

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO CIVIL

MODELACIÓN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL DEL
FLUJO NO PERMANENTE EN REDES DE TUBERÍAS CON
EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

PRESENTADO POR:
TANTA PABLO JULIÁN


ASESOR:
Ing. JAIME LEONARDO BENDEZÚ PRADO

AYACUCHO-PERÚ
2014

“MODELACIÓN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL DEL FLUJO NO PERMANENTE EN REDES DE TUBERÍAS CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”.

RECOMENDADO : 26 DE AGOSTO DEL 2014

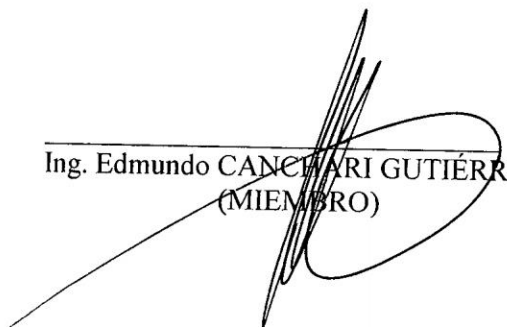
APROBADO : 26 DE NOVIEMBRE DEL 2014



MSc. Ing. Carlos A. PRADO PRADO
(PRESIDENTE)




Ing. Cristian CASTRO PÉREZ
(MIEMBRO)



Ing. Edmundo CANCEIANI GUTIÉRREZ
(MIEMBRO)

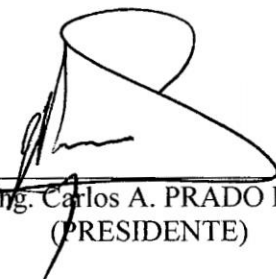


Ing. Jaime L. BENDEZÚ PRADO
(MIEMBRO)



Ing. Floro N. YANGALI GUERRA
(SECRETARIO DOCENTE)

Según el acuerdo constatado en el Acta, levantada el 26 de noviembre del 2014, en la Sustentación de Tesis presentado por el Bachiller en Ciencias de la Ingeniería Civil Sr. **Julián TANTA PABLO**, con la Tesis Titulado “**MODELACIÓN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL DEL FLUJO NO PERMANENTE EN REDES DE TUBERÍAS CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**”, fue calificada con la nota de QUINCE (15) por lo que se da la respectiva APROBACIÓN.



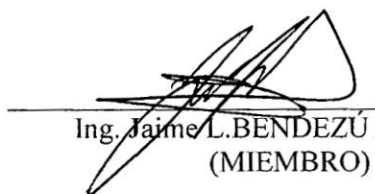
MSc. Ing. Carlos A. PRADO PRADO
(PRESIDENTE)



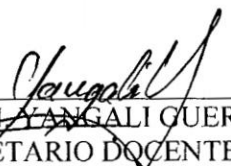
Ing. Cristian CASTRO PÉREZ
(MIEMBRO)



Ing. Edmundo CANCHARI GUTIÉRREZ
(MIEMBRO)



Ing. Jaime L. BENDEZÚ PRADO
(MIEMBRO)



Ing. Floro N. YANGALI GUERRA
(SECRETARIO DOCENTE)

**MODELACIÓN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL DEL FLUJO NO
PERMANENTE EN REDES DE TUBERÍAS MEDIANTE EL MÉTODO
DE ELEMENTOS FINITOS**

Presentado Por:

Tanta Pablo Julian

Tesis presentado como requisito exigido para para optar el título de

INGENIERO CIVIL

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA-UNSCH

2 de diciembre de 2014

Aprobado por:

_____ Ing. Carlos Auberto Prado Prado Decano, FIMGC	_____ Fecha
_____ Ing. Jaime Leonardo Bendezú Prado Miembro, Comité Jurado	_____ Fecha
_____ Ing. Cristian Castro Pérez Miembro, Comité Jurado	_____ Fecha
_____ Ing. Edmundo Canchari Gutiérrez Miembro, Comité Jurado	_____ Fecha

PRESENTACIÓN

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos exigidos para optar el título académico de *Ingeniero Civil*, de la *Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga*, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro grado o título en esta universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el periodo 2013-2014.

Tanta Pablo Julian

ingenieros_jtp@hotmail.com

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

Ayacucho, Agosto del 2014

DEDICATORIA

A mis padres, que con infinito amor supieron guiarnos en el camino del estudio para alcanzar una profesión y ser personas de bien y útiles para la sociedad.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia, en especial a mis padres, ya que sin su apoyo no habría alcanzado esta meta.

A todos los catedráticos que me brindaron sus conocimientos dentro y fuera de las aulas de la Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga.

A todos mis compañeros con quienes compartí mi estadía como estudiante San Cristobalino.

A mi alma mater, la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga, por permitirme formar parte de ella.

Además mi gratitud a todas aquellas personas que de una u otra forma han contribuido en la elaboración de esta tesis de graduación.

RESUMEN

En el presente trabajo de investigación se presenta un modelo matemático y computacional generalizado para el análisis y simulación numérica del *flujo no permanente* (***Water Hammer***) en sistemas hidráulicos de distribución de agua, con distintas aproximaciones y posibilidades de conexión entre dominios, utilizando un esquema numérico basado en el ***Método de Elementos Finitos*** (MEF), que nos permite una solución global del sistema de ecuaciones diferenciales hiperbólicas cuasi-lineales que gobiernan el fenómeno del flujo no permanente en redes de agua a presión. Para el análisis y simulación numérica del fenómeno se elaboró el software ***GAMEF*** en MATLAB, que permite calcular y representar los parámetros hidrodinámicos en todo el dominio del problema. El esquema numérico desarrollado demuestra una sólida posibilidad de modelar muchos problemas de la hidrodinámica con un amplio horizonte de aplicaciones tecnológicas y la importancia de los métodos numéricos en la modelización y análisis de sistemas de abastecimiento de agua y contribuye asumir el reto de planificar, diseñar y gestionar eficientemente con los modelos más innovadores en la industria de los recursos hídricos.

Palabras Clave: *Modelo numérico, Transitorios hidráulicos, Ondas de presión, Método de Elementos Finitos, Golpe de ariete.*

Índice general

Portada	
Presentación	I
Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Resumen	IV
Índice General	V
Índice de Figuras	XV
Índice de Cuadros	XXII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Generalidades	1
1.2. Antecedentes	2
1.3. Justificación	4
	V

1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo General	5
1.4.2. Objetivos Específicos	5
1.5. Organización del estudio	6
2. REVISIÓN DE LA LITERATURA	8
2.1. Mecánica de fluidos	8
2.1.1. Propiedades y características de los fluidos	9
2.1.2. Flujo compresible y flujo incompresible	10
2.1.2.1. Flujo compresible	10
2.1.2.2. Flujo incompresible	11
2.1.3. Regímenes de flujo laminar y turbulento	12
2.1.3.1. Flujo Laminar	13
2.1.3.2. Flujo Turbulento	14
2.1.4. Dinámica de fluidos reales	14
2.1.4.1. Concepto de viscosidad	15
2.1.4.2. Efecto de la viscosidad en los fluidos reales	17
2.1.4.2.1. Fluidos newtonianos	17
2.1.4.2.2. La condición de no deslizamiento	18
2.1.4.2.3. Fluidos no newtonianos	18
2.2. Flujo permanente en redes a presión	19
2.2.1. Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales	19

ÍNDICE GENERAL

2.2.2.	Tubería en serie	21
2.2.3.	Tubería en paralelo	24
2.2.3.0.4.	Conservación de la energía	24
2.2.3.0.5.	Conservación de la masa (continuidad)	26
2.2.4.	Redes de tuberías	27
2.2.4.1.	Redes abiertas	27
2.2.4.2.	Redes cerradas	27
2.2.5.	Red hidráulica mixta a presión	28
2.2.5.1.	Métodos de solución	31
2.3.	Flujo no permanente en redes a presión	32
2.3.1.	Conceptos básicos	33
2.3.1.1.	Sobrepresión	33
2.3.1.2.	Depresión	33
2.3.1.2.1.	Colapso de la tubería	34
2.3.1.2.2.	Separación de la columna líquida	34
2.3.1.2.3.	Entrada de aire en la tubería	35
2.3.1.3.	Sobrevelocidad en las máquinas	35
2.3.2.	Golpe de ariete	36
2.3.2.1.	Definición	36
2.3.2.2.	Causas que originan el golpe de ariete	37
2.3.2.2.1.	Abertura y cierre de la válvula	38
2.3.2.2.2.	Arranque de la bomba	39

ÍNDICE GENERAL

2.3.2.2.3.	Falla de potencia en la bomba	39
2.3.2.2.4.	Operaciones inapropiadas	39
2.3.2.3.	Consecuencias del golpe de ariete	39
2.3.2.3.1.	Ruido	40
2.3.2.3.2.	Vibraciones	40
2.3.2.3.3.	Falla en bombas, válvulas y otros accesorios	41
2.3.2.3.4.	Ruptura de tuberías	41
2.3.2.4.	Velocidad o celeridad de onda (a)	41
2.4.	Método Numéricos	45
2.4.1.	Método de las características (MOC)	46
2.4.2.	Método de Diferencias Finitas	48
2.4.2.1.	Esquema de las diferencias finitas	48
2.4.2.2.	Procedimiento General del MDF	51
2.4.3.	Método de Elementos Finitos	52
2.4.3.1.	Generalidades	52
2.4.3.2.	Descripción matemática del MEF	53
2.4.3.3.	El Método de los Residuos Ponderados	54
3.	MATERIALES Y MÉTODOS	58
3.1.	Generalidades	58
3.2.	Descripción del problema	60
3.2.1.	Tiempo de cierre	64

3.2.1.1.	Rápido: $0 < t_c < 2t_o$	64
3.2.1.2.	Lento: $t_c > 2t_o$	65
3.3.	Formulación matemática del problema	65
3.3.1.	El medio continuo	65
3.3.2.	Ecuación Dinámica (Movimiento)	67
3.3.3.	Ecuación de continuidad	74
3.4.	Comentarios generales sobre la Ecuación Dinámica y la Ecuación de Continuidad	82
3.5.	Condiciones de contorno	84
3.5.1.	Nudo simple	86
3.5.2.	Línea de Reservorio	89
3.5.3.	Línea de Válvula	92
3.5.3.1.	Ecuaciones básicas	94
4.	MODELACIÓN DEL PROBLEMA	98
4.1.	Generalidades	98
4.2.	Modelación en regimen permanente	99
4.2.1.	Formulación directa del Método de Elementos Finitos	99
4.2.1.1.	Tuberías en serie	102
4.2.1.2.	Tuberías en paralelo	103
4.2.1.3.	Formulación de elementos finitos	104
4.2.2.	Modelo residual del Método de Elementos Finitos	106
4.2.2.1.	Solución con MEF	107

ÍNDICE GENERAL

4.2.2.1.1.	Obtención de las matrices del elemento	108
4.2.2.1.2.	Solución del sistema de ecuaciones no lineales . .	110
4.2.2.1.3.	Ensamblaje de matrices de elementos	112
4.2.2.2.	Recomendaciones para la aplicación del MEF	113
4.3.	Modelamiento en regimen no permanente	114
4.3.1.	Modelamiento con el Método de Elementos Finitos	114
4.3.1.1.	Descripción de los elementos Finitos	115
4.3.1.1.1.	Elemento unidimensional	117
4.3.1.1.2.	Patrones en el modelado	118
4.3.1.2.	Discretización de redes de tuberías	118
4.3.1.3.	Condiciones de contorno	122
4.3.1.4.	Condiciones iniciales	123
4.3.1.5.	Condiciones finales	124
4.3.1.6.	Modelo general del flujo no permanente	124
4.3.1.6.1.	Ecuaciones gobernantes	124
4.3.1.6.2.	Formulación con el Método de Elementos Finitos	125
4.3.1.6.3.	Elemento lineal unidimensional	127
4.3.1.6.4.	Obtención de las matrices	132
4.3.1.6.5.	Discretización temporal con el Método de Dife- rencias Finitas (MDF)	133
4.3.1.6.6.	Discretización del tiempo por el Método de Ele- mentos Finitos (MEF)	137

4.4. Programación en MATLAB	143
4.4.1. Modelo matemático	145
4.4.2. Descripción del programa GAMEF v2014	145
4.4.2.1. Ingreso de datos	146
4.4.2.2. Discretización o enmallado	146
4.4.2.3. Solución	147
4.4.2.4. Visualización de los resultados	147
4.4.2.5. Alcances y limitaciones del programa	147
4.4.3. Modelado de una red de distribución de agua	148
4.4.3.1. Construcción del modelo	148
4.4.3.2. Solución en regimen permanente	150
4.4.3.2.1. Solución con <i>GAMEF v2014</i>	150
4.4.3.2.2. Solución con <i>WaterCAD V8i</i>	156
4.4.3.3. Solución en regimen no permanente	159
4.4.3.3.1. Solución con <i>GAMEF v2014</i>	159
4.4.3.4. Ensamblaje de las matrices [K1] y [K2]	161
4.4.3.4.1. Solución con <i>HAMMER V8 XM</i>	162
5. APLICACIÓN DEL MODELO	165
5.1. Aspectos generales del proyecto	165
5.1.1. Ubicación geográfica	166
5.1.2. Población beneficiaria	167

ÍNDICE GENERAL

5.1.3.	Situación actual del servicio de saneamiento básico	168
5.1.4.	Descripción del proyecto	169
5.2.	Configuración del modelo	169
5.2.1.	Periodo Óptimo de Diseño (POD)	169
5.2.2.	Población de diseño	171
5.2.2.1.	Crecimiento aritmético	171
5.2.2.2.	Crecimiento geométrico	171
5.2.2.3.	Método de Wappaus	172
5.2.2.4.	Método exponencial	172
5.2.3.	Dotación de agua	172
5.2.4.	Caudales de diseño	174
5.2.4.1.	Caudal máximo diario (Q_{md})	174
5.2.4.2.	Caudal máximo horario (Q_{mh})	174
5.2.5.	Red de agua potable Miraflores	175
5.2.5.1.	Solución en regimen permanente	176
5.2.5.2.	Solución en regimen no permanente	186
6.	DISCUSIÓN DE RESULTADOS	192
6.1.	Discusión sobre el modelo propuesto	192
6.1.1.	Sobre el modelamiento de la red típica	193
6.1.2.	Otras soluciones	193
6.2.	De la RAP de la comunidad de Miraflores	203

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	208
7.1. Conclusiones	208
7.1.1. De la teoría	208
7.1.2. De la metodología	209
7.1.3. Del modelo	209
7.1.4. De los resultados	211
7.1.5. De la tesis	212
7.2. Recomendaciones	212
7.3. Investigaciones futuras	213
Bibliografía	214
A. Manual del Programa GAMEF	218
A.1. Fase Preproceso	219
A.1.1. Definir la geometría del sistema a presión	220
A.1.2. Propiedades del fluido y la tubería	223
A.1.3. Discretización de las tuberías	223
A.1.3.1. Malla inicial	223
A.1.3.2. Refinar malla	224
A.1.4. Condiciones de borde	225
A.2. Fase solución	225
A.2.1. Solución en regimen permanente	226
A.2.1.1. Fase Postproceso	227
A.2.2. Solución en regimen no permanente	229

ÍNDICE GENERAL

B. Código Fuente Programa GAMEF	233
C. PLANOS	262

Índice de figuras

2.1. La presión disminuye a lo largo del flujo en un fluido real, al contrario de lo que ocurre en un fluido perfecto	15
2.2. Régimen laminar y régimen turbulento. En régimen laminar el movimiento de las capas del fluido es ordenado, en régimen turbulento no	15
2.3. En un fluido real en movimiento aparecen fuerzas viscosas de rozamiento \vec{F}_{roz} entre las distintas capas del fluido, con una fuerza por unidad de superficie τ . Esto hace que la velocidad en una sección del fluido no sea uniforme.	16
2.4. Reogramas para distintos tipos de fluidos	18
2.5. Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales	20
2.6. Tres tuberías en serie, conectando dos tanques Q_{L_1} y Q_{L_2} representan caudales laterales que salen de las uniones entre las tuberías. La línea punteada representa la línea de gradiente hidráulico	22
2.7. Esquema tridimensional de dos tuberías en paralelo mostrando las líneas de gradiente hidráulico a lo largo de cada una de ellas.	25
2.8. Red abierta	27
2.9. Red cerrada de distribución de agua potable	28
2.10. Red hidráulica de distribución de agua	30

ÍNDICE DE FIGURAS

2.11. Estimaciones para la derivada de $f(X)$ en P utilizando diferencias hacia delante, hacia atrás y central	49
3.1. Esquema de instalación susceptible al fenómeno de golpe de ariete	61
3.2. Esquema de evolución del golpe de ariete	62
3.3. Fluidos dinámicos e ideales	66
3.4. Notación y diagrama de cuerpo libre para la Ecuación Dinámica	68
3.5. Distribución de esfuerzo cortante en la tubería	69
3.6. Área de aplicación del esfuerzo cortante en la tubería	70
3.7. Pérdidas por fricción en la tubería	71
3.8. Notación para la Ecuación de Continuidad	74
3.9. Aumento en el volumen de líquido V_{in} durante el tiempo δt	75
3.10. Parte interior de la tubería sometida a esfuerzos internos	76
3.11. Parte exterior de la tubería sometida a esfuerzos externos	77
3.12. Área del sector circular	79
3.13. Volumen original	80
3.14. Diagrama del esquema de un nudo simple	86
3.15. Diagrama del esquema de la línea de reservorio	89
3.16. Diagrama del esquema de la línea de válvula	94
3.17. Diagrama del esquema de la válvula de cierre	97
4.1. Flujos Laminar y turbulento	100
4.2. Flujo de fluido a través de un conducto de sección variable	101

ÍNDICE DE FIGURAS

4.3. Tuberías en serie	102
4.4. Tuberías en paralelo	104
4.5. Flujo laminar incompresible de un fluido viscoso a través de una red de sistemas de tuberías	105
4.6. Enmallado con elemento lineal	116
4.7. Elemento tubería 1D	117
4.8. Malla de elementos finitos 1D	117
4.9. Sistema de coordenadas local y global	119
4.10. Generación de malla para una red de distribución de agua	121
4.11. Generación de malla en 58 <i>elementos</i> y 56 <i>nodos</i>	122
4.12. Refinamiento de la malla en 99 <i>elementos</i> y 97 <i>nodos</i>	123
4.13. Variación de las funciones de forma, alturas piezométricas, velocidades y sus derivadas en un elemento lineal	131
4.14. Variación de las alturas piezométricas con respecto al tiempo	134
4.15. Discretización del tiempo en el intervalo n y $n + 1$	138
4.16. Diagrama de flujo para simular el flujo transitorio con el Método de Elementos Finitos	144
4.17. Portada principal del programa <i>GAMEF V2014</i>	146
4.18. Modelo de red de distribución de agua	149
4.19. Modelo de red típica de distribución de agua	151
4.20. Alturas piezométrica en el sistema de tuberías <i>GAMEF v2014</i>	153
4.21. Presiones en el sistema de tuberías <i>GAMEF v2014</i>	153

ÍNDICE DE FIGURAS

4.22. Caudales en el sistema de tuberías <i>GAMEF v2014</i>	154
4.23. Velocidades en el sistema de tuberías <i>GAMEF v2014</i>	154
4.24. Modelo de red de distribución de agua	156
4.25. Modelo de red de distribución de agua	162
4.26. Condiciones iniciales en HAMMER V8i	163
4.27. Resumen del calculo transitorio en HAMMER V8i	163
4.28. Presiones y alturas piezométricas extremas en HAMMER V8i	164
5.1. Comunidad de Miraflores del Distrito Vilcanchos	166
5.2. Red de agua potable de la comunidad de Miraflores	175
5.3. Red de Agua Potable (RAP) de la Comunidad de Miradores <i>GAMEF-V2014</i>	176
5.4. Enmallado en 296 nodos y 308 elementos de la RAP de la Comunidad de Miradores <i>GAMEF-V2014</i>	177
5.5. Propiedades del fluido y la tubería para la RAP de la Comunidad de Mi- radores <i>GAMEF-V2014</i>	177
5.6. Alturas piezométricas en la RAP de la Comunidad de Miradores <i>GAMEF- V2014</i>	178
5.7. Presiones en la RAP de la Comunidad de Miradores <i>GAMEF-V2014</i> . . .	178
5.8. Caudales la RAP de la Comunidad de Miradores <i>GAMEF-V2014</i>	179
5.9. Velocidades en la RAP de la Comunidad de Miradores <i>GAMEF-V2014</i> . .	179
5.10. Evolución temporal de la altura piezométrica en el <i>nodo 10</i> <i>GAMEF-V2014</i>	186
5.11. Evolución temporal de la altura piezométrica en el <i>nodo 20</i> <i>GAMEF-V2014</i>	187
5.12. Variación nodal de la altura piezométrica en $t = 0$ seg <i>GAMEF-V2014</i> . . .	187

ÍNDICE DE FIGURAS

5.13. Variación nodal de la altura piezométrica en $t = 15\text{seg}$ <i>GAMEF-V2014</i> . . .	188
5.14. Variación nodal de la altura piezométrica en $t = 30\text{seg}$ <i>GAMEF-V2014</i> . . .	188
5.15. Solución del problema con el programa comercial <i>HAMMER V8i</i>	190
6.1. Red típica de agua potable	194
6.2. Generación de malla de la red típica en 50 nodos y 52 elementos	194
6.3. Alturas piezométricas en la red típica	195
6.4. Altura de presiones en la red típica	195
6.5. Caudales en la red típica	196
6.6. Velocidades en la red típica	196
6.7. Variación de las alturas piezométricas con respecto al tiempo del nodo 2 de la red típica	197
6.8. Variación de las alturas piezométricas con respecto al tiempo del nodo 7 de la red típica	197
6.9. Variación de la altura piezométrica de todos los nodos en $t = 0\text{seg}$ de la red típica	198
6.10. Variación de la altura piezométrica de todos los nodos en $t = 30,0917\text{seg}$ de la red típica	198
6.11. Red de agua potable con 2 reservorios	199
6.12. Alturas piezométricas en la RAP de dos reservorios	199
6.13. Altura de presiones en la RAP de dos reservorios	200
6.14. Caudales en la RAP de dos reservorios	200
6.15. Velocidades típica de agua potable	201

ÍNDICE DE FIGURAS

6.16. Variación de la altura piezométrica con respecto al tiempo en el nodo 8 de la RAP de dos reservorios	201
6.17. Variación de la altura piezométrica de todos los nodos en el minuto $t = 30,0153$ de la RAP de dos reservorios	202
6.18. Alturas piezométricas en la RAP de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha - Vilcanchos	204
6.19. Altura de presiones en la RAP de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha - Vilcanchos	205
6.20. Variación de la altura piezométrica con respecto al tiempo en el nodo 2 de la red	206
6.21. Variación de la altura piezométrica en todos los nodos en un determinado tiempo	206
A.1. Ventana principal del programa "GAMEF-V2014"	219
A.2. Matriz de descripción de coordenadas de los nodos <i>GAMEF-V2014</i>	220
A.3. Matriz de descripción de la conectividad de las tuberías <i>GAMEF-V2014</i>	221
A.4. Matriz de descripción de los reservorios <i>GAMEF-V2014</i>	221
A.5. Matriz de descripción de las válvulas <i>GAMEF-V2014</i>	222
A.6. Vizualizando la red de agua potable <i>GAMEF-V2014</i>	222
A.7. Vizualizando la red de agua potable <i>GAMEF-V2014</i>	223
A.8. Generación de la malla inicial <i>GAMEF-V2014</i>	224
A.9. Refinamiento del enmallado <i>GAMEF-V2014</i>	225
A.10. Ejecutando la simulación en regimen permanente <i>GAMEF-V2014</i>	226
A.11. Alturas Piezométricas calculados con <i>GAMEF-V2014</i>	226

ÍNDICE DE FIGURAS

A.12.Presiones calculados con <i>GAMEF-V2014</i>	227
A.13.Caudales en las tuberías del sistema <i>GAMEF-V2014</i>	228
A.14.Velocidades en las tuberías del sistema <i>GAMEF-V2014</i>	228
A.15.Ejecutando la simulación en regimen no permanente <i>GAMEF-V2014</i> . . .	229
A.16.Evolución temporal de la presión en el nodo 2 <i>GAMEF-V2014</i>	229
A.17.Evolución temporal de la presión en el nodo 3 <i>GAMEF-V2014</i>	230
A.18.Evolución temporal de la presión en el nodo 4 <i>GAMEF-V2014</i>	230
A.19.Evolución temporal de la presión en el nodo 5 <i>GAMEF-V2014</i>	231
A.20.Evolución temporal de la presión en el nodo 6 <i>GAMEF-V2014</i>	231
A.21.Evolución temporal de la presión en el nodo 7 <i>GAMEF-V2014</i>	232

Índice de cuadros

2.1. Expresión general para ϕ	43
3.1. Tiempo de cierre de la válvula, tipo de flujo y modelo	94
4.1. Conectividad de las tuberías	149
4.2. Datos de los nodos	150
4.3. Datos de los reervorios	150
4.4. Resultado de los nodos con GAMEF v2014	155
4.5. Resultado de las tuberías con GAMEF v2014	155
4.6. Resultado de los nodos con WaterCAD V8i	158
4.7. Resultado de las tuberías con WaterCAD V8i	158
4.8. Comparación de resultados de los nodos entre <i>GAMEF v2014</i> y <i>WaterCAD V8i</i>	159
4.9. Comparación de resultados de los elementos entre <i>GAMEF v2014</i> y <i>WaterCAD V8i</i>	159
4.10. Condiciones iniciales para $t = 0$ <i>GAMEF v2014</i>	160
4.11. Presiones y alturas piezométricas extremas con <i>GAMEF v2014</i>	160

ÍNDICE DE CUADROS

5.1. Población de la zona del proyecto	167
5.2. Periodos de diseño según el Reglamento Nacional de Edificaciones	170
5.3. Vida útil de las tuberías	171
5.4. Dotaciones según el número de habitantes	173
5.5. Dotación por Región sin proyección de servicios de alcantarillado	173
5.6. Dotación por Región con proyección de servicios de alcantarillado	173
5.7. Dotación según el Reglamento Nacional de Edificaciones	173
5.8. Resultado de los nodos con <i>GAMEF v2014</i>	180
5.9. Resultado de los nodos con <i>WaterCAD V8i</i>	181
5.10. Resultado de las tuberías con <i>GAMEF v2014</i>	182
5.11. Resultado de las tuberías con <i>GAMEF v2014</i>	183
5.12. Resultado de las tuberías con <i>WaterCAD V8i</i>	184
5.13. Resultado de las tuberías con <i>WaterCAD V8i</i>	185
5.14. Alturas piezométricas y presiones extremas en los nodos con <i>GAMEF v2014</i>	189
5.15. Alturas piezométricas y presiones extremas en los nodos con <i>HAMMER V8i</i>	191

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Generalidades

La revolución de la información en las últimas décadas ha cambiado súbitamente las metodologías tradicionales de planificación, modelación y toma de decisiones en las ciencias y tecnologías relacionadas con los recursos hídricos. El estudio y aplicación de los temas relacionados con los recursos hídricos y la informática han sido agrupados en la disciplina denominada Hidroinformática la cual, en los últimos años se ha convertido en el enfoque moderno y racional que ha permitido a través de los ordenadores, relacionar los usuarios y la tecnología de la información facilitando así procesos eficientes y eficaces en el contexto del desarrollo sostenible de los recursos hídricos. Con los avances actuales y desarrollos tecnológicos, las empresas del sector de agua potable y saneamiento básico y en especial aquellas dedicadas a la producción y distribución de agua deben utilizar metodologías sofisticadas y disponer de modelos hidráulicos de las redes de distribución lo suficientemente confiables como para poder tomar decisiones a partir de las simulaciones de estos. Pero a pesar de la progresión de las técnicas informáticas que han impulsado la evolución de los modelos numéricos en el campo de la hidráulica, los algoritmos de los modelos más

comúnmente utilizados para el estudio de problemas reales están cada vez más alejados de los últimos esquemas desarrollados en las universidades y centros de investigación. La necesidad de estudiar fenómenos más complejos donde la hipótesis de flujo permanente se aleja demasiado de la realidad, y que sistemas de redes de tuberías a presión se encuentran muchas situaciones donde el flujo parece ser efectivamente no permanente, es decir, predominan las transiciones de las variables de estado en tiempo y espacio, nos condujo a la modelación matemática del flujo no-permanente (golpe de ariete, conocido en inglés como “*waterhammer*”), para conocer los valores que toman las variables hidráulicas (Presiones, caudales, velocidades, etc.) a partir de la resolución por Métodos Híbridos de unas ecuaciones obtenidas con una serie de hipótesis, basado en la combinación de los esquemas numéricos del método de las características para calcular las secciones de borde de un tramo y las interiores con el Método de Diferencia Finitas. Para ello se pueden hacer distintas aproximaciones según cuales sean las principales fuerzas determinantes del movimiento del agua, y según qué variables interese conocer.

1.2. Antecedentes

El análisis de flujo no permanente ha sido estudiado desde el siglo pasado. Según *Watters* (1984), los primeros trabajos relacionados con la propagación de velocidad de onda son imputados a *Weber* (1850), *Marey* (1875) y *Korteweg* (1878). En 1898, *Joukowski* muestra la relación entre el cambio de la velocidad de la onda de presión y la densidad del líquido. Al mismo tiempo, *Frizell* estudia el golpe de ariete, las presiones en turbinas y desarrolla algunas ecuaciones para la velocidad de onda y las presiones generadas por cierres de válvula repentinos. Debido a sus contribuciones, *Frizell* y *Joukowski* son considerados como los fundadores del análisis de flujo no permanente [33].

En 1913, *Allievi* inventa un *método matemático gráfico* para la solución de los problemas de *golpe de ariete* que fueron usados durante los próximos cincuenta años. En 1930, el efecto de fricción es incluido en el análisis de fenómenos transitorios. En 1933 y 1937 muchos estudios sobre el comportamiento transitorio de bombas centrífugas, cámara de aire, válvulas, etc. han sido publicados en algunas conferencias. Durante estos años muchas contribuciones aparecieron dentro del campo del métodos gráfico por algunos investigadores como *Allievi, Angus, Bergeron, Schnyder, Wood, Knapp, Paynter y Rich* (*Watters, 1984*) [33].

En 1960, una nueva etapa de análisis del *flujo no permanente* comenzó con la aparición de las computadores digitales. La contribución relevante de *Benjamin Wylie y Victor Streeter* aparece en aquel tiempo, mostrando algunas aplicaciones computacionales para la solución de muchos problemas. Más tarde, la historia de análisis de flujo no permanente registra la contribución de muchos investigadores relevantes como *Pickford, Tullis, Fox, Chaudhry, Sharp, Watters, Karney* y otros [33].

En las últimas décadas el análisis del flujo no permanente en redes de tuberías se ha desarrollado a través de modelos matemáticos y físicos con el desarrollo de algoritmos numéricos basados en el clásico *Método de las Características* (MOC) y los métodos alternativos como el *Método de Diferencias Finitas* (IFDM, EFDM, *implícita o explícita*) y una gran variedad de algoritmos de primer y de segundo orden encontrado en la literatura especializada como los *Métodos Híbridos* (MHs), *Método de Elementos Finitos* (MEF) y el *Método de Volúmenes Finitos* (FVM). Todos los métodos numéricos subdividen (discretizan) el espacio posición-tiempo en intervalos finitos y calculan las variables de estado Q y H en dichos puntos. En general, cada método posee distintas propiedades numéricas que afectan su exactitud, estabilidad (convergencia) y tiempo de ejecución, lo cual acota también su campo de acción y define sus ventajas y desventajas relativas.

1.3. Justificación

La Tierra es el único planeta del sistema solar que tiene agua en los 3 estados. Las aguas cubren el 70% de la superficie de la Tierra y la profundidad media de los océanos es de 3800 metros. De toda el agua del planeta menos del 1% es directamente aprovechable por la humanidad (aguas subterráneas, ríos y lagos). Y a pesar de ser un planeta privilegiado, hay más de mil millones de personas en todo el mundo que no tienen acceso al agua potable. Toman agua en malas condiciones higiénicas y esa circunstancia origina enfermedades y muertes. Según la ONU cada día mueren 6000 niños por enfermedades provocadas por el consumo de agua en mal estado. Es una responsabilidad compartida de los ingenieros dedicados al diseño de sistemas de agua potable y las autoridades de todas las naciones del mundo garantizar el acceso a este derecho, pero en condiciones óptimas y de calidad. A pesar de que el planeta tierra está experimentando un cambio climático y la escases generalizada del recurso agua en los últimos años, los ingenieros civiles e hidráulicos debemos tener un compromiso con la elaboración y ejecución de proyectos diseñados adecuadamente utilizando los métodos más exactos ya que la revolución de la información en las últimas décadas ha cambiado súbitamente las metodologías tradicionales de planificación, modelación y toma de decisiones en las ciencias y tecnologías relacionadas con los recursos hídricos. El estudio y aplicación de los temas relacionados con los recursos hídricos y la informática han sido agrupados en la disciplina denominada Hidroinformática la cual, en los últimos años se ha convertido en el enfoque moderno y racional que ha permitido a través de los ordenadores, relacionar los usuarios y la tecnología de la información facilitando así procesos eficientes y eficaces en el contexto del desarrollo sostenible de los recursos hídricos. Pero a pesar de la progresión de las técnicas informáticas que han impulsado la evolución de los modelos numéricos en el campo de la hidráulica, los algoritmos de los modelos más comúnmente utilizados para el estudio de problemas reales están cada vez más alejados de los últimos esquemas desarrollados en las universidades

y centros de investigación. La necesidad de estudiar fenómenos más complejos donde la hipótesis de flujo permanente se aleja demasiado de la realidad, y que en sistemas de redes de tuberías a presión se encuentran muchas situaciones donde el flujo es realmente no permanente, es decir, predominan las transiciones de las variables de estado en tiempo y espacio. La inquietud de resolver este problema nos condujo a la modelación matemática del flujo no-permanente (golpe de ariete, conocido en inglés como "waterhammer"), para conocer los valores que toman las variables hidráulicas (Presiones, caudales, velocidades, etc.) a partir de la resolución de las ecuaciones gobernantes utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF). Y para validar el modelo propuesto se desarrollará un Software en MATLAB que nos permitirá calcular, simular y representar la propagación de las ondas de presión en redes de tuberías complejas con muchos dispositivos de control hidráulico y condiciones de frontera, este programa será una herramienta de cálculo y diseño, con el cual se analizará un caso práctico y real de una red de distribución de agua en la ciudad de Ayacucho.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo General

Desarrollar un modelo matemático global de alta resolución basado en el Método de Elementos Finitos, para el análisis y simulación del flujo no permanente en sistemas de abastecimiento de agua.

1.4.2. Objetivos Específicos

1. Desarrollar un modelo matemático de simulación del flujo no permanente, usando el método de elementos finitos que incorpore en un esquema conjunto los subproblemas

de análisis dinámico.

2. Implementar el modelo matemático propuesto desarrollando un programa (software), en MATLAB, como una herramienta de análisis y diseño para simular el flujo no permanente en sistemas hidráulicos a presión.
3. Evaluar la aplicabilidad del modelo propuesto y comparar los resultados obtenidos con el software elaborado y el software comercial HAMMER, de la empresa Bentley's Haestad Methods.
4. Generalizar un método global de análisis y diseño de sistemas de abastecimiento de agua, que contribuya asumir el reto de planificar, diseñar y gestionar eficientemente con las tecnologías actuales en la industria de los recursos hídricos.
5. Promover la modelación matemática en Elementos Finitos aplicados a la ingeniería hidráulica en la escuela de ingeniería civil de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga.

1.5. Organización del estudio

- **Capítulo 1:** En esta primera parte de la tesis se hace una introducción al estudio, análisis y modelamiento del *Golpe de Ariete*, así mismo se describe los antecedentes sobre el tema a nivel mundial como a nivel local, consiguientemente se justifica la importancia de la tesis o los aportes mas relevantes, así mismo se plantea los objetivos a alcanzar en el presente trabajo de investigación.
- **Capítulo 2:** Describe explícitamente sobre el *Estado del arte* del Golpe de Ariete en redes a presión sobre todo en sistemas de distribución de agua potable, es decir sobre los avances a nivel de teoría, modelos matemáticos e implementación computacional

del Golpe de Ariete a través de la historia de la humanidad en todo el planeta tierra

- **Capítulo 3:** Se describe y se analiza el fenómeno del Golpe de Ariete, las causas y sus consecuencia que podría generar en caso de ocurrir, también se hace la formulación matemática de las ecuaciones que gobierna este fenómeno.
- **Capítulo 4:** Se hace el modelamiento del problema y se resuelve las ecuaciones diferenciales que gobierna el fenómeno del Golpe de Ariete Utilizando el *Método de Elementos Finitos*, se establece las condiciones iniciales y las condiciones de contorno para la modelación global de sistemas de distribución de agua..
- **Capítulo 5:** Se hace una aplicación práctica del esquema numérico desarrollado basado en el Método de Elementos Finitos a una Red de Agua Potable en la Región de Ayacucho, así mismo se presenta varias soluciones generales para validar el modelo.
- **Capítulo 6:** Se hace una discusión detallada sobre cada caso relevante, sobre la aplicabilidad del modelo propuesto, criterios para una adecuada modelación y simulación del problema y sobre los resultados de la calibración.
- **Capítulo 7:** Se describe las principales conclusiones de la tesis, como resultado final del trabajo de investigación así mismo se detalla las recomendaciones sobre el tema.
- **Bibliografía:** Se presenta la lista completa de todos los libros, páginas y todas las referencias utilizadas para el desarrollo de la tesis .
- **Apéndice A:** Se muestra paso a paso el manual del programa desarrollado en MATLAB.
- **Apéndice B:** Se presenta código Fuente del Programa GAMEF.
- **Apéndice C:** Se presenta los planos de la aplicación practica.

Capítulo 2

REVISIÓN DE LA LITERATURA

2.1. Mecánica de fluidos

Parte de la Física que se ocupa de la acción de los fluidos en reposo o en movimiento, así como de las aplicaciones y mecanismos de ingeniería que utilizan fluidos. La mecánica de fluidos es fundamental en campos tan diversos como la aeronáutica, la ingeniería química, civil e industrial, la meteorología, las construcciones navales y la oceanografía. La mecánica de fluidos puede subdividirse en dos campos principales: la estática de fluidos, o hidrostática, que se ocupa de fluidos en reposo, y la dinámica de fluidos, que trata de fluidos en movimiento. El término de hidrodinámica se aplica al flujo de líquidos o al flujo de los gases a baja velocidad, en el que puede considerarse que el gas es esencialmente incompresible. La aerodinámica, o dinámica de gases, se ocupa del comportamiento de los gases cuando los cambios de velocidad y presión son suficientemente grandes para que sea necesario incluir los efectos de compresibilidad.

2.1.1. Propiedades y características de los fluidos

Un fluido es una sustancia o medio continuo que se deforma continuamente en el tiempo ante la aplicación de una sollicitación o tensión tangencial sin importar la magnitud de ésta. El estudio de la mecánica de fluidos trata típicamente con un fluido en flujo continuo o con una pequeña cantidad de fluido en reposo, por lo tanto, es más conveniente relacionar la masa y el peso del fluido con un volumen dado del fluido.

Las propiedades de un fluido son las que definen el comportamiento y características del mismo tanto en reposo como en movimiento. Existen propiedades primarias y propiedades secundarias del fluido.

Propiedades primarias o termodinámicas:

- Presión
- Densidad
- Temperatura
- Energía interna
- Entalpía
- Entropía
- Calores específicos
- Viscosidad

Las características de los fluidos son:

- La posición relativa de sus moléculas puede cambiar continuamente.

- Todos los fluidos son compresibles en cierto grado. No obstante, los líquidos son mucho menos compresibles que los gases.
- Tienen viscosidad, aunque la viscosidad en los gases es mucho menor que en los líquidos.

2.1.2. Flujo compresible y flujo incompresible

2.1.2.1. Flujo compresible

Todos los fluidos son compresibles, incluyendo los líquidos. Cuando estos cambios de volumen son demasiado grandes se opta por considerar el flujo como compresible (que muestran una variación significativa de la densidad como resultado de fluir), esto sucede cuando la velocidad del flujo es cercano a la velocidad del sonido. Estos cambios suelen suceder principalmente en los gases ya que para alcanzar estas velocidades de flujo el líquidos se precisa de presiones del orden de 1000 atmósferas, en cambio un gas sólo precisa una relación de presiones de 2:1 para alcanzar velocidades sónicas. La compresibilidad de un flujo es básicamente una medida en el cambio de la densidad. Los gases son en general muy compresibles, en cambio, la mayoría de los líquidos tienen una compresibilidad muy baja. Por ejemplo, una presión de 500 kPa provoca un cambio de densidad en el agua a temperatura ambiente de solamente 0,024 %, en cambio esta misma presión aplicada al aire provoca un cambio de densidad de 250 %. Por esto normalmente al estudio de los flujos compresibles se le conoce como dinámica de gases, siendo esta una nueva rama de la mecánica de fluidos, la cual describe estos flujos.

