamiltonianos conservativos, denominado el índice de alineamiento más pequeño [16], abreviado como SALI (del inglés, Smaller Alignment Index) y su generalización GALI (Generalized Alignment Index) [17]. Se ha comprobado que estos métodos son rápidos y eficientes tal como se reportan en las diferentes publicaciones [17–19]. El hamiltoniano del modelo de Dicke fue obtenido a partir de argumentos puramente cuánticos y para pasar al correspondiente hamiltoniano clásico se utilizan los llamados estados coherentes generalizados. A partir de la década del 60 del siglo XX, se fue desarrollando la generalización de los estados coherentes en relación al campo electromagnético cuantizado que se utilizaban en óptica cuántica, inicialmente propuesta por Schrodinger [20] para

el oscilador armónico y utilizada por primera vez por Glauber [21] en los años sesenta del siglo XX en el caso del campo electromagnético. La generalización de los estados coherentes a otros sistemas, como son los espines, fue desarrollada por Perelemov [22], lo cual permitió posteriormente deducir hamiltonianos clásicos de los correspondientes cuánticos y en particular, obtener el hamiltoniano clásico correspondiente al modelo de Dicke. Nuestro trabajo es caracterizar el comportamiento caótico del hamiltoniano clásico mediante el método SALI. Actualmente cuando se hace mención acerca del término caos es en realidad un tipo de solución de los denominados sistemas dinámicos lineales, que en esencia es la pérdida de información en el tiempo prolongado, es decir aun siendo un sistema determinístico se pierde la predicibilidad después de un tiempo largo; sin embargo, existen diferentes maneras de caracterizar caos, de acuerdo a las áreas de estudio o conveniencias de caracterización de caos. Así, encontramos estudios de caos desde la teoría ergódica, la entropía de Kolmogorov, mapas de Poincaré, exponentes de Lyapunov y últimamente el SALI (Índice de Alineamiento más Pequeño); pero, en todos los casos, la característica principal que se considera en un sistema caótico es exhibir sensibilidad a las condiciones iniciales, es decir, que para condiciones próximas las trayectorias del sistema en el espacio de fase divergen. El objeto central del presente trabajo de tesis es caracterizar el comportamiento caótico o regular del sistema espín-bosón con polarización plana del campo electromagnético, mediante el método SALI, descrito clásicamente por un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, las cuales se derivan del hamiltoniano clásico mediante las ecuaciones canónicas de Hamilton. Por el cual el SALI es una buena opción que nos permite caracterizar caos en sistemas hamiltonianos conservativos debido a su mayor rapidez y eficacia frente a otros métodos. En el segundo CAPÍTULO se desarrolla la parte conceptual teórica importante acerca de Sistemas Dinámicos y Sistemas Dinámicos Hamiltonianos y los diferentes métodos para caracterizar caos. En el CAPÍTULO 3 se hace mención acerca del método SALI, su forma de uso, la convergencia o divergencia de los Índices SALI, etc.

En el CAPÍTULO 4 planteamos la metodología y la forma de calcular u obtener los Indices SALI para un comportamiento regular o caótico utilizando el lenguaje de programación Mathematica. Luego se dan las conclusiones y recomendaciones correspondientes y para luego finalizar con los apéndices y la bibliografía.

# Capítulo 2

## Marco Teórico

### 2.1. SISTEMAS DINÁMICOS Y SISTEMAS HAMILTONIANOS

#### 2.1.1. Sistema Dinámico

Nuestro sistema Físico (Espín-Bosón) representa un sistema dinámico continuo, que consiste en aquellos sistemas físicos, matemáticos, biológicos, económicos, etc, que evolucionan continuamente en el tiempo y se expresa matemáticamente por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas de primer orden (2.1) [15].

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{u}, t) \quad (2.1)$$

donde  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un vector de dimensión  $n$ , cuyos componentes son las variables dinámicas del sistema,  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  es un vector de dimensión  $p \leq n$ , cuyos componentes son los parámetros de control del sistema,  $t$  es el tiempo y  $\vec{F} = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  es un campo vectorial de dimensión  $n$  donde sus componentes describen el comportamiento del sistema dinámico en el tiempo, es decir describe la forma como evolucionan las variables dinámicas del sistema.

Si en la ecuación (2.1),  $\vec{F}$  no depende explícitamente del tiempo, el sistema dinámico es conocido como sistema autónomo, cuya ecuación de movimiento se expresa como

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{u}) \quad (2.2)$$

### 2.1.2. Sistema Dinámico Hamiltoniano

Es un sistema dinámico representado completamente por medio de una función escalar de la forma de la ecuación (2.3) llamado hamiltoniano o función hamiltoniana del sistema. El estado del sistema es determinado por sus momentos generalizados  $\vec{p}$  y sus coordenadas generalizadas  $\vec{q}$ .

$$H = F(\vec{p}, \vec{q}, t), \quad (2.3)$$

donde  $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  representa conjunto de  $n$  coordenadas generalizadas y  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  representa al conjunto de  $n$  momentos generalizados siendo  $n$  el número de grados de libertad del sistema, asociado al número mínimo de coordenadas generalizadas necesarios para describir el comportamiento del sistema dinámico.

La ecuación de movimiento (2.1) para el caso del sistema dinámico hamiltoniano representado por la hamiltoniana de la ecuación (2.3) es dada por las ecuaciones canónicas de Hamilton (2.4) y (2.5), que constituyen un sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden.

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial p_i} \quad (2.4)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\vec{q}, \vec{p}, t)}{\partial q_i} \quad (2.5)$$

Si el hamiltoniano (2.3) es independiente del tiempo, entonces las ecuaciones

(2.4) y (2.5), representan un sistema autónomo, caso contrario el sistema hamiltoniano es no autónomo.

## Algunas Propiedades

En las siguientes subsecciones se presentan algunas propiedades de los sistemas hamiltonianos relevantes para describir la transición de un régimen regular a un régimen caótico. El enfoque es descriptivo y los detalles son relegados al Apéndice .1.

### 2.1.2.1. Flujo Hamiltoniano

El flujo en el espacio de fases se puede definir como una transformación (o mapa) del espacio sobre sí mismo. Se representa la transformación a través de un operador  $T_t$  que en el instante  $t$  transforma a un punto  $x_0$  (correspondiente al instante inicial) en otro punto  $x_t$  correspondiente al instante  $t$ ,

$$x \rightarrow x_t = T_t x_0$$

Si la acción del operador  $T_t$  se corresponde con la solución de las ecuaciones de Hamilton, el flujo es hamiltoniano.

Una de las propiedades más importantes de los flujos hamiltonianos es la preservación del volumen del espacio de fases (Teorema de Liouville). Supongamos que en cierto instante inicial  $t = 0$ , una superficie cerrada  $S(0)$  en el espacio de fases delimita un volumen  $\Gamma$  y además el flujo es hamiltoniano, en un instante posterior, la superficie evoluciona en otra superficie cerrada  $S(t)$  que delimita un volumen igual  $\Gamma$ . Esto se muestra esquemáticamente en la Figura (2.1) para el caso de un grado de libertad.

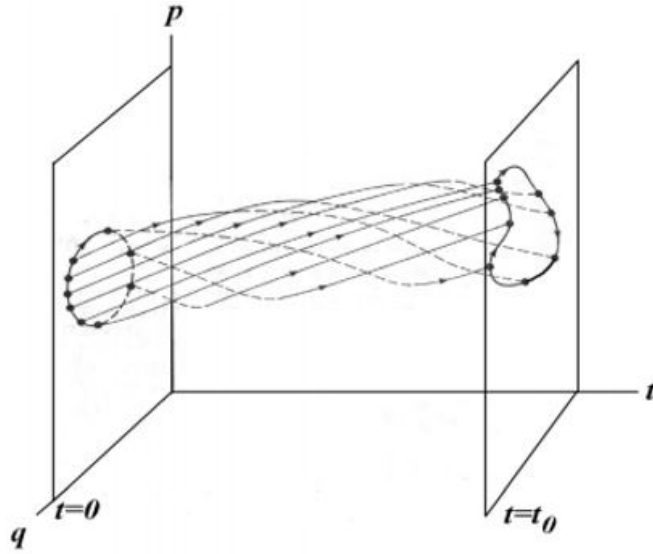


FIGURA 2.1: Evolución temporal de un conjunto de trayectorias hamiltonianas en el caso unidimensional ( $n = 1$ ). De acuerdo al teorema de Liouville, las mismas encierran un área constante en el espacio de fases.

### 2.1.2.2. Constantes de Movimiento

Se denomina constante de movimiento a cualquier función de las coordenadas  $f(\vec{q}, \vec{p})$  que permanece constante en el transcurso del movimiento. La condición para que una función de las coordenadas,  $f(\vec{q}, \vec{p})$ , sea una constante de movimiento se expresa en forma sucinta en términos de los corchetes de Poisson, definidos en la ecuación (A.4). En efecto, usando las ecuaciones de Hamilton (2.4) y (2.5), resulta  $\dot{f} = \{f, H\}$  es una constante de movimiento si su corchetes de Poisson con el hamiltoniano es nulo. En particular si el hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo, la energía  $E = H(\vec{q}, \vec{p})$  es una constante de movimiento y el movimiento en el espacio de fases queda restringido a una hiper-superficie de dimensión  $2n - 1$ . Es usual referirse a este tipo de hamiltoniano como autónomo.

### 2.1.3. Caracterización de Caos

Hay varios métodos para caracterizar caos dentro de ellas tenemos:

### 2.1.3.1. Mapas de Poincaré

Definiremos los Mapas de Poincaré [15] como sigue:

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales autónomos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathfrak{R}^n \quad (2.6)$$

Asumiremos que el campo vectorial  $\vec{F}$  es suficientemente suave de clase  $C^1$ . Usando la notación estándar, sea  $\varphi(\vec{x}, t)$  una solución que satisface  $\varphi(\vec{x}, 0) = \vec{x}$

La curva  $\theta(\vec{x}) = \{\varphi(\vec{x}, t : t \in \mathfrak{R})\}$  es llamada órbita o trayectoria que pasa a través de punto  $\Sigma$ .

Para determinar los mapas de Poincaré las trayectorias en el espacio de fase que define el sistema, se proyectan a una superficie de dimensión menor, en una unidad, la cual se le llama sección de Poincaré; luego debemos evaluar la evolución de las trayectorias de fase, las cuales intersectarán sucesivamente la sección de Poincaré  $\Sigma$  [15]. El conjunto de puntos generados por la intersección de la trayectoria con la sección de Poincaré se denomina mapa de Poincaré. Existen varios métodos para determinar el punto de intersección entre las trayectorias y las secciones de Poincaré, entre los más conocidos tenemos el método de interpolación y el algoritmo de Hénon.

Para sistemas autónomos de orden  $n$  encontramos que las secciones de Poincaré tienen dimensión  $(n - 1)$ , de modo que para el sistema espín-bosón con polarización plana cuyo espacio de fase tiene dimensión cuatro, debemos tener un mapa de Poincaré de dimensión tres, pero debido a que el sistema espín-bosón es conservativo, donde la energía total es una constante de movimiento, entonces reducimos el sistema de dimensión tres, de modo que los mapas de Poincaré del sistema espín-bosón tienen dimensión dos, es decir, sus representaciones gráficas caen en planos de dimensión dos.

Para construir los mapas de Poincaré, se escoge un hiperplano  $\Sigma$  de dimensión  $(n - 1)$ , que divide  $\mathfrak{R}^n$  en dos regiones:

$$\Sigma_+ := \left\{ \vec{x} : \langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{x} \Sigma \rangle > 0 \right\} \quad (2.7)$$

$$\Sigma_- := \left\{ \vec{x} : \langle \vec{n}, \vec{x} - \vec{x} \Sigma \rangle < 0 \right\} \quad (2.8)$$

Donde  $\vec{n} \in \mathfrak{R}^n$  es un vector normal a  $\Sigma$  y  $\vec{x} \Sigma \in \mathfrak{R}^n$  es un punto cualquiera que esta sobre un hiperplano. Si  $\Sigma$  es escogido apropiadamente, entonces la trayectoria en observación repetidamente pasa a través de  $\Sigma$  cruzando de  $\Sigma_+$  a  $\Sigma_-$ , etc.

Dado un hiperplano  $\Sigma$  podemos definir tres mapas de Poincaré.

$P_+ : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .  $P_+$  es un punto donde  $\varphi_t(\vec{x})$  intersecta primero a  $\Sigma$  en una dirección positiva (es decir  $\langle \vec{n}, \vec{f}(\varphi(\vec{x})) \rangle \geq 0$ ) para  $t > 0$ .

$P_- : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .  $P_-$  es un punto donde  $\varphi_t(\vec{x})$  intersecta primero a  $\Sigma$  en una dirección negativa (es decir  $\langle \vec{n}, \vec{f}(\varphi(\vec{x})) \rangle \leq 0$ ) para  $t > 0$ .

$P_{-+}$  : es el primer punto donde  $\varphi_t(\vec{x})$  intersecta a  $\Sigma$  en otra dirección para  $t > 0$ .

### 2.1.3.2. Exponentes de Liapunov

Definiremos los exponentes de Liapunov [15] para sistemas hamiltonianos conservativos autónomos como sigue:

Sean  $\vec{x}_1(t, \vec{x}_{10})$  y  $\vec{x}_2(t, \vec{x}_{20})$  dos soluciones del sistema dinámico autónomo

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}), \quad (2.9)$$

donde los  $\vec{x}_{10}$  y  $\vec{x}_{20}$  denotan condiciones iniciales con sus respectivas soluciones,  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$ , en el tiempo  $t$ . La dinámica es sensible a las condiciones iniciales si estas soluciones tienden a separarse, en el promedio, a una tasa exponencial tempo-

ral cuando las dos condiciones iniciales son infinitamente próximas entre sí. La notación indica que  $\vec{x}$  es un vector de dimensión  $n$  perteneciente al denominado espacio de fase, de modo que tiene  $n$  componentes independientes, es decir,

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.10)$$

al igual que la función  $\vec{F}$ , que representa

$$\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (2.11)$$

De acuerdo a la notación anterior, queda claro que la ecuación (2.9) representa un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

Si  $\vec{F}(\vec{x})$  satisface la condición de Lipchitz

$$\left| \vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y}) \right| \leq K \left| \vec{x} - \vec{y} \right|, \quad (2.12)$$

a través de todo el espacio de fase, entonces, la solución de la ecuación 2.9 no puede separarse más rápidamente que exponencialmente, satisfaciéndose

$$\left| \vec{x}(t) - \vec{y}(t) \right| \leq K \left| \vec{x}(0) - \vec{y}(0) \right| e^{Kt}, \quad (2.13)$$

esta es la razón por qué la separación exponencial es usualmente la peor posible.

Reescribimos ahora la ecuación (2.9) haciendo evidente que se trata de un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

Si integramos el sistema para una condición inicial

$$\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}),$$

y una condición inicial infinitesimalmente próxima, denotada como

$$\vec{x}'_0 = (x'_{01}, x'_{02}, \dots, x'_{0n}),$$

Podemos escribir la separación entre las dos condiciones iniciales anteriores como

$$\vec{x}'_0 - \vec{x}_0 = \delta x_0 = (x'_{01} - x_{01}, x'_{02} - x_{02}, \dots, x'_{0n} - x_{0n}) = (\delta x_{01}, \delta x_{02}, \dots, \delta x_{0n}).$$

Se hace una expansión en series de Taylor multidimensional en torno del punto  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ , para el caso de la ecuación (2.14) y considerar solamente hasta los términos lineales por ser los  $\delta x_{0i}$  muy pequeños, obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\delta x_j}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) \delta x_i, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.15)$$

Este resultado representa un sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias y pueden escribirse matricialmente, para lo cual usamos la notación

$$\delta \vec{w} = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$$

y tendremos

$$\frac{d\delta \vec{w}}{dt} = D \vec{f} \cdot \delta \vec{w}, \quad (2.16)$$

donde  $D \vec{f}$  representa la matriz cuyas componentes son las derivadas  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  de la ecuación (2.16), denominada matriz jacobiana. Esta ecuación es aproximadamente cierta para desviaciones finitas; no obstante, al tomar el límite infinitesimal se identifica la desviación  $\delta \vec{w}$  con un elemento  $\vec{\xi}$  en el espacio tangente  $\vec{x}$  de modo que la ecuación (2.16) se escribe como

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = D\vec{f} \cdot \vec{\xi}, \quad (2.17)$$

conocida como la ecuación variacional del sistema (2.14), donde la matriz jacobiana es

$$D\vec{f} = \vec{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Si bien la ecuación variacional es lineal, los coeficientes o equivalentemente, los elementos de la matriz jacobiana, son funciones de las soluciones  $x_i(t)$  de (2.14), dependiendo de las condiciones iniciales  $\vec{x}_0$ , lo cual, en general, no es posible encontrar como una solución analítica de  $\vec{\xi}(t)$ . En todo caso, la dinámica es considerada caótica solo si para muchas condiciones iniciales la magnitud de  $\vec{\xi}$  crece exponencialmente.

Hay que notar también que la ecuación variacional representa la linealización del sistema no lineal (2.14) en el punto en que se evalúan los elementos de la matriz jacobiana y los autovalores de ésta nos dará la información cualitativa del comportamiento local del sistema.