En un flujo usualmente hay cambios en la presión, asociados con cambios en la velocidad. En general, estos cambios de presión inducirán a cambios de densidad, los cuales influyen en el flujo, si estos cambios son importantes los cambios de temperatura presentados son apreciables. Aunque los cambios de densidad en un flujo pueden ser muy importantes hay

una gran cantidad de situaciones de importancia práctica en los que estos cambios son despreciables.

El flujo de un fluido compresible se rige por la primera ley de la termodinámica en los balances de energía y con la segunda ley de la termodinámica, que relaciona la transferencia de calor y la irreversibilidad con la entropía. El flujo es afectado por efectos cinéticos y dinámicos, descritos por las leyes de Newton, en un marco de referencia inercial aquel donde las leyes de Newton son aplicables. Además, el flujo cumple con los requerimientos de conservación de masa. Es sabido que muchas propiedades, tales como la velocidad del fluido en un tubo, no son uniformes a lo largo de la corriente.

2.1.2.2. Flujo incompresible

En mecánica de fluidos, un flujo se clasifica en compresible e incompresible, dependiendo del nivel de variación de la densidad del fluido durante ese flujo. La incompresibilidad es una aproximación y se dice que el flujo es incompresible si la densidad permanece aproximadamente constante a lo largo de todo el flujo. Por lo tanto, el volumen de todas las porciones del fluido permanece inalterado sobre el curso de su movimiento cuando el flujo o el fluido es incompresible. En esencia, las densidades de los líquidos son constantes y así el flujo de ellos es típicamente incompresible. Cuando se analizan flujos de gas a velocidades altas, la velocidad del flujo a menudo se expresa en términos del número adimensional de Mach, que se define como

$$M = \frac{v}{c} \quad (2.1.1)$$

donde v es la velocidad del flujo en ese medio y c es la velocidad del sonido en ese medio, cuyo valor es de 346 m/s en el aire a temperatura ambiente al nivel del mar. Se dice que un flujo es sónico cuando $Ma = 1$, subsónico cuando $Ma < 1$, supersónico cuando

$Ma > 1$, e hipersónico cuando $Ma \gg 1$. Los flujos de líquidos son incompresibles hasta un nivel alto de exactitud, pero el nivel de variación de la densidad en los flujos de gases y el nivel consecuente de aproximación que se hace cuando se modelan estos flujos como incompresibles depende del número de Mach. Con frecuencia, los flujos de gases se pueden aproximar como incompresibles si los cambios en la densidad se encuentran por debajo de alrededor de 100 m/s. Así el flujo de un gas no es necesariamente compresible.

2.1.3. Regímenes de flujo laminar y turbulento

Los primeros experimentos cuidadosamente documentados del rozamiento en flujos de baja velocidad a través de tuberías fueron realizados independientemente en 1839 por el fisiólogo francés Jean Louis Marie Poiseuille, que estaba interesado por las características del flujo de la sangre, y en 1840 por el ingeniero hidráulico alemán Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen. El primer intento de incluir los efectos de la viscosidad en las ecuaciones matemáticas se debió al ingeniero francés Claude Louis Marie Navier en 1827 e, independientemente, al matemático británico George Gabriel Stokes, quien en 1845 perfeccionó las ecuaciones básicas para los fluidos viscosos incompresibles. Actualmente se las conoce como ecuaciones de Navier-Stokes, y son tan complejas que sólo se pueden aplicar a flujos sencillos. Uno de ellos es el de un fluido real que circula a través de una tubería recta. El teorema de Bernoulli no se puede aplicar aquí, porque parte de la energía mecánica total se disipa como consecuencia del rozamiento viscoso, lo que provoca una caída de presión a lo largo de la tubería. Las ecuaciones sugieren que, dados una tubería y un fluido determinados, esta caída de presión debería ser proporcional a la velocidad de flujo. Los experimentos realizados por primera vez a mediados del siglo XIX demostraron que esto sólo era cierto para velocidades bajas; para velocidades mayores, la caída de presión era más bien proporcional al cuadrado de la velocidad. Este problema no se resolvió hasta 1883, cuando el ingeniero británico Osborne Reynolds demostró la existencia de dos tipos

de flujo viscoso en tuberías. A velocidades bajas, las partículas del fluido siguen las líneas de corriente (flujo laminar), y los resultados experimentales coinciden con las predicciones analíticas. A velocidades más elevadas, surgen fluctuaciones en la velocidad del flujo, o remolinos (flujo turbulento), en una forma que ni siquiera en la actualidad se puede predecir completamente. Reynolds también determinó que la transición del flujo laminar al turbulento era función de un único parámetro, que desde entonces se conoce como número de Reynolds. Si el número de Reynolds que se representa por R , es menor de 2.100 aproximadamente, el flujo a través de la tubería es siempre laminar; cuando los valores son más elevados suele ser turbulento. El concepto de número de Reynolds es esencial para gran parte de la moderna mecánica de fluidos para estudiar el movimiento de un fluido en el interior de una tubería, o alrededor de un obstáculo sólido.

2.1.3.1. Flujo Laminar

Es uno de los dos tipos principales de flujo en fluido. Se llama flujo laminar o corriente laminar, al movimiento de un fluido cuando éste es ordenado, estratificado, suave. En un flujo laminar el fluido se mueve en láminas paralelas sin entremezclarse y cada partícula de fluido sigue una trayectoria suave, llamada línea de corriente. En flujos laminares el mecanismo de transporte lateral es exclusivamente molecular.

El flujo laminar es típico de fluidos a velocidades bajas o viscosidades altas, mientras fluidos de viscosidad baja, velocidad alta o grandes caudales suelen ser turbulentos. El número de Reynolds es un parámetro adimensional importante en las ecuaciones que describen en que condiciones el flujo será laminar o turbulento. En el caso de fluido que se mueve en un tubo de sección circular, el flujo persistente será laminar por debajo de un número de Reynolds crítico de aproximadamente 2040.1 Para números de Reynolds más altos el flujo turbulento puede sostenerse de forma indefinida. Sin embargo, el número de Reynolds que delimita flujo turbulento y laminar depende de la geometría del sistema

y además la transición de flujo laminar a turbulento es en general sensible a ruido e imperfecciones en el sistema.

El perfil laminar de velocidades en una tubería tiene forma de una parábola, donde la velocidad máxima se encuentra en el eje del tubo y la velocidad es igual a cero en la pared del tubo. En este caso, la pérdida de energía es proporcional a la velocidad media, mucho menor que en el caso de flujo turbulento.

2.1.3.2. Flujo Turbulento

En mecánica de fluidos, se llama *flujo turbulento* o corriente turbulenta al movimiento de un fluido que se da en forma caótica, en que las partículas se mueven desordenadamente y las trayectorias de las partículas se encuentran formando pequeños remolinos aperiódicos, (no coordinados) como por ejemplo el agua en un canal de gran pendiente. Debido a esto, la trayectoria de una partícula se puede predecir hasta una cierta escala, a partir de la cual la trayectoria de la misma es impredecible, más precisamente caótica.

Las primeras explicaciones científicas de la formación del flujo turbulento proceden de Andréi Kolmogórov y Lev D. Landau (teoría de Hopf-Landau). Aunque la teoría modernamente aceptada de la turbulencia fue propuesta en 1974 por David Ruelle y Floris Takens.

2.1.4. Dinámica de fluidos reales

A menudo, las fuerzas no conservativas en un fluido no pueden despreciarse. Estas fuerzas dan lugar a una disipación de la energía mecánica del fluido en energía interna del mismo, igual que las fuerzas de rozamiento disipan energía de un bloque deslizante en energía interna del bloque y de la superficie sobre la que se desliza (aumentan sus temperaturas). Como consecuencia de esto, cuando un fluido viscoso circula por una tubería horizontal

uniforme, la presión a lo largo de una línea de flujo disminuye, al contrario de lo que ocurre en un fluido perfecto (Fig. 2.1). Debe notarse que al no variar la sección de la tubería, la velocidad del flujo en la misma no varía, al contrario de la presión [8, página 45].

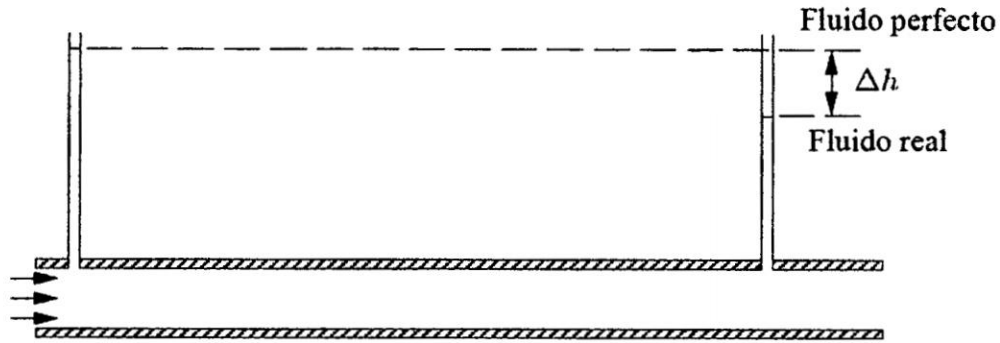


Figura 2.1: La presión disminuye a lo largo del flujo en un fluido real, al contrario de lo que ocurre en un fluido perfecto



Figura 2.2: Régimen laminar y régimen turbulento. En régimen laminar el movimiento de las capas del fluido es ordenado, en régimen turbulento no

2.1.4.1. Concepto de viscosidad

Todo fluido real posee la propiedad de la *viscosidad*. La viscosidad es la causa de la resistencia que aparece en el flujo de un fluido en tuberías y canales y está relacionada con la oposición de un fluido a las deformaciones tangenciales, en las que se produce rozamiento entre distintas partes del fluido. Por ejemplo, a causa de las fuerzas viscosas de rozamiento en una tubería, las capas de fluido más próximas a la pared (más lentas) frenan a las capas más interiores (más rápidas), apareciendo una distribución de velocidades [8, página 46].

El efecto de estas fuerzas de rozamiento se traduce en una disipación de energía que debe tenerse en cuenta en la *ecuación de Bernoulli* en la forma siguiente, si el flujo va de 1 a 2,

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} \quad (2.1.2)$$

donde Δh_{12} es la energía disipada entre 1 y 2 por unidad de peso del fluido, a la que se denomina *pérdida de carga*.

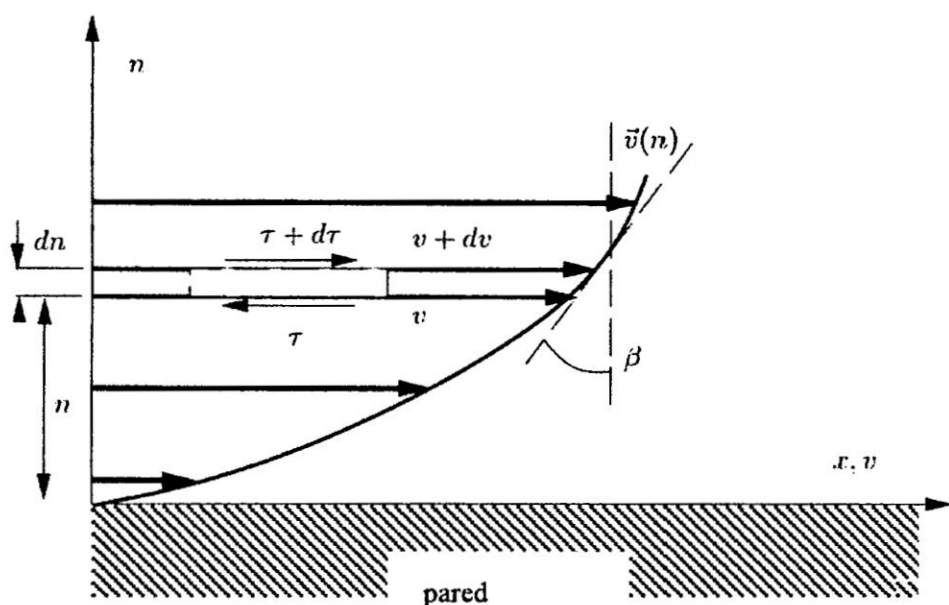


Figura 2.3: En un fluido real en movimiento aparecen fuerzas viscosas de rozamiento \vec{F}_{roz} entre las distintas capas del fluido, con una fuerza por unidad de superficie τ . Esto hace que la velocidad en una sección del fluido no sea uniforme.

Dependiendo del tipo de flujo, *laminar* o *turbulento*, las fuerzas de rozamiento que aparecen serán de distintos tipos. En el caso de régimen laminar, las fuerzas que se ejercen entre las distintas capas del fluido son tangentes a la dirección del movimiento. Por el contrario, cuando se está en régimen turbulento aparece una segunda contribución a la fuerza de rozamiento debida a la mezcla entre las distintas capas.

2.1.4.2. Efecto de la viscosidad en los fluidos reales

2.1.4.2.1. Fluidos newtonianos

Comencemos considerando el caso en el que el movimiento de un fluido tiene lugar de forma bien ordenada, moviéndose éste en líneas paralelas, en lo que acabamos de denominar régimen laminar, teniéndose que las fuerzas de rozamiento son tangentes a la dirección del movimiento. Estas fuerzas de rozamiento presentan en general distintos comportamientos dependiendo de la rapidez con que varía la velocidad en la dirección perpendicular a la superficie, rapidez representada por $\frac{\partial v}{\partial n}$. Una situación muy frecuente se tiene cuando esta relación es de proporcionalidad, denominándose *fluidos newtonianos* a los fluidos que satisfacen esta condición [8, página 47].

Así, en los *fluidos newtonianos*, las fuerzas de rozamiento que aparecen entre las capas de fluido en movimiento una con respecto a la otra, para una superficie de contacto dS , vienen dadas por la *fórmula de Newton*,

$$dF_{roz} = -\mu \frac{\partial v}{\partial n} dS \quad (2.1.3)$$

que en función de la tensión cortante (fuerza por unidad de superficie) queda en la forma

$$\tau = \frac{\partial F_{roz}}{\partial S} = \mu \frac{\partial v}{\partial n} \quad (2.1.4)$$

conocida como *ley de Newton*. En esta expresión $\frac{\partial v}{\partial n}$ es la derivada que caracteriza la variación de la velocidad en la dirección transversal al movimiento y la constante de proporcionalidad μ es la viscosidad dinámica o coeficiente de viscosidad dinámica que depende de las propiedades del fluido, indicando los signos negativos que se trata de una Fuerza de rozamiento que se opone al movimiento.

2.1.4.2.2. La condición de no deslizamiento

Resumiendo, el esfuerzo cortante en un fluido viscoso newtoniano en régimen laminar es proporcional a la pendiente de la velocidad y es máximo en la pared. Además, justo en la pared, la velocidad del fluido es cero con respecto a la pared. A este hecho se le denomina condición de no deslizamiento y es una característica de los fluidos viscosos. Un ejemplo sencillo de esto se tiene en las aspas de un ventilador, que tienen polvo fino aunque el ventilador se encuentre en movimiento, ya que justo en la superficie del ventilador el aire se encuentra en reposo. Al girar las aspas, éstas pueden mover las partículas grandes de polvo pero no las pequeñas. Cuanto más potente sea el ventilador podrá mover más partículas, pero siempre quedarán algunas pequeñas que no se mueven [8, página 49].

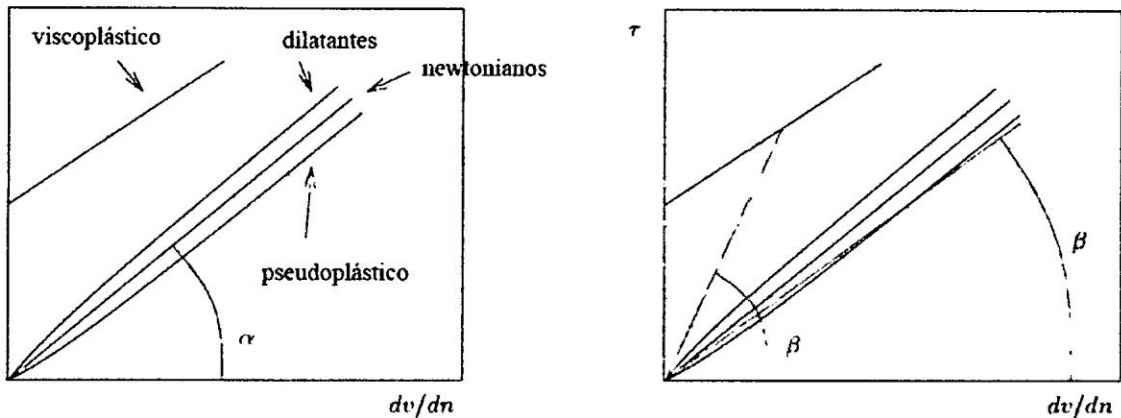


Figura 2.4: Reogramas para distintos tipos de fluidos

2.1.4.2.3. Fluidos no newtonianos

Se denomina fluidos newtonianos a aquéllos en los que la dependencia entre las fuerzas de rozamiento y el perfil de velocidades es lineal. Sin embargo, no todos los fluidos tienen el mismo comportamiento, aunque la mayor parte de los gases y líquidos simples se comportan como fluidos newtonianos. Por ejemplo, pastas, lodos y polímeros de alta densidad son ejemplos de fluidos que no tienen un comportamiento newtoniano. Denominaremos

2.2. Flujo permanente en redes a presión

fluidos no newtonianos o *anómalos* a aquellos fluidos que no siguen la ley de Newton del rozamiento interno [8, página 50].

El comportamiento de los fluidos no newtonianos se representa mediante las curvas de corriente, curvas reológicas o reogramas, como se muestra en la Figura 2.4, donde se representa la tensión cortante producida por las fuerzas de rozamiento frente a la tasa de variación de la velocidad en una sección $\frac{dv}{dn}$. Estas curvas se construyen a partir de datos experimentales obtenidos con viscosímetros de distintos tipos en distintas condiciones de funcionamiento.

Las curvas de corriente correspondientes a los fluidos newtonianos son lineales y se representan en el diagrama por rectas que pasan por el origen de coordenadas, con la viscosidad igual a la pendiente de la recta,

$$\mu = \tan(\alpha) = \frac{\tau}{dv/dn} \quad (2.1.5)$$

que caracteriza completamente las propiedades reológicas del fluido a temperatura y presión dadas, con independencia del gradiente de velocidad.

Las curvas de corriente de los líquidos no newtonianos son muy diversas y en el caso general no lineales. Dependiendo del comportamiento de estos líquidos en el diagrama reológico se tienen distintos comportamientos no newtonianos:

2.2. Flujo permanente en redes a presión

2.2.1. Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales

Los conceptos de líneas de alturas *piezométricas* y de alturas *totales* son útiles en el análisis de problemas complejos de flujo. Si en cada punto a lo largo de un sistema-de

2.2. Flujo permanente en redes a presión

tuberías se determina el valor de p/γ y se lleva verticalmente hacia arriba desde el centro de la tubería, el lugar de los puntos extremos es la línea de alturas piezométricas. Con más generalidad, si se hace la suma

$$\frac{p}{\gamma} + z \quad (2.2.1)$$

y se lleva gráficamente como ordenada, tomando como abscisa la longitud de la tubería se obtiene la línea de alturas piezométricas. La línea de alturas piezométricas es el lugar de las alturas a las que subiría el líquido en tubos verticales conectados a agujeros piezométricos situados en la tubería. Cuando la presión en la conducción es menor que la atmosférica, p/γ es negativo y la línea de alturas piezométricas está por debajo de la tubería.

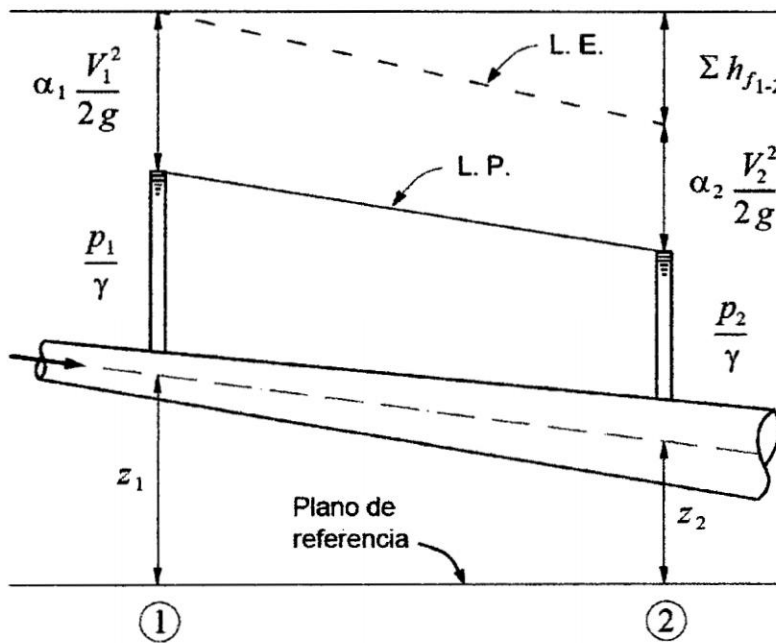


Figura 2.5: Líneas de alturas piezométricas y de alturas totales

La línea de alturas totales es la línea que une la serie de puntos que señalan la energía total en kgm/kg de cada punto de la tubería tomada como ordenada, llevada en correspondencia a la longitud de la tubería tomada como abscisa. Es el gráfico de

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \quad (2.2.2)$$

para cada punto de la conducción. Por definición, la línea de alturas totales está siempre verticalmente por encima de la línea de alturas piezométricas a una distancia de $v^2/2g$, despreciando el factor de corrección de la energía cinética.

Las líneas de alturas piezométricas y totales se representan en la Figura 2.5. Para construir estas líneas cuando se da la superficie del depósito, es necesario primeramente aplicar la ecuación de la energía desde el primer punto hasta el segundo punto incluyendo todas las pérdidas menores, así como las pérdidas por rozamiento en las paredes de la tubería y despejar entonces la altura de velocidad $v^2/2g$. Después, para encontrar la altura piezométrica en cualquier punto, se aplica la ecuación en el mismo tramo, incluyendo todas las pérdidas entre los dos puntos. En la ecuación se despeja $(p/\gamma) + z$, que se lleva al gráfico por encima del origen arbitrario. Para encontrar la línea de alturas totales en el mismo punto se despeja en la ecuación $(v^2/2g) + p/\gamma + z$, que se lleva al gráfico a partir del origen arbitrario.

2.2.2. Tubería en serie

Las *tuberías en serie* son dos o más tuberías diferentes colocadas una a continuación de la otra, las cuales pueden diferenciarse en los diámetros o en las rugosidades (es decir, estar hechas de materiales diferentes) o bien en ambas características físicas. En la Figura 2.6 se muestra un esquema de tres tuberías en serie que conectan dos tanques. [35, Página 190]] y [30, Página 556].

Teniendo en cuenta la Figura 2.6 se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

$$H_T = Z_1 - Z_2 = h_e + h_{f_1} + h_{m_1} + h_{f_2} + h_{m_2} + h_{f_3} + h_{m_3} + h_s \quad (2.2.3)$$

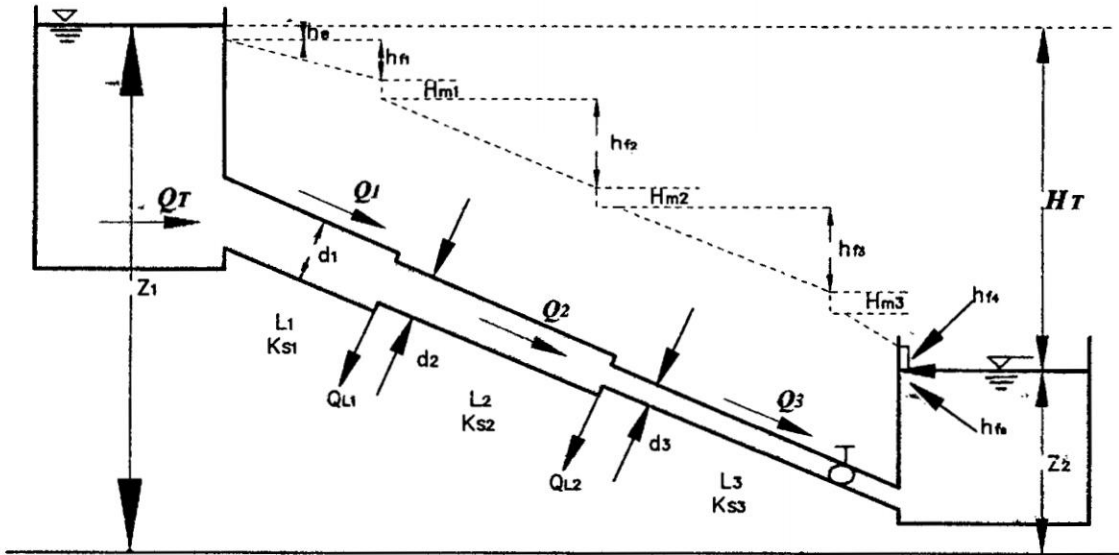


Figura 2.6: Tres tuberías en serie, conectando dos tanques Q_{L1} y Q_{L2} representan caudales laterales que salen de las uniones entre las tuberías. La línea punteada representa la línea de gradiente hidráulico

Donde:

H_T : Diferencia de nivel entre los dos tanques

h_e : Pérdidas menores de entrada

h_{f_i} : Pérdidas por fricción en el tubo i

h_{m_i} : Pérdidas menores en el accesorio i

h_s : Pérdidas menores por salida

La ecuación de conservación de la energía puede generalizarse para cualquier sistema de tuberías en serie en la siguiente forma:

$$H_T = \sum_{i=1}^n h_{f_i} + \sum_{j=1}^m h_{m_j} \quad (2.2.4)$$

Donde:

n : Número de tuberías que conforman la serie

2.2. Flujo permanente en redes a presión

m : Número de accesorios que causan pérdidas menores en la serie

Si se tienen en cuenta las características físicas de cada tubería de la serie, como diámetros, longitudes y rugosidades absolutas, y los coeficientes de pérdidas menores de cada uno de los accesorios, la ecuación (2.2.4), se convierte en:

$$H_T = \sum_{i=1}^n f_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_{j=1}^m k_{m_j} \frac{V_j^2}{2g} \quad (2.2.5)$$

Conservación de la masa (continuidad):

$$Q_T = Q_1 = Q_2 + Q_{L_1} = Q_3 + Q_{L_1} + Q_{L_2} \quad (2.2.6)$$

Esta ecuación significa que el caudal total que pasa por el sistema es igual al caudal que pasa por cualquier tubería más todos los caudales laterales en las uniones localizadas aguas arriba de ésta. Para una serie de n tuberías la ecuación (2.2.6) se puede generalizar en la siguiente forma:

$$Q_T = Q_\alpha + \sum_{i=1}^{\alpha-1} Q_{L_i} \quad (2.2.7)$$

Donde:

Q_α : Caudal en la tubería α de la serie de n tuberías.

Si en las uniones no existiera caudal lateral, la ecuación de conservación de la masa se simplificaría así:

$$Q_T = Q_1 = Q_2 = Q_3 \dots = Q_n \quad (2.2.8)$$

es decir, el caudal es igual para todos los n tubos de la serie.

2.2.3. Tubería en paralelo

Las *tuberías en paralelo* son un conjunto de tuberías que parten de un nodo común y llegan a otro nodo también común. En estos nodos, los caudales que pasan por cada una de las tuberías se unen. Esto quiere decir que para cada una de las tuberías en paralelo aguas arriba los caudales deben estar unidos para luego dividirse en el nodo inicial y por último volver a unirse en el nodo final; aguas abajo de éste nuevamente debe existir un caudal único.[35, Página 226], [30, Página 559] y [12, Página 193].

En general, los sistemas en paralelo están limitados a 3 ó 4 tuberías. Sin embargo, es más común que estén compuestos por dos tuberías. Éstas pueden tener longitudes, diámetros y accesorios diferentes a la vez que estar elaboradas en materiales muy distintos. Con ayuda de la Figura 2.7, que muestra el esquema de dos tuberías en paralelo conectando dos nodos de cabeza conocida, se plantearán las ecuaciones que gobiernan el flujo en este tipo de tuberías, con el fin de establecer los diagramas de flujo correspondientes a los tres tipos de problemas de flujos en tuberías.

En general, los sistemas en paralelo están limitados a 3 ó 4 tuberías. Sin embargo, es más común que estén compuestos por dos tuberías. Éstas pueden tener longitudes, diámetros y accesorios diferentes a la vez que estar elaboradas en materiales muy distintos. Con ayuda de la Figura 2.7, que muestra el esquema de dos tuberías en paralelo conectando dos nodos de cabeza conocida, se plantearán las ecuaciones que gobiernan el flujo en este tipo de tuberías, con el fin de establecer los diagramas de flujo correspondientes a los tres tipos de problemas de flujos en tuberías.

A partir de la Figura 2.7 se pueden plantear las siguientes ecuaciones:

2.2.3.0.4. Conservación de la energía

Para la tubería 1 se plantea la siguiente ecuación:

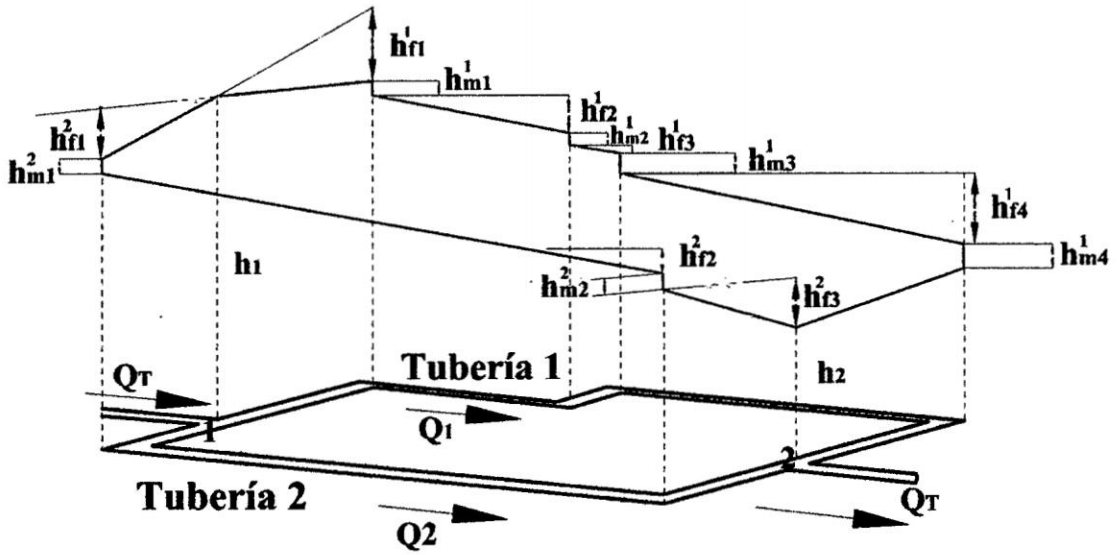


Figura 2.7: Esquema tridimensional de dos tuberías en paralelo mostrando las líneas de gradiente hidráulico a lo largo de cada una de ellas.

$$h_1 - h_2 = H_T = h_{f1}^1 + h_{m1}^1 + h_{f2}^1 + h_{m2}^1 + h_{f3}^1 + h_{m3}^1 + h_{f4}^1 + h_{m4}^1 + h_{f5}^1 \quad (2.2.9)$$

Donde:

$h_{f_j}^i$: Pérdidas por fricción en el tramo j de la tubería i

$h_{f_m}^i$: Pérdidas menores en el accesorio j de la tubería i

H_T : Diferencia total de cabeza entre los nodos 1 (inicial) y 2 (final)

Esta ecuación puede simplificarse así:

$$H_T = \sum_{j=1}^n h_{f_j}^1 + \sum_{j=1}^m h_{m_j}^1 \quad (2.2.10)$$

Donde:

n : Número de tramos de la tubería 1

m : Número de accesorios en la tubería 1

Para la tubería 2 se puede plantear una ecuación similar a la ecuación 2.2.10:

$$H_T = \sum_{j=1}^r h_{f_j}^2 + \sum_{j=1}^s h_{m_j}^2 \quad (2.2.11)$$

Donde:

r : Número de tramos de la tubería 2

s : Número de accesorios en la tubería 2

Por consiguiente, la ecuación de conservación de la energía para tuberías en paralelo es:

$$H_T = \sum_{j=1}^n h_{f_j}^1 + \sum_{j=1}^m h_{m_j}^1 = \sum_{j=1}^r h_{f_j}^2 + \sum_{j=1}^s h_{m_j}^2 \quad (2.2.12)$$

En esta última ecuación los superíndices no son exponentes; sólo indican el número de identificación de la tubería.

2.2.3.0.5. Conservación de la masa (continuidad)

En la Figura 2.7 resulta claro que la ecuación de conservación de la masa, tratándose de flujo permanente, es:

$$Q_T = Q_1 + Q_2 \quad (2.2.13)$$

Las ecuaciones (2.2.12) y (2.2.13) están planteadas para un sistema de dos tuberías en paralelo, que es el caso más común. Sin embargo, extenderlas a tres o más tuberías es sencillo. El uso, y por consiguiente el diseño, de tuberías en paralelo es común para aplicaciones en sistemas existentes (acueductos, sistemas de riego, etc.); en ese caso, la única tubería nueva se coloca para que trabaje en paralelo con otra u otras tuberías ya existentes.

2.2.4. Redes de tuberías

En la práctica de la ingeniería hidráulica los sistemas de tuberías son bastante más complejos que los dos tipos antes mencionarlos, conformando redes de muchos tubos. Aquí presentaremos un enfoque más integral sobre el análisis de redes de tuberías, el cual estará basado en las ecuaciones y los métodos de diseño establecidos con anterioridad. Las redes se clasificarán, de acuerdo con sus configuraciones básicas, en los tres tipos siguientes:

2.2.4.1. Redes abiertas

Redes de tubos madres o líneas expresas en sistemas a presión. Se caracterizan por no tener "ningún circuito cerrado" en el sistema. En la Figura 2.8 se muestra un esquema de este tipo de red, el cual une cuatro tanques de almacenamiento dentro del sistema de tuberías de una ciudad hipotética.

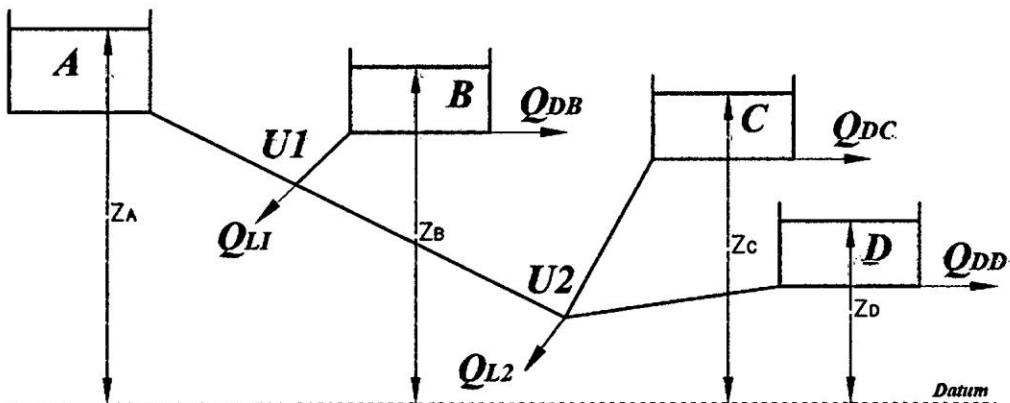


Figura 2.8: Red abierta

2.2.4.2. Redes cerradas

Conocidas también como sistemas con circuitos cerrados o ciclos. Su característica primordial es tener algún tipo de circuito cerrado (*loop*, en inglés) en el sistema. El objetivo es tener un sistema redundante de tuberías: cualquier zona dentro del área cubierta por

2.2. Flujo permanente en redes a presión

el sistema puede ser alcanzada simultáneamente por más de una tubería, aumentando así la confiabilidad del abastecimiento. Es este el tipo de red que conforma el sistema de suministro de agua potable dentro del esquema de acueducto de una ciudad. En la Figura 2.9 se muestran una red cerrada de distribución de agua.

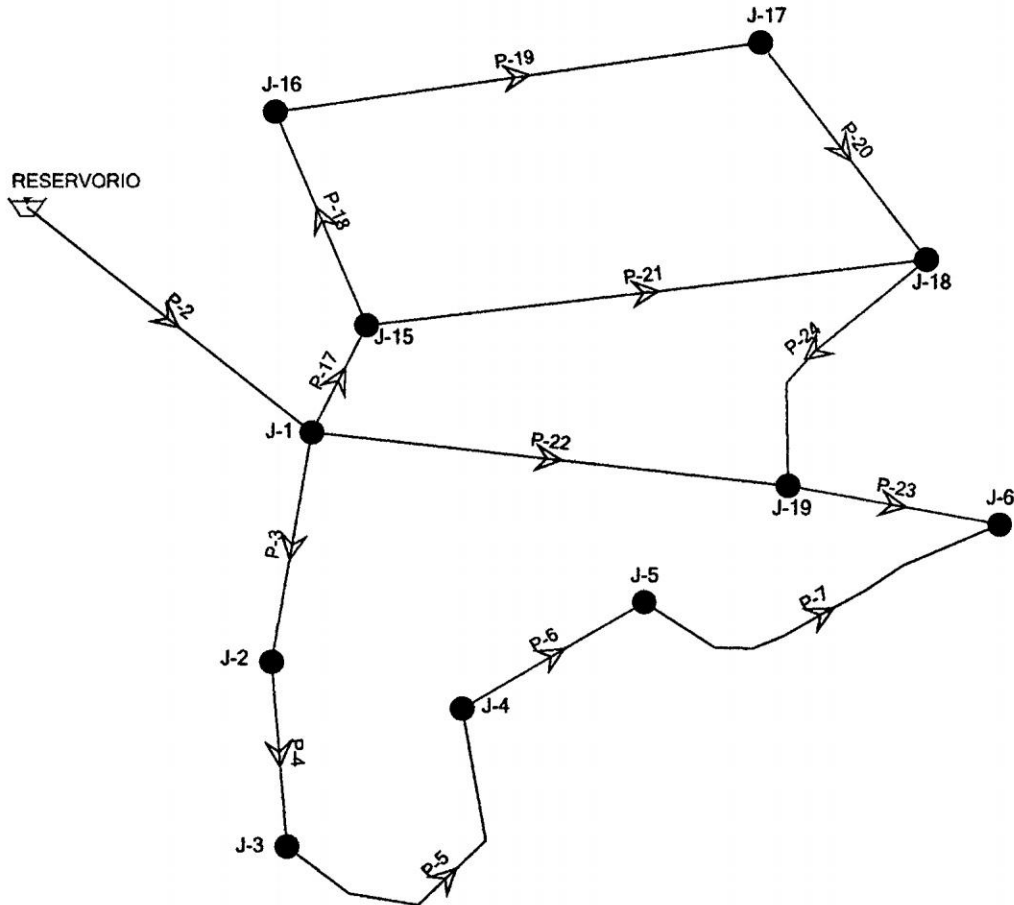


Figura 2.9: Red cerrada de distribución de agua potable

2.2.5. Red hidráulica mixta a presión

Desde el punto de vista de la utilidad funcional, una *red hidráulica de distribución a presión* es un sistema encargado del transporte y distribución de un fluido, en nuestro caso, el agua, desde los puntos de producción y almacenamiento hasta los puntos de

2.2. Flujo permanente en redes a presión

consumo. La característica del flujo a presión, en contraposición al transporte en lámina libre, implica que el fluido llena completamente la sección de las conducciones y no está en contacto con la atmósfera salvo en puntos muy concretos y determinados (cuando el fluido es vertido en los puntos de consumo o en la superficie libre de los depósitos).

El cometido de la red de distribución de agua no consiste solamente en suministrar el fluido al usuario, sino que además, el suministro debe satisfacer unas determinadas condiciones de servicio tanto cualitativas como cuantitativas. La situación ideal de toda red de distribución sería mantener los requisitos de cada uno de los consumidores cualesquiera que fuesen las condiciones de funcionamiento y operatividad; ciertamente este objetivo resulta prácticamente imposible de conseguir, al menos a un coste razonable, dada la interdependencia que existe entre todas las variables implicadas.

La red de distribución está constituida por una gran variedad de elementos, pero sin duda ninguna, las tuberías son el componente principal: desde el punto de vista funcional, la tubería es el elemento de la red que permite el transporte del agua, y los componentes restantes actúan únicamente como auxiliares de esta función (regulación, control, medida, etc...).

Atendiendo a su aspecto topológico, una red de distribución está constituida por **nudos** y **líneas**: los **nudos** se identifican con puntos determinados de la red que tienen un interés concreto por sus características. Puede tratarse de puntos de consumo, puntos de entrada/salida de algún subsistema, ó simplemente puntos de conexión de tuberías u otros elementos. Las **líneas** representan a los elementos que disipan la energía del fluido (elementos pasivos) tales como tuberías, válvulas de regulación, etc., ó también a aquellos elementos que comunican energía al fluido (elementos activos) como son las bombas elevadoras.

Acabamos de referir dos puntos de vista para una misma red de distribución, en primer lugar como un conjunto de componentes físicos para dar servicio a los usuarios, y en

2.2. Flujo permanente en redes a presión

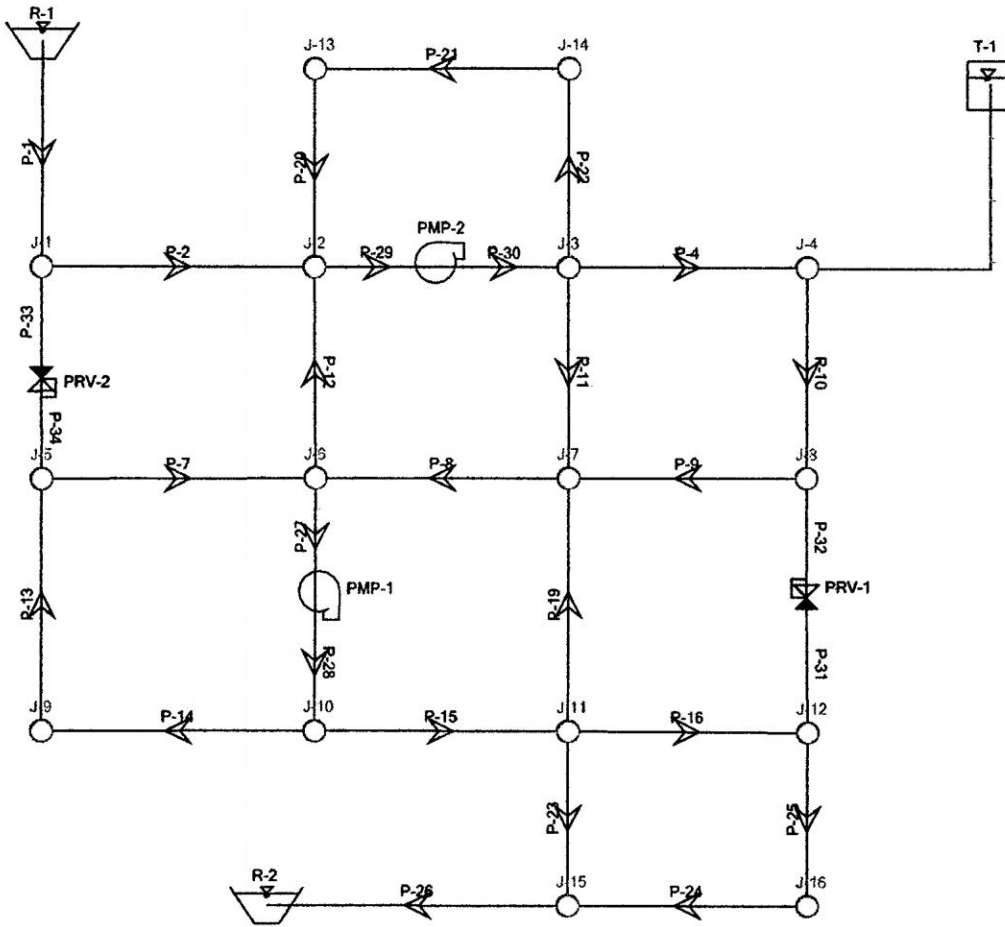


Figura 2.10: Red hidráulica de distribución de agua

consecuencia, cercana al mundo real, y en segundo lugar el de su representación simbólica, mostrando en forma abstracta su estructura topológica.

La compatibilización entre estas dos interpretaciones del mismo sistema se consigue mediante la aplicación de modelos, basados en un conjunto de relaciones físicas y matemáticas que debidamente formuladas permitan representar adecuadamente el funcionamiento de una red de distribución.

2.2.5.1. Métodos de solución

Los métodos más modernos están basados en los más antiguos, los cuales en términos matemáticos son más sencillos pero requieren un mayor número de iteraciones para llegar a un resultado final. La necesidad de disminuir los tiempos de análisis en computador, aspecto importante en las décadas de 1970 y 1980, impulsó el desarrollo de nuevos métodos, En segundo lugar, en el mercado existen programas comerciales basados en diferentes métodos de análisis. Por consiguiente, es importante que los ingenieros encargados del diseño, construcción y operación de redes de distribución de agua conozcan la base matemática de los programas a su alcance.

En orden cronológico se presentarán los siguientes métodos de análisis y diseño de redes cerradas.

- Método de Hardy-Cross con corrección de caudales en los circuitos
- Método de Hardy-Cross con corrección de cabezas en los nodos
- Método de Newton-Raphson
- Método de la teoría lineal
- Método matricial
- Método del gradiente hidráulico
- Método de Elementos Finitos (MEF)

En el presente trabajo de investigación solamente se desarrollara el *Método del Gradiente Hidráulico* y el *Método de Elementos Finitos* para la modelación del *flujo permanente* en redes de agua potable. Los resultados de la simulación sera las condiciones iniciase para la simulación del *flujo no permanente* con el Metodo de Elementos Finitos.

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

El análisis del *flujo no permanente* es mucho más complejo que el del *flujo permanente*. Aparece otra variable independiente, el tiempo, y las ecuaciones son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en vez de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Al compás que avanza la tecnología, y se construyen equipos mayores o se emplean velocidades más altas, los problemas de las perturbaciones hidráulicas transitorias se hacen cada vez más importantes. Dichas perturbaciones hidráulicas transitorias no solo dan lugar a altas presiones peligrosas, sino también producen ruidos excesivos, fatiga, corrosión debida a cavitación y el rompimiento del control normal de los circuitos. Debido al periodo inherente de determinados sistemas de tuberías, se pueden presentar vibraciones resonantes que pueden ser destructivas [30, Página 617].

El estudio de los fenómenos de *flujo no permanente* (*golpe de ariete*, conocido en inglés como “*waterhammer*”) ha sido tema de interés de connotados físicos y matemáticos desde hace mucho tiempo [5]. El golpe de ariete aparece en las redes de tuberías cuando el estado de flujo permanente es perturbado mediante la modificación de la velocidad del flujo. En general, el cambio en la velocidad del flujo puede ser causado por la apertura o cierre de válvulas, falla de mecanismos hidráulicos, partida/parada de bombas, etc. El nombre “*golpe de ariete*” proviene del sonido que generalmente acompaña al fenómeno, similar al ruido del martillo golpeando una tubería. Sin embargo, la magnitud del ruido no es equivalente a la magnitud de la onda de choque, ya que el sonido puede ser amortiguado mientras la onda de presión daña las instalaciones. El efecto más severo del golpe de ariete se produce generalmente cuando las bombas detienen su funcionamiento, dando lugar a presiones excesivas que pueden causar daños serios a tuberías y mecanismos hidráulicos, tales como rupturas, colapsos por vacío, etc., sin considerar otros efectos que también podrían generar costos humanos, materiales y financieros, incluyendo problemas sanitarios.

2.3.1. Conceptos básicos

Los diversos problemas que surgen en conducciones de agua a presión debidos a fenómenos transitorios, son de tres tipos: *sobrepresión*, *depresión* y *sobrevelocidad* en las máquinas.

2.3.1.1. Sobrepresión

Con este nombre se denomina a toda *presión superior a la de trabajo* en cualquier punto de una conducción a presión. Es muy fácil entender que éste es un problema, pues una sobrepresión provoca un incremento de tensiones en el material de la tubería que se puede prever desde el proyecto, a fin de evitar que produzca deformaciones plásticas o roturas en la instalación. Al realizar los cálculos deberá establecerse una cota de presiones máximas admisibles a todo lo largo de la tubería. Dicha cota determinará la clase de la tubería en cada tramo de la instalación, que está dada por su resistencia a la presión. La suma de la cota de elevación de cada uno de los puntos más la resistencia dan como resultado la línea de resistencia. Al determinar la clase, es decir, la presión manométrica que soporta la tubería sin dañarse, los fabricantes no establecen diferencias entre presiones estacionarias y transitorias; por lo tanto, es aconsejable que desde el diseño se señale la clase de cada tramo de tubería, por encima de la presión manométrica máxima (estacionaria o transitoria) que el tramo deberá soportar cuando forme parte de la conducción. Al elegir la clase de tubería deberá tenerse en cuenta su costo: a mayor resistencia, mayor costo, pero habrá menos problemas de sobrepresiones transitorias y, en consecuencia, menor erogación en el sistema de control para transitorios hidráulicos; y a la inversa, una resistencia menor disminuirá los costos, pero los aumentará en dichos sistemas de control. [23]

2.3.1.2. Depresión

Bajo esta denominación se considera a toda *presión absoluta menor que la atmosférica*. Si la tubería está enterrada, la presión media exterior que tolera es mayor que la atmosférica,

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

dependiendo del tipo de suelo y de la profundidad. En el diseño estructural de este tipo de instalaciones habrá que tomar en cuenta los factores mencionados para que haya una resistencia a la presión exterior con la atmosférica que está en el interior (condición de tubería vacía).

Cuando se trata de fenómenos transitorios creados por el paro accidental de una planta de bombeo, los problemas de depresión son los más frecuentes, y se pueden clasificar en tres tipos dependiendo de su importancia. [23]

2.3.1.2.1. Colapso de la tubería

Al reducirse la presión interior y alcanzar valores por debajo de la presión media exterior, el tramo de tubería afectado trabajará a la compresión en el sentido de las tensiones según la circunferencia. Si éstas son suficientemente altas, se producirá un fenómeno de pandeo en la pared del tramo hasta llegar al colapso.

No es fácil establecer la depresión mínima que pueda provocar esto último, ya que una vez colocada la tubería, la forma de su perímetro puede sufrir modificaciones, y de acuerdo con la forma resultante, será más o menos sensible al colapso.

2.3.1.2.2. Separación de la columna líquida

Si la resistencia de la tubería a la compresión es suficiente para evitar un colapso, el descenso de la presión interior puede producir la vaporización del agua a la temperatura ambiente; cuando la presión absoluta se aproxima a 0,25 *mca* para una temperatura ambiente de 20 *C*, el líquido se transforma en gas y se crean burbujas de tamaños diversos en el agua. La presión de la vaporización está en función de la altura sobre el nivel del mar y de la temperatura del líquido, y en sí no constituye un problema, pero sí puede serlo después, cuando la burbuja producida inicialmente por una onda de depresión sea

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

sometida a una presión levemente superior a la de vaporización, lo que reducirá con mucha rapidez su volumen, provocando que las columnas líquidas separadas por ella choquen violentamente. Para evaluar el incremento de presión que sobrevendría por el choque se emplea la relación de *Joukowsky* (*Parmakian*, 1963).

2.3.1.2.3. Entrada de aire en la tubería

La entrada de aire atmosférico en la tubería puede realizarse a través de las válvulas de admisión y expulsión de aire cuando la presión en el interior de la tubería es menor que la exterior. En principio hay que impedir dicha entrada, ya que puede ocasionar sobrepresiones graves.

2.3.1.3. Sobrevelocidad en las máquinas

Cuando hay un paro accidental debido al corte de energía eléctrica, las bombas hidráulicas quedan condicionadas a la acción combinada del flujo (que en un acueducto ascendente tiende a invertirse) y de la inercia de las masas en rotación. De esta acción casi siempre se deriva una inversión de velocidad en la máquina, que comienza a girar al revés al cabo de pocos segundos. Es obvio que si esta velocidad aumenta por encima de la de régimen, las partes que giran serán sometidas a esfuerzos proporcionales, debido a la fuerza centrífuga, como lo es la aceleración centrípeta a N^2 , donde N es la velocidad angular de rotación. En consecuencia, si por ejemplo, $N/N_R = 1,4$, siendo N_R la velocidad angular de diseño, o de régimen, se tendrán en las partes rotantes esfuerzos duplicados en comparación con los de un funcionamiento normal. Si este fenómeno persiste mucho tiempo, Las piezas sufrirán un mayor desgaste que el normal, como cuando una válvula de descarga queda abierta y el flujo se regresa de la línea de conducción al tanque de succión a través de la máquina. En las tres fases de proyecto, instalación y funcionamiento de sistemas de agua potable es necesario un control de estos dos fenómenos: *golpe de ariete* y *cavitación*, que originan

sobrepresiones o *depresiones* excesivas y que pueden conducir a averías, llegando hasta la destrucción misma de la estructura o de la máquina. En la siguiente sección nos centraremos en describir la teoría asociada al fenómeno transitorio del *golpe de ariete* (*waterhammer*).

2.3.2. Golpe de ariete

En el estudio de este fenómeno hay que abandonar las dos hipótesis normalmente adoptadas en flujo en tuberías: ***fluido incompresible*** y ***régimen permanente***. El golpe de ariete es un fenómeno transitorio y por tanto de régimen variable, en el que la tubería ya ***no es rígida*** y el líquido es ***compresible***.

2.3.2.1. Definición

El ***golpe de ariete***¹ es una onda de presión dinámica generada en el flujo de una tubería que resulta de un retardo o aceleración brusca en el fluido. Este fenómeno es ocasionado por la transformación brusca de energía cinética del fluido en energía de presión o viceversa. Estas transformaciones generan ondas elásticas que se manifiestan como variaciones en la presión y velocidad del flujo, y en las propiedades del fluido, y viajan a lo largo de la tubería con velocidad cercana a la del sonido [28].

El ***golpe de ariete***² por agua es la descarga dinámica de presión que resulta de las rápidas transformaciones de la energía cinética de un fluido en presión cuando el flujo se detiene repentinamente. El cierre repentino de una válvula puede causar golpe de ariete por agua. El golpe de ariete por vapor es la excesiva vibración de la tubería, que ocurre debido a las burbujas de vapor formadas en una corriente fría de líquido. El aumento de

¹Se llama golpe de ariete a una modificación de la presión (positiva o negativa) en una conducción debida a la variación del estado dinámico del líquido.

²El golpe de ariete se refiere a las fluctuaciones causadas por un repentino incremento o disminución de la velocidad del flujo.

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

La presión producto del golpe de ariete, puede ser lo suficientemente grande para romper la carcasa de la bomba o reventar las tuberías, por lo tanto, este debe ser considerado en el diseño de tuberías.

Las ondas de presión pueden ser positivas (*sobrepresiones*) o negativas (*depresiones*). Las sobrepresiones originadas pueden aumentar la presión total interna hasta llegar a superar la presión máxima admisible, lo que puede ocasionar daños mecánicos graves a las tuberías y accesorios. Las ondas de presión negativas pueden disminuir la presión total hasta generar cavitación, separación de la columna de líquido o el colapso de la tubería por efectos de la presión externa.

2.3.2.2. Causas que originan el golpe de ariete

La variación en el movimiento del líquido se manifiesta básicamente con modificaciones en las condiciones de presión y velocidad del flujo, repercutiendo en los diferentes elementos que están en contacto con el fluido; generando esfuerzos superiores a los normales (en el flujo permanente). Inicialmente el fluido posee una energía cinética $E_c = 1/2mv^2$. Al disminuir la velocidad se reduce la ecuación, transformándose en energías vibratorias, ondulatorias y en calor. Las dilataciones y contracciones cíclicas de la conducción originan esfuerzos de fatiga en el material del cual está fabricada. En sistemas a presión el *golpe de ariete* son originados por: [[19], pág 10].

- Cambios en la abertura de una válvula, accidental o planeado
- Cierre rápido de una válvula.
- Abertura brusca de una válvula.
- Manipulación momentánea de válvulas.
- Acumulación y movimiento de burbujas de aire atrapado en la tubería.

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

- Arranque o parada de una bomba.
- Cambios de elevación del embalse o cisterna de almacenamiento.
- Cambios en la demanda de potencia de turbinas.
- Expulsión repentina de aire de una tubería.
- Ondas en el embalse o en tanques elevados.
- Operación rítmica de válvulas de control o regulación automáticas.
- Separación y reencuentro de columnas de líquido.
- Variaciones en la apertura o cierre del gobernador o regulador de una turbina causadas por cambios en la carga de los sistemas eléctricos.
- Vibración de accesorios deformables tales como válvulas.
- Vibración de impulsores en bombas, ventiladores o turbinas.
- etc.

De la lista presentada, las causas del *golpe de ariete* que inducen grandes cambios de presión son:

2.3.2.2.1. Abertura y cierre de la válvula

La abertura y cierre de la válvula es fundamental para una operación segura de la tubería. Al cerrarse una válvula, la parte final aguas debajo de una tubería crea una onda de presión que se mueve hacia el tanque de almacenamiento. El cerrar una válvula en menos tiempo del que toma las oscilaciones de presión en viajar hasta el final de la tubería y en regresar se llama "*cierre repentino de la válvula*". El cierre repentino de la válvula cambiará rápidamente la velocidad y puede resultar en una oscilación de presión. La oscilación de presión resultante de una abertura repentina de la válvula usualmente no es tan excesiva.

2.3.2.2.2. Arranque de la bomba

El *arranque de la bomba* puede inducir un colapso rápido del espacio vacío que existe aguas abajo de la bomba.

2.3.2.2.3. Falla de potencia en la bomba

Un *falla de potencia en la bomba* puede crear un cambio rápido en la energía de suministro del flujo, lo que causa un aumento de la presión en el lado de succión y una disminución de presión en el lado de la descarga. La disminución es usualmente el mayor problema. La presión en el lado de descarga de la bomba alcanza la presión de vapor, resultando en la separación de la columna de vapor.

2.3.2.2.4. Operaciones inapropiadas

Las *operaciones inapropiadas* o la incorporación de dispositivos de protección de las oscilaciones de presión pueden hacer más daño que beneficio. Un ejemplo es el exceder el tamaño de la válvula de alivio por sobre-presión o la selección inapropiada de la válvula liberadora de aire/vacío. Otro ejemplo es el tratar de incorporar algunos medios de prevención del golpe de ariete cuando este no es un problema.

2.3.2.3. Consecuencias del golpe de ariete

Este fenómeno es muy peligroso, ya que la sobrepresión generada puede llegar a entre 60 y 100 veces la presión normal de la tubería, ocasionando roturas en las redes hidráulicas de los pueblos o ciudades y en las instalaciones intradomiciliarias. Los accesorios instalados en los extremos de un sistema de tuberías (grifos, válvulas, etc.), también pueden sufrir roturas. La fuerza del golpe de ariete es directamente proporcional a la longitud del conducto, ya que las ondas de sobrepresión se cargarán de más energía, e inversamente

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

proporcional al tiempo durante el cual se cierra la válvula: cuanto menos dura el cierre, más fuerte será el golpe [19].

El golpe de ariete estropea el sistema de abastecimiento de agua, hace reventar tuberías, sobre todo las de plástico y hierro colado, ensancha las de plomo, arranca codos instalados y uniones en el sistema. También es causante de los sonidos fuertes que se escuchan en las tuberías de impulsión y de los sonidos característicos que se producen cuando se abre bruscamente el grifo de una casa. Las vibraciones pueden aparecer en el sistema, si se produce un desplazamiento brusco del aire que contienen las tuberías en su interior desde un tanque o tubería cerrados, que comienzan a verter líquido por su parte superior para contrarrestar la presión provocada. Por ello el agua tiende a desplazarse y puede provocar alguna avería (fugas de agua) al buscar una salida porque no puede ser contenida en las tuberías, debido a que el espacio que antes ocupaba se encuentra lleno de aire [19].

Como consecuencia del aumento brusco y repentino de la presión dentro de un conducto ocasionada por el golpe de ariete, en un sistema de abastecimiento de agua potable pueden producirse los siguientes efectos [20]:

2.3.2.3.1. Ruido

Quizás sea el efecto menos nocivo (no afecta al sistema como tal), pero afecta a las poblaciones cercanas al lugar en donde se produce el golpe de ariete, interrumpiendo sus actividades y provocando alteraciones en su conducta lo cual puede generar estrés.

2.3.2.3.2. Vibraciones

Las variaciones de presión al momento de ser absorbidas por el sistema generan vibraciones en las tuberías y en las estructuras cercanas al tramo afectado, ocasionando debilitamiento en su resistencia, agrietamiento (causa de fugas), también pueden aflojar el terreno

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

causando inestabilidad y hundimientos en el suelo. Esta situación empeora el estado del sistema gradualmente cada vez que vuelve a ocurrir el fenómeno (los daños son progresivos).

2.3.2.3.3. Falla en bombas, válvulas y otros accesorios

Cada uno de los componentes del sistema esta diseñado para soportar un valor de presión determinado e incluso tienen un cierto margen de tolerancia, pero el aumento de presión que ocurre en un golpe de ariete puede sobrepasar ese límite y causar desperfectos en los artefactos, teniendo que realizar en esas circunstancias reparaciones o incluso el reemplazo de la pieza dañada.

2.3.2.3.4. Ruptura de tuberías

El caso más indeseable que puede presentarse a causa del golpe de ariete es el colapso de algún tramo de tubería, esto requeriría atención inmediata ya que el suministro de agua quedaría interrumpido hasta el momento de corregir el problema suscitado.

2.3.2.4. Velocidad o celeridad de onda (a)

Las ondas de sonido en un fluido (el aire o el agua) son las ondas longitudinales (las partículas en el medio han sido desplazadas de su posición de equilibrio paralela a la dirección que la onda se propaga). De acuerdo con *Watters* (1984), la ecuación más general de la Onda de Velocidad en el cálculo de las tuberías es la que incluye condiciones de anclaje de tuberías con diferentes condiciones en relación con las propiedades del material de estructura y el aire libre (burbujas pequeñas o masas discretas)[33, Página 5]:

$$a^2 = \frac{\frac{K_l}{\rho_{mix}}}{1 + \frac{K_l D}{E e} \phi + \alpha \frac{K_l}{K_{air}}} \quad (2.3.1)$$

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

Donde:

K_l : Módulo de elasticidad del líquido.

$\rho_{mix} = (1 - \alpha)\rho_l$, con α : Fracción de aire-vacío.

ρ_l : Densidad del líquido.

E : Módulo de elasticidad del material de la tubería.

D : Diámetro de la tubería.

e : Espesor de la pared de la tubería.

ϕ : Factor de condición del anclaje de la tubería.

K_{air} : Módulo de elasticidad del aire.

A partir de la ecuación 2.3.1 es evidente que la Velocidad de Onda depende de la presión en la tubería porque los valores de α y K_{air} dependen de la presión. Como consecuencia de ello, la Velocidad de Onda varía con el paso de una onda de presión (*Watters, 1984*). Este hecho va a complicar enormemente el procedimiento de análisis. Por esa razón, una expresión simplificada se puede deducirse teniendo en cuenta las siguientes hipótesis (*Bergant y Tijsseling, 2001; Simpson y Wu, 1997*):

- El tubo es lleno y permanece lleno durante el transitorio.
- No hay ninguna Separación de Columna durante el acontecimiento transitorio, por ejemplo: la presión es mayor que la presión de vapor líquida.
- El contenido libre de gas del líquido es pequeño tal que la velocidad de onda puede ser considerada como una constante.

Las Hipótesis anterior significa que $\alpha = 0$, por esa razón ρ_{mix} se convierte en ρ_l y la ecuación 2.3.1 puede reducirse a (*Karney, 1984; Salgado, 1990; Watters, 1984; Streeter y Wylie, 1983*):

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

$$a^2 = \frac{\frac{K_t}{\rho_t}}{1 + \frac{D}{e} \frac{K_t}{E} \phi} \quad (2.3.2)$$

La ecuación 2.3.2 se conoce como la fórmula ampliada de Joukowsky. De acuerdo con *Watters* (1984), la ecuación 2.3.2 tiene validez para tuberías de paredes delgadas, condición que ocurre cuando:

$$\frac{D}{e} > 40 \quad (2.3.3)$$

O según *Wylie y Streeter* (1983), cuando:

$$\frac{D}{e} > 25 \quad (2.3.4)$$

El valor ϕ depende de la geometría y la fijación de la estructura de la tubería y puede calcularse a partir de expresiones generales que automáticamente consideran la relación entre el espesor de la pared de la tubería y el diámetro de la tubería. El cuadro 2.1 muestra tales expresiones, según *Watters* (1984) [33, Página 6].

Cuadro 2.1: Expresión general para ϕ

Caso	Condición de anclaje de la tubería	Expresión para ϕ
A	En un extremo de la tubería	$\frac{1}{1+\frac{e}{D}} \left[\frac{5}{4} - \nu + 2\frac{e}{D}(1+\nu)(1+\frac{e}{D}) \right]$
B	En ambos extremos de la tubería	$\frac{1}{1+\frac{e}{D}} \left[1 - \nu^2 + 2\frac{e}{D}(1+\nu)(1+\frac{e}{D}) \right]$
C	En ambos extremos de la tubería (*)	$\frac{1}{1+\frac{e}{D}} \left[1 + 2\frac{e}{D}(1+\nu)(1+\frac{e}{D}) \right]$

Donde:

ν : Módulo de Poisson.

El caso A se refiere a una sección de tubería con el refrenamiento en un sólo extremo.

El caso B corresponde a una sección de tubería con el refrenamiento en ambos extremos.

2.3. Flujo no permanente en redes a presión

Finalmente, el caso C(*) considera que a lo largo de las secciones de las tuberías las uniones flexibles absorben pequeñas deformaciones.

Karney (1984) ha propuesto otras expresiones para el cálculo de la Velocidad de Onda que presentan ligeras diferencias (inferior al 2%) en comparación con la formulación de *Watters* (1984). Por esa razón, estas expresiones no se incluirán en la presente tesis.

Hay algunos estudios que demuestran que otras situaciones como el efecto de la tierra sobre la tubería (cuando es enterrado) no genera alguna influencia relevante en la magnitud de Velocidad de Onda (*Watters*, 1984).

Diferente es el caso cuando el líquido dentro de la tubería tiene pequeñas fracciones de vacío de aire. Es conocido que cuando el líquido dentro de la tubería tiene aire obligan drásticamente a liberar burbujas o pequeñas bolsas de aire, la magnitud de velocidad de onda (no es un constante más) y fuerzan el análisis transitorio a incluir el efecto de Cavitación (incluyendo la Separación de Columna) siempre cuando la presión del líquido cae a la presión de vapor del líquido.

Administrar las bolsas de aire (o cavidades de aire) es muy relevante porque su colapso puede producir grandes presiones (pulsos de presión de corta duración) que podría exceder la subida de altura de cierre de la válvula de Joukowski (*Simpson y Wylie*, 1991). Por experimentos físicos han sido posible demostrar que el aire atrapado en una tubería que se llena puede inducir ondas de altas presiones, especialmente cuando el escape de aire ocurre (*Zhou* 2001; *Zhou* 2002). Algunos autores como *Bergant y Tijsseling* (2001) describen algunas técnicas más útiles destinadas para tratar con la interfaz agua-aire en las tuberías (modelo de cavidad de vapor discreta, modelo de cavidad discreto de gas, etc.), que tiene una complejidad muy grande porque ahora la nueva presión es dependiente de la Onda de Velocidad hace que el sistema de ecuación sea altamente no lineal. La razón de la dificultad en el análisis numérico de flujos de tubería en los cuales la vaporización de un

líquido ocurre es que dos diferentes sistemas de ecuaciones diferenciales parciales deben tratarse [33, Página 7].

Otra situación que cambia la forma de Velocidad de Onda es la interacción fluido-estructura (FSI), donde es necesario calcular “Velocidades de Onda de Tensión” con una versión ampliada de las ecuaciones que gobiernan los fenómenos transitorios, debido a que no es cero la tensión dinámica axial destaca y las tensiones en la pared de la tubería que deben tenerse en cuenta (*Bergant y Tijsseling, 2001*). En general, la presión media disminuye con la interacción fluido-estructura. Pero a veces los picos de presión pueden aparecer casi tan altos como sin FSI. La interacción fluido-estructura localmente puede llevar a un mayor pico que uno obtenido con métodos de cálculo comunes. Debido a la gran complejidad de los temas que se ha mencionado anteriormente, no serán incluidos en la presente tesis.

2.4. Método Numéricos

Las técnicas numéricas en Ingeniería han experimentado un gran desarrollo en las últimas décadas y, en particular, la Mecánica de Fluidos ha sido una de las disciplinas científicas donde este auge ha tenido una mayor repercusión. Para el estudio de las ecuaciones generales de comportamiento de los flujos se han desarrollado diversas técnicas y aproximaciones, para el flujo no permanente en redes a presión los más utilizados son:

1. Método de Características (MOC)
2. Método de Diferencias Finitas (FDM)
3. Métodos Híbridos (HM's)
4. Método de Elementos Finitos (FEM)

5. Método de Volúmenes Finitos (FVM)

En este trabajo de investigación describiremos las bases de algunos de estos métodos y en especial se desarrollará el *Método de Elementos Finitos (MEF)* a detalle por ser la técnica numérica utilizada como herramienta para la modelación matemática y computacional del flujo no permanente en redes de distribución de agua.

2.4.1. Método de las características (MOC)

En este esquema, las *ecuaciones diferenciales parciales* se transforman en *ecuaciones diferenciales ordinarias* que se producen, a través de aproximaciones de diferencias finitas, algoritmos explícitos que reducen el espacio previamente para otros sub espacios representados por líneas características [33, Página 10].

El método de las características ha sido el método numérico explícito más utilizado para el modelo del fenómenos de propagación de ondas en las redes de tubería, debido a su facilidad para introducir diferentes dispositivos y condiciones límite (bombas, válvulas, tanques, etc.) Por esa razón, conducto cerrado, canal abierto y las corrientes de aguas subterráneas se han analizado utilizando esta técnica. La popularidad del método se deriva de dos de sus principales atributos (*Goldberg y Wylie, 1983*):

- Los métodos basada en MOC son relativamente fáciles de aplicar; las ecuaciones diferenciales parciales son transformadas en ecuaciones diferenciales ordinarias que se resuelven a lo largo de las líneas características utilizando aproximaciones de diferencias finitas.
- Las matemáticas del método de las características destacan los caminos de tiempo-espacio de la información del flujo en el sistema físico.

MOC tiene también otros aspectos positivos, como:

- Es un esquema explícito de primer orden, es decir, el cálculo directo de las variables dependientes se pueden hacer en términos de cantidades conocidas.
- Las condiciones de estabilidad están bien establecidas.
- Condiciones de fronteras pueden ser fácilmente programadas en el software.
- MOC es muy adecuado para trabajar en complejas redes de tuberías.
- MOC da más precisión en comparación con otros esquemas numéricos.

A pesar que existen características, en técnicas basadas en MOC a menudo son criticados por dos deficiencias en la implementación (*Goldberg y Wylie, 1983*):

- Pequeños pasos de tiempo se ven limitados por los criterios de estabilidad (número de *Courant-Friedrichs-Lewy*), que restringe la relación entre el tiempo y el espacio (los parámetros de la malla).
- Los resultados errados es resultado de los sistemas de modelización por la necesidad de un paso de tiempo común durante acontecimientos no lineales y en fronteras de elemento. Esto hace necesario el empleo de interpolaciones de la velocidad de onda arbitraria o los ajustes geométricos que introducen errores en la solución.

MOC los criterios de estabilidad se definen por la expresión siguiente:

$$C_n = \frac{a\Delta t}{\Delta s} \leq 1 \quad (2.4.1)$$

Donde:

C_n = número de Courant

a = velocidad de la onda

Δt = paso del tiempo

Δs = longitud del alcance de la tubería.

A pesar que existen características, en técnicas basadas en MOC a menudo son criticados por dos deficiencias en la implementación (Goldberg y Wylie, 1983):

2.4.2. Método de Diferencias Finitas

El *Método de Diferencias Finitas* (Finite Difference Method, FDM, por sus siglas en inglés) fue desarrollado por A.Thom en 1920 [34], bajo el nombre “*El método de los cuadrados*”, para resolver ecuaciones hidrodinámicas no lineales. Desde entonces, el método se ha utilizado para resolver diferentes tipos de problemas. Las técnicas de las diferencias finitas están basadas en una serie de aproximaciones, que permiten aproximar ecuaciones diferenciales por ecuaciones en diferencias finitas. Esas aproximaciones en diferencias finitas se expresan en forma algebraica y relacionan el valor de la variable dependiente en un punto en la región de solución, con el valor en algunos puntos vecinos.

2.4.2.1. Esquema de las diferencias finitas

Considere una función $f(x)$ como la que se muestra en la Figura 2.11.

La derivada de la función $f(x)$ en el punto P mide la rapidez de cambio de la función en ese punto. En otras palabras, la derivada expresa que tan rápido crece (o decrece) la función en el punto P . La derivada es equivalente a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Existen varias alternativas para aproximar la derivada de $f(x)$ en P ; utilizando la formula de la diferencia hacia delante

$$f'(x_o) = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} \quad (2.4.2)$$

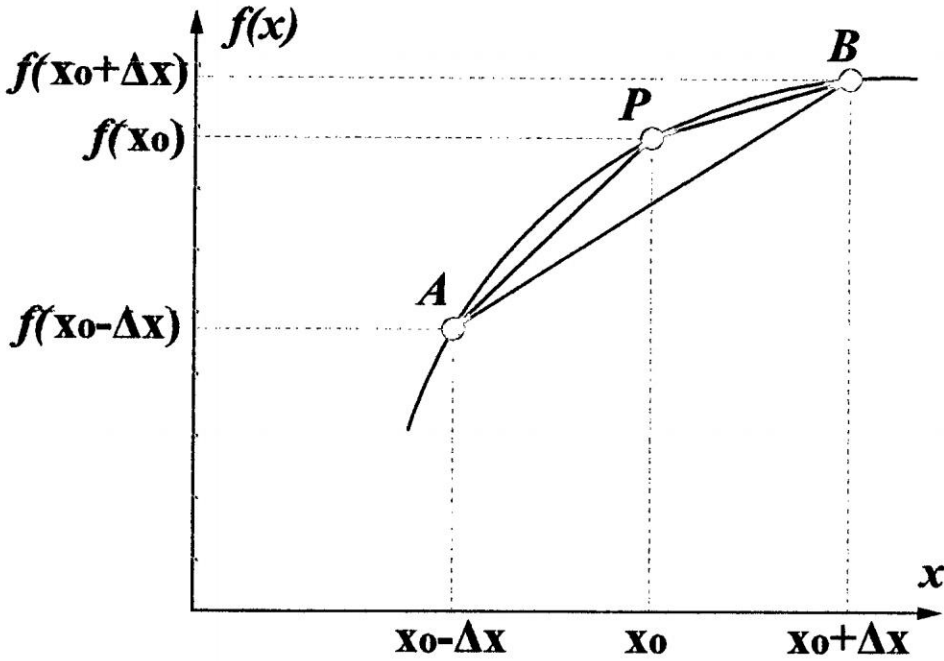


Figura 2.11: Estimaciones para la derivada de $f(X)$ en P utilizando diferencias hacia delante, hacia atrás y central

utilizando la formula de la diferencia hacia atrás

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.4.3)$$

utilizando la formula de la diferencia central

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.4.4)$$

Asimismo, se puede aproximar la segunda derivada de $f(x)$ en P como:

$$\begin{aligned}
 f''(x_o) &= \frac{f'(x_o + \Delta x/2) - f'(x_o - \Delta x/2)}{\Delta x} \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o)}{\Delta x} - \frac{f(x_o) - f(x_o - \Delta x)}{\Delta x} \right] \\
 &= \frac{f(x_o + \Delta x) - 2f(x_o) + f(x_o - \Delta x)}{(\Delta x)^2}
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Cualquier aproximación de una derivada en términos de valores de la función en un conjunto finito de puntos se conoce como Aproximación por Diferencias Finitas.

Una manera alternativa de obtener estas aproximaciones es utilizando la serie Taylor ³.

Así

$$f(x_o + \Delta x) = f(x_o) + \Delta x f'(x_o) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_o) + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_o) + \dots \tag{2.4.6}$$

$$f(x_o - \Delta x) = f(x_o) - \Delta x f'(x_o) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_o) - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_o) + \dots \tag{2.4.7}$$

Sumando la ecuación (2.4.6) y (2.4.7) se obtiene

$$f(x_o + \Delta x) + f(x_o - \Delta x) = 2f(x_o) + (\Delta x)^2 f''(x_o) + O(\Delta x)^4 \tag{2.4.8}$$

Donde $O(\Delta x)^4$ es el error introducido por los truncamientos en las series. Este error es del orden $(\Delta x)^4$ o simplemente $O(\Delta x)^4$. Además, $O(\Delta x)^4$ representa los términos que no son mayores que $(\Delta x)^4$. Si Δx es muy pequeño, estos términos pueden despreciarse para obtener

$$f''(x_o) = \frac{f(x_o + \Delta x) - 2f(x_o) + f(x_o - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{2.4.9}$$

³En matemáticas, una serie de Taylor es una representación de una función como una infinita suma de términos

que es igual a la ecuación (2.4.5). Restando la ecuación (2.4.7) de la ecuación (2.4.6), y despreciando los términos de orden $(\Delta x)^3$, se obtiene:

$$f'(x_o) = \frac{f(x_o + \Delta x) - f(x_o - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.4.10)$$

que corresponde a la ecuación (2.4.4). Esto nos muestra que los principales errores en las ecuaciones (2.4.4) y (2.4.5) están en el orden de $(\Delta x)^2$. De manera similar, la fórmula de diferencias en las ecuaciones (2.4.2) y (2.4.3) tienen errores por truncamiento del orden (Δx) . Pueden obtenerse aproximaciones por diferencias finitas de mayor orden, considerando más términos en la serie de Taylor.

2.4.2.2. Procedimiento General del MDF

Consideremos dada una ecuación diferencial parcial, para usar el procedimiento general del método de diferencias finitas, se debe hacer:

1. Generamos una malla homogénea del dominio, i.e. una malla es un conjunto finito de puntos en los cuales buscaremos la solución aproximada a la ecuación diferencial parcial.
2. Sustituimos las derivadas correspondiente con alguna de las fórmulas de diferencias finitas centradas en cada punto donde la solución es desconocida para obtener un sistema algebraico de ecuaciones $Ax = b$. Notemos que en cada punto de la malla, la aproximación por diferencias finitas supone la solución de tres puntos de la malla x_{i-1} ; x_i y x_{i+1} . Al conjunto de estos tres puntos de la malla son comúnmente llamados el estencil de diferencias finitas.
3. Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos la solución aproximada en cada punto de la malla.

2.4.3. Método de Elementos Finitos

El *Método de los Elementos Finitos* (MEF en *castellano* o FEM en *inglés*) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El MEF está pensado para ser usado en computadoras y permite resolver ecuaciones diferenciales asociadas a un problema físico sobre geometrías complicadas. El MEF se usa en el diseño y mejora de productos y aplicaciones industriales, así como en la simulación de sistemas físicos y biológicos complejos. La variedad de problemas a los que puede aplicarse ha crecido enormemente, siendo el requisito básico que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal del problema a considerar sean conocidas de antemano.

2.4.3.1. Generalidades

El MEF permite obtener una *solución numérica* aproximada sobre un *cuerpo*, estructura o dominio (*medio continuo*) sobre el que están definidas ciertas *ecuaciones diferenciales* en *forma débil* o integral que caracterizan el comportamiento físico del problema dividiéndolo en un número elevado de subdominios no intersectantes entre sí denominados "*elementos finitos*". El conjunto de elementos finitos forma una partición del dominio también denominada discretización. Dentro de cada elemento se distinguen una serie de puntos representativos llamados "*nodos*". Dos nodos son adyacentes si pertenecen al mismo elemento finito; además, un nodo sobre la frontera de un elemento finito puede pertenecer a varios elementos. El conjunto de nodos considerando sus relaciones de adyacencia se llama "*malla*".

Los cálculos se realizan sobre una malla de puntos (llamados nodos), que sirven a su vez de base para discretización del dominio en elementos finitos. La generación de la malla se realiza usualmente con programas especiales llamados generadores de mallas, en una

etapa previa a los cálculos que se denomina pre-proceso. De acuerdo con estas relaciones de adyacencia o conectividad se relaciona el valor de un conjunto de variables incógnitas definidas en cada nodo y denominadas grados de libertad. El conjunto de relaciones entre el valor de una determinada variable entre los nodos se puede escribir en forma de sistema de ecuaciones lineales (o linealizadas). La matriz de dicho *sistema de ecuaciones* se llama *matriz de rigidez* del sistema. El número de ecuaciones de dicho sistema es proporcional al número de nodos.