#### a) **Exponente Principal de Lyapunov**

Debido a que raramente se puede obtener la solución analítica de la ecuación variacional, usualmente el exponente de Lyapunov se determina de manera numérica.

En este contexto, uno de los problemas numéricos que se enfrenta es justamente el crecimiento exponencial de la solución de la ecuación variacional, tornándose en un serio problema computacional en sistemas caóticos. Es-

ta dificultad se puede superar haciendo uso de la linealidad de la ecuación variacional.

b) **Exponentes Múltiples de Lyapunov**

Cada componente del vector del espacio de fase tiene su exponente de Lyapunov. Puesto que  $\vec{\xi}$  es un vector tangente al flujo de  $\vec{x}(t)$ , para usar la ecuación variacional elegimos un vector unitario relacionado a una de las variables del espacio de fase, de modo que si el sistema dinámico tiene dimensión  $n$ , se tendrá un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow(1) & \rightarrow(2) & \rightarrow(3) & \rightarrow(N) \\ \xi & , & \xi & , \dots, & \xi \end{matrix} \right\},$$

en el espacio tangente, por conveniencia ortogonales, cada uno satisfaciendo la ecuación variacional

$$\frac{d}{dt} \begin{matrix} \rightarrow(i) \\ \xi \end{matrix} = (Df) \begin{matrix} \rightarrow \\ \xi \end{matrix}, \quad (2.19)$$

se forma la matriz  $U$  con columnas dadas por las componentes de  $\begin{matrix} \rightarrow(1) \\ \xi \end{matrix}$ , implicando

$$\frac{dU}{dt} = (Df) U, \quad (2.20)$$

para resolver el sistema se escogen condiciones iniciales

$$\left\{ \begin{matrix} \rightarrow(1) & \rightarrow(2) & \rightarrow(3) & \rightarrow(N) \\ \xi_0 & , & \xi_0 & , \dots, & \xi_0 \end{matrix} \right\},$$

tal que ellos sean vectores unitarios ortogonales entre sí. Ellos forman una bola unitaria en el espacio de  $n$  dimensiones y se resuelve el sistema de ecuaciones variacionales conjuntamente con el sistema dinámico

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad (2.21)$$

de esta manera, se encuentra la evolución de una bola que en el transcurso del tiempo, se va convirtiendo en una elipsoide de  $n$  dimensiones, donde el  $i$ -ésimo eje principal está dada por

$$r_i(t) = e^{\lambda_i t}, \quad (2.22)$$

siendo

$$\lambda_i = \frac{\log(r_i(t))}{t}, \quad (2.23)$$

el  $i$ -ésimo exponente de Lyapunov. Ahora hay que determinar los nuevos ejes de la bola unitaria inicial, pero debido a la evolución diferente de los ejes éstos ya no son ortogonales, la bola se ha hecho una elipsoide. Para reconstruir la bola se ha visto por conveniente ortonormalizar después de cierto tiempo  $t$ , para lo cual usualmente se utiliza el procedimiento de ortonormalización de Gram-Schmidt, dado como

$$\xi_j^{(k)} = \frac{\xi_j(t_f) - \sum_{i=1}^{j-1} [\xi_j(t_f) \cdot \xi_i^{(k)}] \xi_i^{(k)}}{\left\| \xi_j(t_f) - \sum_{i=1}^{j-1} [\xi_j(t_f) \cdot \xi_i^{(k)}] \xi_i^{(k)} \right\|} \quad (2.24)$$

Se integran nuevamente a lo largo de un nuevo periodo de tiempo  $T$ , utilizando  $x(t = T)$  como el vector de las condiciones iniciales del sistema no lineal y los encontrados por la ortonormalización para el sistema lineal. Nuevamente se ortonormaliza repitiendo  $r$ , veces las integraciones y ortonormalizaciones. Los exponentes de Lyapunov están dados como

$$\lambda_i = \frac{1}{rT} \sum_k^r \log \left| \xi_j^{(k)} \right|. \quad (2.25)$$

El método que se utiliza en el presente Tesis es el índice de Alineamiento más Pequeño(SALI) que es un indicador de caos muy útil y eficiente que puede distinguir rápidamente y con certeza entre movimiento caótico y regular, en sistemas hamiltonianos. Esto esta basado en el comportamiento diferente del SALI en dos casos, fluctúa alrededor de valores diferente de cero para órbitas regulares y converge exponencialmente a cero para órbitas caóticas. Realizamos una definición mas formal en el siguiente CAPÍTULO acerca de éste método.

## Capítulo 3

# TEORIA DEL MÉTODO SMALLER ALIGNMENT INDEX (SALI)

### 3.1. Definición del Índice de Alineamiento más Pequeño (SALI)

Consideremos el espacio de fase  $2n$ -dimensional de un sistema dinámico hamiltoniano autónomo arbitrario [18]

$$H \equiv H(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) = E \quad (3.1)$$

donde  $q_i(t)$  son las coordenadas canónicas,  $p_i(t), i = 1, \dots, n$  son los correspondientes momentos conjugados y  $E$  es la energía total del sistema. La evolución en el tiempo de una órbita del sistema dinámico asociado con la condición inicial  $\vec{x}(t_0) = (q_1(t_0), \dots, q_n(t_0), p_1(t_0), \dots, p_n(t_0))$  en tiempo inicial  $t_0$ , es definida como la solución del sistema de  $2n$  ecuaciones diferenciales de primer orden dada por las ecuaciones (2.4) y (2.5). Las cuales son conocidas como las ecuaciones de Hamilton y la solución es la que se refiere como la órbita que pasa

por la condición inicial  $\vec{x}(t_0)$ . Con el fin de definir el Índice de Alineamiento mas Pequeño (SALI) necesitamos introducir la noción de Ecuaciones Variacionales. Estas ecuaciones son las ecuaciones linealizadas correspondientes a las ecuaciones diferenciales ordinarias (3.2), alrededor de una órbita de referencia  $\vec{x}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ , y es definida por la relación

$$\frac{d\vec{\xi}_i(t)}{dt} = \vec{J} \cdot \vec{\xi}_i(t), \quad i = 1, \dots, 2n \quad (3.2)$$

Donde  $\vec{J}$  es el jacobiano del sistema hamiltoniano de raíces del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (3.2). Los vectores  $\vec{\xi}_i(t) = (\xi_{1,i}(t), \dots, \xi_{i,2n}(t))$ ,  $i = 1, \dots, 2n$  son conocidos como vectores de desviación de la órbita. Entonces elegimos dos vectores de desviación  $\vec{\xi}_1(t)$  y  $\vec{\xi}_2(t)$  tales que sean linealmente independientes y definimos los dos índices de alineamiento (ALI),  $\forall t \geq t_0$  como:

$$ALI_-(t) = \left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} - \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \right\|, \quad ALI_+(t) = \left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} + \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \right\| \quad (3.3)$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma euclidiana en  $\mathfrak{R}^{2n}$

El índice de Alineamiento mas Pequeño (SALI) es ahora definido como:

$$SALI(t) = \min \{ALI_-(t), ALI_+(t)\}; \forall t \geq t_0 \quad (3.4)$$

Donde  $t_0$  es el tiempo inicial de la evolución [23–25]. Este índice estudia el comportamiento de trayectorias cercanas de vectores asociados que puede ser calculados a partir de la resolución de las ecuaciones de Hamilton del sistema. Para cada trayectoria como se muestra en la figura 3.1 podemos calcular los vectores de desviación con dos trayectorias cercanas y sus correspondientes vectores unitarios.

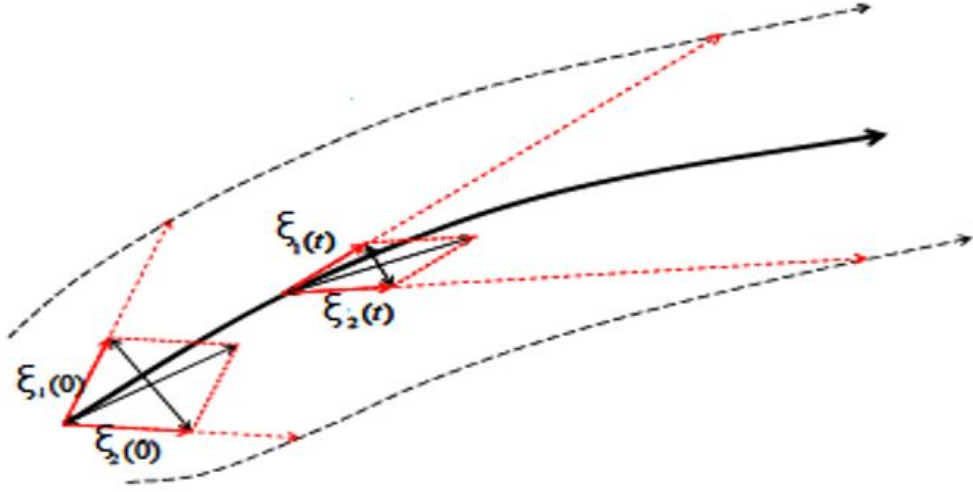


FIGURA 3.1: Evolución temporal del SALI

De la definición de los dos índices de alineamiento y la cantidad SALI, se sigue que podemos normalizar la longitud de los vectores de desviación en cada paso de tiempo de integración sin que ello afecte su Ángulo interior.

Cuando en la ecuación (3.4) los vectores de desviación,  $\vec{\xi}_1(t)$  y  $\vec{\xi}_2(t)$ , tienden a ser colineales y con la misma dirección debido a que su Ángulo interno tiende a cero y así  $ALI_+(t) \rightarrow 2$  mientras que cuando  $ALI_+(t) \rightarrow 0$  los dos vectores de desviación tienden a ser colineales y con el sentido opuesto debido a que su ángulo tiende a  $\pi$  y así  $ALI_-(t) \rightarrow 2$ .

Si la órbita bajo consideración  $\vec{x}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$  es caótico entonces en (3.5) tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} SALI(t) = \min \{0, 2\} = 0 \quad (3.5)$$

Debido a que en este caso ambos vectores de desviación  $\vec{\xi}_1(t)$  y  $\vec{\xi}_2(t)$  tienden a coincidir con el colector más inestable de las ecuaciones variacionales cuando  $t \rightarrow \infty$  [26].

En el caso cuando la órbita de referencia es regular entonces el SALI es siempre visto oscilando alrededor de un número positivo  $\alpha \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$ . Para hacer una explicación más detallada note primero que ambos vectores de desviación

eventualmente llegan a ser tangente al toro en la cual la órbita es confinada.

Dado que, por lo general tienen componentes a lo largo de la evolución en el toro direccionados por los  $n$  campos vectoriales independientes (el hamiltoniano y el movimiento de los  $n - 1$  cuasi-integrales), su Ángulo nunca llega a ser cero y oscila sobre algunas constantes arbitrarias [27].

## 3.2. Definición del Índice de Alineamiento Generalizado (GALI)

Este método es una generalización del SALI y para entender su significado partamos por considerar la definición de SALI, de acuerdo a la ecuación (3.3) y (3.4). Si las normas se escriben como un producto dado por

$$\left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} - \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \right\| \cdot \left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} + \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \right\|, \quad (3.6)$$

se puede usar para caracterizar el sistema de manera equivalente al SALI, ya que cuando el sistema evoluciona, el producto tiende a cero si hay caos o un valor mayor que cero cuando la dinámica es no caótica. Ahora como el módulo del producto exterior de dos vectores está dado como

$$\vec{\xi}_1(t) \wedge \vec{\xi}_2(t) = \frac{\left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} - \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \right\| \cdot \left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} + \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \right\|}{2}, \quad (3.7)$$

que representa el “Área” del paralelogramo definido por los dos vectores, se puede usar este resultado como alternativa de definición del SALI y generalizarlo para más de dos vectores usando el módulo del producto exterior de varios vectores. Así, si consideramos dos vectores de desviación unitarios  $\vec{\xi}_1(t)$  y  $\vec{\xi}_2(t)$  al reemplazar en la ecuación (3.7) se obtendrán valores de acuerdo a que si el sistema es caótico o no. Geométricamente los vectores se convertirán en linealmente depen-

dientes y caerán en la misma dirección, el cual es equivalente a la desaparición del “Área” de los dos vectores.

Se generaliza la idea Ch. Skokos, et al. [28] y se sigue ahora la evolución de  $k$  vectores de desviación  $\vec{\xi}_1(t), \vec{\xi}_2(t), \dots, \vec{\xi}_k(t)$ , con  $2 \leq k \leq 2n$ , y definimos el Índice de Alineamiento Generalizado del ingles (Generalized Alignment Index) de orden  $k$ :

$$GALI_k(t) = \left\| \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} \wedge \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|} \wedge \dots \wedge \frac{\vec{\xi}_k(t)}{\|\vec{\xi}_k(t)\|} \right\|$$

# Capítulo 4

## MÉTODOS Y RESULTADOS

### 4.1. Algoritmo para determinar los índices SALI

La abreviatura SALI deriva del inglés (Smaller Alignment Index) es un método para caracterizar caos que trabaja en sistemas hamiltonianos conservativos de dos o más grados de libertad. En la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica se utilizan las coordenadas generalizadas  $\vec{q}(t) = (q_1(t), \dots, q_n(t))$  y sus respectivos momentos generalizados  $\vec{p}(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$ , que obedecen a las ecuaciones canónicas de Hamilton dadas en (2.4) y (2.5)

donde  $H = H(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t)$  es el hamiltoniano del sistema y en el caso de sistemas conservativos es una constante  $H = H(\vec{q}(t), \vec{p}(t), t) = E = \text{constante}$ . Este es el tipo de sistemas donde es aplicable el método SALI.

Para utilizar el método SALI se hace lo siguiente:

1. Se elige un intervalo de tiempo de integración  $[t_0, t_{nf}]$  para evaluar el sistema no lineal (2.2) dado por las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.4) y (4.5), escoger también un intervalo de tiempo  $[t_0, t_f]$  para evaluar el sistema linealizado dado por la ecuación 3.2.
2. Acumular el último valor de la solución del sistema no lineal  $\vec{x}(t_{nf})$ , que

servirá como punto de operación de la linealización.

- Integrar el sistema linealizado y escoger como condición inicial una base ortogonal, que para el caso del sistema espín-bosón con polarización plana es inicialmente dado como  $\xi_{1,1}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\xi_{1,2}^{(0)} = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\xi_{1,3}^{(0)} = (0, 0, 1, 0)$  y  $\xi_{1,4}^{(0)} = (0, 0, 0, 1)$

- Normalizamos los dos vectores unitarios del sistema linealizado (3.2) es decir

$$\hat{\xi}_1(t) = \frac{\vec{\xi}_1(t)}{\|\vec{\xi}_1(t)\|} \text{ y } \hat{\xi}_2(t) = \frac{\vec{\xi}_2(t)}{\|\vec{\xi}_2(t)\|}$$

- Calculamos y obtenemos el valor del SALI

$$SALI(t) = \min \left\{ \left\| \vec{\xi}_1(t) + \vec{\xi}_2(t) \right\|, \left\| \vec{\xi}_1(t) - \vec{\xi}_2(t) \right\| \right\}$$

### Ejemplo del SALI

De acuerdo a ciertas condiciones iniciales, valores de parámetros y valores de energía. El SALI tiene diferente comportamiento tal como se muestra en la figura 4.1

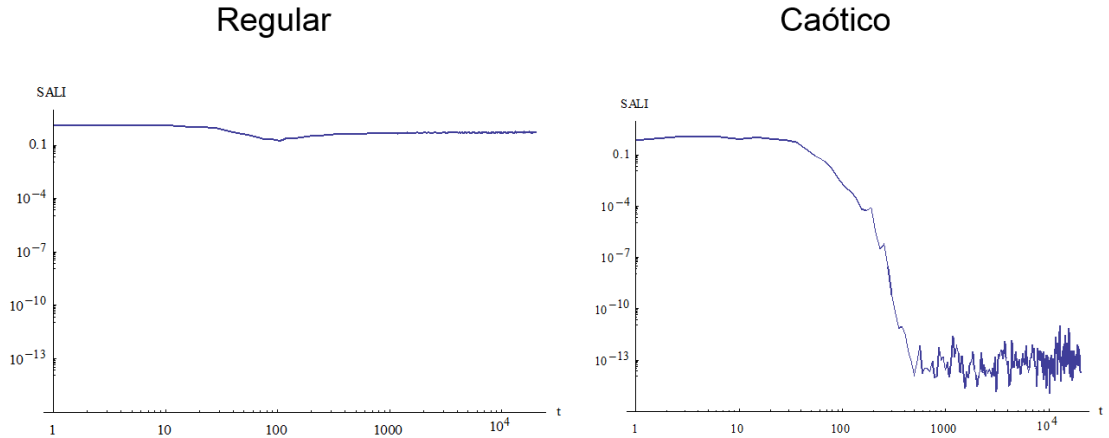


FIGURA 4.1: Comportamiento del SALI.

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, valores de energía, parámetros físicos y los resultados obtenidos con los exponentes de Lyapunov para el sistema

espín-bosón con polarización plana que se encuentra en la tesis de Berrocal [15], realizamos los cálculos mediante el SALI verificando que se obtiene los mismos resultados. También los resultados obtenidos mediante los mapas de Poincaré en [29] verificando así la efectividad del SALI.