2.4.3.2. Descripción matemática del MEF

El desarrollo de un algoritmo de elementos finitos para resolver un problema definido mediante ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno requiere en general cuatro etapas:

- El problema debe reformularse en *forma variacional*.
- El dominio de variables independientes (usualmente un dominio espacial para problemas dependientes del tiempo) debe dividirse mediante una *partición* en subdominios, llamados elementos finitos. Asociada a la partición anterior se construye un espacio vectorial de dimensión finita, llamado espacio de elementos finitos. Siendo la solución numérica aproximada obtenida por elementos finitos una combinación lineal en dicho espacio vectorial.
- Se obtiene la proyección del problema variacional original sobre el espacio de elementos finitos obtenido de la partición. Esto da lugar a un sistema con un número de ecuaciones finito, aunque en general con un número elevado de ecuaciones incógnitas. El número de incógnitas será igual a la dimensión del espacio vectorial de elementos finitos obtenido y, en general, cuanto mayor sea dicha dimensión tanto mejor será la aproximación numérica obtenida.

- El último paso es el cálculo numérico de la solución del sistema de ecuaciones.

Los pasos anteriores permiten construir un problema de *cálculo diferencial* en un problema de *álgebra lineal*. Dicho problema en general se plantea sobre un *espacio vectorial* de dimensión no-finita, pero que puede resolverse aproximadamente encontrando una proyección sobre un subespacio de dimensión finita, y por tanto con un número finito de ecuaciones (aunque en general el número de ecuaciones será elevado típicamente de miles o incluso centenares de miles). La discretización en elementos finitos ayuda a construir un algoritmo de proyección sencillo, logrando además que la solución por el método de elementos finitos sea generalmente exacta en un conjunto finito de puntos. Estos puntos coinciden usualmente con los vértices de los elementos finitos o puntos destacados de los mismos. Para la resolución concreta del enorme sistema de ecuaciones algebraicas en general pueden usarse los métodos convencionales del álgebra lineal en espacios de dimensión finita.

2.4.3.3. El Método de los Residuos Ponderados

En la década de los cincuenta surge el método clásico de los residuos ponderados (pero anterior al MEF). En este método la ecuación original que se desea resolver de manera aproximada no se toma tal cual es, sino que se multiplica por alguna función de ponderación y se integra. A los efectos de la ponderación se puede tomar cualquier conjunto de funciones dadas globalmente, en el sentido de que se extienden a todo el dominio donde se busca la solución aproximada. Esto constituye el mayor defecto de este método.

Fue por eso que al método de los residuos ponderados se le hizo algunas modificaciones esenciales con relación a su forma original, que condujeron a la creación del método de

los elementos finitos, en el cual las funciones de ponderación están definidas de forma local, es decir, en subdominios del dominio general.

Consideremos la ecuación diferencial:

$$Lu - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.4.11)$$

Sujeta a condiciones de contorno sobre la frontera $\partial\Omega$ de la forma:

$$Mu - g = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.4.12)$$

Siendo L y M operadores diferenciales. Reemplazando la solución exacta $u(x)$ por una solución aproximada $u_A(x)$ se genera un residuo R_Ω en el dominio y un residuo $R_{\partial\Omega}$ en el contorno, esto es:

$$\begin{aligned} R_\Omega(u_A) &= Lu_A - F \neq 0 \quad \text{en } \Omega \\ R_{\partial\Omega}(u_A) &= Mu_A - g \neq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

En el método de los residuos ponderados la idea central consiste en buscar una aproximación $u_A(x)$ de la solución $u(x)$ de la forma

$$u_A(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (2.4.13)$$

Los a_i son parámetros a determinar imponiendo las n condiciones:

$$\int_{\Omega} \psi_i R_\Omega(u_A) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \psi_i R_{\partial\Omega}(u_A) ds = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.4.14)$$

Donde los ψ_i son llamadas *funciones de ponderación o de peso*. En otras palabras, se busca que el residuo ponderado por estas funciones sea igual a cero en algún sentido integral o lo que es lo mismo:

$$\int_{\Omega} Lu_A \psi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} (Mu_A - g) \psi_i ds = \int_{\Omega} F \psi_i d\Omega \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.15)$$

$$\int_{\Omega} Lu_A \psi_i d\Omega = \int_{\partial\Omega} (g - M_{\varphi_0}) \psi_i ds + \int_{\Omega} F \psi_i d\Omega \quad (2.4.16)$$

El sistema de n ecuaciones con n incógnitas a_i puede ser resuelto si las funciones φ_i y los pesos ψ_i son linealmente independientes.

Desde el punto de vista de la ponderación, casi es posible utilizar cualquier conjunto de funciones linealmente independientes $\psi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, dando un nombre diferente a cada método de acuerdo con la función escogida.

Las funciones más frecuentemente utilizadas se indica a continuación:

- El método por colocación por puntos
- El método por colocación por sub dominios
- El método de los mínimos cuadrados
- El método de Galerkin (Bubnov - Galerkin)

El Método de Galerkin (Bubnov - Galerkin)

En este caso, las funciones de ponderación (test) ψ_i se toman iguales a las funciones de prueba (funciones bases) ψ_i . De esta manera se obtiene:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega}(u_A)\varphi_i(x)d\Omega + \int_{\partial\Omega} R_{\partial\Omega}(u_A)\varphi_i(x)d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

es decir, el sistema de ecuaciones:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} \left[\varphi_0 + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \right] \varphi_i(x) d\Omega + \int_{\partial\Omega} R_{\partial\Omega} \left[\varphi_0 + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \right] \varphi_i(x) d\Omega = 0$$

Con $i = 1, 2, \dots, n$. El ingeniero ruso *B. G. Galerkin* introdujo su método en 1915, pero esencialmente el mismo concepto fue introducido por *Bubnov* en 1913. Es por eso que algunos autores, se refieren a este esquema como el método de *Bubnov-Galerkin*. Este método, es actualmente un caso especial del enfoque más general llamado el *método de los residuos ponderados*.

Capítulo 3

MATERIALES Y MÉTODOS

3.1. Generalidades

El fenómeno del *golpe de ariete*, característico de flujo no permanente de líquidos, se presenta en las conducciones cerradas cuando se altera bruscamente el caudal. Consiste en la aparición de movimiento oscilatorio del fluido con la correspondiente variación ondulatoria de la presión en gran magnitud. El cierre brusco de un obturador o una válvula, la detención de una bomba o el arranque de una turbina, son causa suficiente para su generación y es tan importante la sollicitación consecuente sobre la instalación que han sido numerosos los casos que pueden citarse en los que la imprevisión acerca de su presencia ha determinado la inutilización definitiva de instalaciones muy importantes y muy costosas. Por tratarse del caso extremo en cuanto a la magnitud de las consecuencias y porque es la referencia que se toma en los cálculos y proyectos como margen de seguridad se analiza en este estudio lo que se define como “*cierre instantáneo*”.

Se supone que en una tubería de transporte el obturador o válvula estrangulan la corriente en un intervalo de tiempo tan pequeño que puede ser considerado “*cero*”.

En el análisis de este fenómeno participa una variada gama de aspectos tanto propios de la física como la estática del sólido, la resistencia de los materiales, la cinemática y la dinámica de los fluidos, lo que lo convierte en un ejemplo típico de integración de conocimientos en el campo de la ingeniería. Además, dado que las aplicaciones derivadas del desarrollo de sistemas de protección, como de optimización de recursos materiales, ofrecen un campo vasto de posibilidades. Pueden dar lugar a estudios y aplicaciones de novísimas metodologías de cálculo.

El estudio del problema y su solución fueron desarrollados inicialmente por *N. Joukowski* (1898) y *Allievi* (1902) aunque su desarrollo analítico, similar al de la cuerda vibrante de *D'Alembert* se presenta en 1913. Posteriormente *Gibson* (1920) amplía la solución para cierre lineal del obturador y *Schnyder* y *Bergeron* desarrollan una resolución por método gráfico..

Zhukovsky (ó *Joukowski*) (1847-1921), físico ruso presentó públicamente sus primeras conclusiones en 1898 sobre la hipótesis que denominó “*teoría elástica*” del fenómeno. Se basa en el principio de conservación de la energía, admitiendo la deformabilidad de los líquidos ante gradientes elevados de presión, y la perfecta elasticidad del material de la tubería. Supone entonces que toda la energía cinética que posee la masa fluida en el instante inicial se transforma luego del cierre, por una parte en energía de deformación de la tubería que se expande por el incremento de la presión interna, y por la otra en trabajo de compresión del fluido por el mismo efecto. En cuanto a los resultados de la aplicación de esta teoría se puede señalar que sus resultados se aproximan sensiblemente a los que arroja la experiencia, y que en la fase inicial y cuando la presión original es elevada pueden resultar valores un 20-30% mayores que los obtenidos por cálculo. Esta diferencia podría adjudicarse a que, con elevados gradientes de presión, K crece sensiblemente y a que el material que constituye el conducto reacciona retardadamente con el aumento brusco de la carga.

Los aportes más recientes han sido las simulaciones y la aplicación de métodos numéricos. Se pueden citar los trabajos realizados por *Waylie y Streeter* y, entre otros, a *Wiggert et al.* sobre el método de las características.

En la actualidad se han hecho numerosas investigaciones, la mayoría usa el método de las características combinado con las diferencias finitas, o elementos finitos. Se puede citar los trabajos en FEM de *Kochupillai et al.* *Tijsseling* presenta un estudio basado en la interacción del fluido y la estructura de la cañería.

3.2. Descripción del problema

El golpe de ariete es un fenómeno que se produce en una tubería por el efecto de fluctuación del caudal circulante, y que se traduce en una variación de la presión interna en la tubería, por encima o por debajo de la presión de trabajo. La Figura 3.1 representa una tubería de longitud L , espesor δ y diámetro interior D por la que circula agua proveniente de un depósito aguas arriba y que termina en una válvula en su extremo derecho. Si se cierra ésta rápidamente, en virtud del principio de conservación de la energía, al disminuir la energía cinética, ésta se va transformando en un trabajo de compresión del fluido que llena la tubería así como en un trabajo necesario para dilatar esta última: *golpe de ariete positivo*. Por el contrario, al abrir rápidamente una válvula se puede producir una depresión: *golpe de ariete negativo* [25, Página 2].

El estudio de este fenómeno permitirá ver qué factores son influyentes en este mecanismo, con el objetivo de predecir las sobrepresiones que podrían alcanzarse en el circuito a fin de seleccionar el espesor de tubería necesario para resistir estas sollicitaciones mecánicas.

Aunque es físicamente imposible cerrar una válvula instantáneamente, el estudio inicial del caso de cierre instantáneo ayuda a comprender el estudio de los casos reales. Así, al cerrarse instantáneamente la válvula de la Figura 3.1, el *cierre* provoca una sobrepresión

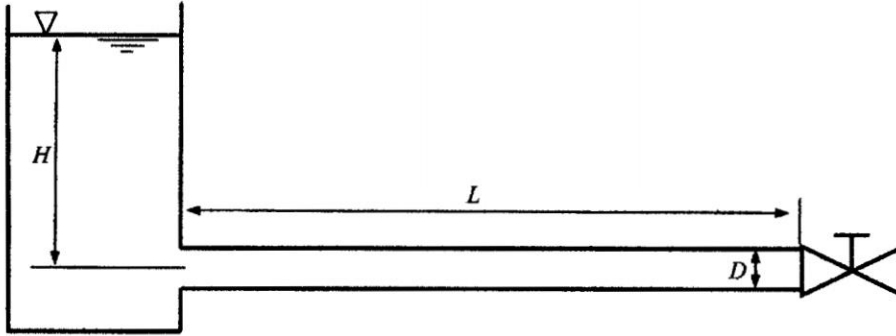


Figura 3.1: Esquema de instalación susceptible al fenómeno de golpe de ariete

ΔP que se transmite aguas arriba a la velocidad del sonido, a . Por tanto, esta transmisión aguas arriba no ocurre de forma instantánea, sino que lo hace a una velocidad finita (a). En la zona por donde ha pasado la onda, el flujo se ha detenido, el fluido se ha comprimido y la tubería expandido, mientras que donde aún no ha llegado, las condiciones siguen siendo las iniciales. De esta forma, se ha creado una onda elástica, una onda de presión que se propaga por la tubería, se refleja en el depósito, vuelve a la válvula y de nuevo al depósito, así sucesivamente, originando sobrepresiones y depresiones en la tubería, la cual se dilata o contrae al paso de la onda. Si la longitud de la tubería se denota como L , entonces el tiempo que tarda la onda en recorrer la distancia entre la válvula y el depósito es: $t_o = L/a$. Al cabo de un tiempo $T = 4t_o = 4L/a$ el ciclo se repite. Evidentemente, una situación ideal como esta conduciría a un bucle infinito. El proceso se repetiría indefinidamente si no existiera rozamiento en la tubería. En un caso real con rozamiento, el fenómeno se va amortiguando con el tiempo.

A continuación se detalla el proceso del golpe de ariete instantáneo durante un ciclo completo. La explicación se complementa con la evolución gráfica de la Figura 3.2 [25, Página 3].

1. *No hay perturbación.* Régimen permanente. El líquido en la tubería se desplaza con velocidad v desde el depósito a la válvula. Diámetro de la tubería normal, D .

3.2. Descripción del problema

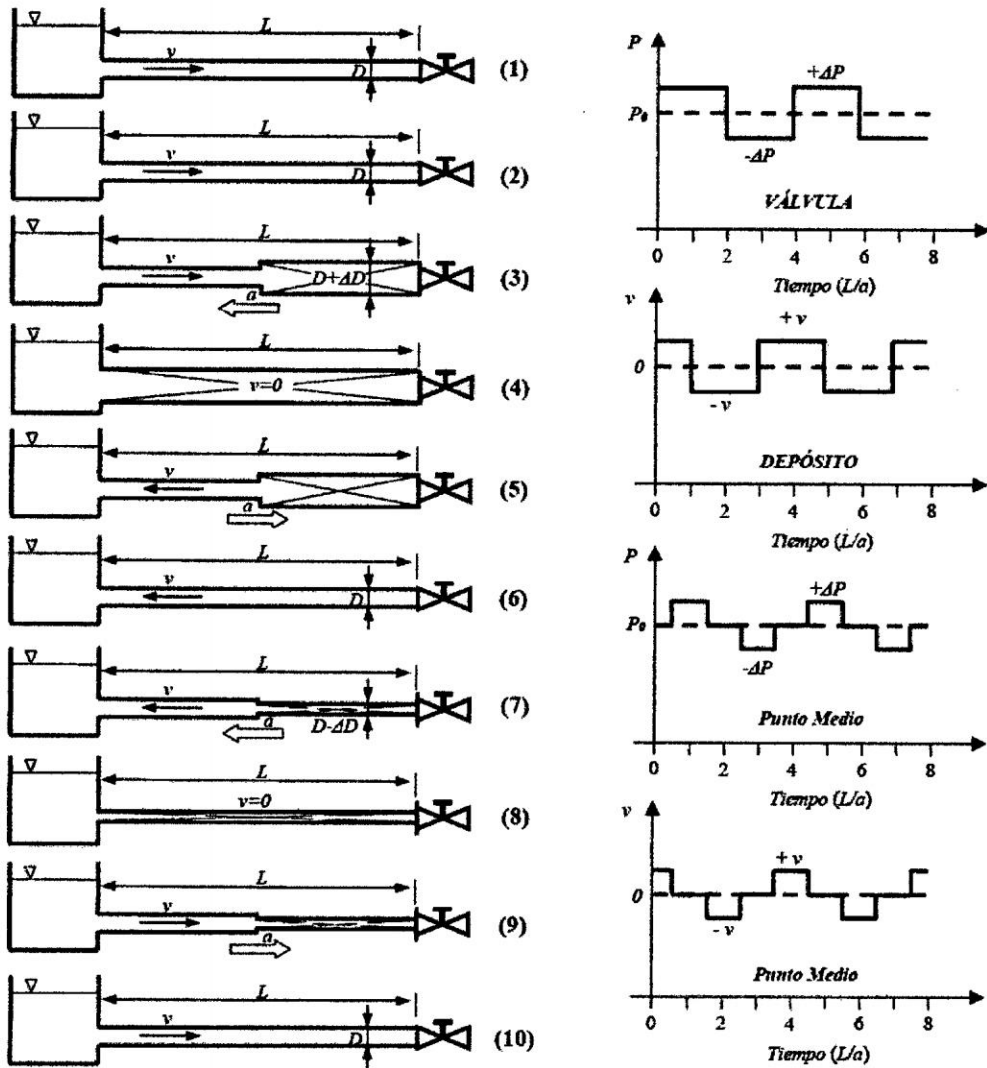


Figura 3.2: Esquema de evolución del golpe de ariete

2. *Tiempo 0*. La válvula se cierra instantáneamente. La velocidad del líquido se anula a partir de la válvula, no instantáneamente, en toda la tubería.
3. *Tiempo $t_o = 0,5L/a$* . La onda de presión se ha propagado hacia el embalse con celeridad a y el frente de onda ha llegado a la mitad de la tubería. Mitad derecha de la tubería dilatada por la sobrepresión. Mitad izquierda, diámetro normal. En esa mitad izquierda el agua sigue circulando con velocidad v hacia la válvula. En la mitad derecha, $v = 0$. El fluido se ha comprimido en contra de la válvula.

3.2. Descripción del problema

4. *Tiempo* $t_o = L/a$. La onda de presión ha llegado al depósito. En toda la tubería el líquido está en reposo, $v = 0$, pero no en equilibrio, pues se encuentra comprimido. Toda la tubería está dilatada. Como un resorte que se recupera tras la compresión, el agua de la tubería comienza a moverse con velocidad v , pero dirigida en sentido contrario, hacia el embalse. El líquido comienza a ponerse en movimiento justo en la zona inmediatamente después de la unión tanque-tubería.
5. *Tiempo* $t_o = 1,5L/a$. La mitad izquierda de la tubería se ha contraído a su diámetro normal. La onda sigue propagándose hacia la derecha con velocidad a . En la mitad izquierda de la tubería el fluido circula con velocidad v .
6. *Tiempo* $t_o = 2L/a$. Diámetro de toda la tubería normal. Todo el fluido de la tubería en movimiento desde la válvula hacia el embalse con velocidad v . No hay sobrepresión en ninguna parte de la tubería, pero por la inercia, la presión continúa disminuyendo, la onda elástica se sigue propagando, ahora con depresión desde la válvula hacia el embalse con la velocidad a : el diámetro de la tubería irá disminuyendo por debajo de su diámetro normal.
7. *Tiempo* $t_o = 2,5L/a$. La depresión ha alcanzado la mitad de la tubería. La mitad de la derecha contiene agua en reposo y a una presión por debajo de lo normal. El diámetro de la tubería en esta mitad es inferior al normal.
8. *Tiempo* $t_o = 3L/a$. El agua en toda la tubería está en reposo; pero no en equilibrio, y el agua inicia su movimiento desde el embalse a la válvula con velocidad v dirigida hacia la derecha. La depresión reina en toda la tubería. El diámetro de toda la tubería es inferior al normal.
9. *Tiempo* $t_o = 3,5L/a$. En la mitad izquierda de la tubería el fluido está en movimiento con velocidad v hacia la válvula. En la mitad derecha, el líquido continúa en reposo

y en depresión. El diámetro de la parte izquierda es normal. El de la mitad derecha menor que el normal; a y v tienen el mismo sentido.

10. *Tiempo* $t_o = 4L/a$. Diámetro de la tubería normal. Todo el fluido en movimiento con velocidad v hacia la válvula. Todo igual que el tiempo 0, así que efectivamente el período de este movimiento es cuatro veces t_o .

3.2.1. Tiempo de cierre

El estudio del golpe de ariete fue hecho en primer lugar por Joukowski, mientras que la solución completa del problema fue dada por Allievi. El cálculo de la sobrepresión depende del *tiempo de cierre*, t_c de la válvula. Con anterioridad se ha hablado de cierre instantáneo de la válvula, pero éste en la práctica es gradual, con lo que la onda no presenta un frente brusco sino una rampa de mayor o menor pendiente según se tarde más o menos en cerrar. A pesar de ello, el incremento final de presión es el mismo, a no ser que haya tiempo suficiente para que las sobrepresiones iniciales viajen hasta el depósito y regresen. Por tanto, el cierre puede ser:

3.2.1.1. Rápido: $0 < t_c < 2t_o$

La presión máxima es la misma que en el cierre instantáneo; aunque la curva de presiones en la tubería en función del tiempo sea distinta. En el cierre rápido una onda de presión no tiene tiempo de ir al estanque, reflejarse y volver a la válvula, antes de que termine medio ciclo. Por ejemplo, en una tubería de acero de 1000 metros de longitud, habría que cerrar la válvula en menos de 2 segundos para que existiera cierre instantáneo y se alcanzaran las presiones máximas. A partir de este tiempo, los rebotes en forma de depresión provenientes del depósito harían que el incremento de presión no fuese tan elevado.

3.2.1.2. Lento: $t_c > 2t_0$

La presión máxima es menor que en el caso precedente. Este último caso es más frecuente en el práctica. En definitiva, el tiempo de cierre es, por tanto, un factor fundamental para la reducción de la intensidad del golpe de ariete.

3.3. Formulación matemática del problema

El Flujo no Permanente en conductos cerrados es descrito por las ecuaciones: Dinámica y Continuidad. consiguientemente vamos a describir y obtener estas ecuaciones gobernantes del *golpe de ariete*.

3.3.1. El medio continuo

La hipótesis del medio continuo es la hipótesis fundamental de la mecánica de fluidos y en general de toda la mecánica de medios continuos. En esta hipótesis se considera que el fluido es continuo a lo largo del espacio que ocupa, ignorando por tanto su estructura molecular y las discontinuidades asociadas a esta. Con esta hipótesis se puede considerar que las propiedades del fluido (densidad, temperatura, etc.) son funciones continuas. La forma de determinar la validez de esta hipótesis consiste en comparar el camino libre medio de las moléculas con la longitud característica del sistema físico. Al cociente entre estas longitudes se le denomina número de Knudsen. Cuando este número adimensional es mucho menor a la unidad, el material en cuestión puede considerarse un fluido (medio continuo). En el caso contrario los efectos debidos a la naturaleza molecular de la materia no pueden ser despreciados y debe utilizarse la mecánica estadística para predecir el comportamiento de la materia. Ejemplos de situaciones donde la hipótesis del medio continuo no es válida pueden encontrarse en el estudio de los plasmas.

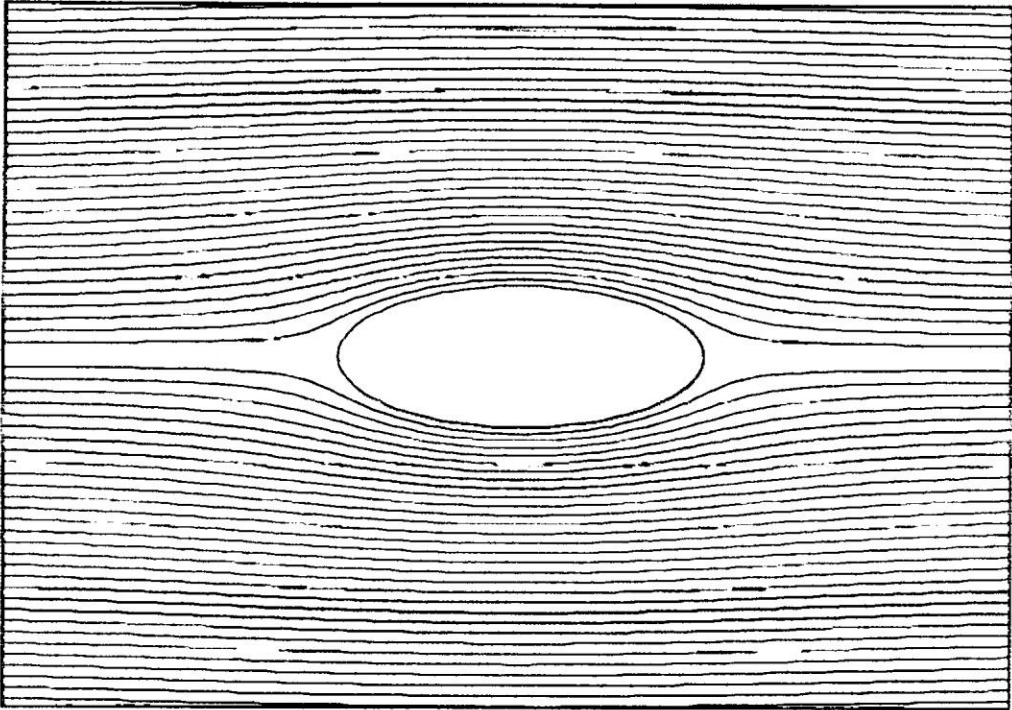


Figura 3.3: Fluidos dinámicos e ideales

El concepto de un continuo es la base de la mecánica de fluidos clásica. La hipótesis de un continuo resulta válida para estudiar el comportamiento de los fluidos en condiciones normales. Sin embargo, dicha hipótesis deja de ser válida cuando la trayectoria media libre de las moléculas (aproximadamente 6.3×10^{-5} mm o bien 2.5×10^{-6} pulg para aire en condiciones normales de presión y temperatura) resulta del mismo orden de magnitud que la longitud significativa más pequeña, característica del problema en cuestión.

Una de las consecuencias de la hipótesis del continuo es que cada una de las propiedades de un fluido se supone que tenga un valor definido en cada punto del espacio. De esta manera, propiedades como la densidad, temperatura, velocidad, etc., pueden considerarse como funciones continuas de la posición y del tiempo.

Un fluido es una sustancia que se deforma continuamente al ser sometida a un esfuerzo cortante (esfuerzo tangencial) no importa cuan pequeño sea.

3.3. Formulación matemática del problema

Todos los fluidos están compuestos de moléculas que se encuentran en movimiento constante. Sin embargo, en la mayor parte de las aplicaciones de ingeniería, nos interesa más conocer el efecto global o promedio (es decir, macroscópico) de las numerosas moléculas que forman el fluido. Son estos efectos macroscópicos los que realmente podemos percibir y medir. Por lo anterior, consideraremos que el fluido está idealmente compuesto de una sustancia infinitamente divisible (es decir, como un continuo) y no nos preocuparemos por el comportamiento de las moléculas individuales.

3.3.2. Ecuación Dinámica (Movimiento)

Utilizando la notación siguiente: la distancia x , el caudal Q y la velocidad de flujo V , se consideran positivos en la dirección aguas abajo y H es la altura piezométrica en la línea central del conducto por encima del datum.

Considerando un elemento horizontal de fluido que tengan la sección transversal A y longitud δx , dentro de un conducto como se muestra en la figura 3.4. Si la altura piezométrica y la velocidad a la distancia x son H y V , entonces sus correspondientes valores en $x + \delta x$ son $H + (\frac{\partial H}{\partial x})\delta x$ y $V + (\frac{\partial V}{\partial x})\delta x$, respectivamente. En la dirección x , tres fuerzas F_1 , F_2 y F_3 , están actuando sobre el elemento. F_1 y F_2 son las fuerzas debido a la presión, mientras que F_3 es la fuerza cortante debido a la fricción. Si γ = peso específico del fluido, A = sección transversal del conducto y Z = altura del conducto por encima del datum [5, Página 28].

3.3. Formulación matemática del problema

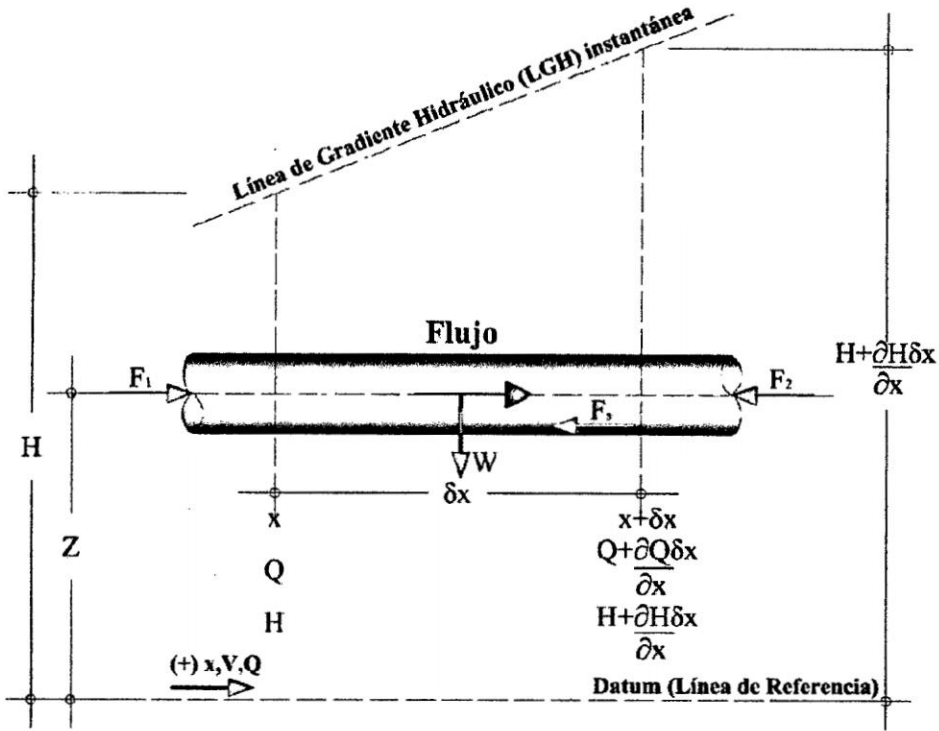


Figura 3.4: Notación y diagrama de cuerpo libre para la Ecuación Dinámica

La presión es la magnitud que relaciona la fuerza con la superficie sobre la que actúa, es decir, equivale a la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie. Cuando sobre una superficie plana de área A se aplica una fuerza normal F de manera uniforme y perpendicularmente a la superficie, la presión P viene dada por:

$$P = \frac{F}{A} \quad (3.3.1)$$

La presión hidrostática es la parte de la presión debida al peso de un fluido en reposo. En un fluido en reposo la única presión existente es la presión hidrostática. Es la presión que sufren los cuerpos sumergidos en un líquido o fluido por el hecho de sumergirse dentro de este. Se define por la fórmula:

$$P = \gamma h \quad (3.3.2)$$

3.3. Formulación matemática del problema

Donde:

P : Presión hidrostática.

$\gamma = \rho g$: Peso específico del fluido.

h : Profundidad bajo la superficie del fluido.

De las ecuaciones 3.3.1 y 3.3.2:

$$F = PA = \gamma hA \quad (3.3.3)$$

$$F_1 = \gamma A(H - Z) \quad (3.3.4)$$

$$F_2 = \gamma A \left(H - Z + \frac{\partial H}{\partial x} \delta x \right) \quad (3.3.5)$$

El esfuerzo cortante, de cizalla o de cortadura es el esfuerzo interno o resultante de las tensiones paralelas a la sección transversal de la tubería. Este tipo de sollicitación formado por tensiones paralelas está directamente asociado a la tensión cortante.

$$\tau = \frac{F_s}{A} \rightarrow F_s = \tau A \quad (3.3.6)$$

La distribución de esfuerzo cortante en tuberías está dado por:

$$\tau_h = \gamma S \left(\frac{D}{4} - \frac{h}{2} \right) \rightarrow \tau_o = \gamma SR \quad (3.3.7)$$

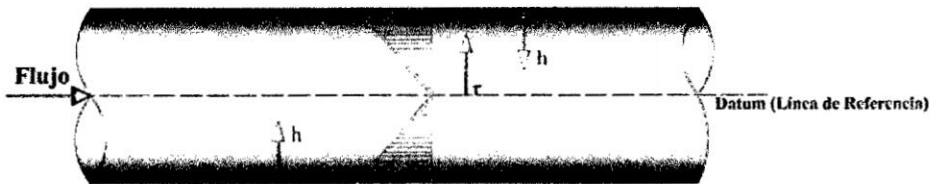


Figura 3.5: Distribución de esfuerzo cortante en la tubería

De las ecuaciones 3.3.6 y 3.3.7:

$$F_s = \gamma SRA \quad (3.3.8)$$

3.3. Formulación matemática del problema

El área de aplicación del esfuerzo cortante en la tubería se muestra en la figura 3.6.

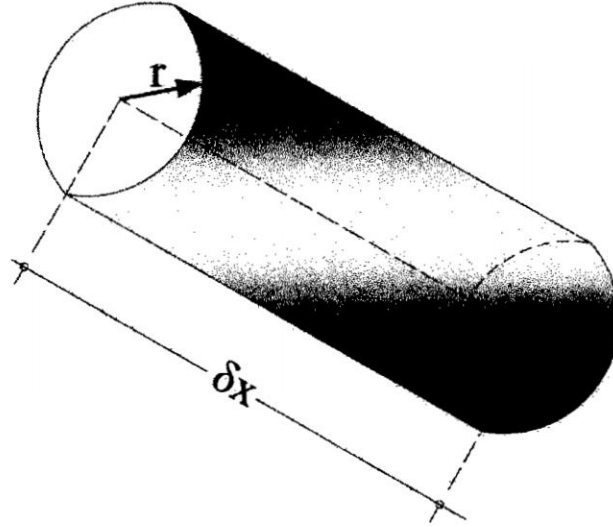


Figura 3.6: Área de aplicación del esfuerzo cortante en la tubería

$$A = L_c \delta x; L_c = 2\pi r = D\pi = D\pi \delta x \quad (3.3.9)$$

Reemplazando el valor del área en la ecuación 3.3.8 tenemos:

$$F_s = \gamma SR(D\pi \delta x) \quad (3.3.10)$$

3.3. Formulación matemática del problema

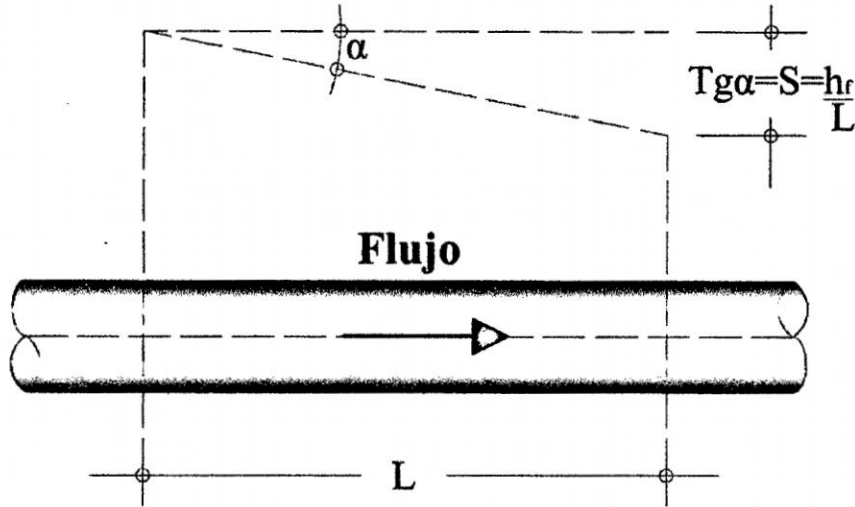


Figura 3.7: Pérdidas por fricción en la tubería

Del gráfico:

$$\tan \alpha = S = \frac{h_f}{L} \quad (3.3.11)$$

Reemplazando el valor de la ecuación 3.3.11 en la ecuación 3.3.10 tenemos:

$$F_s = \gamma R \left(\frac{h_f}{L} \right) (D\pi\delta x) \quad (3.3.12)$$

Si la fórmula de Darcy-Weisbach se utiliza para el cálculo de las pérdidas por fricción, entonces:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (3.3.13)$$

La fuerza cortante debido a la fricción será:

$$\begin{aligned} F_s &= \gamma R \frac{\left(f \frac{L V^2}{D 2g} \right)}{L} (D\pi\delta x) \\ &= \gamma \left(\frac{D}{4} \right) \left(f \frac{V^2}{2g} \right) (\pi\delta x) \\ &= \frac{\gamma}{g} \left(f \frac{V^2}{8} \right) (\pi D\delta x) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

3.3. Formulación matemática del problema

Donde:

g : Aceleración de la gravedad.

f : Factor de fricción.

D : Diámetro de la tubería.

La fuerza resultante F_R que actúa sobre el elemento está dado por la suma de fuerza actuantes en el elemento y según la segunda ley de Newton del movimiento tenemos:

$$F_R = ma \rightarrow F_R = F_1 - F_2 - F_s \quad (3.3.15)$$

$$\begin{aligned} F_R &= \gamma A(H - Z) - \gamma A \left(H - Z + \frac{\partial H}{\partial x} \delta x \right) - \frac{\gamma}{g} \left(f \frac{V^2}{8} \right) (D\pi\delta x) \\ &= \cancel{\gamma A(H - Z)} - \cancel{\gamma A(H - Z)} - \gamma A \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x \right) - \frac{\gamma}{g} \left(f \frac{V^2}{8} \right) (D\pi\delta x) \\ &= -\gamma A \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x \right) - \frac{\gamma}{g} \left(f \frac{V^2}{8} \right) (D\pi\delta x) = ma \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Para el elemento líquido que se examina, la masa y la aceleración son:

$$m = \frac{\gamma}{g} A\delta x$$

$$a = \frac{dV}{dt}$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación 3.3.16.

$$-\gamma A \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x \right) - \frac{\gamma}{g} \left(f \frac{V^2}{8} \right) (D\pi\delta x) = \left(\frac{\gamma}{g} A\delta x \right) \left(\frac{dV}{dt} \right) \quad (3.3.17)$$

3.3. Formulación matemática del problema

Dividiendo por $\left(\frac{\gamma}{g} A \delta x\right)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{-\gamma A \left(\frac{\partial H}{\partial x} \delta x\right)}{\left(\frac{\gamma}{g} A \delta x\right)} - \frac{\frac{\gamma}{g} \left(f \frac{V^2}{8}\right) (D \pi \delta x)}{\left(\frac{\gamma}{g} A \delta x\right)} &= \frac{dV}{dt} \\ -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f V^2 \pi D}{A} &= \frac{dV}{dt} \\ -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f V^2 \pi D}{8 \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)} &= \frac{dV}{dt} \\ -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f V^2 \pi D}{8 \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^{1/2}} &= \frac{dV}{dt} \\ -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f V^2}{2D} &= \frac{dV}{dt} \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Sabemos del cálculo elemental que la derivada total es:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior.

$$-g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f V^2}{2D} = \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \quad (3.3.20)$$

En la mayoría de los problemas transitorios, el término $V \frac{\partial V}{\partial x}$ es significativamente menor que el término $\frac{\partial V}{\partial t}$. Por tanto $V \frac{\partial V}{\partial x} \approx 0$.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f V^2}{2D} = 0 \quad (3.3.21)$$

Para tener en cuenta el flujo inverso, en la expresión V^2 en la ecuación, se puede escribir como $V |V|$, en el que $|V|$ es el valor absoluto de V . Al escribir la ecuación en términos

3.3. Formulación matemática del problema

de caudal Q y reordenando, obtenemos.

$$\frac{\partial Q}{A \partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f Q^2}{2 D A^2} = 0 \quad (3.3.22)$$

Multiplicando por el área A a la ecuación anterior, obtenemos.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + g A \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{f Q |Q|}{2 D A} = 0 \quad (3.3.23)$$

En la demostración de las ecuaciones, la fórmula de Darcy-Weisbach se ha utilizado para el cálculo de las pérdidas por fricción. Si una fórmula general exponencial se hubiera utilizado para estas pérdidas, el último término de la ecuación podría ser escrito como $\frac{k Q |Q|^m}{D^b}$, con los valores de k , m y b en función de la fórmula empleada. Si los valores correctos de m y b se usan, el resultado es independiente de la fórmula empleada, es decir, las fórmulas de Darcy-Weisbach y Hazen-Williams daría resultados similares¹.

3.3.3. Ecuación de continuidad

Consideráramos el volumen de control que se muestra en la figura 3.8.

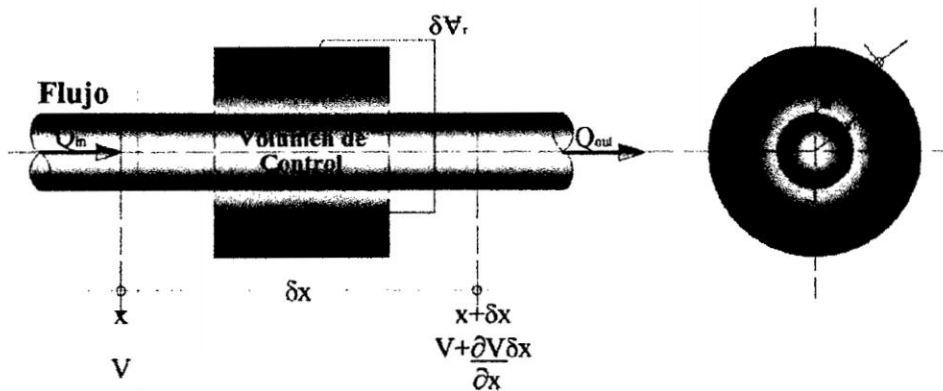


Figura 3.8: Notación para la Ecuación de Continuidad

¹Para mayor detalle ver la referencia:[5, Página 30]

3.3. Formulación matemática del problema

El volumen de fluido de entrada V_{in} y de salida V_{out} , durante el intervalo de tiempo δt son:

$$V_{in} = VA\delta t = V\pi r^2\delta t \quad (3.3.24)$$

$$V_{out} = \left(V + \frac{\partial V}{\partial x}\delta x \right) \pi r^2\delta t \quad (3.3.25)$$

En el cual r , es el radio de la tubería. El aumento en el volumen de líquido durante el tiempo se muestra en la figura 3.9.

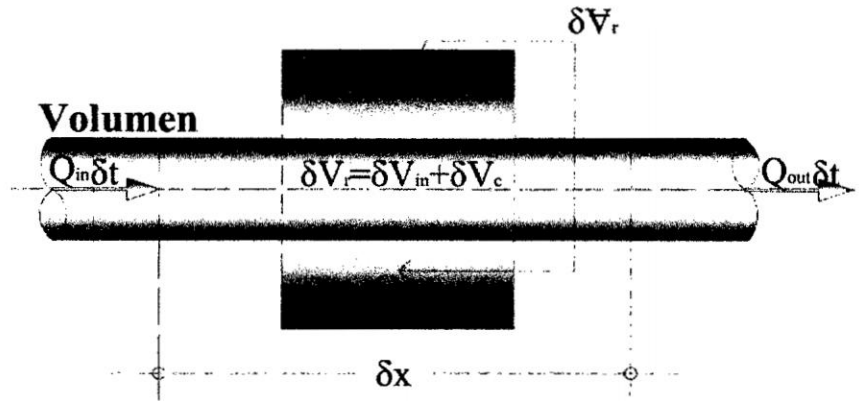


Figura 3.9: Aumento en el volumen de líquido V_{in} durante el tiempo δt

El aumento en el volumen de líquido V_{in} durante el tiempo δt es:

$$\begin{aligned} \delta V_{in} &= V_{in} - V_{out} \\ &= V\pi r^2\delta t - \left(V + \frac{\partial V}{\partial x}\delta x \right) \pi r^2\delta t \\ &= V\pi r^2\delta t - V\pi r^2\delta t - \frac{\partial V}{\partial x}\delta x\pi r^2\delta t \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x}\delta x\pi r^2\delta t \end{aligned} \quad (3.3.26)$$

La discretización de lo continuo a lo discreto es:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\delta P}{\delta t} \rightarrow \delta P = \frac{\partial P}{\partial t}\delta t \quad (3.3.27)$$

3.3. Formulación matemática del problema

El cambio de presión δP durante el intervalo de tiempo δt es $\frac{\partial P}{\partial t} \delta t$. Este cambio de presión hace que las paredes del conducto se amplíen o se contraigan radialmente y las causas para que la longitud del elemento líquido aumente o disminuya son debidas a la compresión del líquido.

El esfuerzo se define como:

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Al hacer equilibrio en la parte interior de la tubería, tendremos la fuerza de presión sea igual a la tensión en la mitad de la sección por ser simétrico (Figura 3.10).

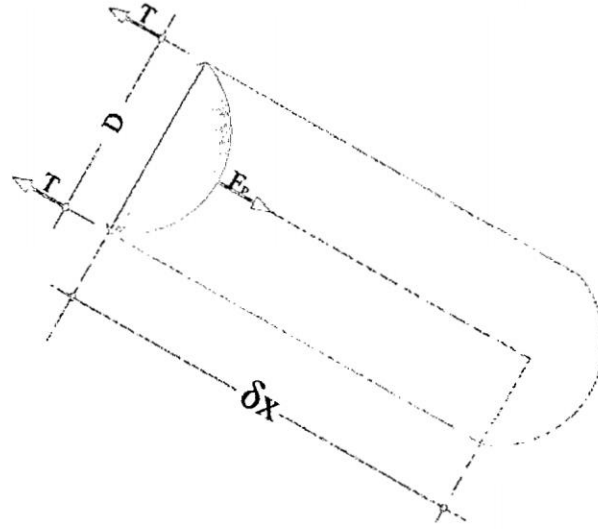


Figura 3.10: Parte interior de la tubería sometida a esfuerzos internos

$$F_P = PA = P(D\delta x)$$

3.3. Formulación matemática del problema

Al hacer equilibrio en el eje de la tubería.

$$2T = F_p$$
$$T = \frac{P(D\delta x)}{2}$$
$$T = Pr\delta x$$

Considerar en primer lugar el cambio de volumen radial δV_r , debido a la expansión o contracción de la tubería². El esfuerzo radial σ , en un conducto debido a la presión P está dado al hacer equilibrio en la parte exterior de la tubería (Figura 3.11):

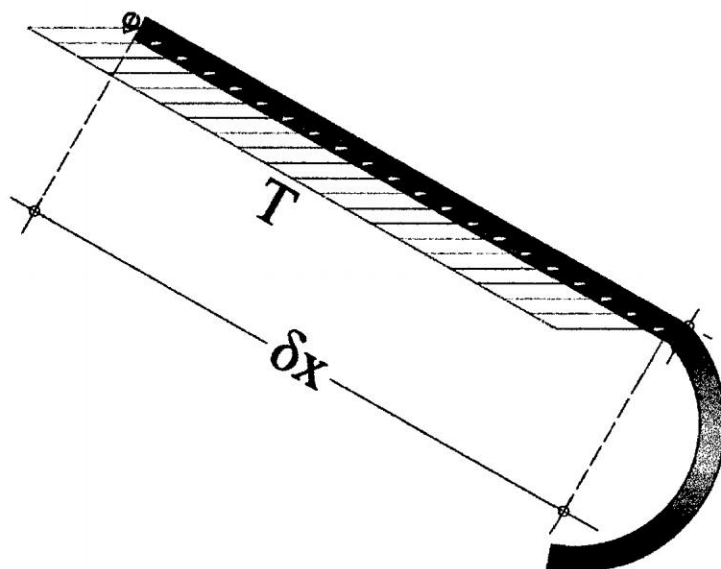


Figura 3.11: Parte exterior de la tubería sometida a esfuerzos externos

²No se tiene en cuenta la expansión y contracción del elemento fluido debido a los efectos de Poisson. Si se está interesado en la obtención de la Ecuación de Continuidad incluyendo estos efectos vea la referencia [26]

3.3. Formulación matemática del problema

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{T}{e\delta x} \\
 T &= Pr\delta x \\
 \sigma &= \frac{Pr\delta x}{e\delta x} \\
 \sigma &= \frac{Pr}{e}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.28}$$

En el cual e , es el espesor de la pared de la tubería. Por lo tanto, el cambio de esfuerzo radial $\delta\sigma$ causado por δP puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 \delta\sigma &= \delta P \frac{r}{e} \\
 &= \frac{\partial P}{\partial t} \delta t \frac{r}{e}
 \end{aligned}
 \tag{3.3.29}$$

Donde el radio r se ha incrementado a $r + \delta r$, la deformación unitaria radial se define como:

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta r}{r}
 \tag{3.3.30}$$

Si las paredes de la tubería son asumidas linealmente elástico, entonces se cumple la Ley de Hooke.

$$E = \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}
 \tag{3.3.31}$$

En el cual E , es el módulo de elasticidad de Young. Sustituyendo las expresiones 3.3.30 y 3.3.31 tenemos:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\frac{\partial P}{\partial t} \delta t \frac{r}{e}}{\frac{\delta r}{r}} \\
 \delta r &= \frac{\partial P}{\partial t} \frac{r^2}{eE} \delta t
 \end{aligned}
 \tag{3.3.32}$$

3.3. Formulación matemática del problema

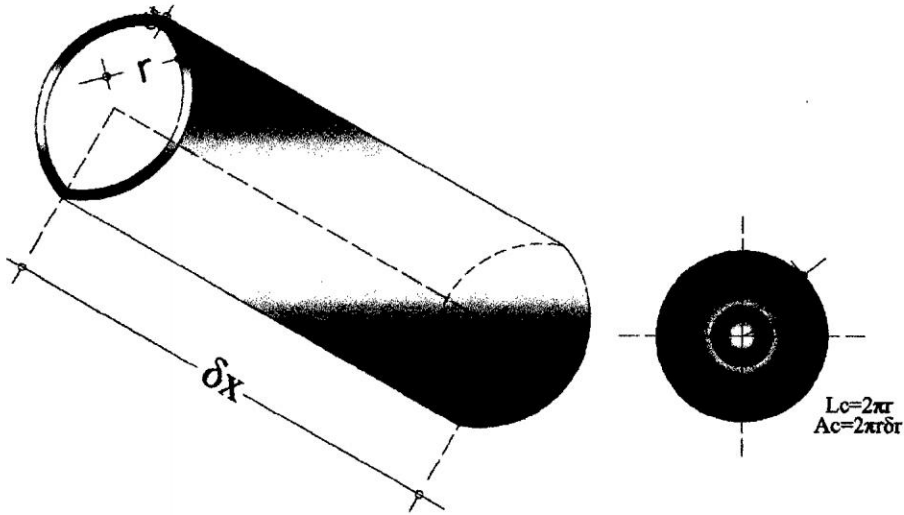


Figura 3.12: Área del sector circular

El cambio en el volumen del elemento, debido a la expansión o contracción radial del conducto es:

$$\delta V_r = 2\pi r \delta x \delta r \quad (3.3.33)$$

Reemplazando el valor de la anterior ecuación.

$$\begin{aligned} \delta V_r &= 2\pi r \left(\frac{\partial P}{\partial t} \frac{r^2}{eE} \delta t \right) \delta x \\ &= 2\pi \frac{\partial P}{\partial t} \frac{r^3}{eE} \delta t \delta x \end{aligned} \quad (3.3.34)$$

El módulo de elasticidad de un fluido K , es definido como:

$$K = \frac{-\delta P}{\frac{\delta V_c}{V}} \quad (3.3.35)$$

Donde: δV_c , es la variación del volumen de control (debido a la compresibilidad del fluido) y V , es el volumen original (antes de la deformación)

3.3. Formulación matemática del problema

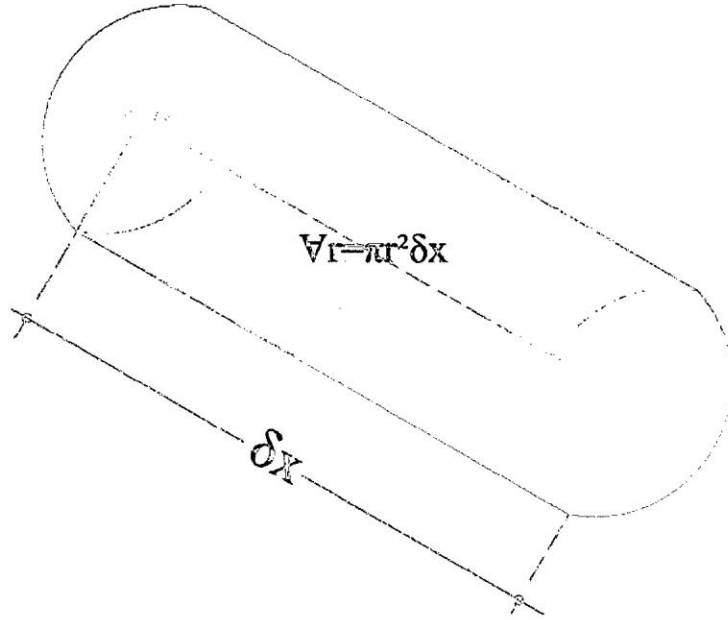


Figura 3.13: Volumen original

$$V = \pi r^2 \delta x \quad (3.3.36)$$

De las ecuaciones 3.3.35 y 3.3.36 ordenándolos tenemos:

$$\begin{aligned} \delta V_c &= -\frac{\delta P}{K} V \\ &= -\frac{\partial P}{\partial t} \frac{\delta t}{K} (\pi r^2 \delta x) \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Si asumimos que la densidad de líquidos se mantiene constante, entonces se deduce que la ley de conservación de masa es:

$$\delta V_{in} + \delta V_c = \delta V_r \quad (3.3.38)$$

Sustituyendo las expresiones de sus respectivas ecuaciones en la ecuación anterior tenemos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} \delta x \pi r^2 \delta t - \frac{\partial P}{\partial t} \frac{\delta t}{K} (\pi r^2 \delta x) = 2\pi \frac{\partial P}{\partial t} \frac{r^3}{cE} \delta t \delta x \quad (3.3.39)$$

Dividiendo por $\pi r^2 \delta t \delta x$ tenemos:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{K} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{2r}{eE} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (3.3.40)$$

Reescribiéndolo y ordenándolo como:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t} \left(\frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right) = 0 \quad (3.3.41)$$

Notando que $P = \rho g H$ y $Q = VA$ reorganizando los términos en la ecuación 3.3.41 se convierte en:

$$\frac{\partial \left(\frac{Q}{A} \right)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho g H)}{\partial t} \left(\frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right) = 0 \quad (3.3.42)$$

En el cual ρ , es la densidad de la masa del fluido y g , es la constante de la aceleración de la gravedad que son constantes en la ecuación entonces podemos escribirlo como:

$$\frac{\partial Q}{A \partial x} + \rho g \left(\frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right) \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.3.43)$$

Dividiendo por $\rho g \left(\frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial Q}{A \partial x}}{\rho g \left(\frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right)} + \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{1}{\rho \left(\frac{2r}{eE} + \frac{1}{K} \right)} + \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{1}{\rho \left(\frac{DK + eE}{eEK} \right)} + \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \\ \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{KeE}{DK + eE} + \frac{\partial H}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.44)$$

3.4. Comentarios generales sobre la Ecuación Dinámica y la Ecuación de Continuidad

Dividiendo por (eE) tenemos:

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{1}{\rho} \left(\frac{K}{\frac{DK}{eE} + 1} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.3.45)$$

Se conoce que la velocidad de onda está definida por:

$$a^2 = \frac{K}{\rho \left[1 + \left(\frac{KD}{eE} \right) \right]} \quad (3.3.46)$$

Reemplazando la ecuación 3.3.46 en la ecuación 3.3.45 se tiene:

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} a^2 + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.3.47)$$

Ordenando la última ecuación se tiene:

$$\frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (3.3.48)$$

3.4. Comentarios generales sobre la Ecuación Dinámica y la Ecuación de Continuidad

La Ecuación Dinámica (3.3.23) y la Ecuación de Continuidad (3.3.48), son un juego de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. En estas ecuaciones, hay dos variables independientes x y t , y dos variables dependientes Q y H . Otras variables A y D , son características del sistema de tuberías y son invariantes al tiempo, pero pueden ser funciones de x . Aunque la velocidad de la onda a , depende de las características del sistema. El factor de fricción f varía con el número de Reynolds.

3.4. Comentarios generales sobre la Ecuación Dinámica y la Ecuación de Continuidad

Los términos no lineales en las ecuaciones: Dinámica y Continuidad son llamados las ecuaciones cuasi lineales. Estas ecuaciones pueden ser clasificadas como: elíptico, parabólico o hiperbólico.

Las ecuaciones: Dinámica y Continuidad pueden ser escritas en la forma matricial como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} Q \\ H \end{Bmatrix} = -[B(Q, H)] \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} Q \\ H \end{Bmatrix} - [G(Q, H)] \quad (3.4.1)$$

En el cual:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & gA \\ \frac{a^2}{gA} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

$$G = \begin{Bmatrix} \frac{fQ|Q|}{2DA} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4.3)$$

Los valores propios λ , de la matriz B determinan el tipo del juego de ecuaciones. La ecuación característica de matriz B es:

$$\lambda^2 - a^2 = 0 \quad (3.4.4)$$

De ahí resulta:

$$\lambda = \pm a \quad (3.4.5)$$

Donde a es real, ambos valores propios son reales y distintos por lo tanto las ecuaciones: Dinámica y Continuidad constituyen un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas³.

³Texto completo de la referencia:[5, pág. 33-34]

3.5. Condiciones de contorno

La solución completa de las ecuaciones transitoria gobernantes requiere para calcular algunas de las condiciones iniciales, así como algunas condiciones límite. En general, las condiciones iniciales se especifican a partir de una condición conocida, por ejemplo: estado de equilibrio de flujo. Por otro lado, las condiciones límite debe calcularse por las expresiones que pueden establecer alguna relación entre las variables de estado H y Q presente en la frontera. Dentro de este contexto, algunos autores como Bosserman (1978), Chaudhry y Yevjevich (1981), Chaudhry (1982, 1987), Streeter y Wylie (1987), Watters (1984), Wood y Funk (1988) y Wylie y Streeter (1983) presentaron una variedad de métodos diferentes al modelo para condiciones de frontera generalmente presentes en las redes de tubería.

Incluso si las ecuaciones que permiten al modelo numéricamente las condiciones límite puede ser fácilmente aplicado, en general sólo puede aplicarse en redes de tubería con una simple conexión. Karney (1984) presenta, en el contexto del MC, la compatibilidad de ecuaciones que permitan encontrar la solución para muchas condiciones de frontera sin importar su nivel de complejidad (número de tubos que están conectados a la red de nodo). Su formulación es adecuada para los nodos donde un gran número de tuberías están conectadas, el logro de una simple y eficiente solución de flujo transitorio en redes de tubería con un complejo de conectividad⁴.

El método de las Características proporciona una forma sistemática de cálculo de las condiciones de transición, dentro de una tubería. Sin embargo, si este enfoque ordenada, se extendiera a toda la gama de dispositivos hidráulicos que se encuentran en una red, un esquema más poderoso resultará. El primer paso es presentar una clasificación sistemática de los dispositivos de una red simple. El objetivo aquí es evitar restricciones arbitrarias e

⁴Para mayor detalle véase el texto completo de la referencia: [21] y [32, cap.4]

innecesarias, que podrían confundir el desarrollo del algoritmo, complicando la depuración, o centrar la excesiva atención a los detalles irrelevantes.

Para ser más específicos, las siguientes secciones demuestran cómo toda una clase de dispositivos se puede reducir a la solución de una ecuación simple. Este enfoque tiene las siguientes ventajas sobre las formulaciones de la red presentados por los otros (Fox, 1977; Koelle 1982, Wylie y Streeter, 1982; Watters 1984):

- Reduce el tamaño del código y los requisitos de memoria,
- Mejora la precisión, ya que la descripción más realista del comportamiento del dispositivo está incluido en la formulación.
- Existe menos restricciones sobre la manera como están conectados en los nodos, las tuberías,
- Reduce los tiempos de ejecución,
- Simplifica la estructura del algoritmo, lo que hace que el código sea más fácil de escribir, mantener, modificar y depurar,
- De forma explícita se tiene en cuenta la fricción del fluido, la inercia y las pérdidas menores en todos los elementos, y
- Alienta a ser más precisa y fiable la información de los datos de campo.

Para alcanzar estos importantes beneficios, las tuberías, tramos, secciones, nodos y las condiciones de frontera que forman una red debe ser cuidadosamente definido. En este capítulo, las expresiones algebraicas para diferentes condiciones de frontera (nodos, embalses, etc.) será mostrado en el contexto del MC. Para más detalles, es recomendable consultar las siguientes referencias (Chaudhry, 1987; Karney, 1984; Watters, 1984; Wylie y Streeter, 1983).

3.5.1. Nudo simple

Según Karney (1984) y Karney y McInnis (1992), un nodo simple es una condición de frontera que sólo tiene un simple conjunto de secciones de tuberías que descargan al nodo de la red (Figura 3.14) [33, Página 28].

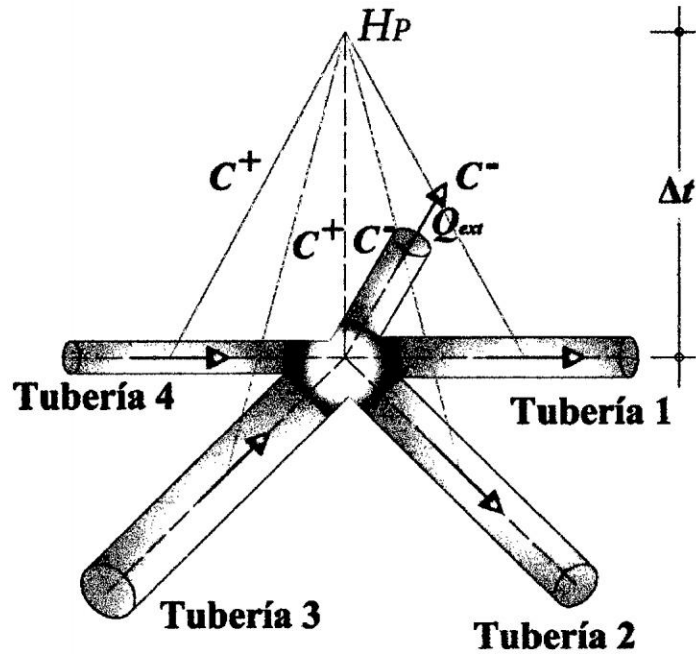


Figura 3.14: Diagrama del esquema de un nudo simple

Donde:

N_1 : Conjunto de tuberías que descargan hacia un nodo de la red.

N_2 : Conjunto de tuberías que descargan de un nodo de la red.

Q_{ext} : Caudal nodal conocido, positivo cuando descargan hacia un nodo de la red; de otra manera, negativo.

Las pérdidas de altura son insignificantes en el nodo de la red, entonces es posible asumir que la altura piezométrica en el nodo puede ser representada por un valor único H_p . Para las tuberías que descargan hacia un nodo de la red es válida la ecuación C^+ y para las tuberías que descargan de un nodo de la red es válida la ecuación C^- .

Para la ecuación característica positiva (C^+).

$$Q_{Pi} = -\frac{H_P}{B_i} + \frac{1}{B_i} \left[\underbrace{B_i Q_A + H_A - B_i \frac{f \Delta t}{2DA} Q_A}_{C_{Pi}} \mid Q_A \mid \right] \quad (3.5.1)$$

$$Q_{Pi} = -\frac{H_P}{B_i} + \frac{C_{Pi}}{B_i}; \forall i \in N_1$$

Con:

$$C_{Pi} = \frac{Q_A + \frac{gA_i}{a_i} H_A - \frac{f_i \Delta t}{2D_i A_i} Q_A \mid Q_A \mid}{\frac{gA_i}{a_i}} \quad (3.5.2)$$

Para la ecuación característica positiva (C^-).

$$-Q_{Pj} = -\frac{H_P}{B_j} + \frac{1}{B_j} \left[\underbrace{-B_j Q_B + H_B + B_j \frac{f \Delta t}{2DA} Q_B}_{C_{Mj}} \mid Q_B \mid \right] \quad (3.5.3)$$

$$-Q_{Pj} = -\frac{H_P}{B_j} + \frac{C_{Mj}}{B_j}; \forall j \in N_2$$

Con:

$$C_{Mj} = \frac{-Q_B + \frac{gA_j}{a_j} H_B + \frac{f_j \Delta t}{2D_j A_j} Q_b \mid Q_b \mid}{\frac{gA_j}{a_j}} \quad (3.5.4)$$

Si tenemos en cuenta que no hay almacenamiento en el nodo de la red, entonces la ecuación de continuidad debe ser cumplida usando las ecuaciones de Continuidad válida para el flujo permanente.

$$\sum_{i \in N_1} Q_{Pi} - \sum_{j \in N_2} Q_{Pj} - Q_{ext} = 0 \quad (3.5.5)$$

Introduciendo las ecuaciones 3.5.1 y 3.5.3 en la ecuación 3.5.5:

$$-\sum_{i \in N_1} \frac{H_P}{B_i} - \sum_{i \in N_1} \frac{C_{Pi}}{B_i} - \sum_{j \in N_2} \frac{H_P}{B_j} + \sum_{j \in N_2} \frac{C_{Mj}}{B_j} - Q_{ext} = 0 \quad (3.5.6)$$

Reordenando:

$$-H_P \underbrace{\left[\sum_{i \in N_1} \frac{1}{B_i} + \sum_{j \in N_2} \frac{1}{B_j} \right]}_{\frac{1}{B_c}} + \sum_{i \in N_1} \frac{C_{Pi}}{B_i} + \sum_{j \in N_2} \frac{C_{Mj}}{B_j} - Q_{ext} = 0 \quad (3.5.7)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{B_c} = \sum_{i \in N_1} \frac{1}{B_i} + \sum_{j \in N_2} \frac{1}{B_j} \quad (3.5.8)$$

$$C_c = B_c \left[\sum_{i \in N_1} \frac{C_{Pi}}{B_i} + \sum_{j \in N_2} \frac{C_{Mj}}{B_j} \right] \quad (3.5.9)$$

Reemplazando 3.5.8 y 3.5.9 en 3.5.7:

$$H_P = C_c - B_c Q_{ext} = \left[\sum_{i \in N_1} \frac{1}{B_i} + \sum_{j \in N_2} \frac{1}{B_j} \right]^{-1} \left[\sum_{i \in N_1} \frac{C_{Pi}}{B_i} + \sum_{j \in N_2} \frac{C_{Mj}}{B_j} - Q_{ext} \right] \quad (3.5.10)$$

La ecuación 3.5.10 representa un nodo de la red compleja donde muchas secciones de tuberías están conectadas entre sí y donde es posible, utilizando la compatibilidad ecuación 3.5.10, para analizar cada rama (o tubo de sección) de la red independientemente del resto, es decir, la ecuación 3.5.10 hace posible la disociación nodal en las redes complejas de tuberías.

Para entender el fenómeno para las condiciones de frontera se utiliza el caudal y para la programación se utiliza la velocidad ya que permite una mejor visualización de la propagación de onda. Para los nodos simples se hará la formulación matricial para cualquier esquema numérico.

3.5.2. Línea de Reservorio

Según Karney (1984) y Karney y McInnis (1992), el reservorio (Figura 3.15) conectado a un nodo ordinario puede ser fácilmente representada por la ecuación de continuidad que se establece la relación entre el volumen acumulado y el promedio de descarga en el reservorio en un Δt [33, Página 31]:

$$\Delta V = (H_r - H_0) A_r = \Delta t \left(\frac{Q_{ext} + Q_e}{2} \right) \quad (3.5.11)$$

Esta ecuación se puede escribir más compacta como:

$$H_r = H_0 + B_0 (Q_{cxt} + Q_e) \quad (3.5.12)$$

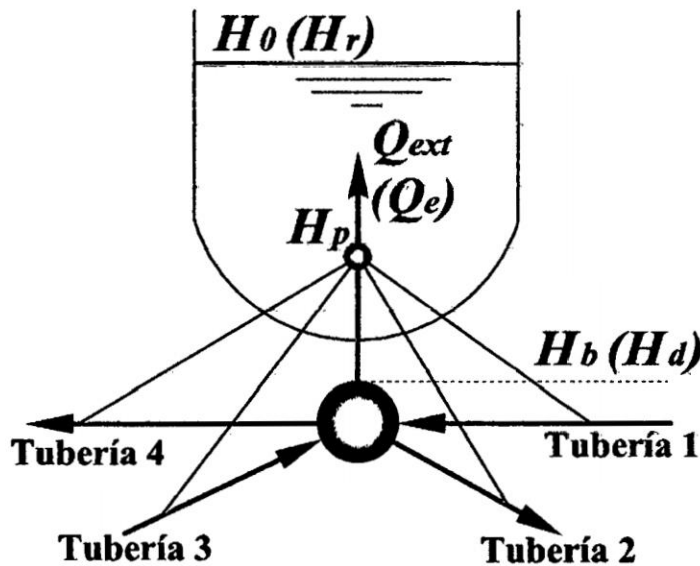


Figura 3.15: Diagrama del esquema de la línea de reservorio

Donde:

H_r : Altura piezométrica en la superficie libre del reservorio en el momento actual.

H_0 : Altura piezométrica en la superficie libre del reservorio (instante anterior).

Q_e : Flujo externo nodal (instante anterior).

Q_{ext} : Flujo externo nodal (momento actual).

$$B_0 = \frac{\Delta t}{2A_r}$$

A_r : Área de sección transversal del embalse.

Δt : Paso del tiempo de la discretización.

La ecuación 3.5.12 es general porque cuando el reservorio tiene una gran área de sección transversal (A_r), B_0 tiende a cero y la ecuación 3.5.12 se reduce a:

$$H_r = H_0 \quad (3.5.13)$$

El término H_0 puede ser constante o variable en el tiempo (por ejemplo, las ondas en un depósito).

En un “*Reservorio Simple*” es correcto suponer que no hay pérdida de carga (por fricción y singularidades) entre el nodo de la red y la superficie libre del agua. Entonces, la condición $H_P = H_r$ puede ser expresado analíticamente igualando las ecuaciones (3.5.10) y (3.5.12)

$$H_p = C_c - B_c Q_{ext} = H_r = H_0 + B_0 (Q_e + Q_{ext})$$

Donde:

$$Q_{ext} = \frac{C_c - H_0 - B_0 Q_e}{B_c + B_0} \quad (3.5.14)$$

La ecuación 3.5.14 puede ser usado para representar los depósitos de carga constante, los tanques de almacenamiento y tanques de onda simple. En conjunto, estos dispositivos son llamados depósitos simples.

Cuando el área de sección transversal del depósito es pequeña, el análisis debe contar tanto las pérdidas de carga así como la inercia del tanque. Una representación lineal de este último concepto se conoce como un elemento de inercia agrupado (Wylie y Streeter

1982) y se puede escribir.

$$H_b - H_r = C_1^r + C_2^r Q_{ext} \quad (3.5.15)$$

Donde:

H_P : Altura piezométrica en el momento actual $H_P = H_P(x, t)$.

H_b : Altura piezométrica en la base del depósito en el momento actual.

C_1^r y C_2^r : Constantes relacionadas a la inercia y los efectos de la fricción.

C_1^r y C_2^r puede ser expresado como:

$$C_1^r = H_0 - H' - \frac{2L_r Q_e}{gA_r \Delta t} \quad (3.5.16)$$

$$C_2^r = \frac{2L_r}{gA_r \Delta t} + \frac{f_r L_r}{gD_r A_r^2} |Q_e| \quad (3.5.17)$$

Donde:

H' : Altura piezométrica en la base del depósito en el instante anterior.

L_r : Longitud inicial de la columna de agua.

D_r : Diámetro interno del depósito.

f_r : Factor de fricción Darcy-Weisbach en el depósito.

$$H_0 = Z_{bot} + L_r$$

Z_{bot} : Elevación de la base del depósito.

La relación de almacenamiento del embalse y la inercia relación de pérdida de carga pueden ser combinadas para producir.

$$H_b = H_r + C_1^r + C_2^r Q_{ext} \quad (3.5.18)$$

$$H_b = C_b + B_b Q_{ext}$$

La ecuación que esta relación es lineal y puede ser fácilmente resuelto, como en el caso de reservorio simple. Si las pérdidas por fricción son insignificantes, entonces es correcto

escribir $H_P = H_b$. En este caso, obtenemos:

$$Q_{ext} = \frac{C_c - C_b}{B_c + B_b} \quad (3.5.19)$$

La ecuación 3.5.19 es general porque cuando C_1^r y C_2^r son iguales a cero, obtenemos la ecuación 3.5.14, que corresponde al flujo externo nodal para un reservorio simple. Además, si B_0 tiende a cero, obtenemos la ecuación para depósito de carga constante. Entonces, la ecuación 3.5.19 representa un elemento de almacenaje general llamado *Reservorio Lineal*.

3.5.3. Línea de Válvula

La apertura de válvula (o el cierre) es la causa principal de flujo transitorio en redes de tubería. Por ese motivo, su correcta simulación tiene una gran relevancia. La válvula se considera como un elemento de resistencia variable en el tiempo que puede ser expresada a través de la curva de apertura (o cierre) de la válvula (Wood y Funk, 1988). Las magnitudes de presión generados por la válvula de operación son dependientes del tipo de válvula, la velocidad de apertura (o cierre) y las propiedades elásticas del sistema (Wood y Jones, 1973) [33, Página 43].

En una red de tubería sencilla con un embalse (aguas arriba), una sección de tubería a lo largo de la línea y una válvula (aguas abajo), es posible estimar la máxima presión para un flujo muy rápido transitorio (es decir, cuando la válvula el tiempo de cierre T_c es inferior a $\frac{2L}{a}$), utilizando las fórmulas Joukowsky (Chaudhry, 1987; Parmakian, 1963; Sharp, 1981; Thorley, 1988; Thorley, 1990; Watters, 1984; Wylie y Streeter, 1983):

$$\Delta H = \frac{a\Delta v}{g} \quad (3.5.20)$$

Donde:

ΔH : Altura de presión máxima.

Δv : Variación de la velocidad del fluido.

g : Constante de la gravedad.

Es necesario remarcar que la ecuación Joukowsky tiene algunas limitaciones ya que la intensidad y el comportamiento del flujo transitorio son dependientes no sólo de las variables antes mencionadas, que también son dependientes de las características físicas del problema, la configuración del sistema, las condiciones iniciales, el tiempo del evento, etc. (Karney y McInnis, 1990). Teniendo en cuenta este punto, Simpson y Wylie (1991) han demostrado que cuando un repentino cierre de la válvula se genera, la cavitación puede generar *Pulsos de Presión* de corta duración que finalmente puede incrementar las presiones locales en magnitudes superiores a las dadas por las fórmulas Joukowsky.

Dentro del contexto de redes muy simples donde es posible utilizar la ecuación de Joukowsky, se puede hablar de un *Tiempo Característico* y otro *Crítico*. El primero se refiere al tiempo que toma la onda de presión en trasladarse de un extremo al otro del sistema; el tiempo crítico se refiere al tiempo que toma la onda de presión en ir y volver de un extremo a otro del sistema. Estos valores ayudan a clasificar la velocidad relativa de maniobra que causa el Golpe de Ariete (lento, gradual, rápido).

Tiempo característico:

$$T_{ca} = \frac{L}{a}(s) \quad (3.5.21)$$

Tiempo crítico:

$$T_{ca} = 2\frac{L}{a}(s) \quad (3.5.22)$$

Cuadro 3.1: Tiempo de cierre de la válvula, tipo de flujo y modelo

Tiempo cierre	Tipo de flujo	Modelo aplicable
$T_{cr} = 0$	Instantáneo	Elástico
$T_{cr} \leq \frac{2L}{a}$	Rápido	Elástico
$T_{cr} > \frac{2L}{a}$	Gradual	Elástico
$T_{cr} \gg \frac{2L}{a}$	Lento	Rígido

3.5.3.1. Ecuaciones básicas

Según Streeter y Wylie (1987), para la deducción de las ecuaciones involucradas es necesario asumir que: (1) no hay ningún efecto inercial que acelera (o no) el flujo durante la apertura de la válvula; (2) en el interior de la válvula, el volumen de control, existe un volumen constante de líquido (Figura 3.16).

En cada instante, el flujo en las secciones frontera es el mismo: $Q_{PA} = Q_{PB}$ y la ecuación del orificio para el flujo positivo ($Q > 0$), es la siguiente:

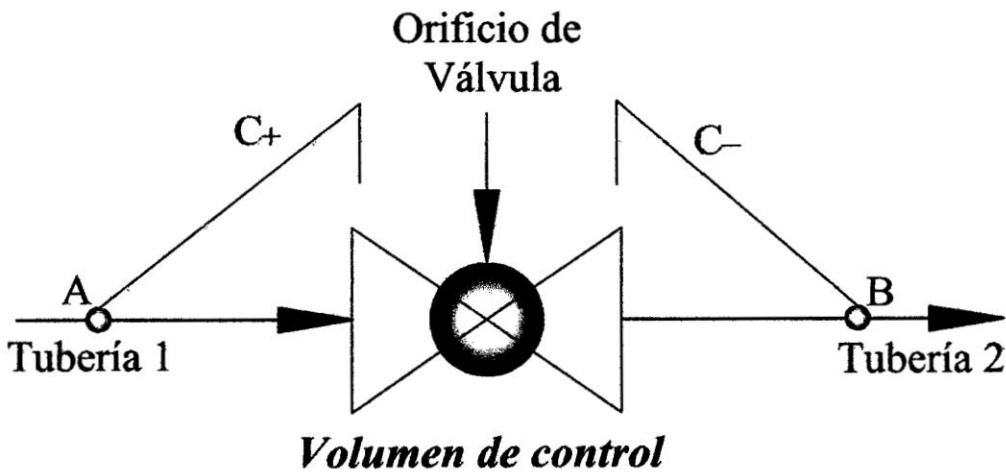


Figura 3.16: Diagrama del esquema de la línea de válvula

$$Q_{PA} = Q_{PB} = C_d A_v \sqrt{2g(H_{PA} - H_{PB})} \quad (3.5.23)$$

Donde:

C_d : Coeficiente de descarga de la válvula

A_v : Apertura del área (área del orificio).

Además, tenemos:

$$H_{PA} = C_P - B_{P1} Q_{PA} \quad (3.5.24)$$

$$H_{PB} = C_M + B_{M2} Q_{PB} \quad (3.5.25)$$

Eliminando H_{PA} y H_{PB} y haciendo $B = B_{P1} = B_{M2}$:

$$Q_{PB} = -gB(C_d A_v)^2 + \sqrt{gB((C_d A_v)^2)^2 + 2g(C_d A_v)^2 (C_P - C_M)} \quad (3.5.26)$$

Para obtener Q_P positivo, es necesario que $(C_P - C_M) > 0$. De modo análogo, para el flujo negativo ($Q < 0$):

$$Q_{PA} = Q_{PB} = -C_d A_v \sqrt{2g(H_{PB} - H_{PA})} \quad (3.5.27)$$

Solamente para el flujo negativo, cuando $B = B_{P1} = B_{M2}$ se obtiene:

$$Q_{PB} = gB(C_d A_v)^2 - \sqrt{gB((C_d A_v)^2)^2 + 2g(C_d A_v)^2 (C_M - C_P)} \quad (3.5.28)$$

Para la solución negativa, tenemos $C_M > C_P$. Para este caso el procedimiento de cálculo comienza con la determinación de C_P y C_M . Si $(C_P \geq C_M)$, entonces es necesario aplicar la ecuación 3.5.26; de lo contrario, la ecuación 3.5.28 debe aplicarse.

Por definición tenemos:

$$\tau = \frac{C_d A_v}{(C_d A_v)_0} \quad (3.5.29)$$

Donde:

$$(C_d A_v)_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{2gH_0}} \quad (3.5.30)$$

Donde:

Q_0 : Caudal.

H_0 : Pérdida de carga inicial en la válvula.

Entonces, podemos resolver $(C_d A_v)$ de la ecuación 3.5.29, obteniendo la expresión siguiente:

$$(C_d A_v) = \tau (C_d A_v)_0 = \frac{\tau Q_0}{\sqrt{2gH_0}} \quad (3.5.31)$$

Es más conveniente usar la ecuación 3.5.31 que las ecuaciones 3.5.26 y 3.5.28 porque en la literatura actual es corriente encontrar las curvas de apertura o el cierre de las válvulas con forma de $\tau - t$, donde τ representa el porcentaje de apertura (o cierre) en el tiempo (figura 3.24). Sustituyendo 3.5.31 en 3.5.26 y la haciendo un trabajo algebraico, podemos obtener la expresión siguiente:

$$Q_{pB} = -B \frac{C_v}{2} + \frac{\sqrt{(BC_v)^2 + 4C_v(C_p - C_M)}}{2} \quad (3.5.32)$$

De modo similar, para Q_{pA} la siguiente expresión puede ser obtenida:

$$Q_{pA} = B \frac{C_v}{2} - \frac{\sqrt{(BC_v)^2 + 4C_v(C_M - C_p)}}{2} \quad (3.5.33)$$

Con:

$$C_v = \frac{(\tau Q_0)^2}{H_0} \quad (3.5.34)$$

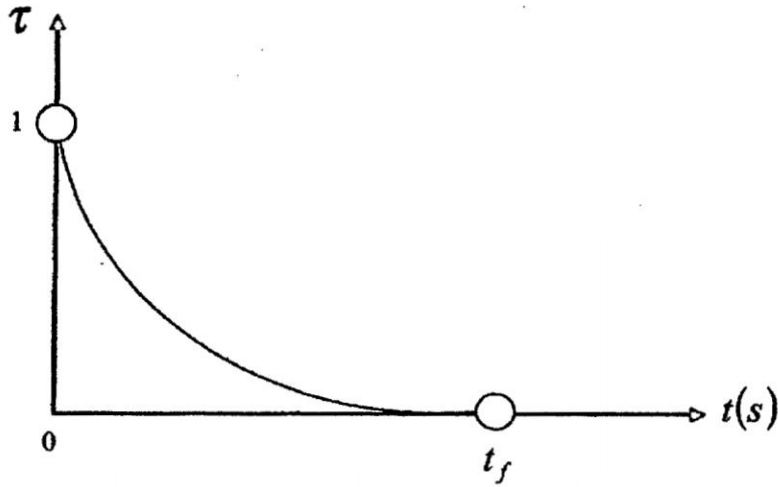


Figura 3.17: Diagrama del esquema de la válvula de cierre

Sustituyendo en las ecuaciones correspondientes, obtenemos H_{PA} y H_{PB} . La formulación que se obtiene hasta aquí puede ser útil para modelar otras condiciones límite, como un orificio ($\tau = 1$), que corresponde al abrir una válvula de caudal Q_0 y pérdida de carga H_0 (Chaudhry, 1987; Wylie y Streeter, 1983).