## 4.2. Método Numérico y Lenguaje de Programación

Se calcula los SALI utilizando el Lenguaje de programación Mathematica 9.0 instalado en el sistema operativo Windows 8. El lenguaje de programación Mathematica 9.0 está diseñado para realizar cálculos científicos, para el cual para nuestros cálculos se ha utilizado una computadora cuyo procesador es Intel Core i7 con 2.40 Ghz de velocidad de procesador y con 8 Gb de memoria RAM.

Las gráficas presentadas fueron elaborados por el comando ParametricPlot3D.

En cuanto a las secciones de superficie de Poincaré (SSP) se realizó utilizando la misma aplicación.

De acuerdo al hamiltoniano clásico (4.1) obtenido por Solano [30] del sistema espín-bosón

$$H_{cl} = \frac{\varepsilon}{2} (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2) - J\varepsilon + \frac{\sqrt{4J - (p_1^2 + q_1^2)}}{\sqrt{4J}} (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2) \quad (4.1)$$

donde los  $q_1$  y  $p_1$  son las coordenadas generalizadas y el momento generalizado clásico asociado a los átomos del sistema espín-bosón,  $q_2$  y  $p_2$  la coordenada generalizada y el momento generalizado asociado a la radiación electromagnética con polarización plana,  $J$  el espín total del sistema,  $\varepsilon$  es la frecuencia de la radiación equivalente a la frecuencia cuántica de transición entre los niveles de energía y  $G_+$  y  $G_-$  parámetros de los cuales depende el comportamiento regular o caótico

del sistema, dados en términos de  $G$  y  $G^\dagger$  como,

$$G_+ = G + G^\dagger$$

$$G_- = G - G^\dagger \quad (4.2)$$

donde ecuación (4.1) indica que el sistema espín-bosón con polarización plana, en su contraparte clásico es un sistema conservativo, que tiene a la energía total del sistema como constante de movimiento.

Las ecuaciones diferenciales de movimiento del sistema espín-bosón con polarización plana se obtienen a partir de las ecuaciones de Hamilton y se escriben como,

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = -\varepsilon p_1 - \frac{G_+ p_2 \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}} + \frac{p_1 (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2)}{\sqrt{4J} \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (4.3)$$

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = -\varepsilon p_2 - \frac{G_+ p_1 \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}} \quad (4.4)$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\varepsilon q_1 + \frac{G_- q_2 \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}} - \frac{q_1 (G_+ p_1 p_2 + G_- q_1 q_2)}{\sqrt{4J} \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (4.5)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\varepsilon q_2 + \frac{G_- q_1 \sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}}{\sqrt{4J}} \quad (4.6)$$

Las ecuaciones (4.3), (4.4), (4.5) y (4.6), muestran que el sistema espín-bosón es conservativo y que sus ecuaciones diferenciales de movimiento son autónomas. La matriz jacobinana (2.23) se expresa en términos del campo vectorial  $\vec{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ , donde

$$\begin{aligned}
f_1(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{dq_1}{dt}, \\
f_2(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{dq_2}{dt}, \\
f_3(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{dp_1}{dt}, \\
f_4(q_1, q_2, p_1, p_2) &= \frac{dp_2}{dt}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

De modo que los elementos de la matriz jacobiana 2.23 son:

$$\frac{df_1}{dq_1} = \frac{G_+q_1p_2 + G_-q_2p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} + \frac{p_1q_1(G_+p_1p_2 + G_-q_1q_2)}{\sqrt{4J}(4J - (q_1^2 + p_1^2))^{3/2}} \tag{4.8}$$

$$\frac{df_1}{dq_2} = \frac{G_-q_1p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \tag{4.9}$$

$$\frac{df_1}{dp_1} = -\varepsilon + \frac{G_+p_1p_2 + G_-q_1q_2}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} + \frac{p_1^2(G_+p_1p_2 + G_-q_1q_2)}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \tag{4.10}$$

$$\frac{df_1}{dp_2} = \frac{G_+(2p_1^2 + q_1^2 - 4JG_+)}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \tag{4.11}$$

$$\frac{df_2}{dq_1} = \frac{G_+q_1p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \tag{4.12}$$

$$\frac{df_2}{dq_2} = 0 \tag{4.13}$$

$$\frac{df_2}{dp_1} = \frac{G_+(2p_1^2 + q_1^2 - 4JG_+)}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \tag{4.14}$$

$$\frac{df_2}{dp_2} = -\varepsilon \tag{4.15}$$

$$\frac{df_3}{dq_1} = \varepsilon - \frac{3G_-q_1q_2 + G_+p_1p_2}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \tag{4.16}$$

$$\frac{df_3}{dq_2} = \frac{G_-(4J - (q_1^2 + p_1^2))}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (4.17)$$

$$\frac{df_3}{dp_1} = -\frac{G_+q_1p_2 + G_-q_2p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (4J - (q_1^2 + p_1^2))}} \quad (4.18)$$

$$\frac{df_3}{dp_2} = \frac{G_+q_1p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (4.19)$$

$$\frac{df_4}{dq_1} = \frac{G_-(4J - p_1^2 - 2q_1^2)}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (4.20)$$

$$\frac{df_4}{dq_2} = \varepsilon \quad (4.21)$$

$$\frac{df_4}{dp_1} = \frac{G_-q_1p_1}{\sqrt{4J}\sqrt{4J - (q_1^2 + p_1^2)}} \quad (4.22)$$

$$\frac{df_4}{dp_2} = 0 \quad (4.23)$$

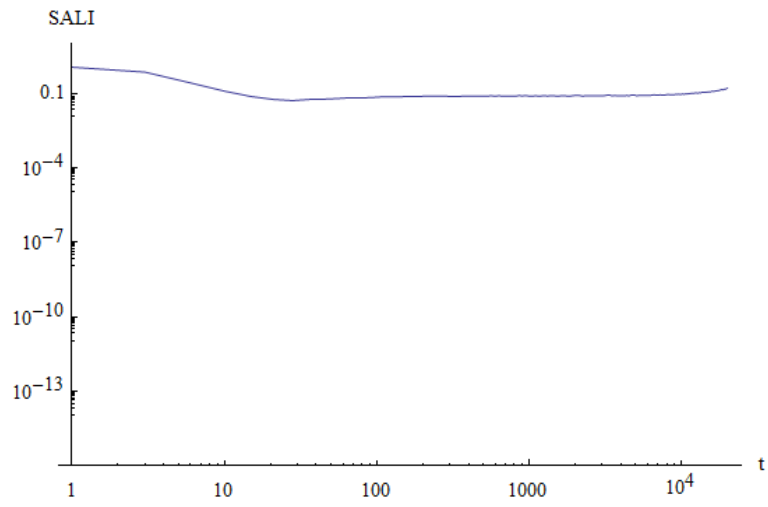
## 4.3. Resultados

### 4.3.1. Resultados de las secciones de Poincaré y SALI

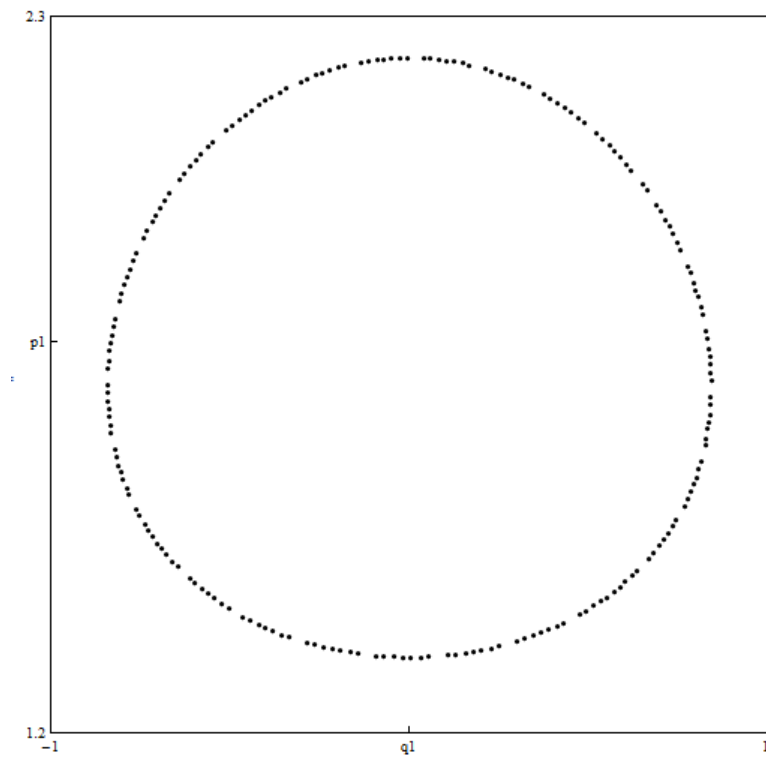
En las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 en sus partes (b) se muestran los mapas de Poincaré en el plano  $(q_1, p_1)$ , siendo las energías 6.2, 15.0, 25.0, y 6.2, con valores de los parámetros  $J=4.5$ ,  $G_+=1.5$ ,  $G_-=1.5$ ;  $J=4.5$ ,  $G_+=1.5$ ,  $G_-=1.5$ ;  $J=4.5$ ,  $G_+=2.0$ ,  $G_-=2.0$ ;  $J=4.5$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$  respectivamente. En estas figuras bajo las condiciones iniciales impuestas presentan comportamientos diferentes.

Para la determinación del SALI que se presenta en las partes (a) de las figuras 4.2, 4.3, 4.4 y 4.5 se han utilizado las mismas condiciones iniciales, valores de  $J$ ,  $G_+$ ,  $G_-$  y energía. Hay que observar que en las figuras 4.2, 4.3, 4.4 el SALI se

mantiene diferente de cero (en (a)), mientras que en la figura 4.5 se va a cero indicado la existencia de caos.

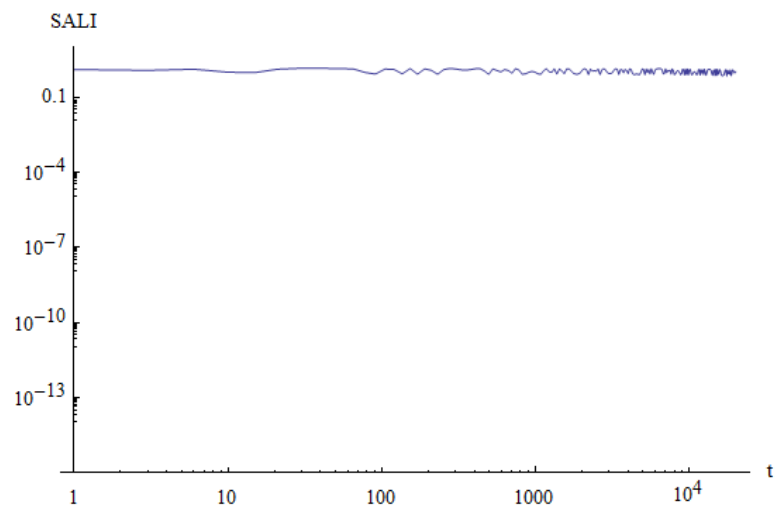


(a)

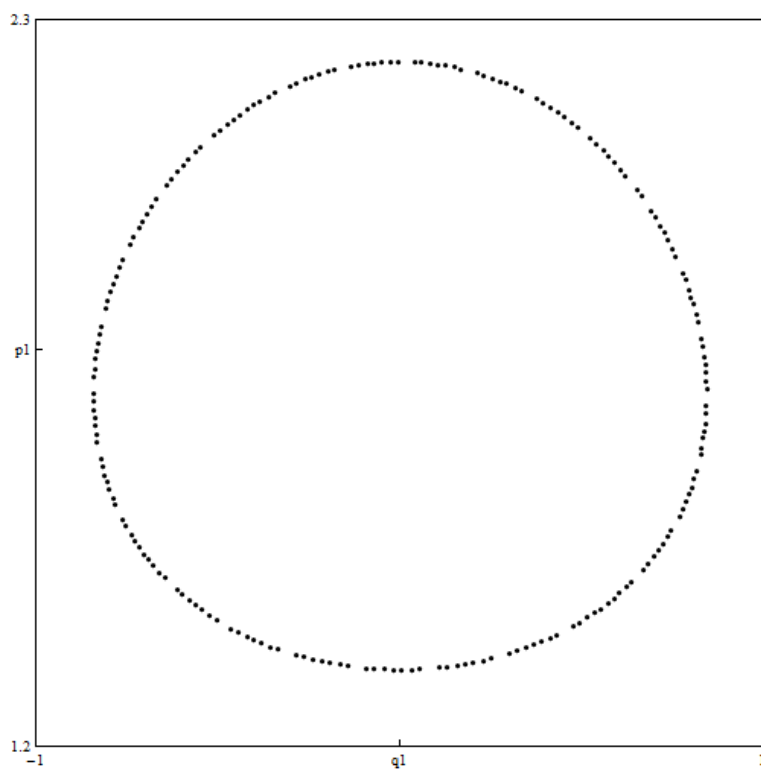


(b)

FIGURA 4.2: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=1.5$ ,  $G_-=1.5$ , y condiciones iniciales  $q_1=1.581139$ ,  $q_2=1.118034$ ,  $p_1 = 1.581139$ ,  $p_2=1.81922$

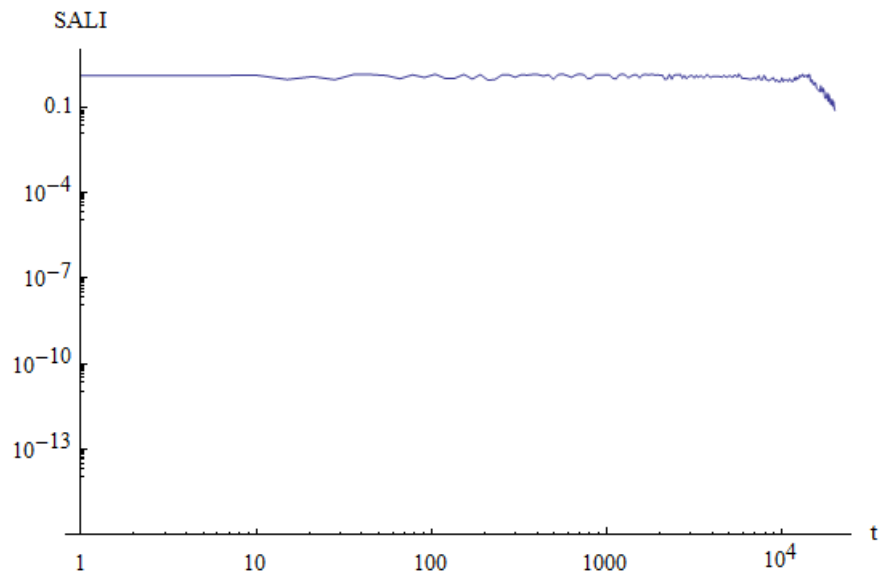


(a)

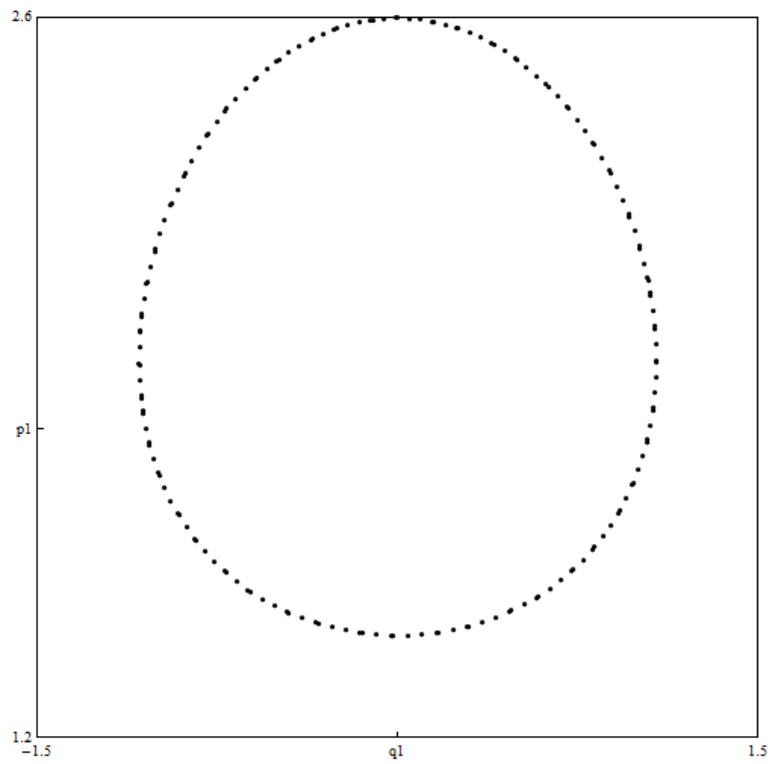


(b)

FIGURA 4.3: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=15.0$ ,  $G_+=1.5$ ,  $G_-=1.5$ , y condiciones iniciales  $q_1=1.581139$ ,  $q_2=1.118034$ ,  $p_1=1.581139$ ,  $p_2=3.66823$