Como un estudio complementario de la formulación de las válvulas, se recomienda consultar el trabajo de McInnis (1997), que presenta un conjunto unificado de las condiciones de frontera eficiente que representan a la mayoría de los orificios de la válvula encontrados en el abastecimiento de agua, sistemas de conducción y distribución.

Capítulo 4

MODELACIÓN DEL PROBLEMA

4.1. Generalidades

Dado que el objetivo de esta tesis de grado es el desarrollo de un modelo matemático y computacional para el análisis del golpe de ariete generados en conductos cerrados. En este capítulo se presenta el procedimiento llevado a cabo para la solución de las ecuaciones diferenciales parciales que gobierna el fenómeno del golpe de ariete, mediante el Método de Elementos Finitos.

También se presentan algunas consideraciones importantes que deben tenerse en cuenta al usar las herramientas que este método ofrece para la simulación transitoria del flujo de fluidos que logre representar el fenómeno que ocurre a través del tiempo luego del cierre de la válvula y lograr simular la propagación de la onda de presión que se genera.

El estudio y el análisis del golpe de ariete usando computadoras digitales y algoritmos numéricos sofisticados han avanzado desde *Streeter* y *Wylie* quienes hicieron las primeras aplicaciones y las soluciones en la década de los sesenta. Desde entonces, muchas propuestas numéricas para la solución de las ecuaciones del golpe de ariete en redes de tuberías

complejas han aparecido, como el *Método de las Características* (MOC), *Métodos Híbridos* (HM's), *Método de Diferencias Finitas* (DFM), *Método de Elementos Finitos* (FEM) y el *Método de Volúmenes Finitos* (FVM). En esta tesis se solucionara el problema con el *Método de Elementos Finitos* ya que es la técnica elegida en este trabajo, sin embargo brevemente se presentara la solución por el Método de la características y el Método de Diferencias Finitas, ya que las ecuaciones de condiciones de borde adoptadas provienen de estas técnicas numéricas.

No obstante para la simulación del *flujo transitorio* o golpe de ariete en una red de tuberías se necesita previamente resolver el *flujo permanente*, es decir tener como dato o como *condiciones iniciales* a los variables de estado como *Gradiente Hidráulico*, *Presiones*, *Caudales* y *Velocidades*. El análisis de flujo permanente se puede realizar con el Método de Gradiente hidráulico o con el *Método de Elementos Finitos*, este ultimo se describirá en la siguiente sección.

4.2. Modelación en regimen permanente

4.2.1. Formulación directa del Método de Elementos Finitos

El flujo de fluido a través de tuberías puede ser clasificado como *laminar* o *turbulento*. En situaciones de flujo laminar, una fina capa de colorante inyectado en una tubería se mostrará como una línea recta y no habrá mezcla de capas del fluido y serán visible. Esta situación no sucede para flujo turbulento, en el que se producirá la mezcla a granel de las capas adyacentes de fluido. Flujo Laminar y turbulento son representados en la Figura 4.1. Flujo laminar típicamente ocurre cuando el número de Reynolds del líquido que fluye es menor de 2100. El número de Reynolds se define como: [22, página 395]

4.2. Modelación en regimen permanente

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \quad (4.2.1)$$

Donde ρ y μ son la densidad y la viscosidad dinámica del fluido, respectivamente. V representa la velocidad media del fluido, y D representa el diámetro de la tubería. El flujo se dice que en una región de transición cuando el número de Reynolds es típicamente entre 2100 y 4000. El comportamiento del flujo del fluido es impredecible en la región de transición. Generalmente el flujo se considera turbulento cuando el número de Reynolds es superior a 4000.

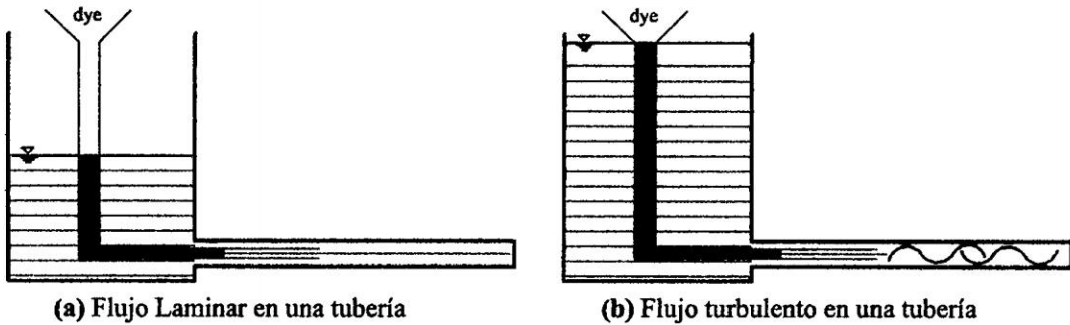


Figura 4.1: Flujos Laminar y turbulento

La conservación de la masa de un flujo constante requiere que el caudal másico en cualquier sección del tubo permanece constante según la ecuación

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 = \text{constante} \quad (4.2.2)$$

Otra vez, ρ es la densidad del fluido, V es la velocidad media del fluido en una sección, y A representa el área transversal del flujo como se muestra en la Figura 4.2.

Para un flujo incompresible, donde la densidad del fluido permanece constante el caudal volumetrico Q a través de un conducto en cualquier sección del conducto también es constante [22, página 396]:

$$Q_1 = Q_2 = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (4.2.3)$$

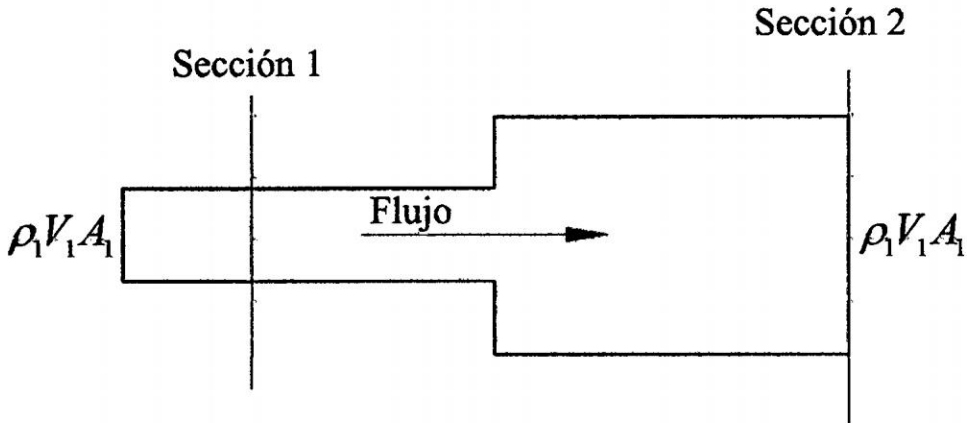


Figura 4.2: Flujo de fluido a través de un conducto de sección variable

Para un flujo laminar completamente desarrollado, existe una relación entre el caudal volumétrico y la caída de presión $P_1 - P_2$ a lo largo de una tubería de longitud L . Esta relación está dada por:

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \quad (4.2.4)$$

La caída de presión para un flujo turbulento es comúnmente expresada en términos de pérdida de carga, que se define como [22, página 397].

$$H_{loss} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g} = f \frac{L V^2}{D 2g} \quad (4.2.5)$$

Donde f es el factor de fricción, que depende de la rugosidad de la tubería¹ y el número de Reynolds². Para flujos turbulentos, también podemos obtener una relación entre el caudal y la pérdida de presión sustituyendo V en términos de la tasa de flujo en la ecuación

¹La rugosidad de las paredes de las tuberías es función del material con que están construidos, el acabado de la construcción y el tiempo de uso. Los valores son determinados en mediciones tanto de laboratorio como en el campo

²El número de Reynolds (R_e) es un número adimensional utilizado en mecánica de fluidos, diseño de reactores y fenómenos de transporte para caracterizar el movimiento de un fluido

(4.2.5) y reordenando los términos:

$$Q^2 = \frac{1}{f} \frac{\pi^2 D^5}{8\rho} \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) \quad (4.2.6)$$

Cuando comparamos el flujo turbulento de flujo laminar, podemos observar que para flujo turbulento, la relación entre la tasa de flujo y la pérdida de presión es no lineal.

4.2.1.1. Tuberías en serie

Para el flujo de un fluido a través de una red de *tuberías en serie* con los respectivos diámetros D_1, D_2, D_3, \dots , como se muestra en la Figura 4.3, la conservación de la masa (*ecuación de continuidad*) requiere que bajo condiciones de estado estacionario, la tasa de flujo de masa a través de cada tubo es el mismo:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3 = \dots = \text{constante} \quad (4.2.7)$$

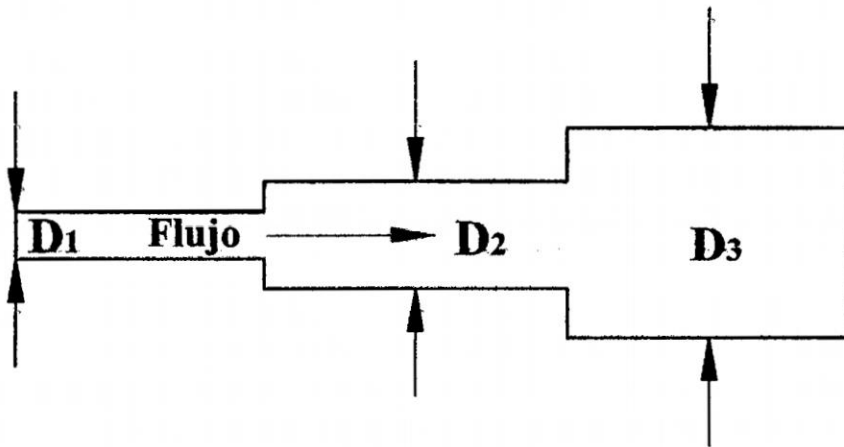


Figura 4.3: Tuberías en serie

Además, para un flujo incompresible, la tasa de flujo volumétrico a través de cada tubo

que forma parte de una red de tuberías en serie es constante. Es decir,

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = \text{constante} \quad (4.2.8)$$

Expresando los caudales en función de la velocidad media del fluido en cada tubo, obtenemos

$$V_1 D_1^2 = V_2 D_2^2 = V_3 D_3^2 = \dots = \text{constante} \quad (4.2.9)$$

Para las tuberías en serie, la pérdida de presión total a través de una red depende de la suma de las pérdidas de presión en cada tubo:

$$\Delta P_{total} = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \dots \quad (4.2.10)$$

4.2.1.2. Tuberías en paralelo

Para el flujo de un fluido a través de una red de *tuberías en paralelo*, como se muestra en la Figura 4.4, la conservación de la masa (*ecuación de continuidad*) es [22, página 398].

$$\dot{m}_{total} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 \quad (4.2.11)$$

Además, para un flujo incompresible,

$$Q_{total} = Q_1 + Q_2 \quad (4.2.12)$$

Para tuberías en paralelo, la pérdida de presión en cada tramo paralelo es el mismo y se relaciona según:

$$\Delta P_{total} = \Delta P_1 + \Delta P_2 \quad (4.2.13)$$

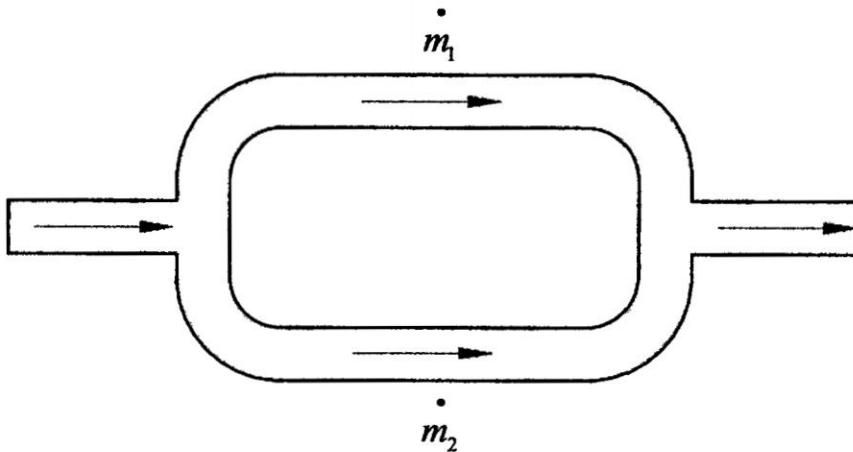


Figura 4.4: Tuberías en paralelo

4.2.1.3. Formulación de elementos finitos

Considere un flujo laminar incompresible de un fluido viscoso a través de una red de sistemas de tuberías, como se muestra en la Figura 4.5. Empezamos por dividir el problema nodos y elementos. Este ejemplo puede ser representado por un modelo que cuenta con cuatro nodos y cuatro elementos.

El comportamiento del flujo de fluido dentro de una sección de la tubería es modelado por un elemento con dos nodos. La descripción elemental está dada por la relación entre el caudal y la pérdida de presión según la ecuación (4.2.4), de modo que [22, página 398].

$$Q = \frac{\pi D^4}{128\mu} \left(\frac{P_1 - P_2}{L} \right) = C(P_1 - P_2) \quad (4.2.14)$$

Donde C es el coeficiente de resistencia al flujo y está dada por

$$C = \frac{\pi D^4}{128L\mu} \quad (4.2.15)$$

Sabemos que hay dos nodos asociados a cada elemento, por lo tanto se plantea dos ecuaciones para cada elemento. Estas ecuaciones deben implicar la presión nodal y resistencia

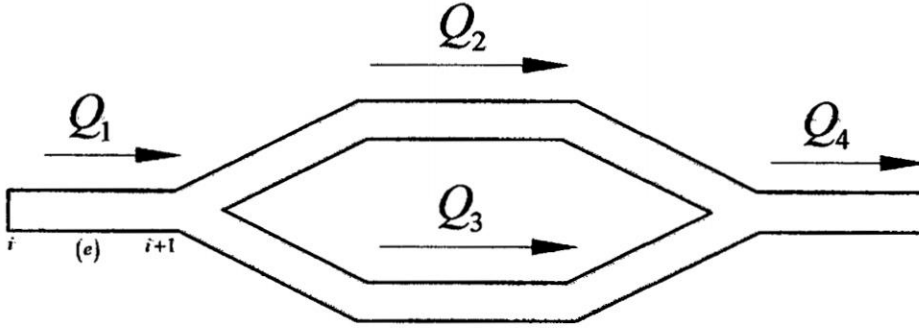


Figura 4.5: Flujo laminar incompresible de un fluido viscoso a través de una red de sistemas de tuberías

del flujo del elemento. Considerando los caudales Q_i y Q_{i+1} y las presiones nodales P_i y P_{i+1} de un elemento, que se relacionan según las ecuaciones

$$\begin{aligned} Q_i &= C(P_i - P_{i+1}) \\ Q_{i+1} &= C(P_{i+1} - P_i) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Las ecuaciones dadas por (4.2.16) se formularon de manera que la conservación de la masa sea satisfecha también. La suma de Q_i y Q_{i+1} es cero, lo que implica que en condiciones de régimen permanente, lo que desemboca en un nodo determinado también fluye hacia fuera. Ecuaciones (4.2.16) pueden expresarse matricial por [22, página 399].

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & -C \\ -C & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi D^4}{128L\mu} & -\frac{\pi D^4}{128L\mu} \\ -\frac{\pi D^4}{128L\mu} & \frac{\pi D^4}{128L\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4.2.17)$$

La matriz de resistencia al flujo del elemento está dada entonces por

$$[R]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\pi D^4}{128L\mu} & -\frac{\pi D^4}{128L\mu} \\ -\frac{\pi D^4}{128L\mu} & \frac{\pi D^4}{128L\mu} \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

Aplicando la descripción elemental dada por la ecuación (4.2.17) a cada elemento y ensamblando se obtiene la matriz global del flujo, la matriz de resistencia al flujo y la matriz de presión.

4.2.2. Modelo residual del Método de Elementos Finitos

La ecuación diferencial para flujo permanente en régimen turbulento en redes a presión es igual a

$$\frac{\partial H}{\partial x} + f \frac{V|V|}{2gD} = 0 \quad (4.2.19)$$

Incluyendo pérdidas menores por accesorios y contracciones en la expresión [11].

$$\frac{\partial H}{\partial x} + f \frac{V^2}{2gD} + \sum k_m \frac{V^2}{2Lg} = 0$$

ó

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{8}{gL\pi^2 D^4} \left(\sum k_m + f \frac{L}{D} \right) Q|Q| = 0 \quad (4.2.20)$$

Despejando Q

$$Q = -\frac{k}{Q} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.2.21)$$

Donde:

$$k = \frac{gL\pi^2 D^4}{8 \left(\sum k_m + f \frac{L}{D} \right)} \quad (4.2.22)$$

Q : Flujo o caudal

El valor absoluto en la expresión (4.2.20) permite el apropiado signo para el término de pérdida de carga en caso de que el flujo marche en sentido contrario a la simulación.

La expresión de continuidad describe la conservación de la masa en la unión de tubos, tal como

$$\sum_{j=1}^N Q_{ij} - q_{j,ext} = 0 \quad (4.2.23)$$

Donde:

Q_{ij} : Flujo o caudal en la tubería ij

$q_{j,ext}$: Demanda de caudal en el nodo j

N : Numero de uniones (nodos)

4.2.2.1. Solución con MEF

Escribiendo la expresión (4.2.21) como:

$$\frac{k}{Q} \frac{\partial H}{\partial x} + Q = 0 \quad (4.2.24)$$

Aplicando residuos ponderados

$$\int_{\Omega} W(x) A(H) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}(x) B(H) d\Gamma = 0 \quad (4.2.25)$$

$$A(H) = \frac{k}{Q} \frac{\partial H}{\partial x} + q = 0 \quad y \quad B(H) = 0$$

$W = -\bar{W} = N_j(x)$ (Función de interpolación polinomial de Lagrange o función de forma)

j : Nodos del Elemento ($j = 1, 2$)

Se tendrá,

$$\frac{k}{Q} \int_0^l N_j(x) \frac{\partial H}{\partial x} dx + \int_0^l N_j(x) Q dx = 0 \quad (4.2.26)$$

Aplicando la aproximación polinomial

$$H = N_1(x) H_1 + N_2(x) H_2 \quad (4.2.27)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dN_1(x)}{dx} H_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} H_2 \quad (4.2.28)$$

Donde:

H_1 : Altura piezométrica en el extremo 1

H_2 : Altura piezométrica en el extremo 2

Por lo tanto se tendrá:

$$\frac{k}{Q} \int_0^l N_j(x) \left(\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dN_1(x)}{dx} H_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} H_2 \right) dx + \int_0^l N_j(x) Q dx = 0 \quad (4.2.29)$$

4.2.2.1.1. Obtención de las matrices del elemento

Para un elemento de dos nudos se tendrá de la expresión (4.2.29)

Para $j = 1$

$$\frac{k}{Q} \int_0^l N_1(x) \left(\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dN_1(x)}{dx} H_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} H_2 \right) dx + \int_0^l N_1(x) Q dx = 0 \quad (4.2.30)$$

Para $j = 2$

$$\frac{k}{Q} \int_0^l N_2(x) \left(\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{dN_1(x)}{dx} H_1 + \frac{dN_2(x)}{dx} H_2 \right) dx + \int_0^l N_2(x) Q dx = 0 \quad (4.2.31)$$

Donde:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{x_2 - x}{L} \\ N_2(x) &= \frac{x - x_1}{L} \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_1(x)}{dx} &= \frac{-1}{L} \\ \frac{dN_2(x)}{dx} &= \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

Las expresiones (4.2.30) y (4.2.31) definen un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se pueden expresar en la tradicional forma matricial.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}}_{\{H\}} = \underbrace{\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}}_{\{Q\}} \quad (4.2.34)$$

Donde los elementos de la matriz de $[K]$ son:

$$k_{11} = -\frac{k}{Q} = k_{22} \quad (4.2.35)$$

$$k_{12} = \frac{k}{Q} = k_{21} \quad (4.2.36)$$

Del mismo modo para los vectores $\{Q\}$ se tendrá

$$Q_1 = LQ \quad (4.2.37)$$

$$Q_2 = LQ \quad (4.2.38)$$

Donde:

$$k = \frac{gL\pi^2 D^4}{8 \left(\sum k_m + f \frac{L}{D} \right)} \quad (4.2.39)$$

$$Q = \left(\frac{H_2 - H_1}{\sum k_m + f \frac{L}{D}} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2g} \left(\frac{\pi D^2}{4} \right) \quad (4.2.40)$$

Por los tanto las expresiones (4.2.35), (4.2.36), (4.2.37) y (4.2.38), serán

$$k_{11} = - \left[\frac{\pi D^2}{2} \right] \sqrt{\frac{g}{2 \left(\sum k_m + f \frac{L}{D} \right)}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} = k_{22} \quad (4.2.41)$$

$$k_{12} = \left[\frac{\pi D^2}{2} \right] \sqrt{\frac{g}{2 (\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} = k_{21} \quad (4.2.42)$$

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (4.2.43)$$

Las expresiones (4.2.41) y (4.2.42), son expresiones no lineales, los cuales necesitan de procesos iterativos para su solución.

4.2.2.1.2. Solución del sistema de ecuaciones no lineales

La matriz es de naturaleza no lineal, es decir que la expresión (4.2.34) esta regido por un sistema de ecuaciones no lineales.

Para la solución del problema se utilizo el *Método de Newton-Rasphson* que es proceso iterativo de mas rápida convergencia para la solución de problemas no lineales (siempre que naturalmente, la solución inicial este dentro de la "zona de atracción" y no ocurra divergencia). Por tanto se tendrá:

$$\{\delta H\} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial H} \right]^{-1} \{-\psi\} \quad (4.2.44)$$

Donde:

$$H_{n+1} = H_n + \delta H_n \quad (4.2.45)$$

$$\psi = \psi(H_{n+1}) = P(H_{n+1}) - Q = 0 \quad (4.2.46)$$

Para una iteración inicial $n = 0$

Por lo tanto, la expresión (4.2.46) para un elemento será

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} + q_1 \\ -\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} + q_2 \end{array} \right\} \quad (4.2.47)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial H_1} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right\} \quad (4.2.48)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial H_2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left[\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} \right] \end{array} \right\} \quad (4.2.49)$$

Expresando en forma matricial se tendrá

$$\underbrace{\begin{bmatrix} kk_{11} & kk_{12} \\ kk_{21} & kk_{22} \end{bmatrix}}_{[KK]} \underbrace{\begin{Bmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \end{Bmatrix}}_{\{\delta H\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} -\psi_1 \\ -\psi_2 \end{Bmatrix}}_{\{-\psi\}} \quad (4.2.50)$$

$$kk_{11} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} \right] = kk_{22} \quad (4.2.51)$$

$$kk_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} \right] = kk_{21} \quad (4.2.52)$$

$$\psi_1 = \frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} + Q_1 \quad (4.2.53)$$

$$\psi_2 = -\frac{\pi D^2}{2} \sqrt{\frac{g}{2(\sum k_m + f \frac{L}{D})}} (|H_2 - H_1|)^{-\frac{1}{2}} + Q_2 \quad (4.2.54)$$

4.2.2.1.3. Ensamblaje de matrices de elementos

Habiendo formado las matrices de los elementos, el siguiente paso es el ensamblaje de estas matrices.

La expresión (4.2.44), para la forma global se expresa como:

$$\{\delta H_i\} = \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial H_j} \right]^{-1} \{-\psi_i\} \quad (4.2.55)$$

$$\partial \frac{\partial \psi_i}{\partial H_j} = \sum_{e=1}^m \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial H_j} \right)^e \quad (4.2.56)$$

$$\psi_i = \sum_{e=1}^m \psi_i \quad (4.2.57)$$

Donde:

$i, j = 1, \dots, N$

N : Numero de Nudos

m : Numero de elementos

Aplicando la expresión de continuidad (4.2.23) a la expresión (4.2.57) en el nudo j , tal como

$$\sum_{j=1}^N Q_{ij} - q_{j,ext} = 0 \quad (4.2.58)$$

Donde $q_{j,ext}$ es el caudal de demanda, por lo tanto tendrá un signo negativo y el caudal Q_{ij} en la tubería ij también tendrá un signo negativo, porque el sentido del flujo asumido es ji tal como muestran las expresiones (4.2.53) y (4.2.54), por lo tanto la expresión (4.2.57) será:

$$\psi_i = - \sum_{e=1}^m \psi_e \quad (4.2.59)$$

Expresando en forma matricial la expresión δH , se tiene

$$\begin{bmatrix} \delta H_1 \\ \delta H_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \delta H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial H_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial H_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial H_N} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial H_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial H_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial H_N} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial \psi_N}{\partial H_1} & \frac{\partial \psi_N}{\partial H_2} & \dots & \dots & \frac{\partial \psi_N}{\partial H_N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix} \quad (4.2.60)$$

4.2.2.2. Recomendaciones para la aplicación del MEF

1. Enumerar los nudos y tuberías de la red
2. Asumir las alturas piezométricas iniciales
3. Ingresar los datos como rugosidad relativa y viscosidad del agua
4. Ingresar las características de las tuberías como longitud y diámetro
5. Calcular una velocidad inicial, con la expresión

$$V = \frac{-2\sqrt{2gDh_f}}{\sqrt{L}} \log \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{2,51\nu\sqrt{L}}{D\sqrt{2gDh_f}} \right)$$

6. Luego calcular

$$h_f = H_2 - H_1 - \sum k_m \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

7. El cálculo se realiza hasta tener las velocidades iguales

8. Luego calcular el numero de Reynolds, con

$$R = \frac{VD}{\nu}$$

9. Calcular los coeficientes de fricción

10. Calcular las matrices de los elementos

11. Ensamblar las matrices

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

El Golpe de Ariete, como fenómeno transitorio, ha sido un tema de estudio de la hidráulica clásica, por sus efectos destructores en sistemas de alta presión como los conductos abastecedores de turbinas en centrales hidroeléctricas. Aunque el tema esté muy estudiado y analizado para conductos simples, comienza a aflorar la inquietud de simular este fenómeno en redes cerradas, las cuales cada día son más complejas y por su operación, más propensas a experimentar el Golpe de Ariete en sus instalaciones.

4.3.1. Modelamiento con el Método de Elementos Finitos

En la presente tesis se presentan las ecuaciones que representan el fenómeno del golpe de ariete y su transformación a ecuaciones algebraicas utilizando el Método de Elementos Finitos.

En este apartado se presentan algunas definiciones básicas de la formulación matricial del elemento finito con que se modela el problema.

Como se ha descrito anteriormente los métodos numéricos que resuelven los sistemas se pueden clasificar en directos e indirectos. Los métodos directos son aquellos que determi-

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

nan la solución en un número determinado de pasos y los métodos indirectos basan su resultado en la interacción aproximándose a la solución en un número finito pero no definido de pasos. Las *Diferencias Finitas* (FD), los *Métodos de Elementos Finitos* (FEM), *Elementos Complejos* (CE) y *Elementos de Contorno* (BEM), son algunas de las herramientas en la interacción numérica, utilizados para resolver problemas de cálculo y diseño en ingeniería.

El *Método de Elementos Finitos* (FEM), es el más utilizado para problemas de ingeniería, resolviendo simultáneamente un número finito de ecuaciones diferenciales parciales, por esta razón va a ser utilizado en el desarrollo de la simulación del golpe de ariete.

4.3.1.1. Descripción de los elementos Finitos

El método de elementos finitos consiste en dividir uno o varios cuerpos (continuos) en una serie de subelementos que no se intercepten entre si. Estos subdominios se conocen como elementos finitos y en cada uno se encuentran definidas ecuaciones que caracterizan la naturaleza del problema que se requiere resolver en el continuo. El método de elementos finitos se basa en resolver simultáneamente una serie de ecuaciones parciales que se originan en los subdominios y que describen el comportamiento físico del problema. Es necesario anotar la convergencia en un tema de gran importancia en este método. El FEM es un método numérico de aproximación de la realidad y no lleva a la solución exacta de todas las ecuaciones que describen el problema, como si lo hace la física tradicional. Por esta razón se debe tomar en cuenta que entre más se discretice el continuo (i.e. más pequeña se la malla de subconjuntos o elementos) se lleva a una mejor aproximación a la realidad logrando que la solución numérica converja con esta.

Para poder comprender los modelos desarrollados con un análisis de elementos finitos es importante conocer como trabaja este método. Al dividir un objeto o un sistema en elementos de menor tamaño se genera una red de puntos conocidos como puntos con-

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

catenados por una malla programada de acuerdo al material y a las propiedades de la tubería. Esta malla logra definir en cada nodo todas las características necesarias para el análisis como las propiedades del fluido y de la tubería. La definición de estas propiedades se realiza en la primera etapa de los programas especializados en el manejo de elementos finitos. Esta etapa se conoce como *Pre-proceso* y va acompañada por la etapa de *Cálculo* y del *Post-proceso*.

En la etapa de *Pre-proceso*, además de las propiedades de los materiales se deben definir la geometría, las condiciones de carga y de frontera que aplican así como las interacciones de los entre los objetos (o superficies) si el algoritmo de solución lo permite. En la etapa del cálculo, el programa recibe la información consignada por el usuario en la etapa del *Pre-proceso* y ejecuta todos los algoritmos propios de cada software. Esta etapa es donde el verdadero valor de los programas especializados se encuentra. Por último la etapa de *Post-proceso* recibe los datos de salida del *Cálculo* y por medio de una interfase gráfica facilita la observación y comparación de los resultados. Entre los datos de los resultados que la etapa de *Cálculo* entrega al *Post-proceso* se encuentran los gradientes hidráulicos y los caudales.

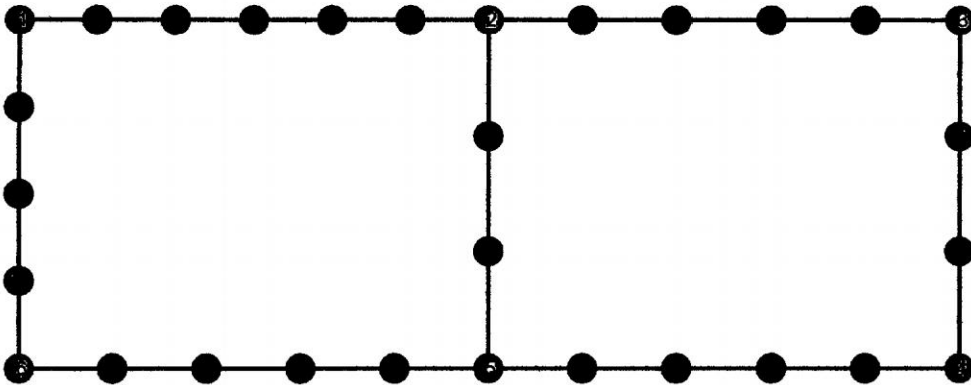


Figura 4.6: Enmallado con elemento lineal

El sistema físico se divide en series de elementos que están conectados por un número discreto de puntos nodales; este proceso se denomina "*discretización*". Discretización típica

de un sistema de tuberías se muestran en la Figura 4.6. En estos casos se identifican los elementos por medio de números. El problema de tuberías contiene 31 elementos y 30 nodos.

4.3.1.1.1. Elemento unidimensional

Se supone que los elementos (*tuberías*) están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos en adelante nodos, situados en sus contornos como se muestra en la Figura 4.7. El gradiente hidráulico de estos nodos son las incógnitas fundamentales del problema.

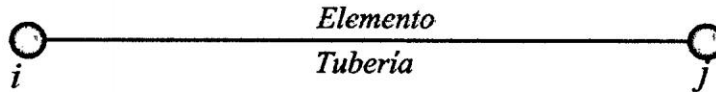


Figura 4.7: Elemento tubería 1D

El continuo se divide, mediante líneas imaginarias, en un número de “*elementos finitos*”. En todos los casos, el número de interconexiones entre un “*elemento finito*” cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito. Es difícil, por consiguiente, ver a primera vista como pueden discretizarse problemas de este tipo. Sin embargo en la presente tesis se utilizara la metodología descrita en la sección 4.3.1.2 para discretizar una tubería en varios tramos o elementos como se muestra en la Figura 4.8, donde los nodos de color azul representan el inicio y final de cada tubería, mientras los nodos de color rojo son los nodos internos generados.



Figura 4.8: Malla de elementos finitos 1D

4.3.1.1.2. Patrones en el modelado

Crear un modelo apropiado es el paso más crucial en el análisis por medio de elementos finitos. El objetivo es desarrollar el patrón de nodos más apropiado, que genere una cantidad suficiente de elementos y obtener resultados sin derrochar interpretación de datos y tiempo de cálculo. El modelo debe ser siempre basado en un conocimiento conceptual del sistema físico y un juicio anticipado del comportamiento del sistema a presión. Junto a la comprensión del comportamiento del sistema, el analista debe hacer un esfuerzo para comprender los conceptos pertinentes de la teoría de los elementos finitos. Fallar en el proceso implicaría obtener resultados sin sentido. Para sistemas a presión es suficiente considerar los nodos iniciales de la red topológica como los nodos del enmallado para la solución por el Método de Elemento Finitos, una malla más refinada solamente nos permite obtener el gradiente hidráulico, presión, caudales y velocidades para una tubería del sistema y en cualquier parte, es decir a diferentes longitudes.

4.3.1.2. Discretización de redes de tuberías

Una extensión natural del análisis de sistemas de tuberías solo es más elaborar sistemas de tuberías. En la práctica, situaciones de diseño casi siempre se enfrentan a sistemas que son más grandes y más complejos que tuberías única, rectas. Ahora hemos ya se han introducido a la mayoría de las técnicas de análisis que son necesarios para estos sistemas, así que podemos comenzar inmediatamente con el tipo más simple, sistemas de tubería de la serie. Vamos a pasar después a sistemas de tuberías ramificadas y también examinar cómo representar el comportamiento real de válvula de un modo realista, como contraposición al enfoque lineal varía en velocidad artificial utilizado en el capítulo 9. Este capítulo se nos preparan para analizar situaciones transitorias de flujo de gravedad tubería correctamente.

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

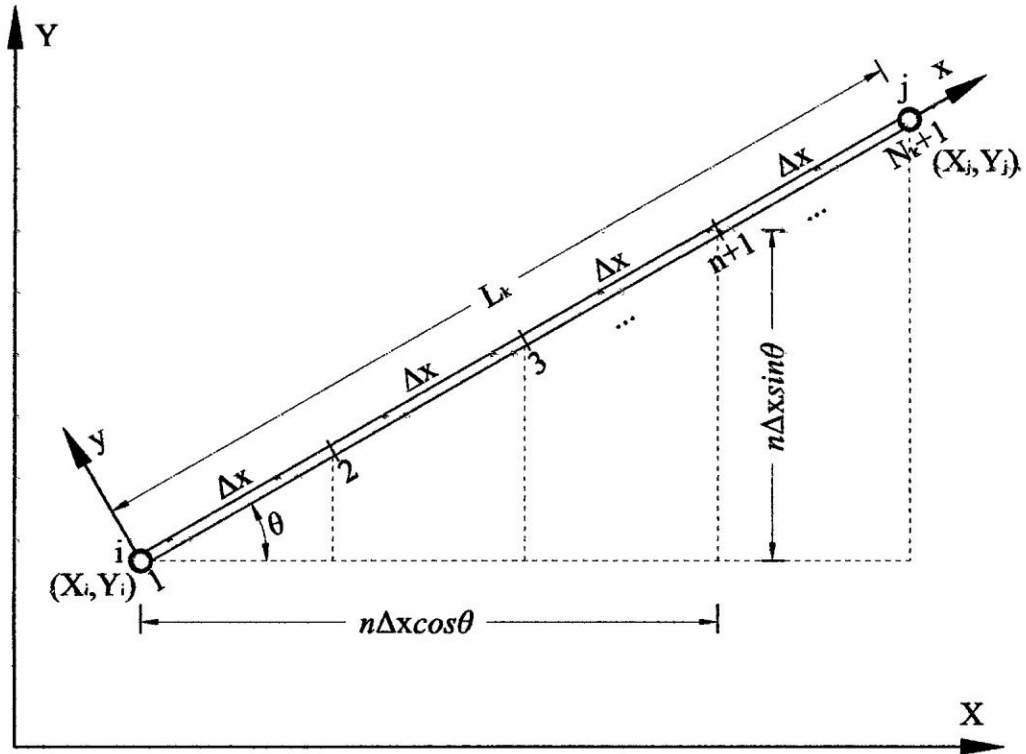


Figura 4.9: Sistema de coordenadas local y global

La generación de malla se realiza teniendo en cuenta la condición de *Courant*, y el objetivo principal es la determinación de las coordenadas de los *nodos internos* (X_{n+1}, Y_{n+1}) en cada una de las tuberías que conforma el sistema de distribución de agua, teniendo como datos las coordenadas de los nodos i y j .

A partir de la Figura 4.9 podemos deducir las coordenadas de los nodos internos de siguiente manera

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_i + n\Delta x \cos \theta \\ Y_{n+1} &= Y_i + n\Delta x \sin \theta \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Sabemos que

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

$$\Delta x = \frac{L_k}{N_k} \quad (4.3.2)$$

$$\sin \theta = \frac{Y_j - Y_i}{L_k}, \quad \cos \theta = \frac{X_j - X_i}{L_k} \quad (4.3.3)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.2) y (4.3.3) y reordenando convenientemente

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \left(1 - \frac{n}{N_k}\right) X_i + \frac{n}{N_k} X_j \\ Y_{n+1} &= \left(1 - \frac{n}{N_k}\right) Y_i + \frac{n}{N_k} Y_j \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

En la ecuación (4.3.4) las funciones de forma para las coordenadas globales son

$$\begin{aligned} S_i &= \left(1 - \frac{n}{N_k}\right) \begin{cases} n = 0, 1, 2, 3, \dots, N_k & \text{Si } k=1 \\ n = 1, 2, 3, \dots, N_k & \text{Si } k>1 \end{cases} \\ S_j &= \frac{n}{N_k} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Por lo tanto las coordenadas de los nodos internos podemos escribir en sus forma matricial

$$X_{n+1} = S_i X_i + S_j X_j = \begin{bmatrix} S_i & S_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.6)$$

$$Y_{n+1} = S_i Y_i + S_j Y_j = \begin{bmatrix} S_i & S_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Las ecuaciones (4.3.6) y (4.3.7) se pueden reescribir como

$$X = [S]\{X\} \quad Y = [S]\{Y\} \quad (4.3.8)$$

Donde:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_i & S_j \end{bmatrix} \quad \{X\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ X_j \end{Bmatrix} \quad \{Y\} = \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.9)$$

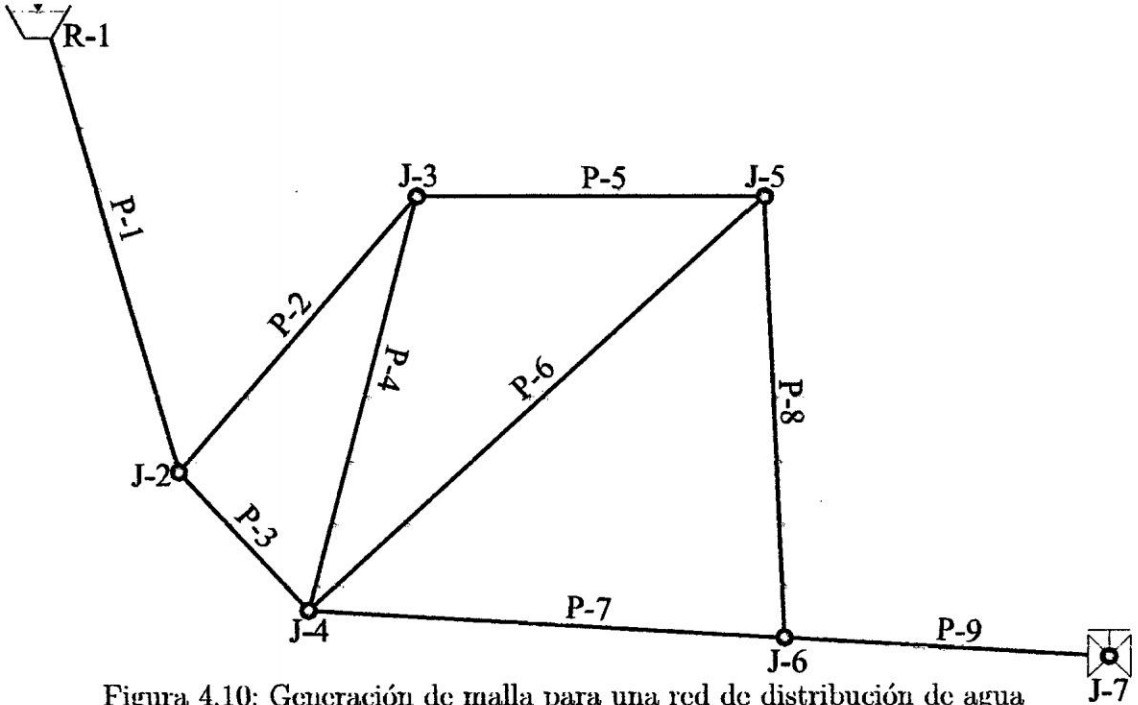


Figura 4.10: Generación de malla para una red de distribución de agua

El programa *GAMEF* desarrollado en la presente tesis para la modelación del *Golpe de Ariete* por el *Método de Elementos Finitos*, genera automáticamente el enmallado de la red de distribución de agua, una vez ingresado los datos de la topología de la red, las propiedades de la tubería y el fluido. La única condición necesaria que debe cumplirse es que el Numero de Courant en cada una de las tuberías debe ser igual o muy proximo a 1. El modelo *GAMEF* en la generación inicial de la malla considera un mínimo de tres tramos o elementos en la tubería de menor longitud.