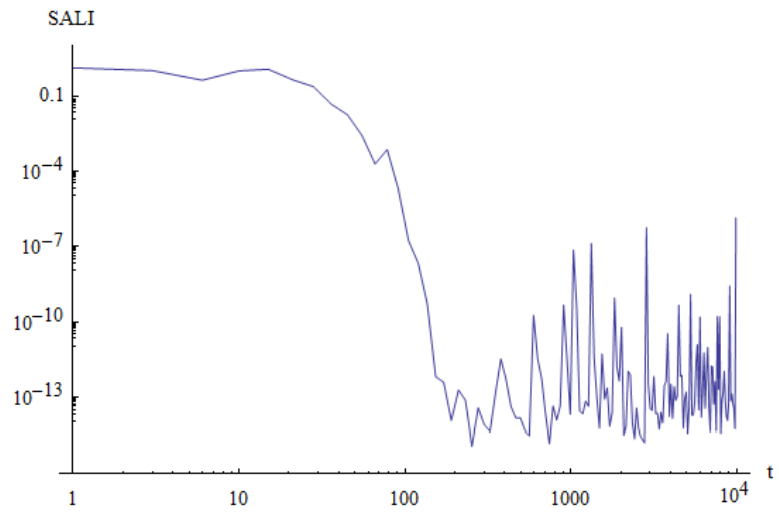


(a)

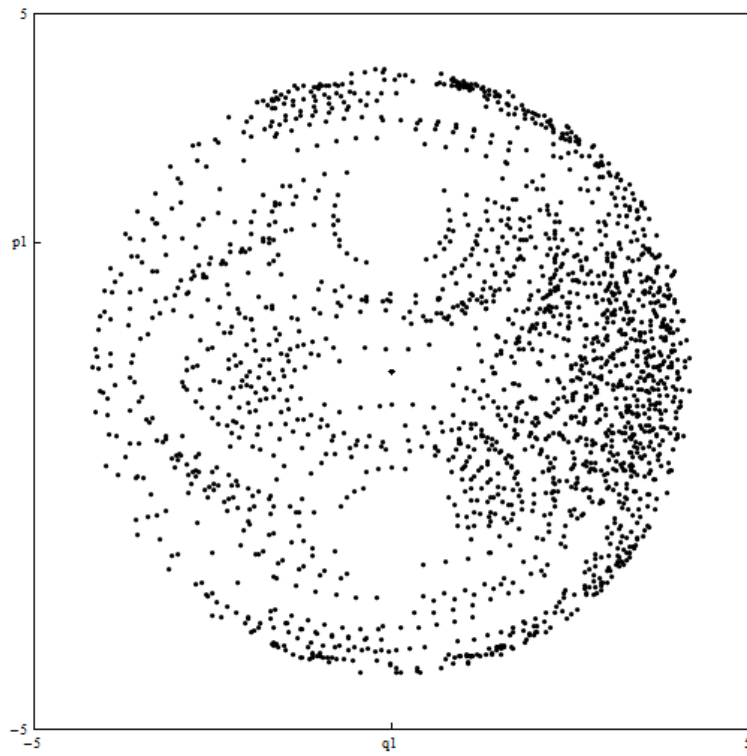


(b)

FIGURA 4.4: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=25.0$ ,  $G_+=2.0$ ,  $G_-=2.0$ , y condiciones iniciales  $q_1=1.837117$ ,  $q_2=1.299038$ ,  $p_1=1.837171$ ,  $p_2=4.26836$



(a)



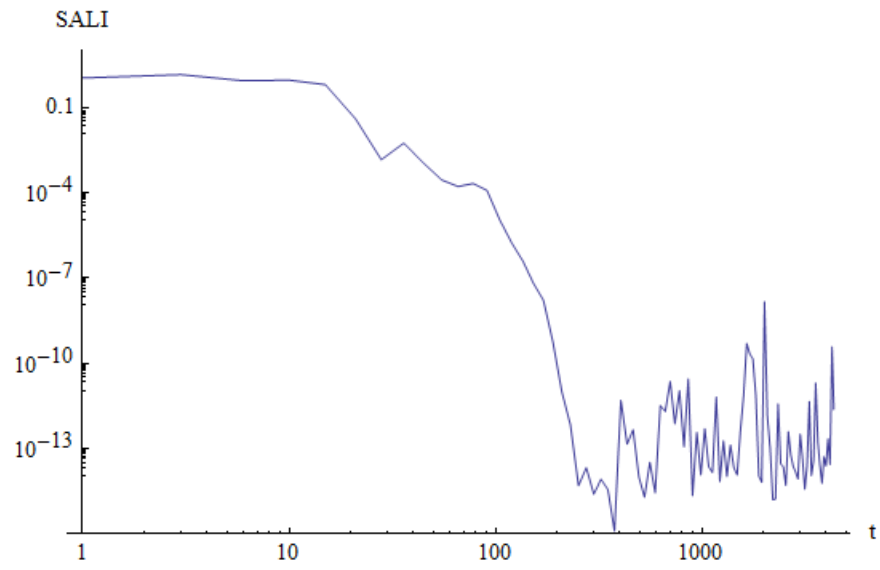
(b)

FIGURA 4.5: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0$ ,  $q_2=-4.51664$ ,  $p_1=0$ ,  $p_2=0.999982$

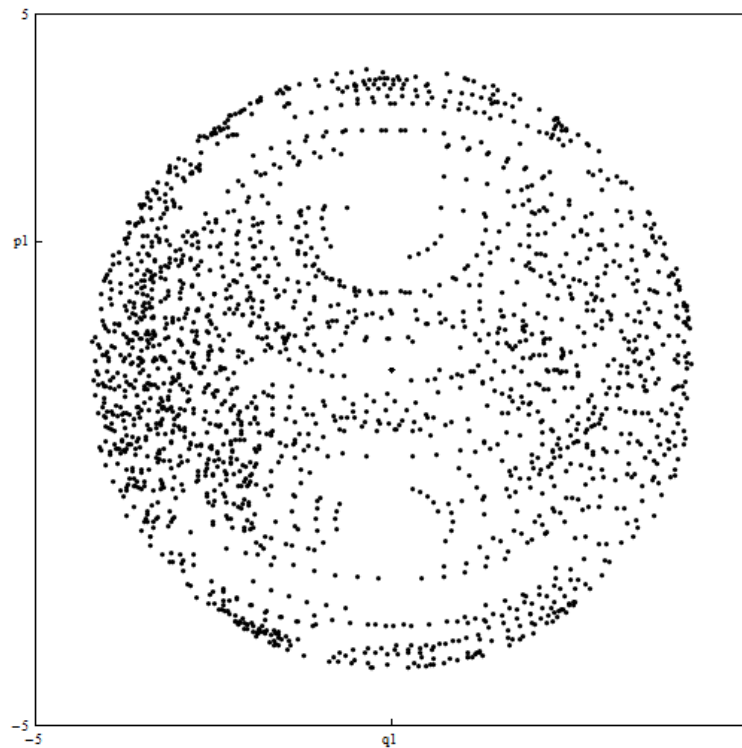
### 4.3.2. Resultados SALI con polarización plana, dependencia con las condiciones iniciales

Para mostrar la dependencia del comportamiento del SALI con las condiciones iniciales del sistema, presentamos cuatro resultados mostrados en las figuras 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9, las cuales en sus partes (a) muestran los SALI, cada uno para distintas condiciones iniciales, considerando que el sistema espín-bosón es constituido por nueve átomos, energía total  $E=6.2$ , parámetros  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$  y espín total  $J=4.5$ , las partes (b) de las figuras muestran la verificación de los resultados de las partes (a) por medio de los mapas de Poincaré con las condiciones iniciales impuestas para determinar los SALI.

Los SALI para un mismo valor de energía dependen de las condiciones impuestas, de acuerdo al cual las figuras 4.6, 4.7 y 4.9 muestran que para las condiciones iniciales dadas el sistema presenta comportamiento caótico y en la figura 4.8 observamos que el sistema presenta comportamiento regular para una condición inicial particular para el mismo valor de energía.

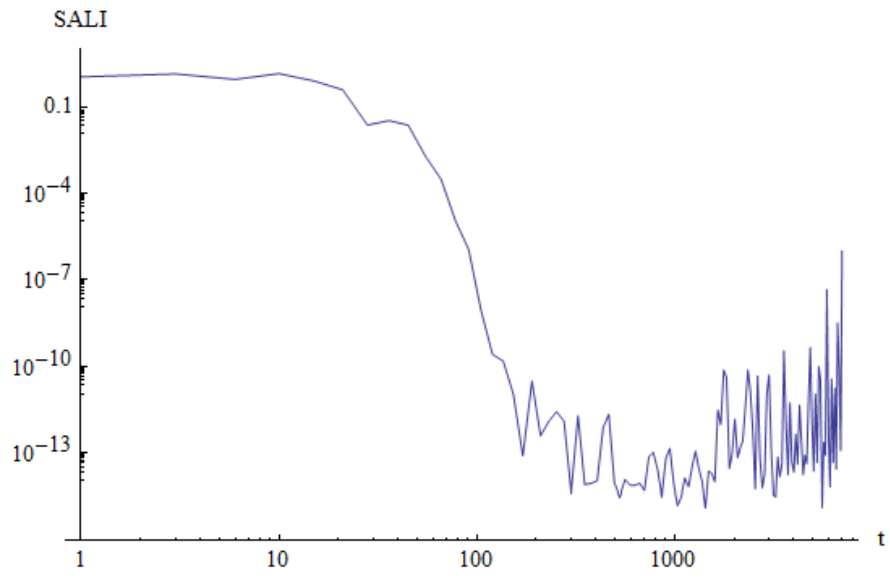


(a)

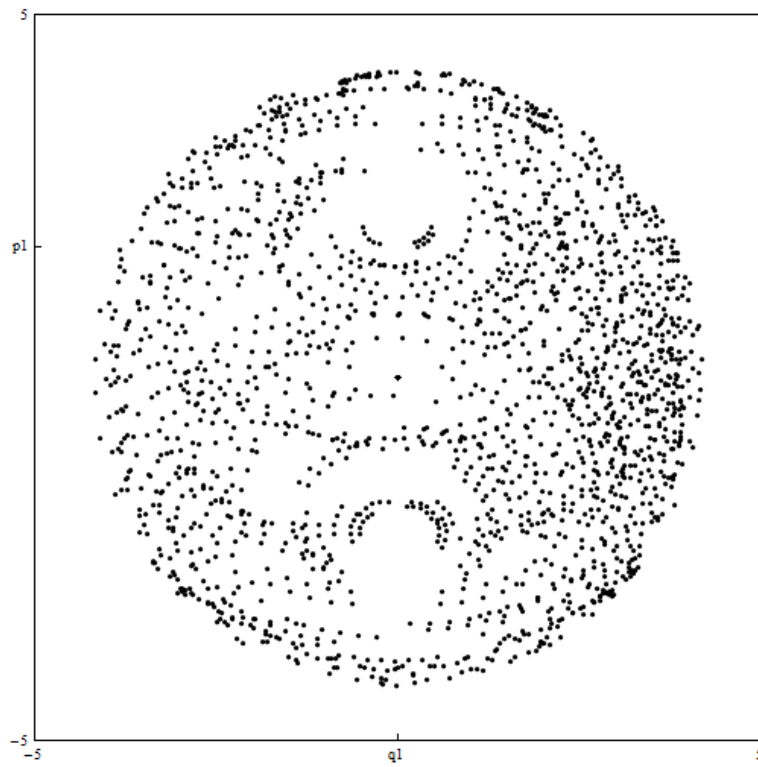


(b)

FIGURA 4.6: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.3$ ,  $q_2=0.9$ ,  $p_1=0.4$ ,  $p_2=4.22267$

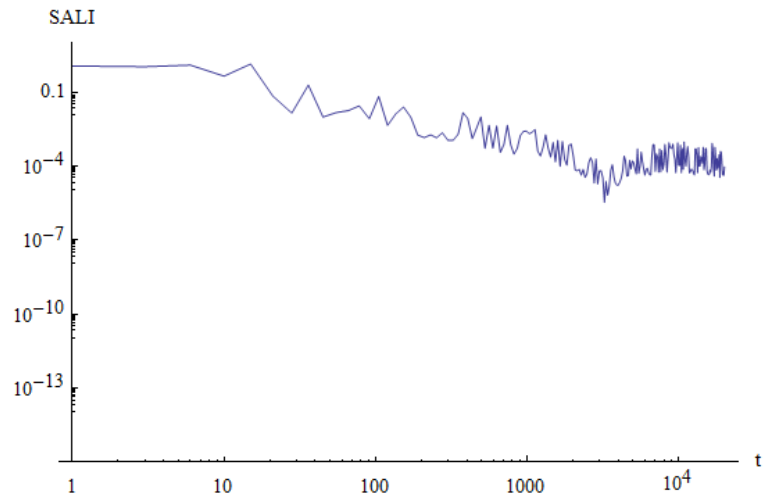


(a)

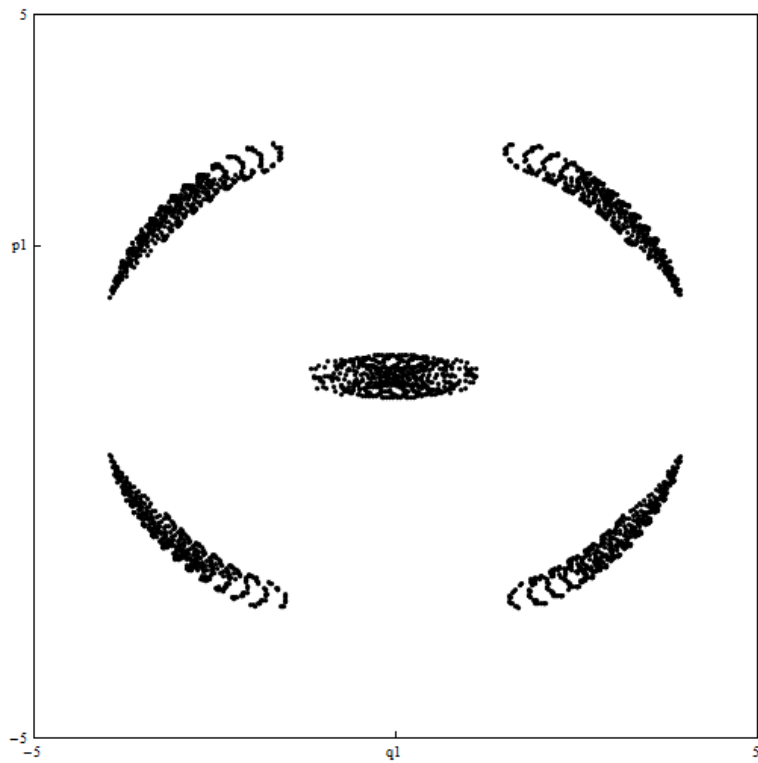


(b)

FIGURA 4.7: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.4$ ,  $q_2=0.9$ ,  $p_1=0.5$ ,  $p_2=4.13577$

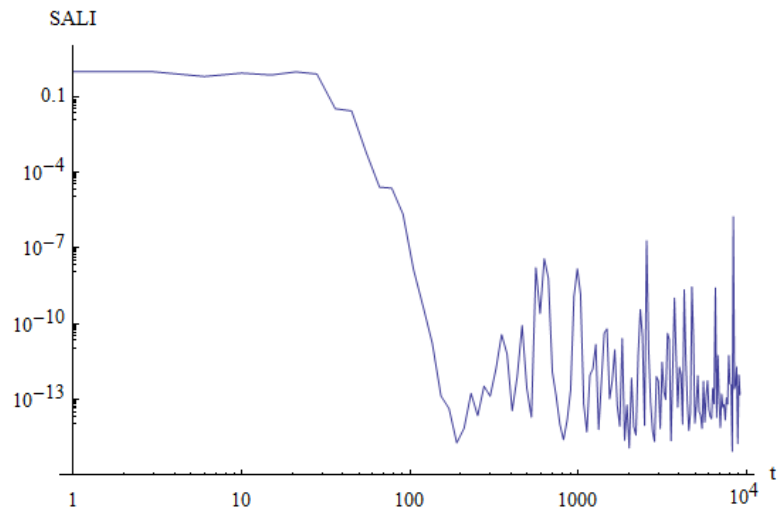


(a)

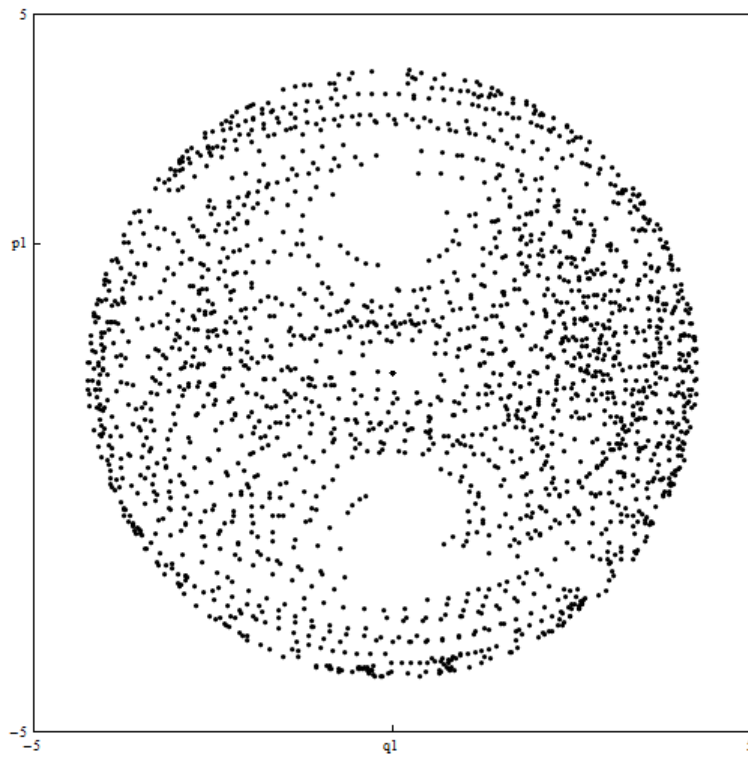


(b)

FIGURA 4.8: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.15$ ,  $q_2=0.2$ ,  $p_1=0.3$ ,  $p_2=4.40296$



(a)



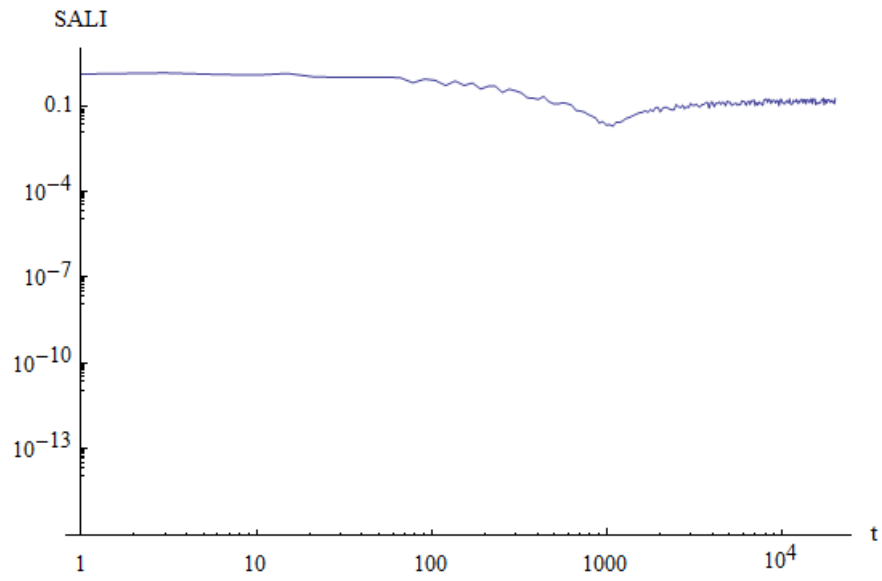
(b)

FIGURA 4.9: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=1.7$ ,  $q_2=0.4$ ,  $p_1=2$ ,  $p_2=2.80386$

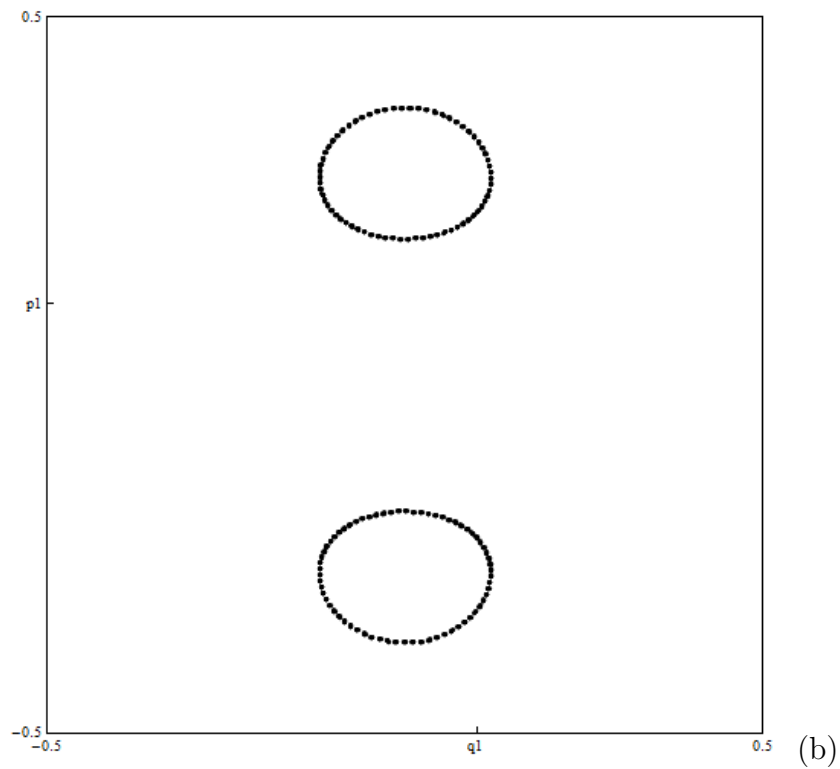
### 4.3.3. Resultados SALI con polarización plana, dependencia con la energía

En esta sección presentamos cuatro resultados para los SALI conjuntamente con sus respectivos mapas de Poincaré con la finalidad de mostrar la dependencia del comportamiento de los SALI con la energía total del sistema, considerando los parámetros  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$  y el sistema espín-bosón es constituido por nueve átomos de modo que  $J=4.5$ . En las figuras 4.10, 4.11, 4.12, y 4.13, en sus partes (a) se presentan gráficamente para las energías dadas, y en sus partes (b) presentan su correspondiente mapa de Poincaré.

La figura 4.10, muestra que el sistema presenta comportamiento regular para la energía  $E=-4.0$  y las condiciones iniciales impuestas, por otro lado las figuras 4.11, 4.12, y 4.13, muestran que el sistema espín-bosón presenta comportamiento caótico para energías  $E=8.5$ ,  $15.0$  y  $25.0$  respectivamente.

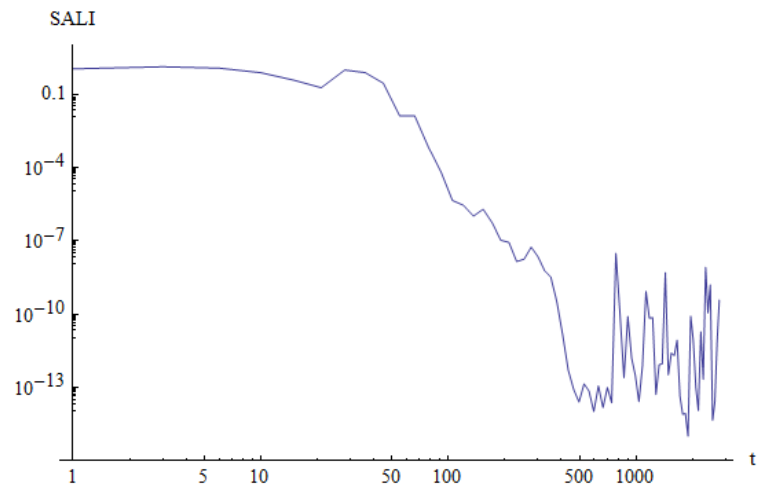


(a)

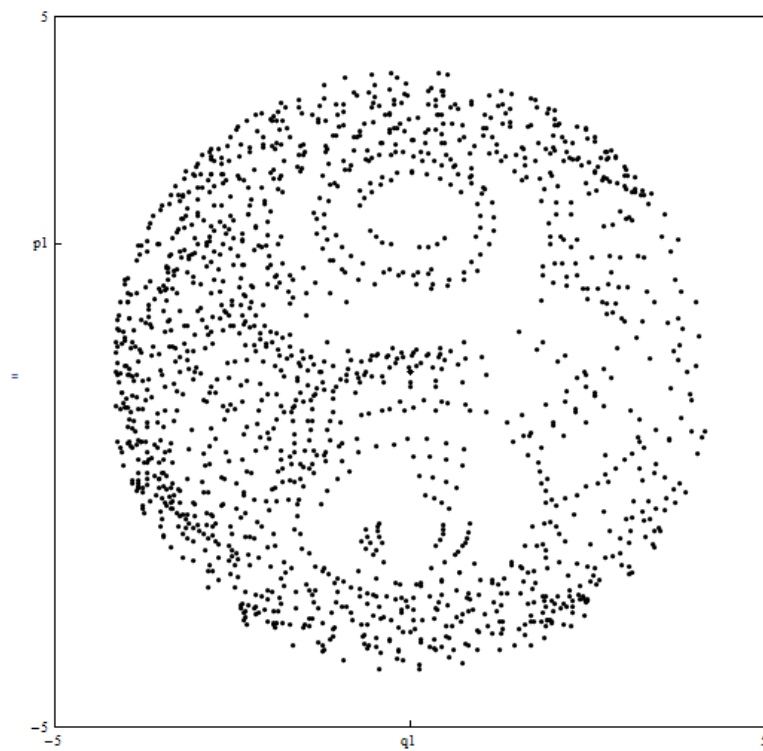


(b)

FIGURA 4.10: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=-4.0$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.1$ ,  $q_2=0.2$ ,  $p_1=0.3$ ,  $p_2=0.734986$

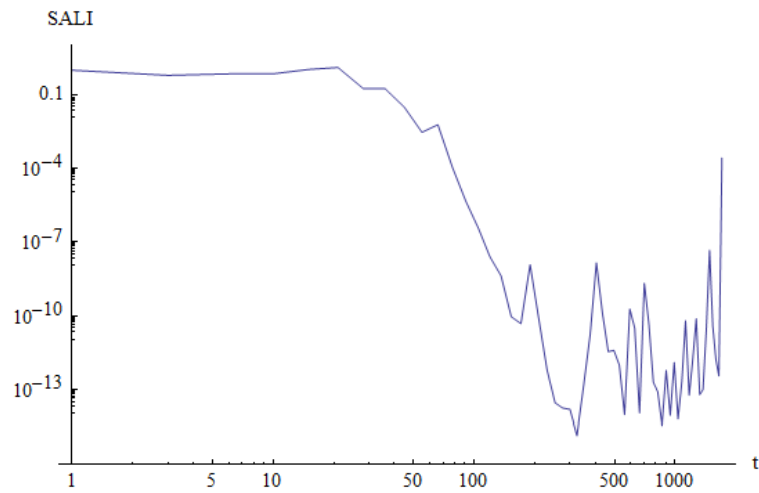


(a)

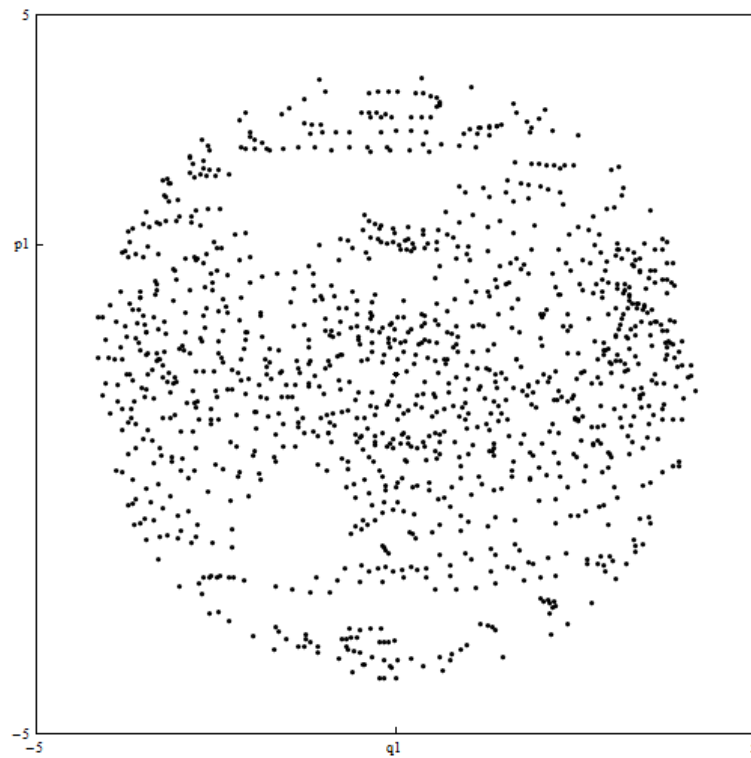


(b)

FIGURA 4.11: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=8.5$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.4$ ,  $q_2=0.6$ ,  $p_1=0.2$ ,  $p_2=4.8923$

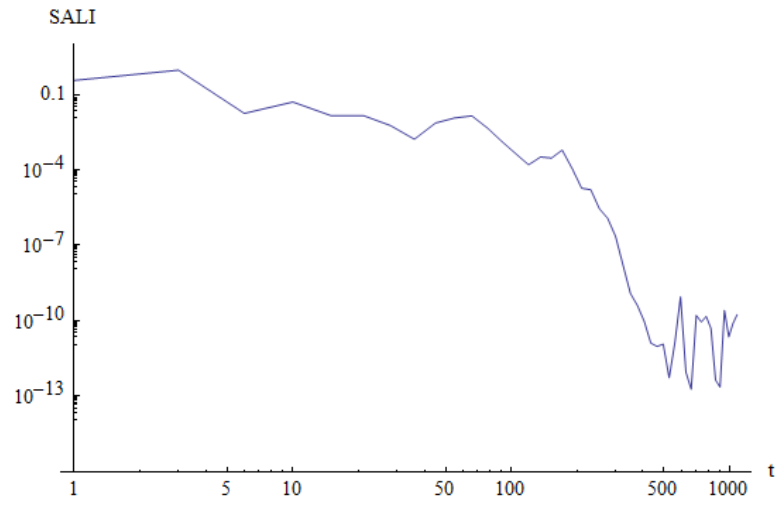


(a)

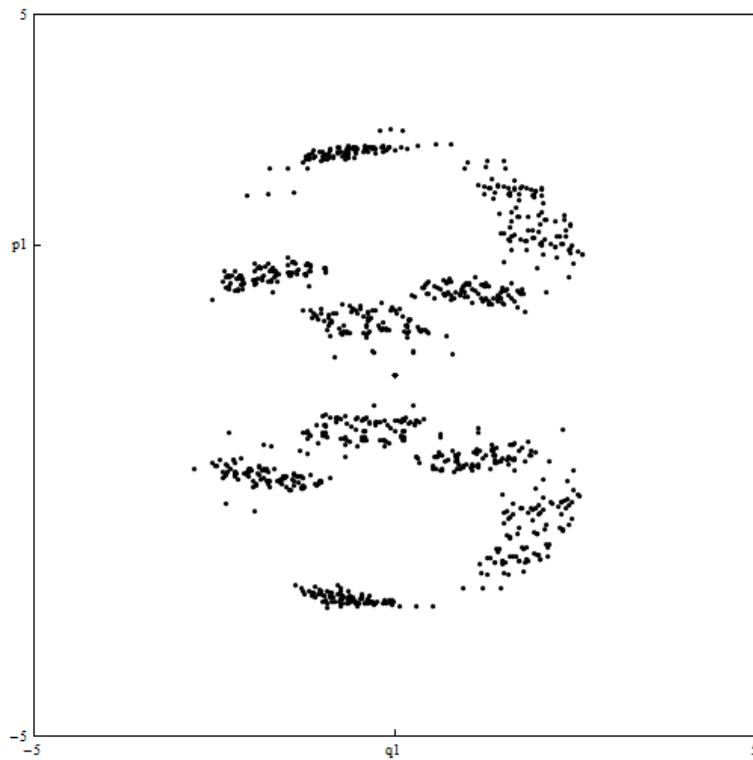


(b)

FIGURA 4.12: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=15.0$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=1.0$ ,  $q_2=1.2$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=5.35433$



(a)



(b)

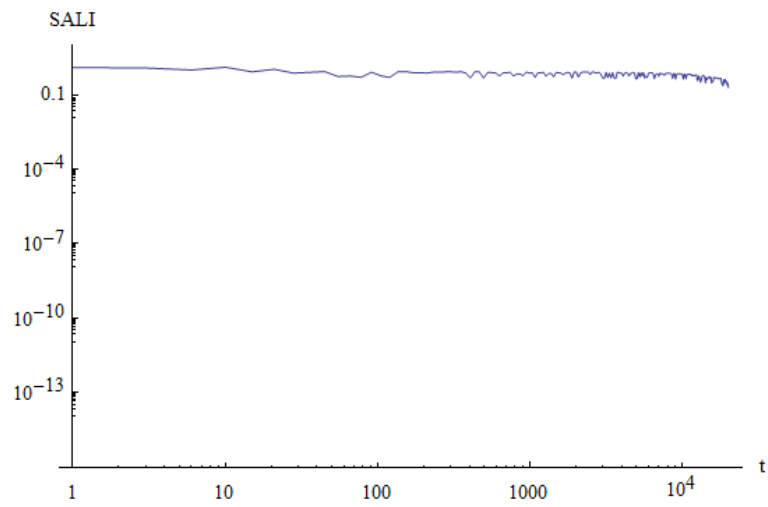
FIGURA 4.13: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=25.0$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=2.0$ ,  $q_2=2.5$ ,  $p_1=3.0$ ,  $p_2=5.16966$

#### 4.3.4. Resultados SALI con polarización plana para $G_+ \neq 0$ y $G_- \neq 0$

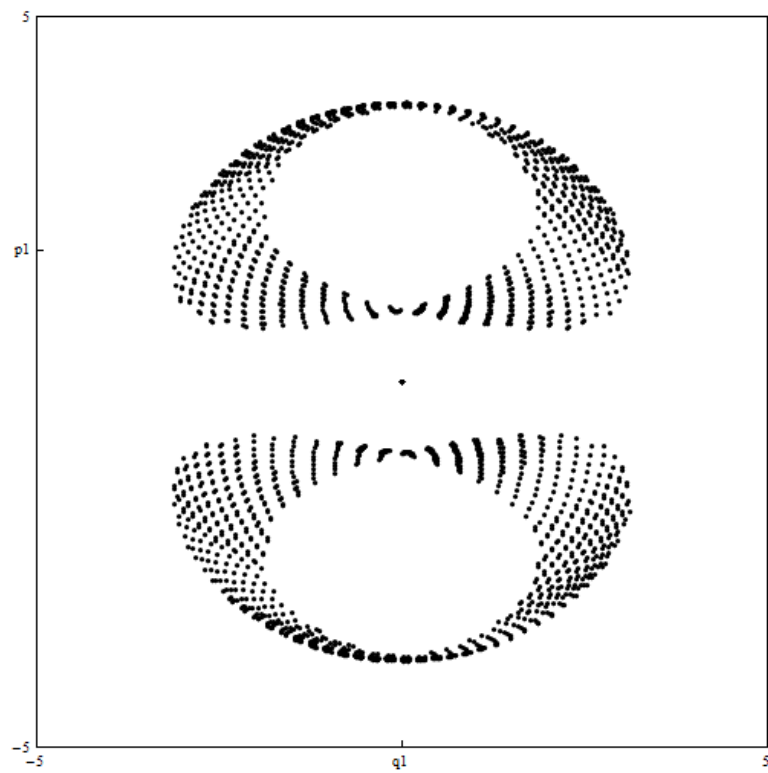
Presentamos la dependencia de los SALI con los parámetros  $G_+$  y  $G_-$  del sistema espín-bosón realizando varios cálculos del SALI para un valor de energía de  $E=6.2$  y  $E=20$  y las condiciones iniciales impuestas tal como se muestra en las figuras 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22 respectivamente.