En la Figura 4.10, los nodos de color rojo son los *nodos internos* generados con el programa y el resto de los nodos de la red corresponde a los nodos de los extremos de cada una de las tuberías. A partir de la generación inicial de las mallas, el modelo *GAMEF*, refina la

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

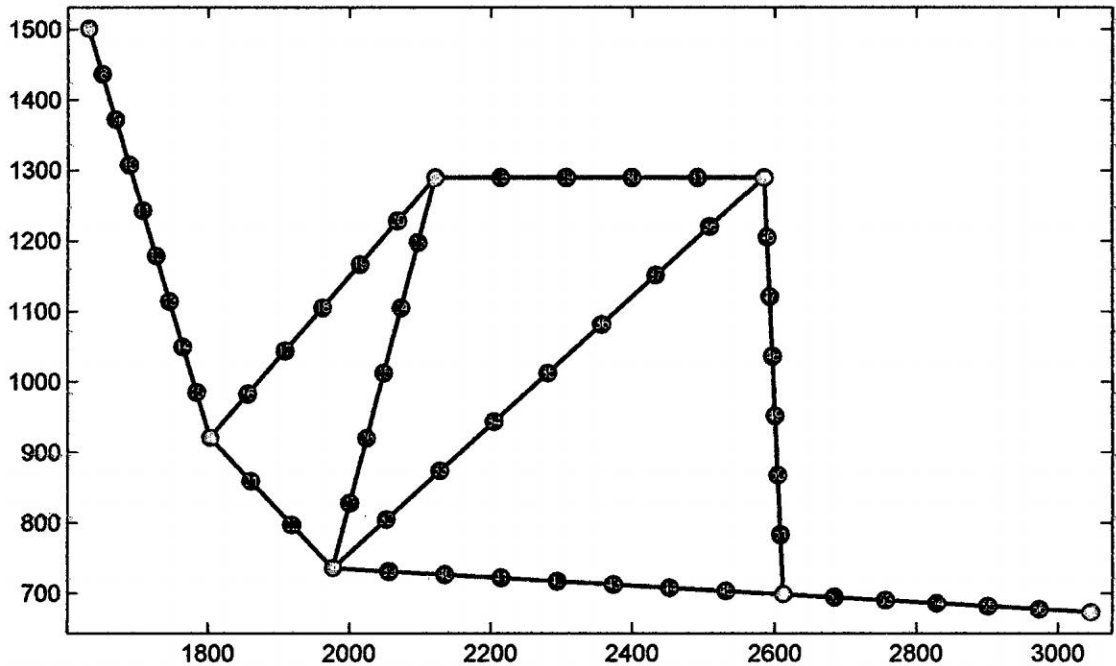


Figura 4.11: Generación de malla en 58 *elementos* y 56 *nodos*

malla considerando un incremento de $\frac{2}{3}$ del numero mínimo de tramos en la tubería de menor longitud.

4.3.1.3. Condiciones de contorno

Se deben estudiar diferentes metodologías e implementar la que produzca los valores más cercanos a la realidad. La calidad de los resultados del modelo depende altamente de los valores impuestos como *condiciones de contorno*; si estos no representan el fenómeno real correctamente los resultados del modelo nunca serán correctos.

Las condiciones de borde que se implementaron en el software GAMEF son:

1. Embalse aguas arriba con cabeza estática constante
2. Válvula aguas abajo de cierre lineal y brusco
3. Igualdad de presiones para todas las tuberías que entran o salen de un nodo

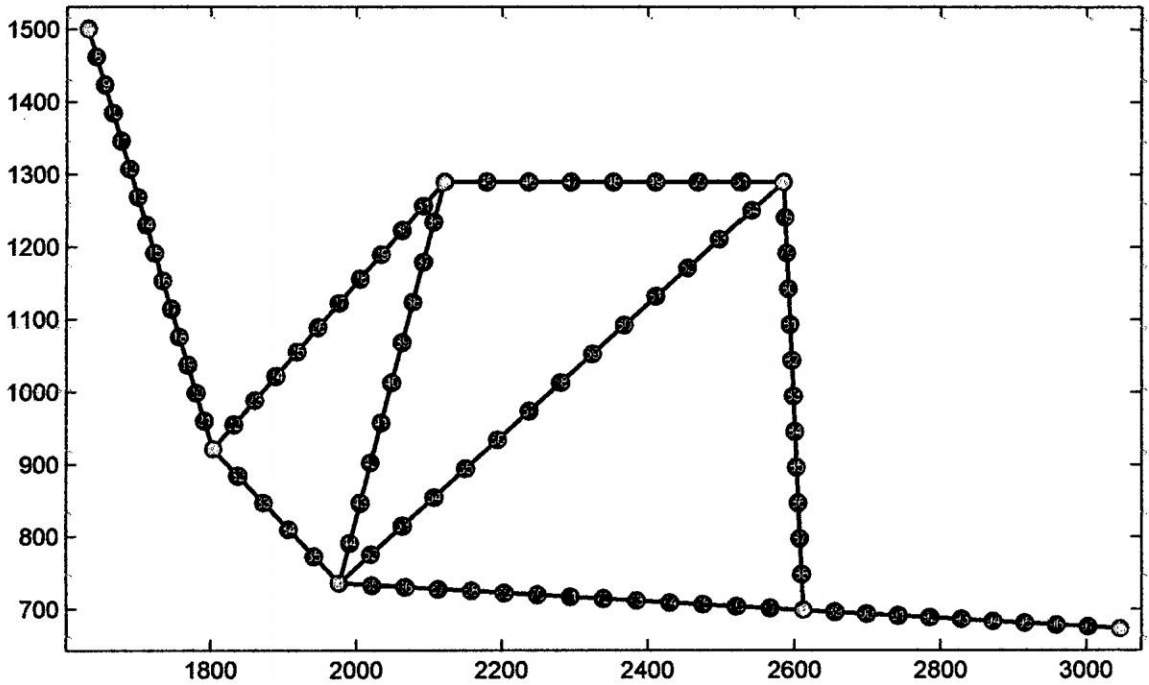


Figura 4.12: Refinamiento de la malla en 99 *elementos* y 97 *nodos*

En el embalse aguas arriba, se debe tener una ecuación adicional a la de la cabeza constante para determinar completamente las condiciones en dicho nodo. Esta ecuación adicional viene dada para la característica “*negativa*” obtenida de la transformación de las ecuaciones generales del golpe de ariete por el método de las características. Esta ecuación toma la forma (Barrios y Pineda, 1981):

4.3.1.4. Condiciones iniciales

Las *condiciones iniciales* en $t = 0$ son la solución de las características hidráulicas del problema (*Gradiente hidráulico, Presión, Caudal y Velocidad*) que arroja la simulación del estado permanente o estacionario.

$$t = 0 \Rightarrow \{H_o\}, \{P_o\}, \{Q_o\}, \{V_o\} \tag{4.3.10}$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

No obstante, si las condiciones iniciales se establecen de tal manera que se produzca un flujo transitorio en el sistema al inicio de la simulación, es evidente que los niveles cambiarán durante la simulación, no sólo en respuesta a las alteraciones provocadas, sino como consecuencia también de las condiciones iniciales.

4.3.1.5. Condiciones finales

Las condiciones finales cuando "t" tiende a infinito son las condiciones del estado estático (cuando el cierre de la válvula es total).

4.3.1.6. Modelo general del flujo no permanente

Aquí se resuelve las ecuaciones que representan el fenómeno del *golpe de ariete* y su transformación a ecuaciones algebraicas utilizando el *Método Elementos Finitos*.

4.3.1.6.1. Ecuaciones gobernantes

Las leyes fundamentales que describen el flujo no-permanente en tuberías están representadas por la ecuación de la dinámica y la ecuación de conservación de la materia, las que acopladas forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales del tipo hiperbólico casilineal (*Chaudhry*, 1987). Para el caso del flujo no-permanente, dichas ecuaciones han sido deducidas en la sección 3.3 y son la Ecuación Dinámica (*Movimiento*) (3.3.23) y la Ecuación de continuidad (3.3.48), las cuales transcribimos aquí para su solución respectiva:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fQ |Q|}{2DA} = 0 \quad (4.3.11)$$

$$\frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (4.3.12)$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

Sin embargo por la facilidad de solución se reorganizará y reescribirá las ecuaciones (4.3.12) y (4.3.11) en función a la velocidad.

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (4.3.13)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (4.3.14)$$

Representando en forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{fV|V|}{2D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.15)$$

Las ecuaciones (4.3.13) y (4.3.14), se resolverán utilizando el Método de Elementos Finitos como veremos a continuación.

4.3.1.6.2. Formulación con el Método de Elementos Finitos

Se inicia el estudio con la discretización del dominio (tubería) en elementos finitos lineales de longitud constante, unidos por nodos en sus extremos. En cada elemento, las variables dependientes se interpolan según las ecuaciones siguientes:

$$H(x) = \sum_{i=1}^M N_i(x) H_i = [N][H] \quad (4.3.16)$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^M N_i(x) V_i = [N][V] \quad (4.3.17)$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

Donde M es el número de nodos por elemento. Aplicando en método de Galerkin a la ecuación 4.3.13 y 4.3.14 se tiene:

$$\int_{\Omega} N^T \left[\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} \right] d\Omega = 0 \quad (4.3.18)$$

$$\int_{\Omega} N^T \left[\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{fV|V|}{2D} \right] d\Omega = 0 \quad (4.3.19)$$

Desarrollando

$$\int_{\Omega} N^T \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{a^2}{g} N^T \frac{\partial V}{\partial x} d\Omega = 0 \quad (4.3.20)$$

$$\int_{\Omega} N^T \frac{\partial V}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} g N^T \frac{\partial H}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} N^T \frac{fV|V|}{2D} d\Omega = 0 \quad (4.3.21)$$

Se sabe que las derivadas espaciales de H y V , están dadas por.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \{H\} = [B]\{H\}; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \{V\} = [B]\{V\} \quad (4.3.22)$$

Reemplazando las ecuaciones 4.3.16, 4.3.17 y 4.3.22 en 4.3.20 y 4.3.21 y reordenando convenientemente

$$\int_{\Omega} \{N^T\}[N] \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{a^2}{g} \{N^T\}[B]\{V\} d\Omega = 0 \quad (4.3.23)$$

$$\int_{\Omega} \{N^T\}[N] \frac{\partial V}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} g \{N^T\}[B]\{H\} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{f|V|}{2D} \{N^T\}[N]\{V\} d\Omega \quad (4.3.24)$$

La ecuación 4.3.23 y 4.3.24 se puede escribir mas convenientemente como

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

$$[K1] \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} + \frac{a^2}{g} [K2] \{V\} = \{0\} \quad (4.3.25)$$

$$[K1] \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} \right\} + g[K2] \{H\} + \frac{f|V|}{2D} [K1] \{V\} = \{0\} \quad (4.3.26)$$

Donde:

$$\begin{aligned} [K1] &= \int_{\Omega} \{N^T\} [N] d\Omega \\ [K2] &= \int_{\Omega} \{N^T\} [B] d\Omega \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

Para la obtención de las matrices $[K1]$ y $[K2]$ se modelará el problema considerando un *elemento lineal unidimensional*, tanto para la solución espacial como temporal.

4.3.1.6.3. Elemento lineal unidimensional

Se puede aproximar muchos problemas industriales y ambientales utilizando un modelo de elemento finito unidimensional. Por ejemplo, el flujo en una tubería, flujo de rio, transferencia de calor a través de una aleta con una sección transversal uniforme, etc. puede ser resuelto aproximadamente usando una asunción unidimensional.

Consideremos un elemento lineal típico con nodos inicial y final i y j con las presiones y velocidades correspondiente denotados por H_i, H_j y V_i, V_j respectivamente. La variación de la altura de presión y la velocidad lineal en el elemento es representado por:

$$\begin{aligned} H(x) &= a_1 + a_2 x \\ V(x) &= b_1 + b_2 x \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

Donde H , es la altura de presión y V es la velocidad, en cualquier posición x y los parámetros a y b son constantes. Puesto que hay dos constantes arbitrarias en la representación lineal, exige solamente dos nodos para determinar los valores de a y b

Presiones nodales

$$\begin{aligned} H_i &= a_1 + a_2 x_i \\ H_j &= a_1 + a_2 x_j \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Velocidades nodales

$$\begin{aligned} V_i &= b_1 + b_2 x_i \\ V_j &= b_1 + b_2 x_j \end{aligned} \tag{4.3.30}$$

Representando en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \tag{4.3.31}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} \tag{4.3.32}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 4.3.31 y 4.3.32 se obtiene

$$a_1 = \frac{H_i x_j - H_j x_i}{x_j - x_i} \quad a_2 = \frac{H_j - H_i}{x_j - x_i} \tag{4.3.33}$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

$$b_1 = \frac{V_i x_j - V_j x_i}{x_j - x_i} \quad b_2 = \frac{V_j - V_i}{x_j - x_i} \quad (4.3.34)$$

Sustituyendo los valores de a_1 , a_2 , b_1 y b_2 en la ecuación 4.3.28 y simplificando los coeficientes de H_i , H_j , V_i y V_j .

$$H = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] H_i + \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] H_j \quad (4.3.35)$$

$$V = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] V_i + \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] V_j \quad (4.3.36)$$

Obsérvese las funciones de forma tanto para las alturas de presiones como para las velocidades son las mismas, por lo tanto a partir de la ecuación 4.3.35 y 4.3.36, las funciones de forma en coordenadas globales serán

$$\begin{aligned} N_i &= \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] \\ N_j &= \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] \end{aligned} \quad (4.3.37)$$

La variación de la presión y velocidad en el elemento podemos escribir así

$$H = N_i H_i + N_j H_j = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.38)$$

$$V = N_i V_i + N_j V_j = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.39)$$

Las ecuaciones 4.3.38 y 4.3.39 se pueden reescribir como

$$H = [N]\{H\} \quad V = [N]\{V\} \quad (4.3.40)$$

Donde:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix}, \quad \{H\} = \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix}, \quad \{V\} = \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.41)$$

Las funciones de forma asumen un valor 1 en el nodo designado y cero en todos los otros nodos. Nosotros también vemos que la suma de todas las funciones de forma en un elemento debe ser igual a 1 en cualquier parte del elemento incluyendo los límites. Estos son los dos requisitos esenciales de las propiedades de las funciones de forma de cualquier elemento en uno, dos o tres dimensiones. La figura 4.13 muestra la variación de las funciones de forma y su derivadas en un elemento lineal. También se muestra una variación lineal típica de la altura de presión y velocidad. Como hemos visto, las derivadas de las funciones de forma es constante en un elemento.

De la ecuación 4.3.38, el gradiente de presión es calculada como

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} H_j = -\frac{1}{x_j - x_i} H_i + \frac{1}{x_j - x_i} H_j \quad (4.3.42)$$

ó

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_j - x_i} & \frac{1}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.43)$$

Pero se sabe que la longitud del elemento es $l = x_j - x_i$, entonces la ecuación (4.3.43) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.44)$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

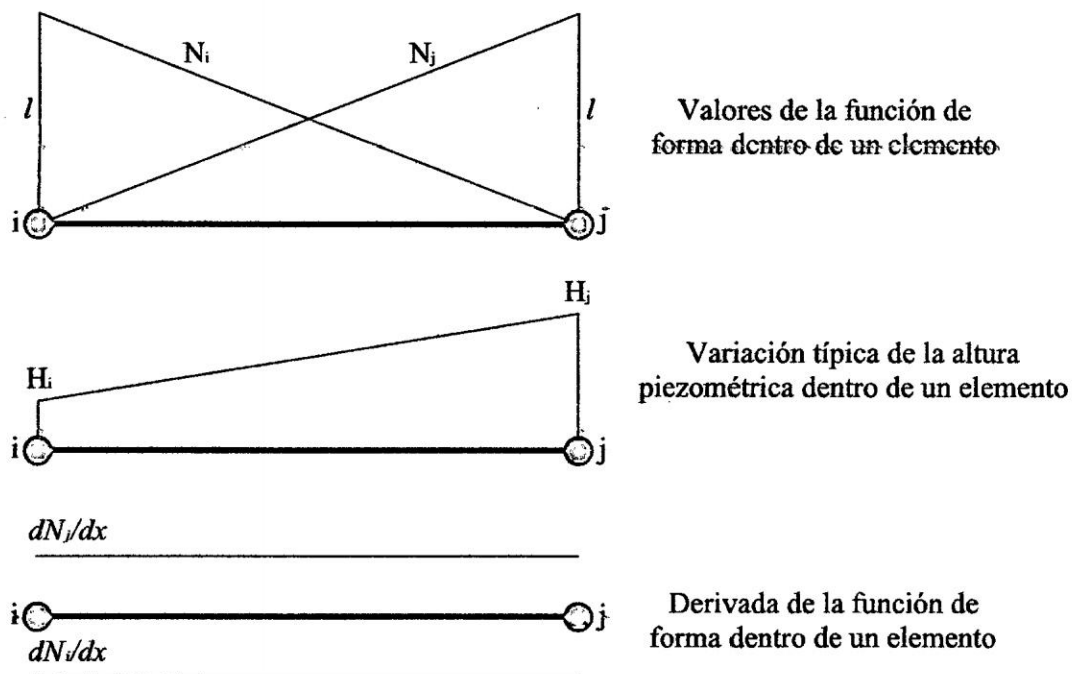


Figura 4.13: Variación de las funciones de forma, alturas piezométricas, velocidades y sus derivadas en un elemento lineal

De manera análoga el gradiente de velocidad se deriva de la ecuación (4.3.36):

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.45)$$

Como las funciones de forma tanto para las presiones y las velocidades son las mismas, las derivadas de estas también serán lo mismo, como se puede apreciar en las ecuaciones anteriores. Asignaremos la matriz $[B]$, como la matriz de derivadas, así:

$$[B] = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.46)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = [B]\{H\} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = [B]\{V\} \quad (4.3.47)$$

4.3.1.6.4. Obtención de las matrices

Ahora debemos de obtener las diferentes matrices para cada elemento, es decir la solución de las ecuaciones (4.3.27) de la siguiente manera:

Para [K1]

$$[K1] = \int_{\Omega} \{N^T\}[N]d\Omega = \int_0^l \{N^T\}[N]dl = \int_0^l \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j^2 \end{bmatrix} dl \quad (4.3.48)$$

Integrando se tiene.

$$[K1] = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.3.49)$$

Para [K2]

$$[K2] = \int_{\Omega} \{N^T\}[B]d\Omega = \int_0^l \frac{1}{l} \left\{ \begin{matrix} 1 - \frac{x}{l} \\ \frac{x}{l} \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dl \quad (4.3.50)$$

Integrando se tiene.

$$[K2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.51)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.49) y (4.3.51) en (4.3.25) y (4.3.26) se tiene la solución espacial de las ecuaciones diferenciales que gobierna el fenómeno del golpe de ariete.

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} + \frac{a^2}{2g} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{V\} = \{0\} \quad (4.3.52)$$

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} \right\} + \frac{g}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{H\} + \frac{l|V|}{12D} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \{V\} = \{0\} \quad (4.3.53)$$

Sin embargo esta solución no es la solución definitiva, ya que el fenómeno del golpe de ariete o flujo no permanente requiere la solución temporal, para este fin utilizaremos el *Método de Diferencias Finitas (MDF)* y el *Método De elementos Finitos (MEF)*, ambos métodos tiene una diferencia bastante pequeña o casi lo mismo cuando se trata de problemas unidimensionales.

4.3.1.6.5. Discretización temporal con el Método de Diferencias Finitas (MDF)

Como puede verse en la semidiscretización de las ecuaciones (4.3.25) y (4.3.26), el operador diferencial que implica los términos dependientes del tiempo todavía queda por discretizar. En esta sección, se considera una aproximación numérica de los términos transitorios, utilizando el *Método de Diferencias Finitas (FDM)*. En la Figura 4.14 puede verse la variación de la velocidad y la la altura piezométrica típica en el dominio del tiempo entre los niveles de tiempo n y $n + 1$. Mediante la serie de Taylor, podemos escribir la altura piezométrica y la velocidad en el nivel de tiempo $n + 1$.

$$H^{n+1} = H^n + \Delta t \frac{\partial H^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 H^n}{\partial t^2} + \dots \quad (4.3.54)$$

$$V^{n+1} = V^n + \Delta t \frac{\partial V^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2} + \dots \quad (4.3.55)$$

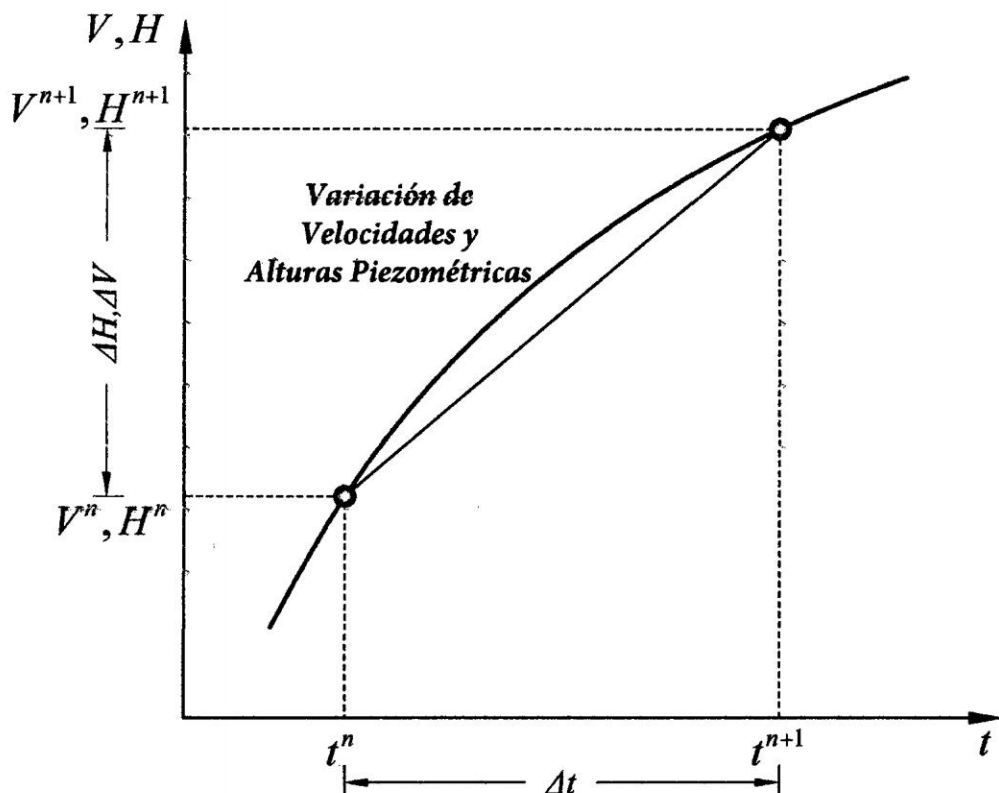


Figura 4.14: Variación de las alturas piezométricas con respecto al tiempo

Si se desprecian los términos de segundo y de orden superior en las ecuaciones (4.3.54) y (4.3.55), se tiene

$$\frac{\partial H^n}{\partial t} \approx \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.3.56)$$

$$\frac{\partial V^n}{\partial t} \approx \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (4.3.57)$$

Que es una aproximación de primer orden en el tiempo. Si ahora introducimos un parámetro α tal que

$$H^{n+1} = \alpha H^{n+1} + (1 - \alpha)H^n \quad (4.3.58)$$

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

$$V^{n+1} = \alpha V^{n+1} + (1 - \alpha)V^n \quad (4.3.59)$$

Reemplazando en las ecuaciones (4.3.25) y (4.3.26) se obtiene

$$[K1] \left\{ \frac{H^{n+1} - H^n}{\Delta t} \right\} + \frac{\alpha^2}{g} [K2] \left\{ \alpha V^{n+1} + (1 - \alpha)V^n \right\} = \{0\} \quad (4.3.60)$$

$$[K1] \left\{ \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} \right\} + g[K2] \left\{ \alpha H^{n+1} + (1 - \alpha)H^n \right\} + \frac{f|V|}{2D} [K1] \left\{ \alpha V^{n+1} + (1 - \alpha)V^n \right\} = \{0\} \quad (4.3.61)$$

Asociando términos y reorganizando

$$[K1]H^{n+1} + \alpha\Delta t \frac{\alpha^2}{g} [K2]V^{n+1} = [K1]H^n + (\alpha - 1)\Delta t \frac{\alpha^2}{g} [K2]V^n \quad (4.3.62)$$

$$\begin{aligned} \alpha\Delta tg[K2]H^{n+1} + \left(1 + \alpha\Delta t \frac{f|V|}{2D}\right) [K1]V^{n+1} = \\ (\alpha - 1)\Delta tg[K2]H^n + \left(1 + (\alpha - 1)\Delta t \frac{f|V|}{2D}\right) [K1]V^n \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

Expresando matricialmente.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} [K1] & \alpha\Delta t \frac{\alpha^2}{g} [K2] \\ \alpha\Delta tg[K2] & \left(1 + \alpha\Delta t \frac{f|V|}{2D}\right) [K1] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} H^{n+1} \\ V^{n+1} \end{array} \right\} = \\ \left[\begin{array}{cc} [K1] & (\alpha - 1)\Delta t \frac{\alpha^2}{g} [K2] \\ (\alpha - 1)\Delta tg[K2] & \left(1 + (\alpha - 1)\Delta t \frac{f|V|}{2D}\right) [K1] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} H^n \\ V^n \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.64)$$

Haciendo

$$[M1] = \begin{bmatrix} [K1] & \alpha \Delta t \frac{a^2}{g} [K2] \\ \alpha \Delta t g [K2] & \left(1 + \alpha \Delta t \frac{f|V|}{2D}\right) [K1] \end{bmatrix} \quad (4.3.65)$$

$$[M2] = \begin{bmatrix} [K1] & (\alpha - 1) \Delta t \frac{a^2}{g} [K2] \\ (\alpha - 1) \Delta t g [K2] & \left(1 + (\alpha - 1) \Delta t \frac{f|V|}{2D}\right) [K1] \end{bmatrix} \quad (4.3.66)$$

Por lo tanto podemos escribir la expresión final de la siguiente manera

$$[M1] \begin{Bmatrix} H^{n+1} \\ V^{n+1} \end{Bmatrix} = [M2] \begin{Bmatrix} H^n \\ V^n \end{Bmatrix} \quad (4.3.67)$$

Las alturas piezométrica y las velocidades en el nivel de tiempo $n+1$, podemos determinar por

$$\begin{Bmatrix} H^{n+1} \\ V^{n+1} \end{Bmatrix} = [M1]^{-1} [M2] \begin{Bmatrix} H^n \\ V^n \end{Bmatrix} \quad (4.3.68)$$

Una solución alternativa para fines computacionales, es despejar H^{n+1} y V^{n+1} a partir de las ecuaciones (4.3.60) y (4.3.61), así

$$H^{n+1} = H^n + \Delta t \frac{a^2}{g} [K1]^{-1} [K2] \left\{ (\alpha - 1) V^n - \alpha V^{n+1} \right\} \quad (4.3.69)$$

$$V^{n+1} = V^n + g\Delta t[K1]^{-1}[K2] \left\{ (\alpha - 1)H^n - \alpha H^{n+1} \right\} + \frac{f\Delta t|V|}{2D}[I] \left\{ (\alpha - 1)V^n - \alpha V^{n+1} \right\} \quad (4.3.70)$$

4.3.1.6.6. Discretización del tiempo por el Método de Elementos Finitos (MEF)

Como el dominio del tiempo es infinito, inevitablemente lo restringiremos a un incremento de tiempo finito Δt y relacionaremos las condiciones iniciales en t_n (antes) con aquellas en el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, obteniendo lo que se llama *relaciones de recurrencia*. La discretización del dominio *tiempo-espacio* podría ser considerada simultáneamente. Esto, sin embargo, no ofrece en general ventaja alguna, ya que debido a la regularidad del dominio temporal no se precisan elementos irregulares tiempo-espacio. De hecho si se utilizan funciones de forma tipo producto, el proceso seria naturalmente idéntico al obtenido usando primero una semidiscretización en el espacio seguida por la discretización en el tiempo. Una excepción a esto se da en los problemas predominantemente convectivos, donde discretizaciones simultaneas pueden ser deseables.

Algoritmos de paso único

a). Método de Galerkin (Residuos ponderados)

Consideremos las ecuaciones (4.3.25) y (4.3.26) que pueden representar una aproximación semidistancia al problema de flujo no permanente en redes de tuberías, o de hecho ser en si misma un sistema discreto. El objetivo es obtener una aproximación para H_{n+1} , dados el valor de H_n y el vector de cargas $\{f_t\}$ actuando en el intervalo de tiempo Δt . De la forma usada en todas las aproximaciones de elementos finitos, suponemos que H varia en

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

el intervalo de forma polinómica y tomamos aquí la serie de mas bajo orden (lineal), tal como se muestra en la Figura 4.14, y escribimos

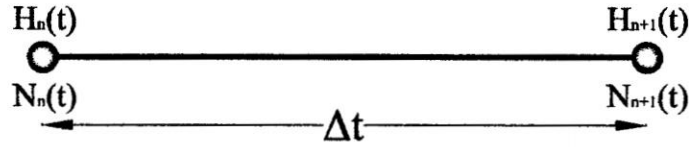


Figura 4.15: Discretización del tiempo en el intervalo n y $n + 1$

$$H(t) = N_n(t)H_n(t) + N_{n+1}(t)H_{n+1}(t) \quad (4.3.71)$$

Hallando las funciones de forma

$$H_n = a + bt_n \quad (4.3.72)$$

$$H_{n+1} = a + bt_{n+1}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & t_n \\ 1 & t_{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.73)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones y reordenando

$$H(t) = \left[\frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} \right] H_n + \left[\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \right] H_{n+1} \quad (4.3.74)$$

Asumiendo que el análisis comienza en $t = 0$

$$H(t) = \left[1 - \frac{t}{\Delta t} \right] H_n + \left[\frac{t}{\Delta t} \right] H_{n+1} = \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.75)$$

$$N = \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t}{\Delta t} & \frac{t}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (4.3.76)$$

$$[H] = [N]\{H\} \quad [V] = [N]\{V\} \quad (4.3.77)$$

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.78)$$

Haciendo

$$[G] = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.79)$$

Por lo tanto la ecuación (4.3.78) se puede expresar de la siguiente manera y de manera análoga también para la velocidad

$$\frac{\partial H}{\partial t} = [G]\{H\} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = [G]\{V\} \quad (4.3.80)$$

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (4.3.25)

$$\int_0^{\Delta t} [N]^T \left[[K1] \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} + \frac{a^2}{g} [K2] \{V\} \right] dt = 0 \quad (4.3.81)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.77) y (4.3.80) en (4.3.81) y desarrollando

4.3. Modelamiento en regimen no permanente

$$\int_0^{\Delta t} [K1][N]^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} dt + \int_0^{\Delta t} \frac{a^2}{g} [K2][N]^T \{V\} dt = 0$$

$$\int_0^{\Delta t} [K1][N]^T [G] \{H\} dt + \int_0^{\Delta t} \frac{a^2}{g} [K2][N]^T [N] \{V\} dt = 0$$

Integrando cada término se obtiene:

$$\int_0^{\Delta t} [K1][N]^T [G] \{H\} dt = \frac{[K1]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.82)$$

$$\int_0^{\Delta t} \frac{a^2}{g} [K2][N]^T [N] \{V\} dt = \frac{a^2 \Delta t}{6g} [K2] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.83)$$

por lo tanto se tiene.

$$\frac{[K1]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{a^2 \Delta t [K2]}{6g} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.3.84)$$

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (4.3.26)

$$\int_0^{\Delta t} [N]^T \left[[K1] \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} \right\} + g[K2] \{H\} + \frac{f|V|}{2D} [K1] \{V\} \right] dt = 0 \quad (4.3.85)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.77) y (4.3.80) en (4.3.85) y desarrollando

$$\int_0^{\Delta t} [K1][N]^T \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + \int_0^{\Delta t} g[K2][N]^T \{H\} dt + \int_0^{\Delta t} \frac{f|V|}{2D} [K1][N]^T \{V\} dt = 0$$

$$[K1] \int_0^{\Delta t} [N]^T \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} \right\} dt + g[K2] \int_0^{\Delta t} [N]^T \{H\} dt + \frac{f|V|[K1]}{2D} \int_0^{\Delta t} [N]^T \{V\} dt = 0$$

$$[K1] \int_0^{\Delta t} [N]^T [G] \{V\} dt + g[K2] \int_0^{\Delta t} [N]^T [N] \{H\} dt + \frac{f|V|[K1]}{2D} \int_0^{\Delta t} [N]^T [N] \{V\} dt = 0$$

Integrando cada término se obtiene:

$$[K1] \int_0^{\Delta t} [N]^T [G] \{V\} dt = \frac{[K1]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.86)$$

$$g[K2] \int_0^{\Delta t} [N]^T [N] \{H\} dt = \frac{g[K2]\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.87)$$

$$\frac{f|V|[K1]}{2D} \int_0^{\Delta t} [N]^T [N] \{V\} dt = \frac{f\Delta t[K1]|V|}{12D} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.88)$$

Por lo tanto reordenando convenientemente se tiene

$$\begin{aligned} \frac{[K1]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{g[K2]\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} + \\ \frac{f\Delta t[K1]|V|}{12D} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_n \\ V_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \end{aligned} \quad (4.3.89)$$

A partir de las ecuaciones (4.3.84) y (4.3.89) podemos establecer ecuaciones de recurrencia para la solución de las variables de H_{n+1} y V_{n+1} , teniendo como solución previa a H_n y V_n .

b). Consistencia y error de aproximación

Para asegurar la convergencia de cualquier aproximación de elementos finitos es necesario y suficiente que sea consistente y estable [16, Página 392]. La necesidad de estimar el error aparece en forma natural, ya que de partida estamos obteniendo *soluciones aproximadas*. Además, debemos establecer la forma en que dicho error se verá afectado a medida que

el numero de elementos se incremente. Se define el error, $e(x)$, de una aproximación como la diferencia entre el valor exacto y el aproximado.

$$e(x) = H(x, t) - \hat{H}(x, t) \quad (4.3.90)$$

Es obvio que el verdadero error no podrá ser evaluado si no se conoce la solución exacta; sin embargo, aun cuando $H(x, t)$ sea desconocido, es posible construir estimaciones del error y determinar si éste decrece a medida que aumenta el número de elementos. Tener información al respecto es de gran utilidad cuando se debe elegir entre varios elementos o cuando habiendo elegido elemento, se desea conocer la influencia que tendrá en la solución el duplicar o triplicar su número. De hecho, un análisis del error puede mostrar la incapacidad de algún elemento para resolver el problema entre manos.

c). Estabilidad

Un algoritmo es estable si cambios pequeños en los datos iniciales producen cambios pequeños en los resultados. Algunos algoritmos son estables solamente para un conjunto de condiciones iniciales. Estos algoritmos son *condicionalmente estables*. Para el flujo no permanente en redes a presión los pequeños pasos de tiempo se ven limitados por los criterios de estabilidad (número de Courant-Friedrichs-Lewy), que restringe la relación entre el tiempo y el espacio (parámetros de la malla).

Los criterios de estabilidad se definen por la expresión siguiente:

$$C_n = \frac{a\Delta t}{\Delta L} \leq 1$$

Donde:

C_n : Número de Courant.

a : Velocidad de onda.

Δt : Paso del tiempo.

ΔL : Longitud del tramo de la tubería.

4.4. Programación en MATLAB

En esta sección se presenta los procedimientos generales de la programación del Método de Elementos Finitos (MEF) para el modelamiento del flujo no permanente en redes de tuberías, bajo sistema de organización mostrada en el diagrama de flujo (Figura 4.16). Para este fin se ha utilizado la interfaz gráfica de usuario **GUIDE**³ de **MATLAB**⁴. Aquí presentamos los alcances generales del programa que se ha elaborado con la denominación **GAMEF v2014**, cabe señalar que este programa se ha hecho especialmente para la aplicación del modelo desarrollado con MEF para el problema abordado en esta tesis.

La elección del programa en el que implementar los códigos, MATLAB, se ha fundamentado en dos motivos:

- Es un lenguaje sencillo y ampliamente extendido en el ámbito académico y de la investigación.
- Proporciona las herramientas matemáticas y numéricas básicas, tales como multiplicación de matrices, inversión de matrices, etc., que permiten la fácil implementación del Método de los Elementos Finitos.

³GUIDE es un entorno de programación visual disponible en MATLAB para realizar y ejecutar programas de simulación. Tiene las características básicas de todos los programas visuales como Visual Basic o Visual C++.

⁴MATLAB (abreviatura de MATrix LABoratory, "Laboratorio de Matrices") es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux .

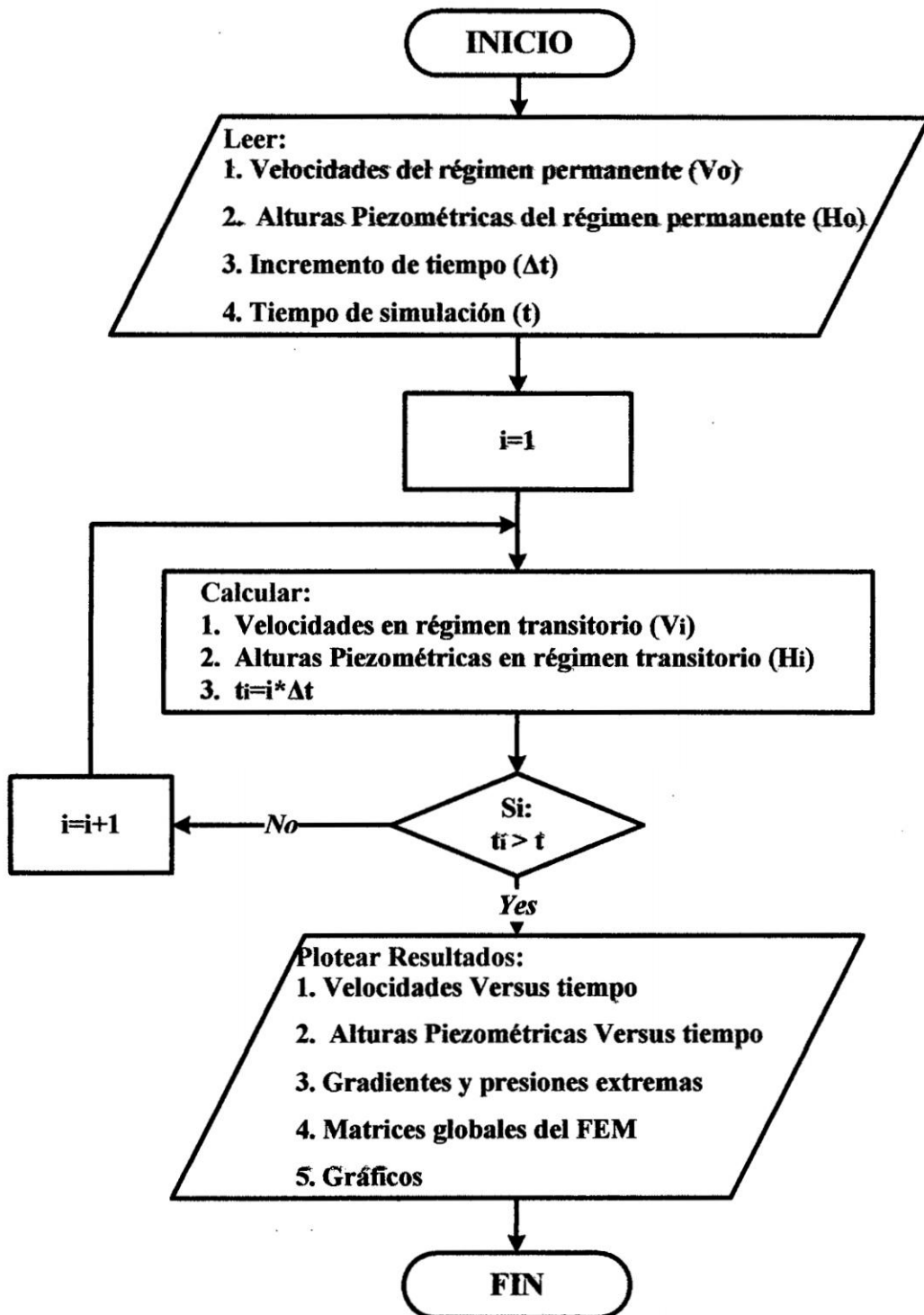


Figura 4.16: Diagrama de flujo para simular el flujo transitorio con el Método de Elementos Finitos

4.4.1. Modelo matemático

Para una organización estructurada y la codificación computacional aquí se resumirá el modelo matemático expresado en Elementos Finitos para la solución del problema de flujo no permanente en redes de tuberías. Las ecuaciones (4.3.69) y (4.3.70), representan la solución del problema abordado.

$$H^{n+1} = H^n + \Delta t \frac{a^2}{g} [K1]^{-1} [K2] \left\{ (\alpha - 1)V^n - \alpha V^{n+1} \right\} \quad (4.4.1)$$

$$V^{n+1} = V^n + g\Delta t [K1]^{-1} [K2] \left\{ (\alpha - 1)H^n - \alpha H^{n+1} \right\} + \frac{f\Delta t |V|}{2D} [I] \left\{ (\alpha - 1)V^n - \alpha V^{n+1} \right\} \quad (4.4.2)$$

4.4.2. Descripción del programa GAMEF v2014

En el Apéndice A, se presenta un pequeño manual de este programa; sin embargo en esta sección describimos sus alcances generales y sus limitaciones respectivas.