Para  $G_- = 0$  se muestra en la figura 4.17 que el sistema espín-bosón presenta comportamiento caótico debido a que el SALI tiende a cero.

Si  $G_+ \neq 0$  y  $G_- \neq 0$  es posible encontrar comportamientos regulares y caóticos. En las figuras 4.14, 4.15, 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22 se presenta comportamiento regular de los SALI del sistema espín-bosón, mientras que en las figuras 4.16, 4.17 y 4.18 comportamiento caótico.

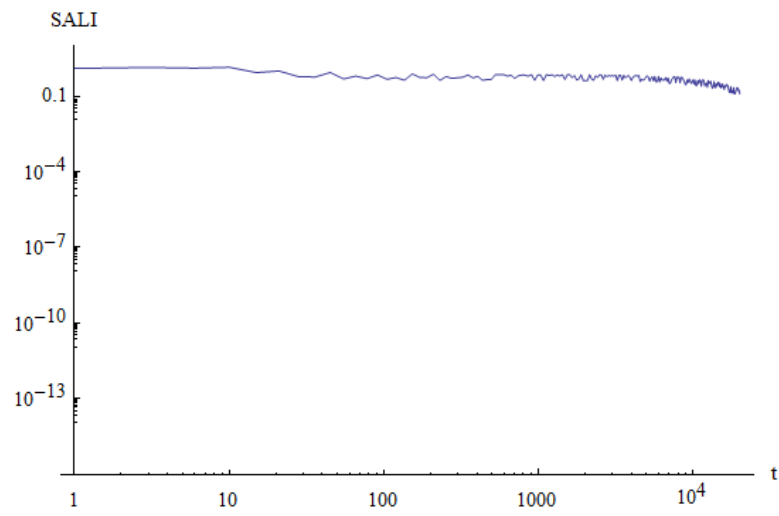


(a)

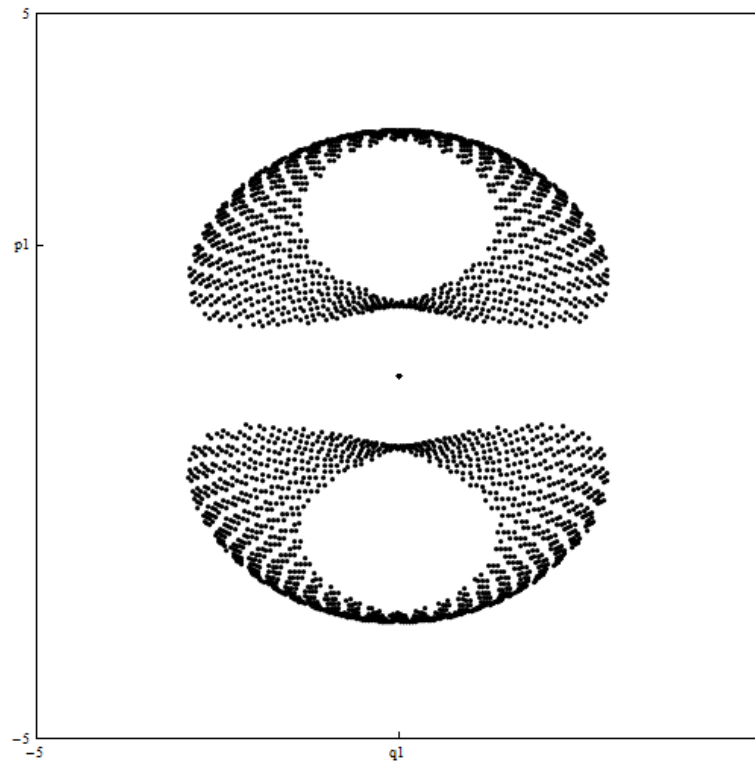


(b)

FIGURA 4.14: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.5$ ,  $G_-=0.5$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=4.00204$

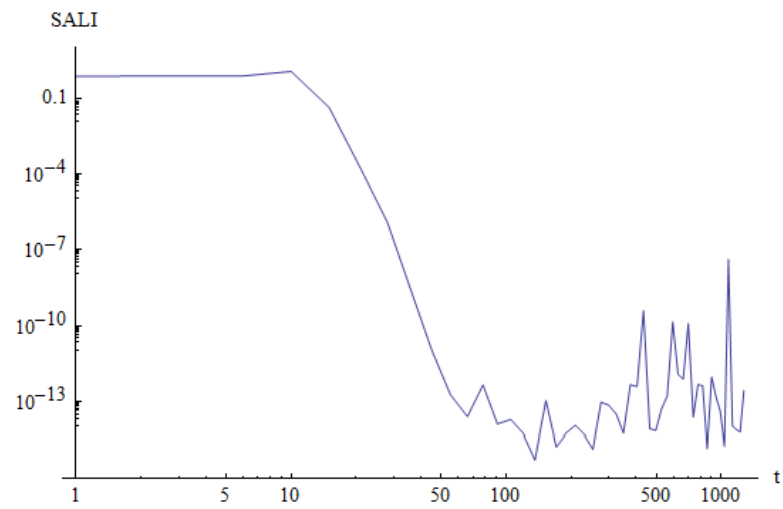


(a)

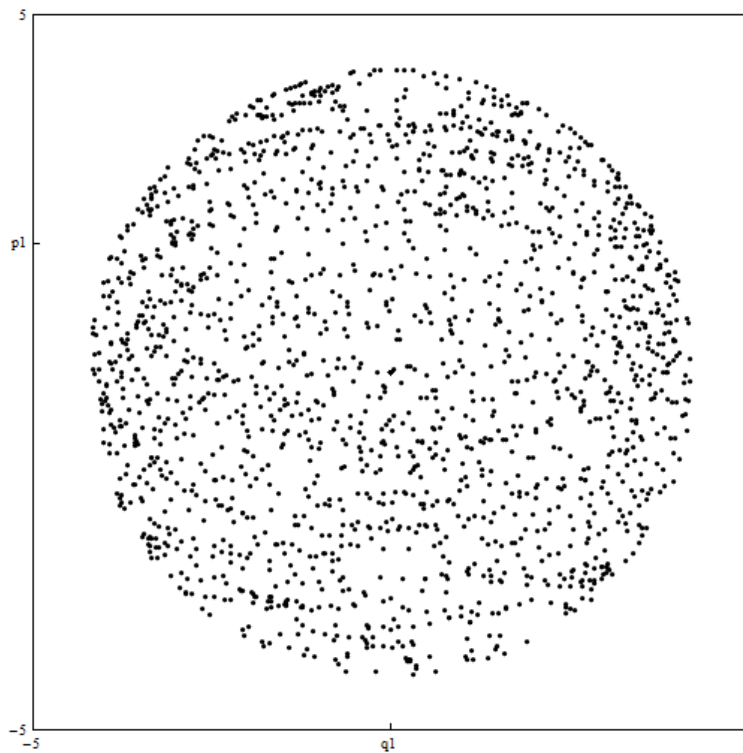


(b)

FIGURA 4.15: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=1.0$ ,  $G_-=1.0$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=3.59157$

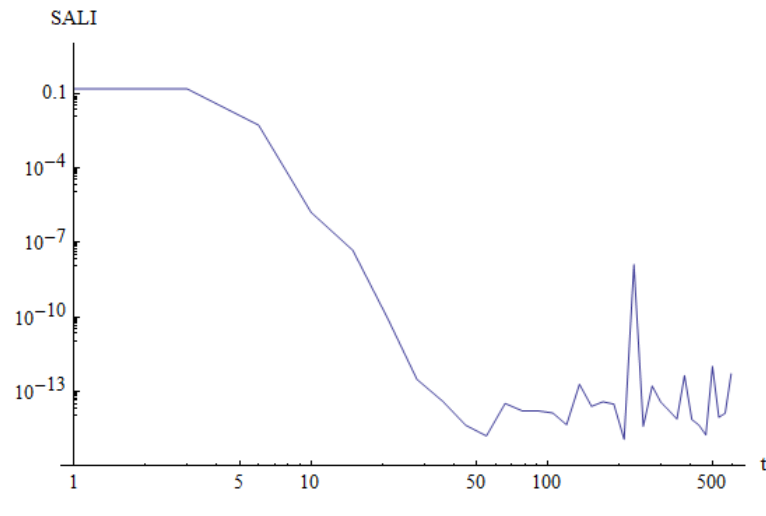


(a)

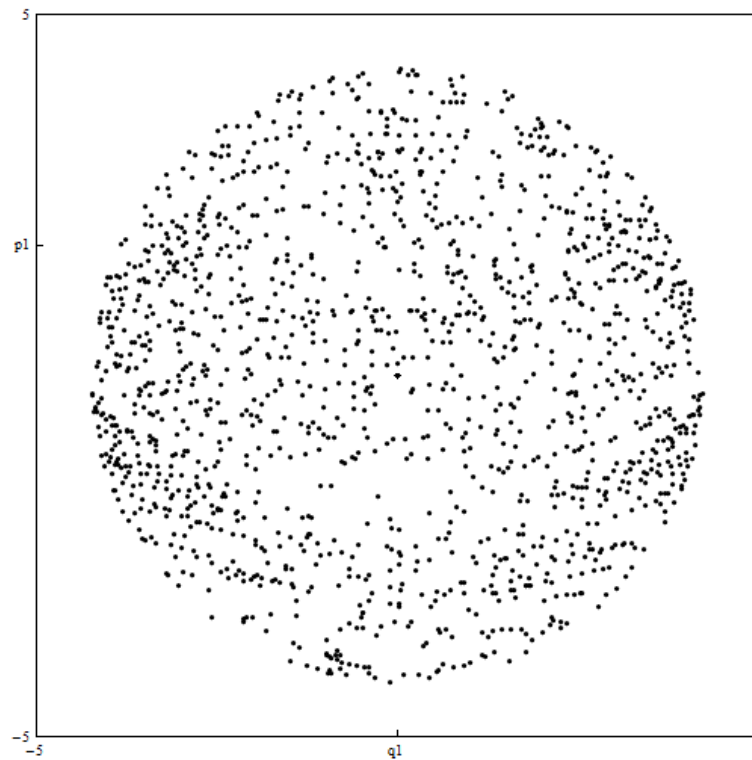


(b)

FIGURA 4.16: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=1.5$ ,  $G_-=0.5$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=3.29748$

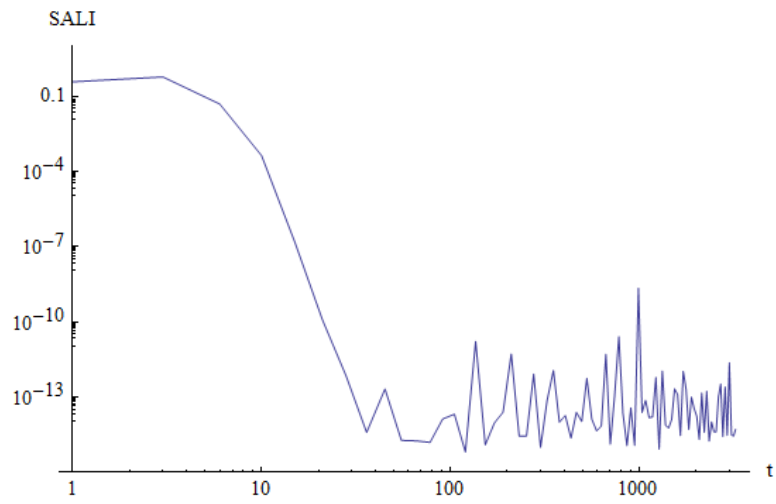


(a)

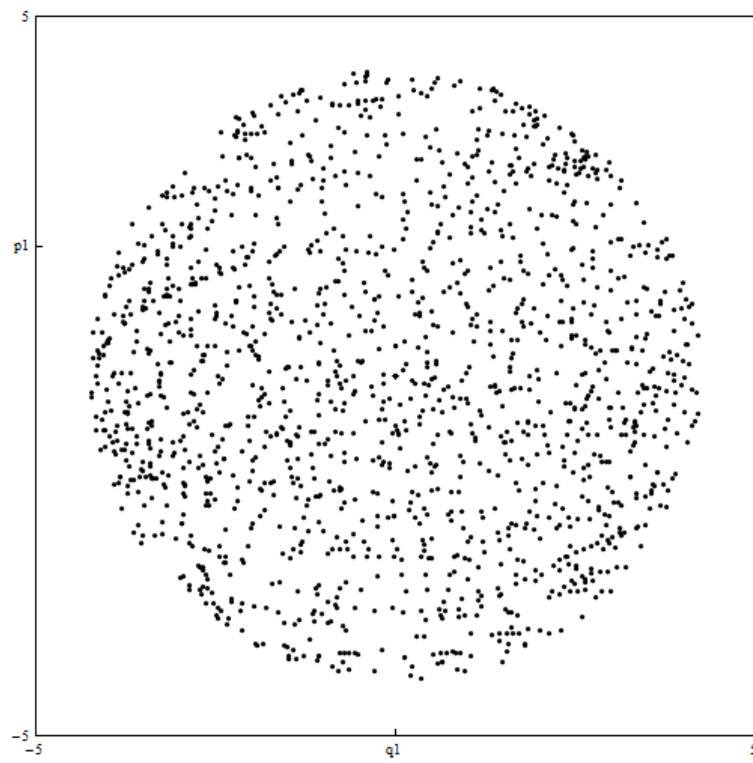


(b)

FIGURA 4.17: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=3.0$ ,  $G_-=0.0$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=3.54895$

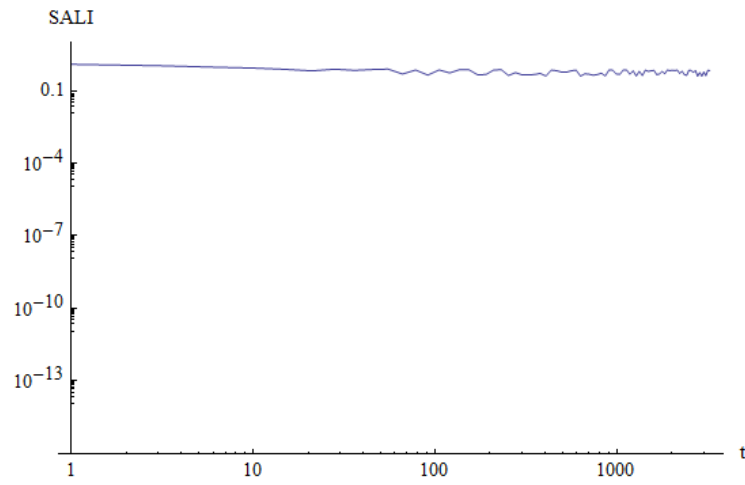


(a)

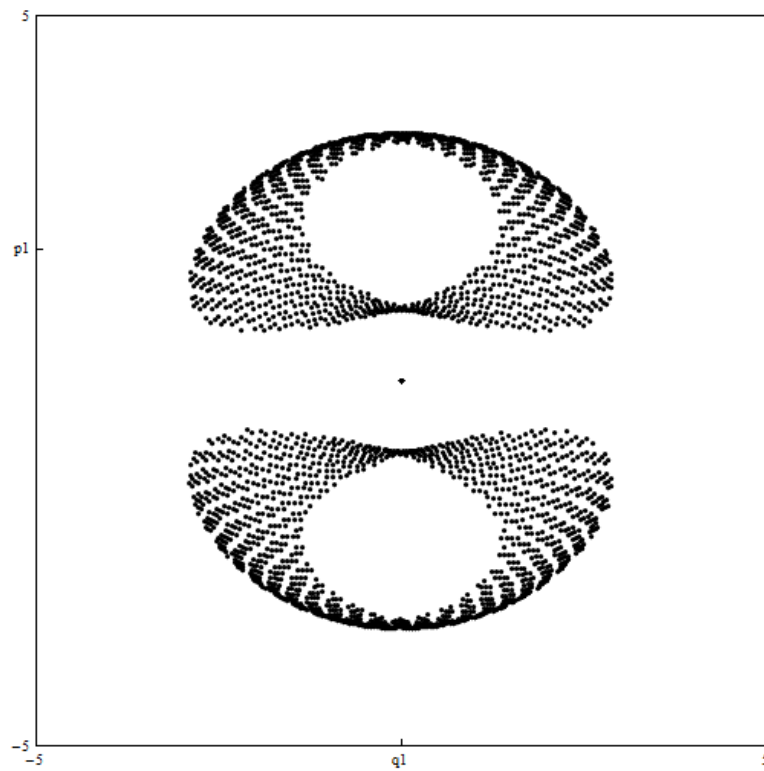


(b)

FIGURA 4.18: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=2.5$ ,  $G_-=-0.5$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=2.81264$

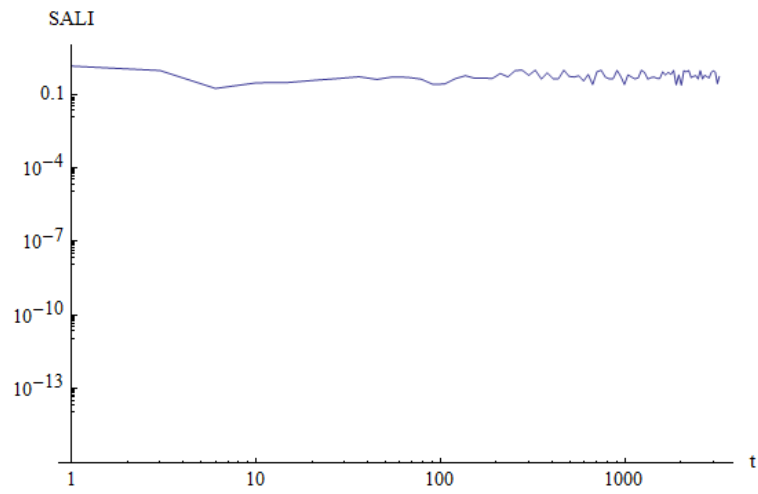


(a)

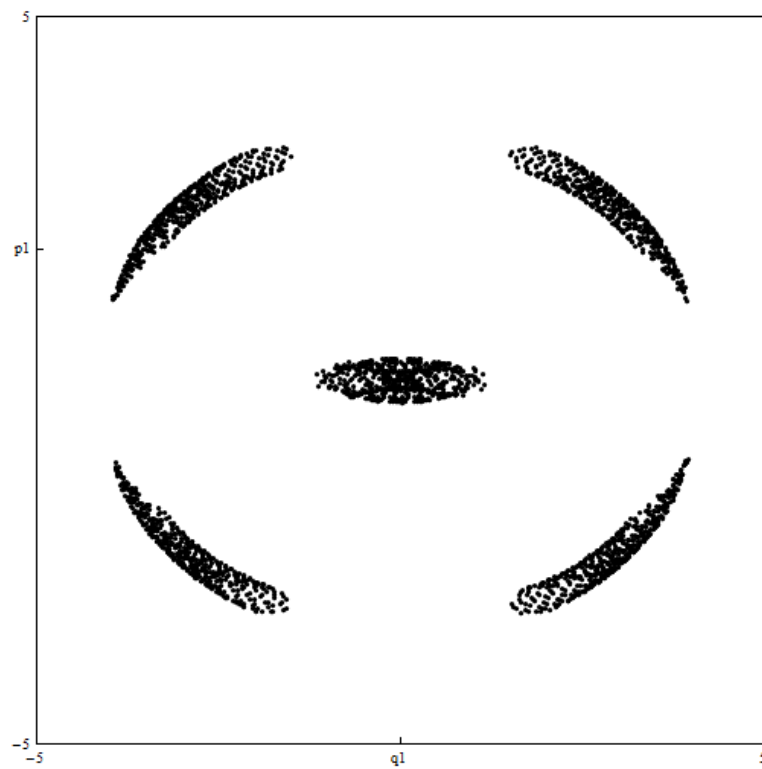


(b)

FIGURA 4.19: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=20$ ,  $G_+=1.0$ ,  $G_-=1.0$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=3.59157$

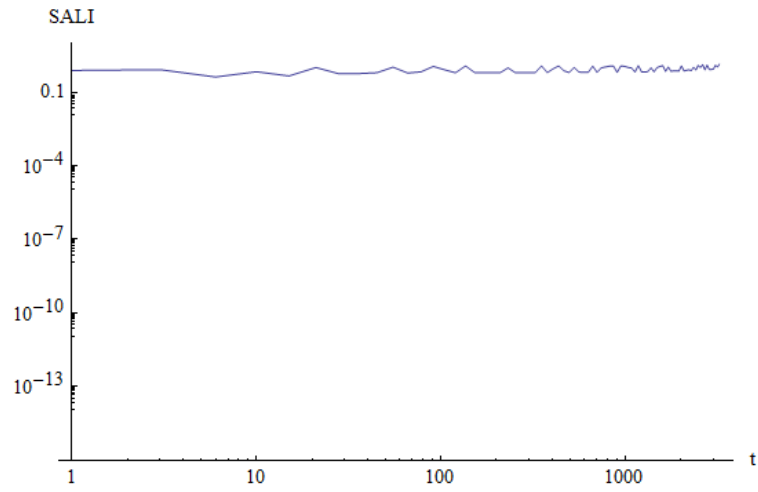


(a)

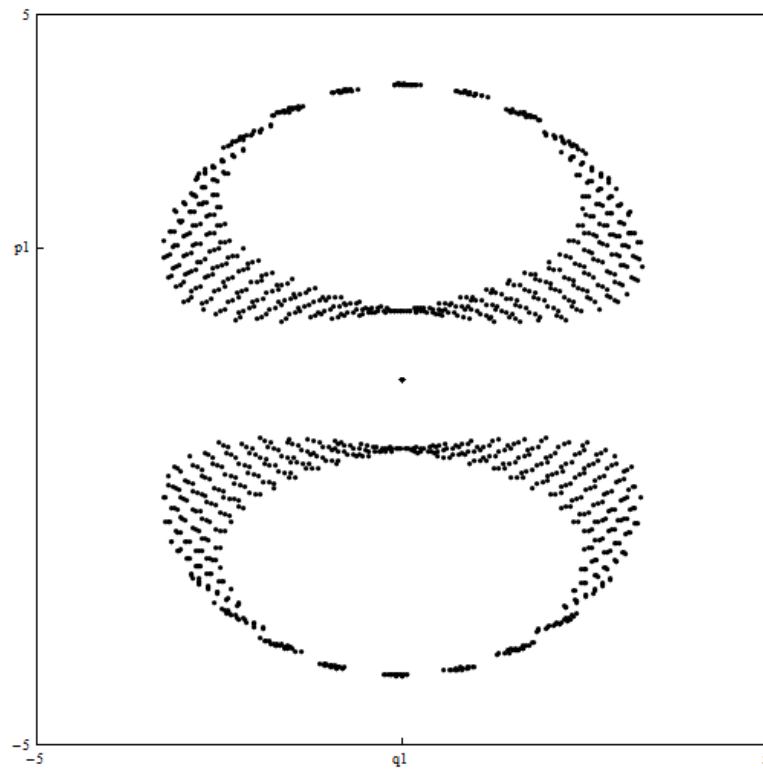


(b)

FIGURA 4.20: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=6.2$ ,  $G_+=0.7$ ,  $G_-=0.3$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.1$ ,  $q_2=0.2$ ,  $p_1=0.3$ ,  $p_2=4.4049$

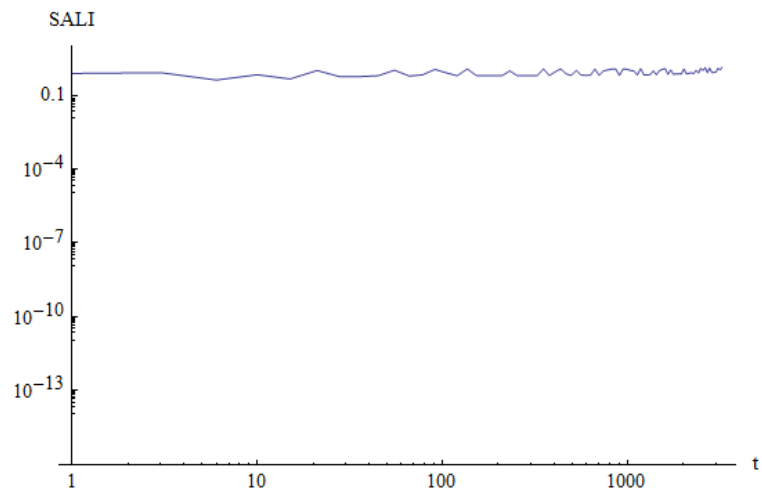


(a)

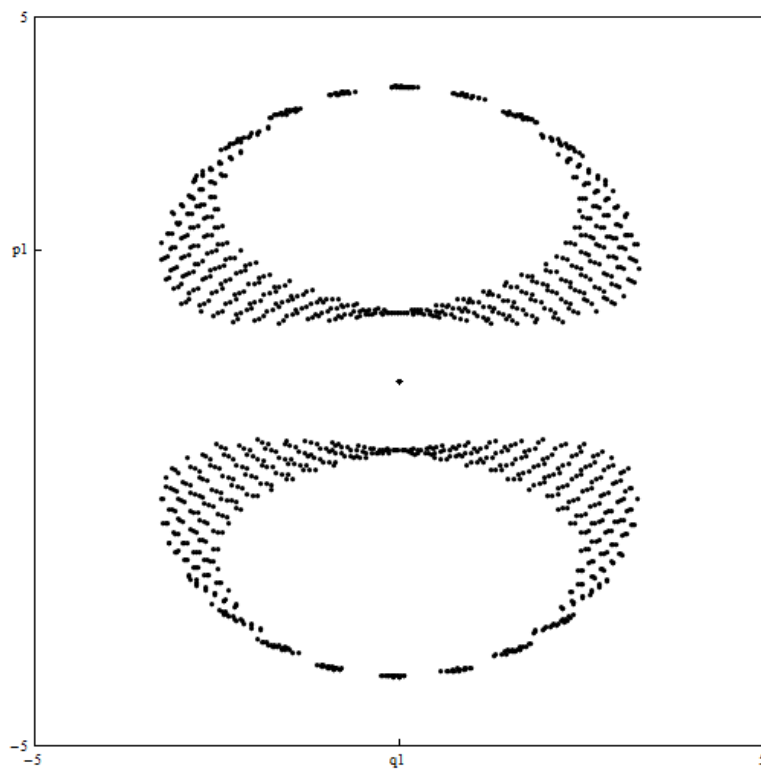


(b)

FIGURA 4.21: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=20$ ,  $G_+=1.0$ ,  $G_-=1.0$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=3.59157$



(a)



(b)

FIGURA 4.22: a) Índice de alineamiento más pequeño, b) Mapa de Poincaré para  $E=20$ ,  $G_+=1.0$ ,  $G_-=1.0$ , y condiciones iniciales  $q_1=0.5$ ,  $q_2=0.7$ ,  $p_1=0.9$ ,  $p_2=3.59157$

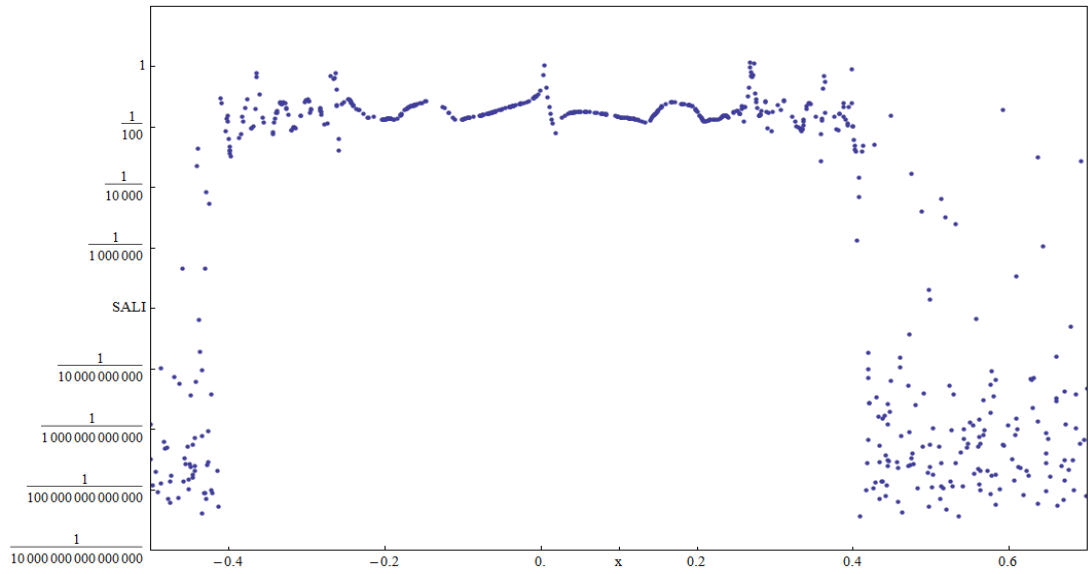
### 4.3.5. Escaneo de la SSP de sistemas hamiltonianos 2D:

#### Una visión global de la dinámica

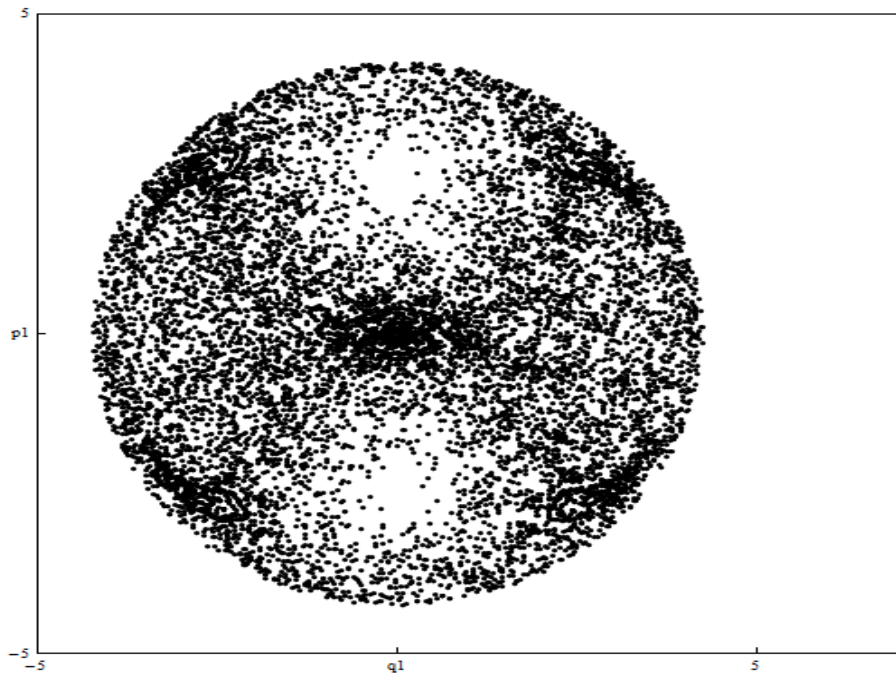
Como primer paso, consideremos órbitas con condiciones iniciales que se encuentran en eje  $p_1 = 0$  del mapa de Poincaré de la figura 4.22 b), con  $q_2 = 0$  y  $p_2$  definido por el hamiltoniano (4.1) para  $p_2 > 0$ .

Los valores de SALI para estas condiciones iniciales para un tiempo de  $t = 1000$  es graficado en la figura 4.23 a) en función de  $q_1$  y son coloreados con puntos de color azul.

Podemos distinguir claramente intervalos de movimiento regular donde el SALI tiene valores dentro de  $[\frac{1}{10000}, \sqrt{2}]$ . Lo que corresponde a condiciones iniciales  $(q_1, p_1)$  correspondiente a curvas cerradas de la figura 4.23 b). Podemos también observar intervalo de movimiento caótico correspondiente a valores del SALI entre  $[0, \frac{1}{10000000000}]$  la que corresponde a condiciones iniciales  $(q_1, p_1)$  de puntos escaterados de la misma figura.



(a)



(b)

FIGURA 4.23: a) Valores del índice de alineamiento más pequeño(SALI) para un tiempo de integración  $t_f = 1000$  para órbitas con condiciones iniciales en el eje  $p_1 = 0$  para la sección de Poincaré b) Mapa de Poincaré  $(q_1, p_1)$  del hamiltoniano (4.1) para  $E=6.2$  ,  $w=1$ ,  $j=9/2$ ,  $G_+=0.7$  y  $G_-=0.3$

# CONCLUSIONES

Las conclusiones acerca de la caracterización de caos del sistema espín-bosón con polarización plana son las siguientes:

- Se ha cumplido con el objetivo central del trabajo que es caracterizar el comportamiento regular o caótico del sistema espín-bosón con polarización plana del campo electromagnético por medio de la utilización del índice de alineamiento más pequeño (SALI), la estrategia utilizada consistió en calcular los índices SALI y los resultados obtenidos compararlos para fines de verificación con los mapas de Poincaré utilizados en [12], por lo que para tener una información completa realizamos un barrido de varias condiciones iniciales, valores de energía y valores de los parámetros  $G_+$  y  $G_-$ .

- De los resultados de la sección 4.3.2 el comportamiento regular o caótico del sistema espín-bosón con polarización plana depende de las condiciones iniciales, pues para una energía  $E=6.2$ , parámetros  $G_+ = 0.7$ ,  $G_- = 0.3$  y  $J = 4.5$  el sistema presenta comportamiento caótico si las condición inicial es  $(0.3, 0.9, 0.4, 4.22267)$ , para  $E=6.2$ , parámetros  $G_+ = 0.7$ ,  $G_- = 0.3$  y  $J = 4.5$  el sistema presenta comportamiento caótico si las condición inicial es  $(0.4, 0.9, 0.5, 4.13577)$ , para  $E=6.2$ , parámetros  $G_+ = 0.7$ ,  $G_- = 0.3$  y  $J = 4.5$  el sistema presenta comportamiento regular si las condición inicial es  $(0.15, 0.2, 0.3, 4.40296)$ , y finalmente para  $E=6.2$ , parámetros  $G_+ = 0.7$ ,  $G_- = 0.3$  y  $J = 4.5$  el sistema presenta comportamiento caótico si las condición inicial es  $(1.7, 0.4, 2, 2.80386)$

- De los resultados de la sección 4.3.3 del comportamiento regular o caótico del sistema espín-bosón con polarización plana podemos concluir que depende de la

energía total del sistema ya que encontramos comportamientos regulares cuando las energías son cercanas a la energía mínima y encontramos comportamientos caóticos cuando se tiene energías altas.

- En cuanto a los resultados de la sección 4.3.4 concluimos que tanto el comportamiento regular y caótico del sistema espín-bosón depende del valor de los parámetros  $G_+$  y  $G_-$ . En todos los casos calculados encontramos que cuando  $G_- = 0$  se encuentra que el sistema espín-bosón con polarización plana presenta comportamiento caótico como, se puede mostrar en la Figura 4.17, por otro lado para un  $G_+$  y  $G_-$  dados encontramos comportamiento caótico del sistema espín-bosón con polarización plana tal como se muestra en las Figuras 4.16, y 4.18. También para otros valores de  $G_+$  y  $G_-$  distintos de cero se exhibe un comportamiento regular del sistema espín-bosón con polarización plana tal como podemos observar en las Figuras 4.14, 4.15, 4.19, 4.20, 4.21 y 4.22.

- Con respecto a los resultados que se muestra en la sección 4.3.5 podemos concluir que en la gráfica (a) podemos observar adecuadamente los valores de SALI, cuyas condiciones iniciales se toman en el eje  $p_1=0$  para la sección de Poincaré de la Figura b) . Donde para el sistema espín-bosón con polarización plana los puntos altos indican el carácter regular de las orbitas mientras que los picos bajos el carácter caótico.

# Bibliografía

- [1] R.H. DICKE, Phys. Rev., 93, 99, (1954).
- [2] E.T. JAYNES, F.W.CUMMINGS, Proc. IEEE, 51, (1963).
- [3] C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOË, Quantum Mechanics Vol I., Jhon-Wiley y Sons, (1971).
- [4] R.P. FEYMAN, F.L. VERNON JR, R.W. HELLWARTH, R.W., J.Appl. Phys., 27, 554, (1959).
- [5] B.W.SHORE, P.I. NIGHT, J. Modern Optics, 40, 1195, (1993).
- [6] P.I. BELOGROV, G.M. ZASLAVSKII, G.K. TARTAKOVSKI, Phys. JETP, 44, 9945, (1976).
- [7] P. MILONNI, M.L. SHIM, J.R. ACKERHALT, World-Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 6. Chaos in Laser-Matter Interactions, World Scientific, Singapore, (1987).
- [8] R. GRAHAM, M. HOHNERBACH, Phys. Rev. Lett., 57, 1978, (1986).
- [9] J.N. MAKI, M.C. NEMES, M.P. PATO, Optical Communications, 72, 113, (1989).
- [10] C.H. LEWENKOPF, M.C. NEMES, V. MARVULLE, M.P. PATO, D. WRESZINSKI, Phys. Letters A, 155, 113, (1991).

- [11] M.A.M. DE AGUIAR, K. FURUYA, C.H. LEWENKOPF, M.C.NEMES, Ann. Phys. N. Y., 216, 313, (1992).
- [12] M.A.M. DE AGUIAR, K. FURUYA, M.C.NEMES, Quantum Optics, 3, 305, (1991).
- [13] K. FURUYA, M.A.M. DE AGUIAR , C.H. LEWENKOPF, M.C. NEMES, M.C.; Ann. Phys. N.Y., 216, 313, (1992).
- [14] E. OTT, Chaos in Dynamics Systems, Cambrigde University Press. 1993.
- [15] T. BERROCAL SERNA, Tesis de Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas, Especialidad de Física, UNSCH. 2007.
- [16] W. M. SOLANO REYNOSO y A. P. ASLLA-QUISPE, Caracterización de caos mediante los Exponentes de Lyapunov del Sistema Espín-Bosón con Polarización Circular, Informe Final de Investigacion, UNSCH. 2006.
- [17] M. D. HARTL., arXiv-Physics/0303077 v2. 2003.
- [18] CH. SKOKOS Alignment Indices: A New, Simple Method for Determining the Ordered or chaotic Nature of Orbits. J. Phis. A: Mathematical and General, 34: 10026-10043. 2001.
- [19] Ch. SKOKOS ANTONOUPULOS, T.C. BOUNTIS, and M.N. VRAHATIS, Physica D, 231,30. 2007.
- [20] E. SCHRÖDINGER, Naturwissenschaften, 14, 664, (1926).
- [21] R.J. GLAUBER Phys. Rev. Lett., 10, 277, (1963).
- [22] A.M. PERELEMOV, Generalized Coherent States and their Aplications, Spriger Verlag, (1986).
- [23] CH. SKOKOS Alignment Indices: A New, Simple Method for Determining the Ordered or chaotic Nature of Orbits. J. Phis. A: Mathematical and General, 34: 10026-10043, 2001.

- [24] CH. SKOKOS. Smaller Alignment Index (SALI): A New 5Indicator Distinguishing between ordered and Chaotic Motion. In 5th Hellenic Astronomical Conference, (2002).
- [25] CH. SKOKOS, CH ANTONOPOULOS, T.C. BOUNTIS, and M.N. VRAHATIS, Smaller Alignment Index (SALI): Detecting Order and Chaotic Motion in Conservative Dynamical Systems, In GRACM Congress on Computational Mechanics, GRACM 2002 Patras 27-29 June, (2002).
- [26] N. VOGLIS, G. CONTOPOULO, and C. EFTHYMIPOULOS, Detection of Ordered and Chaotic Motion Using the Dynamical Spectra, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 73:211-220, (1999).
- [27] Ch. SKOKOS ANTONOPOULOS, T.C. BOUNTIS, and M.N. VRAHATIS. How does the Smaller Alignment Index (SALI) distinguish order from chaos? *Pag.Ther.Fhis.Supp.*, 150, (2003).
- [28] CH. SKOKOS, T. C. BOUNTIS, CH. ANTONOPOULOS. *Physica D*, 231, 30. (2007).
- [29] M.A.M. DE AGUIAR, K. FURUYA, C.H. LEWENKOPF and M.C. NEMES. Spin-Boson System: Classical Analysis., 291, 312, (1992).
- [30] W. M. SOLANO REYNOSO, Obtención de la Hamiltoniana Cuántica y Clásica del Sistema Espín-Bosón con Polarización Circular del Campo Electromagnético para Átomos Hidrogenoides, Investigacion presentada a la FINGC-UNSC. (2006).

# APÉNDICES

## .1. Definiciones Básicas

Consideremos un sistema de  $n$  grados de libertad descrito por  $n$  coordenadas y sus correspondientes momentos canónicos conjugados, agrupados en los  $n$ -vectores  $(\vec{q}, \vec{p})$ . Las correspondientes ecuaciones de movimiento (2.4) y (2.5), las ecuaciones de Hamilton, pueden obtenerse a partir de la condición variacional,  $\delta S = 0$ , que extrema la acción

$$S(\vec{q}, t) = \sum_{i=1}^N \int_{q_i(t_0)}^{q_i(t)} p_i dq_i - \int_{t_0}^t H dt' = \int_{t_0}^t L dt' \quad (\text{A.1})$$

donde  $H(\vec{q}, \vec{p}, t)$  es el Hamiltoniano del sistema. La función Lagrangiana,  $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ , está dado por

$$L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - H(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad (\text{A.2})$$

donde  $\dot{\vec{q}}$  se considera ahora como función de  $\vec{q}$  y los momentos generalizados  $\vec{p}$ .

De la forma diferencial de la acción, ecuación (2.6), resulta que las variaciones de la acción con respecto a las coordenadas y el tiempo son respectivamente,

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

Para un par de funciones de las coordenadas  $g_1(\vec{q}, \vec{p})$  y  $g_2(\vec{q}, \vec{p})$ , se define el corchete de Poisson como

$$\{g_1, g_2\} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial g_1}{\partial q_i} \frac{\partial g_2}{\partial p_i} - \frac{\partial g_1}{\partial p_i} \frac{\partial g_2}{\partial q_i} \right]. \quad (\text{A.4})$$

En términos de los corchetes de Poisson, la derivada temporal de una función arbitraria de las coordenadas y el tiempo,  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ , se expresa (usando las ecuaciones de Hamilton) como

$$\dot{f} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (\text{A.5})$$

Una función sólo de las coordenadas es una constante de movimiento si no varía en el transcurso del movimiento y esto ocurre si su corchete de Poisson con el hamiltoniano se anula y además la función no depende explícitamente del tiempo. En particular, un hamiltoniano autónomo es una constante del movimiento  $E = H(\vec{q}, \vec{p})$  que llamamos  $E$  la energía del sistema.

## .2. Programa Mathematica para las seccion de superficie de Poincaré

(\* \*\*\*\*\* PARAMETROS \*\*\*\*\* \*)

$$w = 1; j = 9/2; G1 = 0.7; G2 = 0.3;$$

( \*\*\*\*\* )

Ham2 = NDSolve[

$$p1'[t] == -wq1[t] - \frac{G2q2[t]\sqrt{4j - q1[t]^2 - p1[t]^2}}{\sqrt{4j}}$$

$$+ \frac{q1[t](G1p1[t]p2[t] + G2q1[t]q2[t])}{\sqrt{4j}\sqrt{4j - q1[t]^2 - p1[t]^2}},$$

$$q1'[t] == wp1[t] + \frac{G1p2[t]\sqrt{4j - q1[t]^2 - p1[t]^2}}{\sqrt{4j}}$$

$$- \frac{p1[t](G1p1[t]p2[t] + G2q1[t]q2[t])}{\sqrt{4j}\sqrt{4j - q1[t]^2 - p1[t]^2}},$$

$$p2'[t] == -wq2[t] - \frac{G2q1[t]\sqrt{4j - q1[t]^2 - p1[t]^2}}{\sqrt{4j}},$$

$$q2'[t] == wp2[t] + \frac{G1p1[t]\sqrt{4j - q1[t]^2 - p1[t]^2}}{\sqrt{4j}},$$

$$p1[0] == 0.4, p2[0] == 4.2026, q1[0] == 0.3, q2[0] == 0.9},$$

{p1, p2, q1, q2}, {t, 0, 1000}, MaxSteps → Infinity]

```

ParametricPlot3D[Evaluate[{p1[t], q1[t], q2[t]}/.Ham2],
{t, 0, 1000}, AxesLabel → {"p1", "q1", "p2"}, PlotPoints → 10000]

```

```

poincare = Table[Evaluate[If[Abs[q2[t]/.Ham2[[1]]] < 1,

```

```

{q1[t], p1[t]}/.Ham2[[1]], {0, 0}], {t, 0, 1000, 0.1}]

```

```

ListPlot[poincare, AspectRatio → 1, Axes → False, Frame → True, PlotRange

```

```

→ {{-5, 5}, {-5, 5}}, FrameTicks

```

```

→ {{-5, {0., "x0"}, 5}, {-5, {1.8, "dx0"}, 5}, {}, {}}, PlotStyle

```

```

→ {RGBColor[.1, 1., 1.], PointSize[.007]}, (*TextStyle

```

```

→ {FontFamily → "Times", FontSize → 16}, *) □ ImageSize

```

```

→ {500, 500}]

```

### .3. Programa Mathematica para los índices SALI

```

raiz[q1,p1] := Sqrt[4j - (q1^2 + p1^2)] Hp[q1,q2,p1,p2]
:= -jw +  $\frac{w}{2}(q1^2 + q2^2 + p1^2 + p2^2) + \sqrt{(raiz[q1,p1]/Sqrt[4j])(G1p1q2 + G2q1p2)}$  F[{q1,q2,p1,p2}]
:= {D[Hp[q1,q2,p1,p2],p1],D[Hp[q1,q2,p1,p2],p2],-D[Hp[q1,q2,p1,p2],q1],-D[Hp[q1,q2,p1,p2],q2]} JacobianMatrix[funs_List,vars_List]
:= Outer[D,funs,vars] J = JacobianMatrix[F[{y1[t],y2[t],y3[t],y4[t]}],{y1[t],y2[t],y3[t],y4[t]}]; Y = Table[{yi[t],yi+4[t]},{i,5,8}]; E1
= Flatten[Transpose[J.Y]]; EQ4 = Table[D[yi[t],{t,1}] == F[{y1[t],y2[t],y3[t],y4[t]}][[i]},{i,1,4}]; EQ8
= Table[D[yi[t],{t,1}] == E1[[i-4]},{i,5,12}]; K = 200; tstep = 1; t0 = 0; tf = tstep; sal = {{t0,0}}; KK = 0; Y18
:= {y5[t0] == 1,y6[t0] == 0,y7[t0] == 0,y8[t0] == 0,y9[t0] == 0,y10[t0] == 0,y11[t0] == 1,y12[t0] == 0}; (* *****
* PARAMETROS ***** *) w = 1; j = 9/2; G1 = 0.6; G2
= 0.8; (* ***** *)

```

q2menos[q1\_, p1\_, p2\_, En\_]:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2\sqrt{j}w} (G1p1\sqrt{4j - p1^2 - q1^2} - \sqrt{(4G1^2jp1^2 - G1^2p1^4 - G1^2p1^2q1^2 + 8Enjw - 4G2\sqrt{j}p2q1\sqrt{4j - p1^2 - q1^2}w \\
 &+ 8j^2w^2 - 4jp1^2w^2 - 4jp2^2w^2 - 4jq1^2w^2)}) \square q2mas[q1_, p1_, p2_, En_]: \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{j}w} (G1p1\sqrt{4j - p1^2 - q1^2} + \sqrt{(4G1^2jp1^2 - G1^2p1^4 - G1^2p1^2q1^2 + 8Enjw - 4G2\sqrt{j}p2q1\sqrt{4j - p1^2 - q1^2}w \\
 &+ 8j^2w^2 - 4jp1^2w^2 - 4jp2^2w^2 - 4jq1^2w^2)})
 \end{aligned}$$

66

YI4: = {y1[t0] == 0, y2[t0] == q2menos[0,0,0.1,8], y3[t0] == 0, y4[t0] == 0.1} YI = Join[YI4, YI8];

```

Do[sol = NDSolve[Join[EQ4, EQ8, YI4, YI8], Table[yi[t], {i, 1, 12}], {t, t0, tf}, MaxSteps → ∞];  $\square$ PhiT
= Transpose[Table[{First[yi[t]/.sol/.t → tf], First[yi+4[t]/.sol/.t → tf]}, {i, 5, 8}]]; norms = Map[Norm, PhiT]; PhiT
= PhiT/norms;  $\square$ PhiT1 = {PhiT[[1,1]], PhiT[[1,2]], PhiT[[1,3]], PhiT[[1,4]]};  $\square$ PhiT2
= {PhiT[[2,1]], PhiT[[2,2]], PhiT[[2,3]], PhiT[[2,4]]};  $\square$ PhiT1 = Normalize[PhiT1];  $\square$ PhiT2
= Normalize[PhiT2];  $\square$ alip = Norm[PhiT1 + PhiT2];  $\square$ alim = Norm[PhiT1 - PhiT2];  $\square$ sali
= Min[alip, alim];  $\square$  $\square$ YI8 = Table[{yi+4[t0] == PhiT[[1, i]], yi+8[t0] == PhiT[[2, i]]}, {i, 1, 4}];  $\square$ YI4 = {y1[t0] =
= y1[t]/.sol/.t → tf, y2[t0] == y2[t]/.sol/.t → tf, y3[t0] == y3[t]/.sol/.t → tf, y4[t0] == y4[t]/.sol/.t
→ tf};  $\square$  $\square$ AppendTo[sal, {tf, sali}];  $\square$ KK ++;  $\square$ ; t0 = t0 + KKtstep;  $\square$ tf = t0 + (KK + 1)tstep  $\square$  $\square$ , {K}

Last[sal]

ListLogLogPlot[sal, Joined → True, PlotRange → {All, {10-16, 10}}, AxesLabel → {"t", "SALI"}]

```