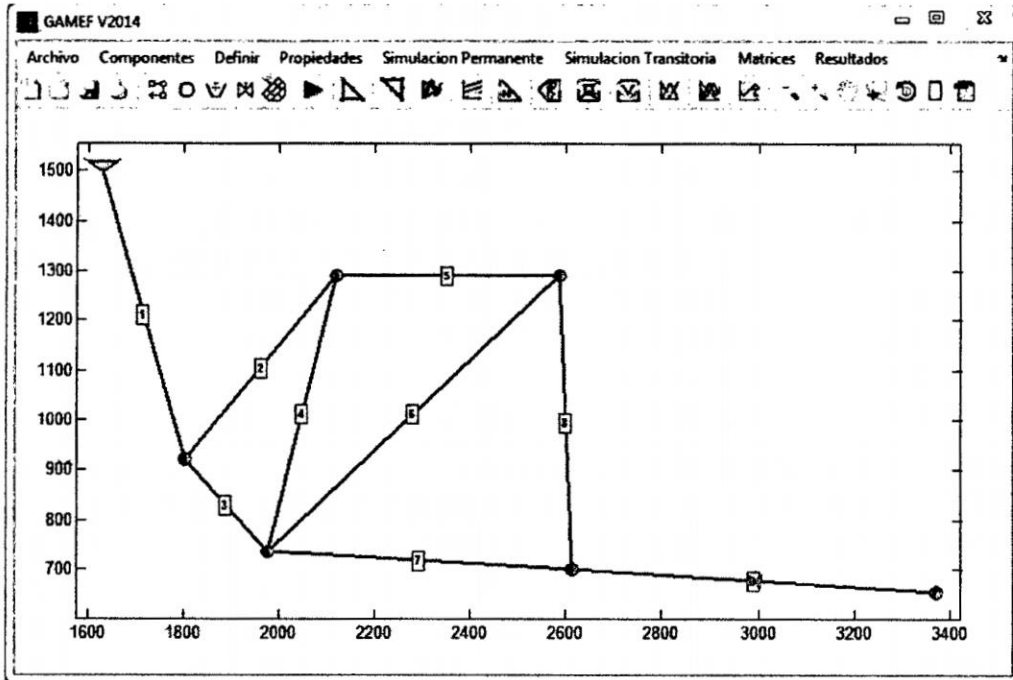


Figura 4.17: Portada principal del programa *GAMEF V2014*

4.4.2.1. Ingreso de datos

El ingreso de datos de la geometría de la red de distribución de agua en el programa *GAMEF* se puede realizar en dos modalidades, gráficamente, dibujando la posición de los nodos y las tuberías en el entorno principal del programa ó importando datos de los nodos, tuberías, reservorios y válvulas a partir de archivos de bloc de nota o Excel, donde se ordenada adecuadamente estos archivos, recomendados la segunda opción. Así mismo el programa cuenta con una base de datos de las propiedades de las tuberías y el fluido a simular conjuntamente con el método de fricción se escogen en el menú de propiedades.

4.4.2.2. Discretización o enmallado

El programa utiliza un algoritmo propio para la generación de la malla en MATLAB de toda la red de distribución de agua ingresada o todo el dominio del problema, en

consecuencia se genera los nodos internos y los elementos en cada tubería y en toda la red, la cual utiliza el programa *GAMEF* como base de datos.

4.4.2.3. Solución

Desde la portada principal del programa se accede a las funciones de la solución numérica programada en procedimientos *m.File* (Archivos varios), que son los encargados de solucionar el problema del flujo permanente y no permanente o también llamado flujo transitorio de la red de distribución de agua.

4.4.2.4. Visualización de los resultados

Del mismo modo que en el caso anterior, desde la ventana principal se accede a las funciones de la visualización gráfica en instrucciones *m.File*, que son los encargados de mostrar la red de distribución de agua, el enmallado, los nodos las tuberías, los elementos de control hidráulico, perfiles de velocidad en cada elemento y alturas piezométricas en cada nodo de la malla. También se puede acceder a los reportes numéricos clasificados y ordenados según nodos y elementos y a la vez exportar a Excel para usos diferentes.

4.4.2.5. Alcances y limitaciones del programa

El programa aborda la solución numérica del flujo no permanente o flujo transitorio en sistemas a presión en específico sistemas de distribución de agua potable con el *Método de Elementos Finitos*; sin embargo el modelo puede ser aplicado a otro tipo de fluidos y problemas similares como es el caso de conducción de gas, simulación del flujo no permanente en centrales hidroeléctricas y problemas afines.

En la presente tesis las condiciones de borde que se implementaron en el software son:

- Embalse aguas arriba con cabeza estática constante

- Válvula aguas abajo de cierre lineal y brusco
- Igualdad de presiones para todos los tubos que entran o salen de un nudo

GAMEF en su primera versión contiene la barra de menú, situada en la parte superior con una serie de menús despegables que contiene la mayoría de los comandos de *GAMEF*, la barra de herramientas, situada por debajo de la barra de menú, incluye una serie de botones con comandos y procesos generales: gestión de archivos, opciones de zoom y desplazamiento y la zona de dibujo, que nos permite la visualización de la topología de la red.

4.4.3. Modelado de una red de distribución de agua

Con fines didácticos para esta presentación modelaremos una una red de distribución de agua típica de *7 nodos* y *9 elementos* o tuberías como se muestra en la Figura 4.18. En adelante utilizaremos este programa con el objeto de comparar los resultados entre *GAMEF v2014* y *HAMMER*, la primera formulación numérica basada en el *Método de Elementos de Finitos* y la Segunda en el *Método de las Características*.

Para este caso se pretende determinar en cualquier de los (nodos y tuberías), la altura piezométrica, las presiones, la velocidad del flujo, el caudal y las presiones máximas y mínimas.

4.4.3.1. Construcción del modelo

El dominio de la red de distribución de agua se define mediante tres bloques de datos, es decir datos de las tuberías o elementos, datos de los nodos y del reservorio como se muestra en los Cuadros 4.1, 4.2 y 4.3.

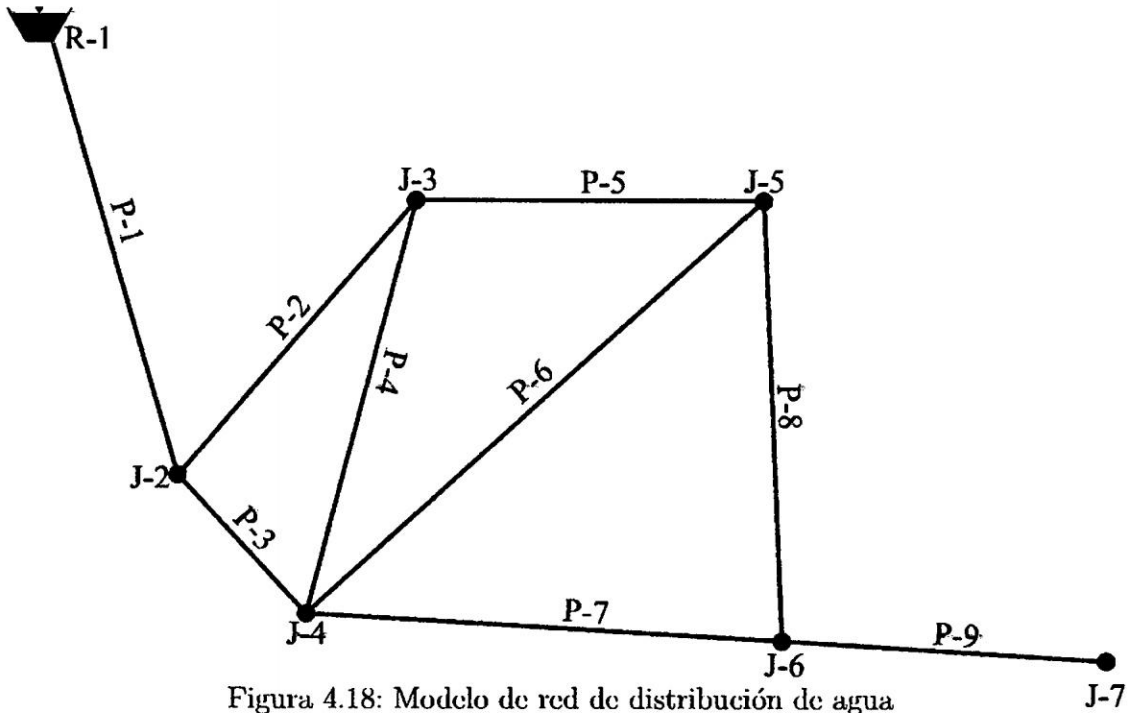


Figura 4.18: Modelo de red de distribución de agua

Los datos de las tuberías o elementos contienen la numeración de las tuberías, la conectividad de las tuberías (N_i =Nodo inicial, N_j =Nodo final), el diámetros de las tuberías (D) y las pérdidas locales si es que hubiera en el tramo.

La preparación y configuración de los datos de entrada al programa *GAMEF v2014*, debe ser estrictamente en la forma como se indica, en caso contrario el programa no podrá procesar la información, en caso contrario se obtendrá resultados incorrectos.

Cuadro 4.1: Conectividad de las tuberías

Tubería	N_i	N_j	Diámetro (in)	S_k
1	1	2	10	0
2	2	3	6	0
3	2	4	8	0
4	3	4	4	0
5	3	5	6	0
6	4	5	6	0
7	4	6	4	0
8	5	6	4	0
9	6	7	6	10

Los datos de los nodos generalmente contienen las coordenadas X , Y y Z de los nodos y así mismo los caudales de demanda asignadas a estos nodos.

Cuadro 4.2: Datos de los nodos

Nodo	X (m)	Y (m)	Z (m)	Q_d (L/s)
1	1630.519	1500.906	2998	0
2	1802.733	921.3462	2938	10
3	2120.808	1289.875	2943	30
4	1976.107	735.8952	2933	10
5	2584.79	1289.875	2944	30
6	2611.41	699.0982	2931	20
7	3045.422	673.5937	2930	30

Los datos de los reservorios incluyen solamente la altura total de agua en el reservorio o la altura piezométrica, el programa esta elaborado para multiples reservorios.

Cuadro 4.3: Datos de los reervorios

Nodo	H (m)
1	3000

En la tubería 9 se considera una válvula. Las propiedades de las tuberías y el fluido se ilustrara mejor con el uso del programa en las siguientes secciones.

4.4.3.2. Solución en regimen permanente

En la actualidad existen numerosos programas de análisis de redes a presión en regimen permanente como WaterCAD V8i, WaterGEMS V8i, EPANET, etc. Para el análisis de flujo permanente en la presente tesis se utilizará WaterCAD V8i y el programa elaborado *GAMEF V2014*.

4.4.3.2.1. Solución con *GAMEF v2014*

La solución en regimen permanente es la condición inicial para la simulación en regimen no permanente, por lo tanto el Programa *GAMEF V2014*, inicialmente calcula H , P , Q y

4.4. Programación en MATLAB

V con el Método de Elementos Finitos para el sistema de tuberías. Mientras el programa WaterCAD tiene como algoritmo de solución al Método de Gradiente Hidráulico.

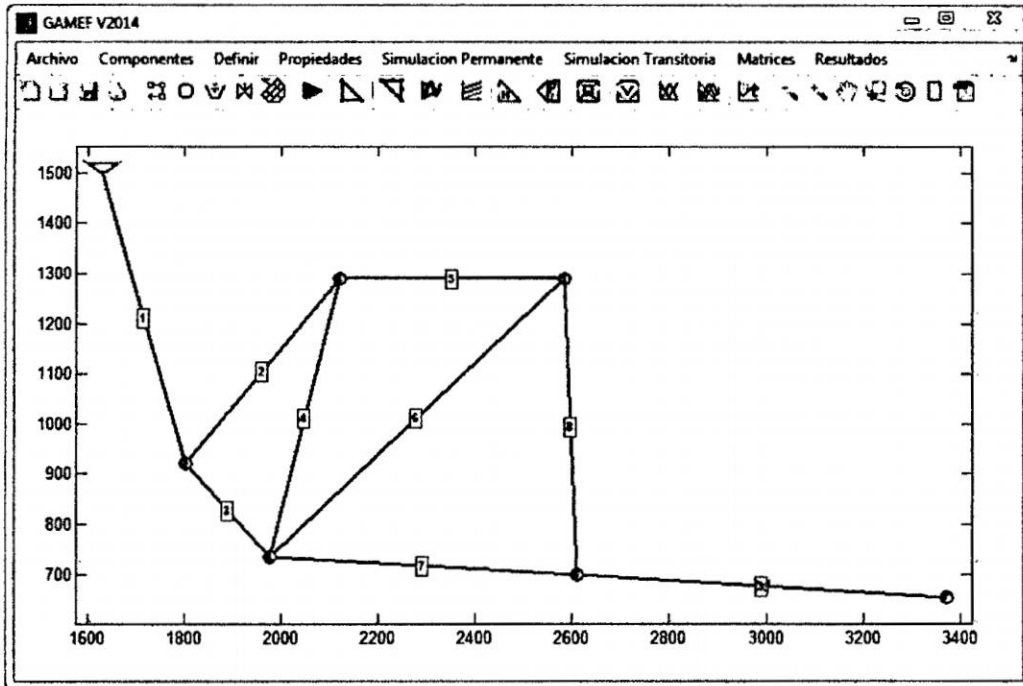


Figura 4.19: Modelo de red típica de distribución de agua

La transcripción del Pseudocódigo 1 a cualquier lenguaje de programación es de inmediato, en este trabajo se realiza la aplicación desde MATLAB y se ha implementado un código global de pre-proceso, solución y pos-proceso, previamente es necesario los datos de las tuberías, nodos, reservorio y propiedades del agua y devuelve de resultado la altura piezométrica, presiones, caudales y velocidades.

La solución completa del sistemas de tuberías se puede observar en los cuadros 4.4 y 4.5.

Algorithm 1: Pseudocódigo para la simulación en regimen permanente de redes de tuberías

Data: Ingresar la matriz $CONNECTIVITY_{NT \times 5}$, conectividad de las tuberías, diámetros y perdidas menores

Data: Ingresar la matriz $NODES_{NN \times 4}$, coordenadas de los nodos y los caudales de demanda

Data: Ingresar la matriz $RSEERVOIR_{NR \times 1}$, coordenadas de los nodos y los caudales de demanda

Data: Ingresar los datos como rugosidad relativa y viscosidad del agua

Result: Alturas piezométricas, presiones, caudales y velocidades H, P, Q y V

```

1 inicio;
2 /* Asumir las alturas piezométricas iniciales  $H_o$  */
3 /* Calcular una velocidad inicial, con la expresión */
4
5
6
7
8
9
10
11

```

$$V = \frac{-2\sqrt{2gDh_f}}{\sqrt{L}} \log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51\nu\sqrt{L}}{D\sqrt{2gDh_f}} \right)$$

```

/* Luego calcular */
5
6
7
8
9
10
11

```

$$h_f = H_2 - H_1 - \sum k_m \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

```

/* El cálculo se realiza hasta tener las velocidades iguales */
6 /* Luego calcular el numero de Reynolds, con */
7
8
9
10
11

```

$$R = \frac{VD}{\nu}$$

```

/* Calcular los coeficientes de fricción */
8 /* Calcular las matrices de los elementos */
9 /* Ensamblar las matrices */
10 imprimir  $A, H, P, Q$  y  $V$  ;
11 fin;

```

4.4. Programación en MATLAB

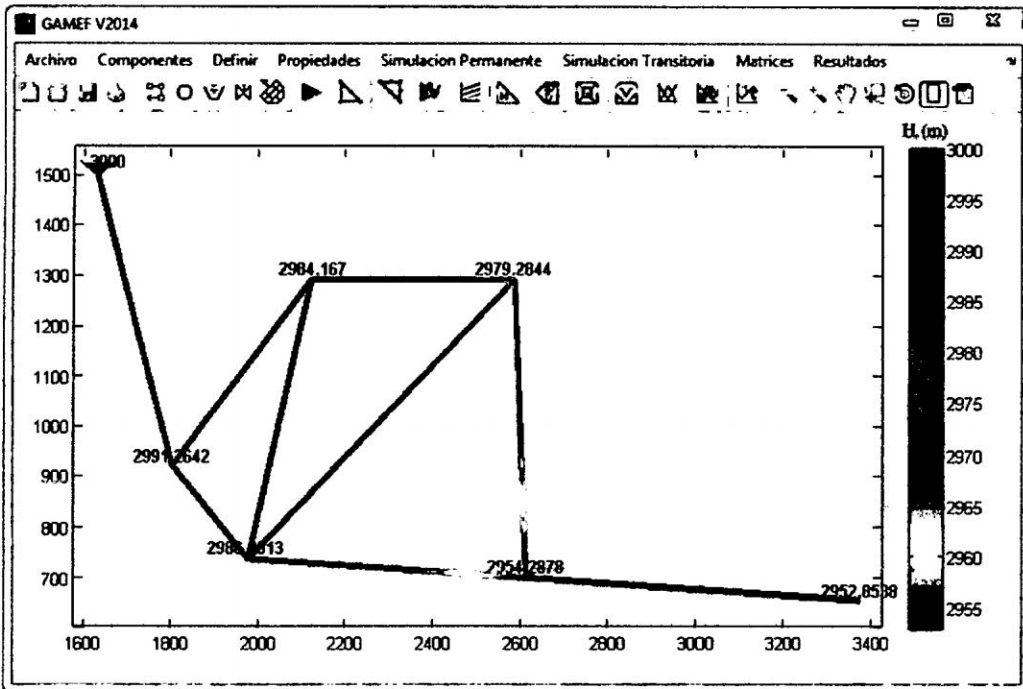


Figura 4.20: Alturas piezométrica en el sistema de tuberías *GAMEF v2014*

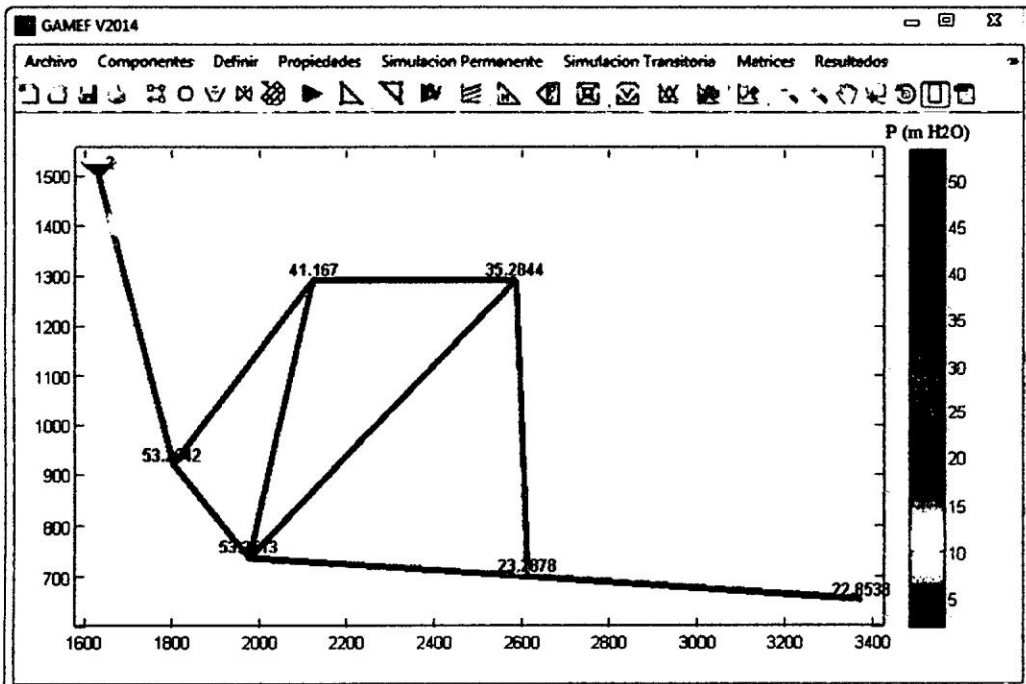


Figura 4.21: Presiones en el sistema de tuberías *GAMEF v2014*

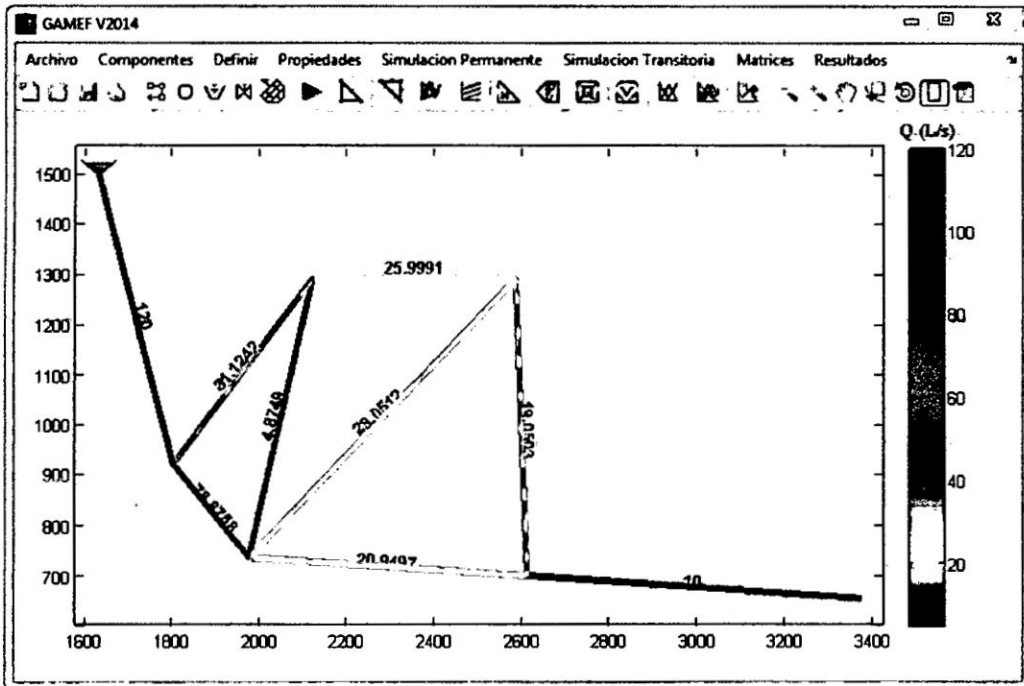


Figura 4.22: Caudales en el sistema de tuberías *GAMEF v2014*

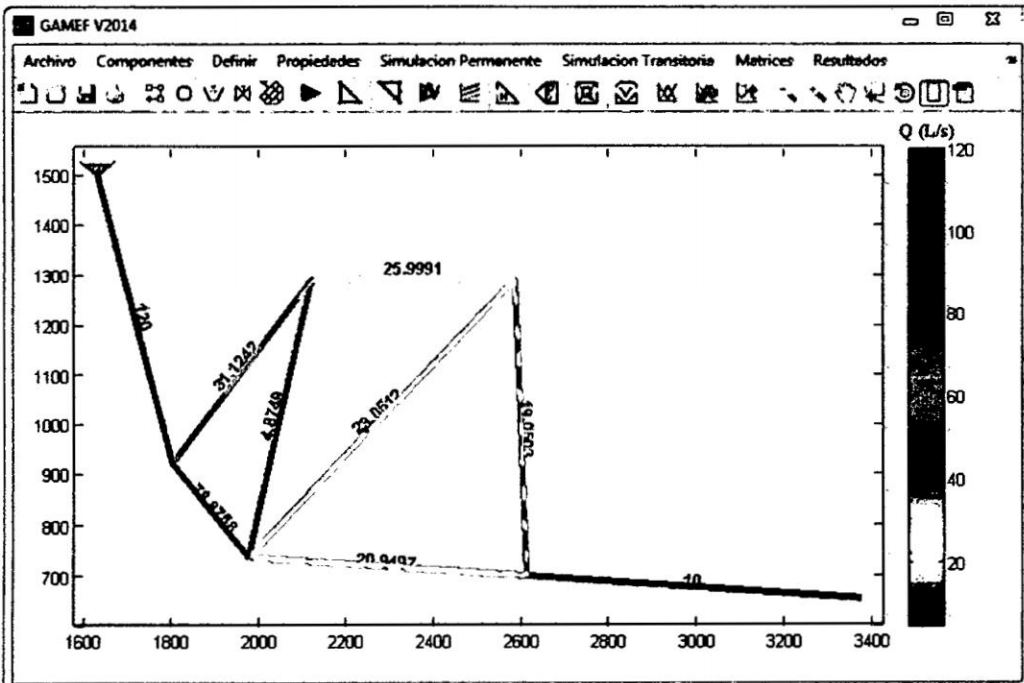


Figura 4.23: Velocidades en el sistema de tuberías *GAMEF v2014*

Cuadro 4.4: Resultado de los nodos con GAMEF v2014

Nodo	Q_dL/s	$Z(m)$	$H(m)$	$P(mH2O)$
1	0	2998.00	3000.00	2.00
2	10	2938.00	2989.89	51.89
3	10	2943.00	2981.67	38.67
4	30	2933.00	2983.98	50.98
5	30	2944.00	2975.76	31.76
6	30	2931.00	2937.22	6.22
7	20	2930.00	2932.24	2.24

Cuadro 4.5: Resultado de las tuberías con GAMEF v2014

Tuberia	Ni	Nj	D	SK	L	Material	f	LGH (Ni)	LGH (Nj)	HG	SF	Q	V
1	1	2	10	0	604.61	PVC	0.01266	3000.00	2989.89	10.11	0.017	130.00	2.57
2	2	3	6	0	486.81	PVC	0.01475	2989.89	2981.67	8.22	0.017	33.74	1.85
3	2	4	8	0	253.87	PVC	0.01310	2989.89	2983.98	5.90	0.023	86.26	2.66
4	3	4	4	0	572.57	PVC	0.01981	2981.67	2983.98	2.31	0.004	-5.17	-0.64
5	3	5	6	0	463.98	PVC	0.01518	2981.67	2975.76	5.92	0.013	28.90	1.58
6	4	5	6	0	823.04	PVC	0.01557	2983.98	2975.76	8.23	0.010	25.27	1.39
7	4	6	4	0	636.37	PVC	0.01443	2983.98	2937.22	46.76	0.073	25.82	3.19
8	5	6	4	0	591.38	PVC	0.01460	2975.76	2937.22	38.54	0.065	24.18	2.98
9	6	7	6	10	760.83	PVC	0.01629	2937.22	2932.24	4.98	0.007	20.00	1.10

4.4.3.2.2. Solución con *WaterCAD V8i*

Con fines de comparación de resultados y validación del modelo matemático desarrollado tanto para el *flujo permanente* como para el *flujo no permanente* en base al Método de Elementos Finitos como técnica numérica de solución de las ecuaciones gobernantes, utilizaremos el software comercial *WaterCAD* para comprobar cuanto se acerca nuestros resultados con los obtenidos con este software comercial ampliamente utilizado en el mundo.

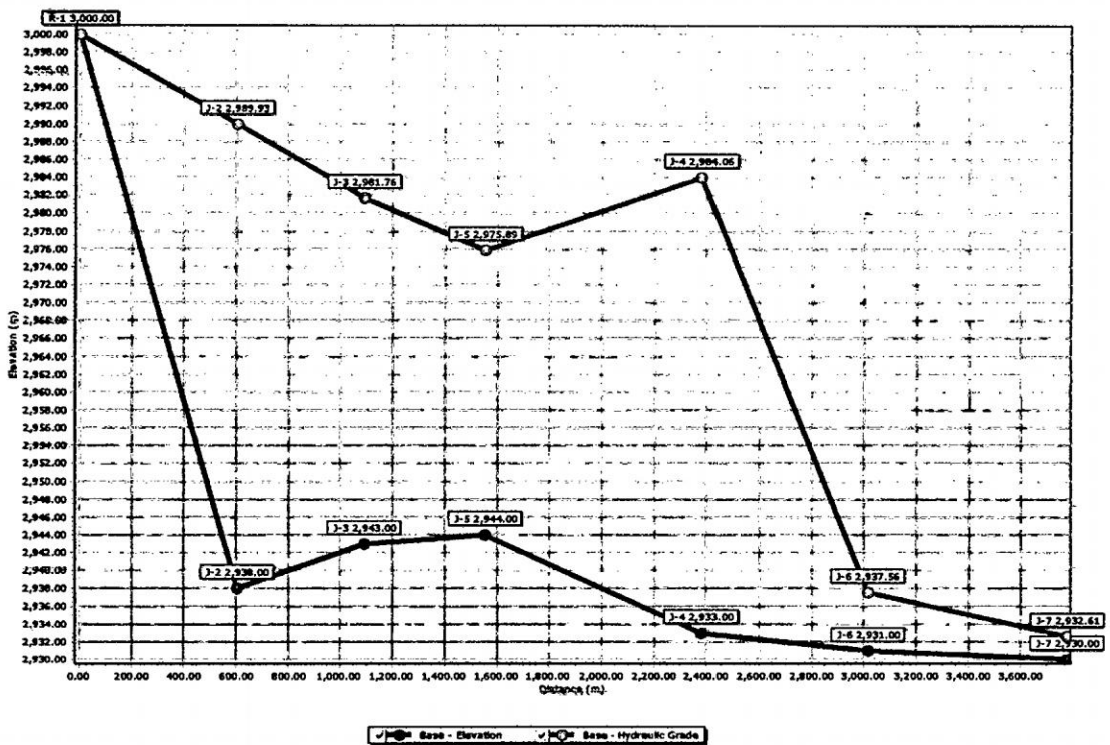


Figura 4.24: Modelo de red de distribución de agua

El algoritmo de cálculo de *WaterCAD* se basa en el método del *Gradiente Hidráulico*, que permite el análisis hidráulico de redes de agua (aunque puede usarse para cualquier *fluido newtoniano*) determinando las presiones en diversos puntos del sistema, así como los caudales, velocidades, pérdidas en las líneas que conforman la red hidráulica; así como otros muchos parámetros operativos derivados de los elementos presentes en el sistema

como: Bombas, Válvulas de Control, Tanques, etc. a partir de las características físicas del sistema y unas condiciones de demanda previamente establecidas ⁵.

El software además de contar con una interfaz gráfica autónoma (Windows Stand Alone), puede trabajarse de manera integrada entornos CAD como los son **AutoCAD** y **Bentley MicroStation**.

⁵**Bentley WaterCAD** es un software comercial de análisis, modelación y gestión de redes a presión (sistemas de distribución o de riego), propiedad de la Empresa de Software **Bentley Systems, Incorporated** que produce soluciones para el diseño, construcción y operación de infraestructuras en diversos campos.

Cuadro 4.6: Resultado de los nodos con WaterCAD V8i

Label	Elevation (m)	Demand (L/s)	Hydraulic Grade (m)	Pressure (m H2O)
R-1	2998.00	0	3000.00	2.00
J-2	2938.00	10	2989.93	51.83
J-3	2943.00	10	2981.76	38.69
J-4	2933.00	30	2984.06	50.95
J-5	2944.00	30	2975.89	31.82
J-6	2931.00	30	2937.56	6.54
J-7	2930.00	20	2932.61	2.60

Cuadro 4.7: Resultado de las tuberías con WaterCAD V8i

Label	Length (Scaled m)	Start Node	Stop Node	Diameter (in)	Material	Hazen Williams C	Flow (L/s)	Velocity (m/s)	Headloss Gradient (m/m)
P-1	604.61	R-1	J-2	10	PVC	150	130.000	2.570	0.017
P-2	486.81	J-2	J-3	6	PVC	150	33.740	1.850	0.017
P-3	253.87	J-2	J-4	8	PVC	150	86.260	2.660	0.023
P-4	572.57	J-3	J-4	4	PVC	150	-5.170	0.640	0.004
P-5	463.98	J-3	J-5	6	PVC	150	28.910	1.580	0.013
P-6	823.04	J-4	J-5	6	PVC	150	25.270	1.390	0.010
P-7	636.37	J-4	J-6	4	PVC	150	25.820	3.190	0.073
P-8	591.38	J-6	J-5	4	PVC	150	-24.180	2.980	0.065
P-9	760.83	J-6	J-7	6	PVC	150	20.000	1.100	0.007

4.4. Programación en MATLAB

Como podemos observar los cuadros 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7, los resultados son similares tal como se resume a continuación.

Cuadro 4.8: Comparación de resultados de los nodos entre *GAMEF v2014* y *WaterCAD V8i*

Nodo	Altura Piezométrica (m)		Presión (m H ₂ O)	
	GAMEF v2014	WaterCAD V8i	GAMEF v2014	WaterCAD V8i
1	3000.00	3000	2.00	2
2	2989.89	2989.93	51.89	51.83
3	2981.67	2981.76	38.67	38.69
4	2983.98	2984.06	50.98	50.95
5	2975.76	2975.89	31.76	31.82
6	2937.22	2937.56	6.22	6.54
7	2932.24	2932.61	2.24	2.6

Cuadro 4.9: Comparación de resultados de los elementos entre *GAMEF v2014* y *WaterCAD V8i*

Tubería	Caudal (L/s)		Velocidad (m/s)	
	GAMEF v2014	WaterCAD V8i	GAMEF v2014	WaterCAD V8i
1	130.00	130.00	2.57	2.57
2	33.74	33.74	1.85	1.85
3	86.26	86.26	2.66	2.66
4	-5.17	-5.17	0.64	0.64
5	28.90	28.91	1.58	1.58
6	25.27	25.27	1.39	1.39
7	25.82	25.82	3.19	3.19
8	24.18	-24.18	2.98	2.98
9	20.00	20.00	1.10	1.10

4.4.3.3. Solución en regimen no permanente

Para el análisis del *flujo no permanente* se hace con el programa *GAMEF v2014* y el *HAMMER V8 XM* por tratarse de una herramienta versátil de fácil uso y manejo.

4.4.3.3.1. Solución con *GAMEF v2014*

Cuadro 4.10: Condiciones iniciales para $t = 0$ GAMEF v2014

Nodo	Altura Piezométrica (m)	Tubería	Velocidad (m/s)
1	3000.00	1	2.57
2	2989.89	2	1.85
3	2981.67	3	2.66
4	2983.98	4	0.64
5	2975.76	5	1.58
6	2937.22	6	1.39
7	2932.24	7	3.19
		8	2.98
		9	1.10

Cuadro 4.11: Presiones y alturas piezométricas extremas con GAMEF v2014

Tubería-Nodo	P. máxima	P. mínima	GH	
	(mm H ₂ O)	(mm H ₂ O)	Máxima (m)	Mínima (m)
6-4	50956.00	50954.00	2985.56	2982.56
6-5	31823.10	31821.00	2976.99	2974.89
9-6	6545.30	6543.00	2938.96	2936.46
9-7	2605.50	2603.00	2933.81	2931.41
1-1	2994012.00	2994009.80	3001.00	2998.90
1-2	51828.30	51825.60	2991.23	2988.63
4-3	38688.00	38685.50	2982.96	2980.46
4-4	50956.40	50953.70	2985.56	2982.76
2-2	51828.10	51825.90	2991.43	2988.43
2-3	38688.40	38685.90	2982.86	2980.36
5-3	38688.30	38686.00	2983.06	2980.36
5-5	31823.50	31820.80	2977.09	2974.39
8-6	6545.40	6542.50	2938.96	2936.36
8-5	31823.20	31821.00	2976.99	2974.79
3-2	51828.10	51825.70	2991.43	2988.43
3-4	50956.30	50953.80	2985.56	2982.76
7-4	50956.50	50954.00	2985.26	2983.06
7-6	6545.20	6542.50	2938.66	2936.46

4.4.3.4. Ensamblaje de las matrices [K1] y [K2]

$$[\mathbf{K1}] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2L_1 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_1 & 2(L_1 + L_2 + L_3) & L_2 & L_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 2(L_2 + L_4 + L_5) & L_4 & L_5 & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & L_4 & 2(L_3 + L_4 + L_6 + L_7) & L_6 & L_7 & 0 \\ 0 & 0 & L_5 & L_6 & 2(L_5 + L_6 + L_8) & L_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_7 & L_8 & 2(L_7 + L_8 + L_9) & L_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_9 & 2L_9 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{K2}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

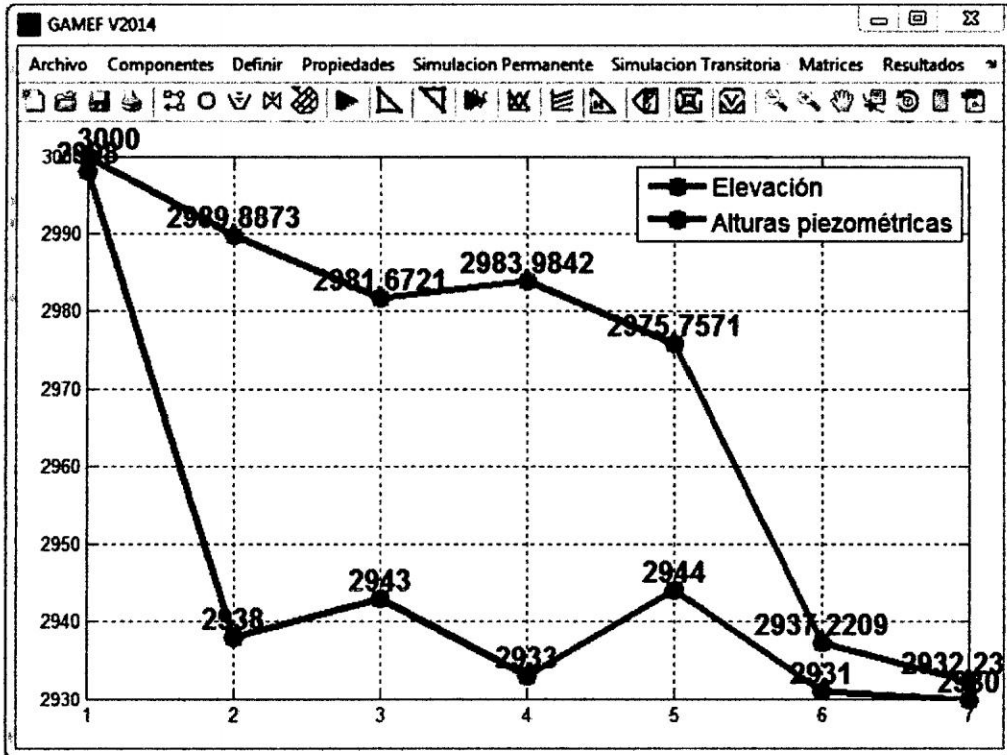


Figura 4.25: Modelo de red de distribución de agua

4.4.3.4.1. Solución con *HAMMER V8 XM*

HAMMER V8 XM, es un software de simulación ingenieril, especializado en análisis del Golpe de Ariete, que permite modelar cualquier evento transitorio con diferentes dispositivos hidráulicos y posee una completa integración con WaterGEMS/CAD, que son software comunes para el análisis de distribución y transmisión de Redes a Presión. Estos softwares comerciales son utilizados con fines de comparación de resultados y validación del modelo desarrollado.

Transient Calculation Summary

Summary	Initial Conditions	Extreme Pressure and Heads			
	Label	Start Node	Head (Initial at Start Node, Transient) (m)	Stop Node	Head (Initial at Stop Node, Transient) (m)
1	P-6	J-4	2,984.10	J-5	2,975.90
2	P-9	J-6	2,937.60	J-7	2,932.60
3	P-1	R-1	3,006.00	J-2	2,989.90
4	P-4	J-3	2,981.80	J-4	2,984.10
5	P-2	J-2	2,989.90	J-3	2,981.80
6	P-5	J-3	2,981.80	J-5	2,975.90
7	P-8	J-6	2,937.60	J-5	2,975.90
8	P-3	J-2	2,989.90	J-4	2,984.10
9	P-7	J-4	2,984.10	J-6	2,937.60

Report Close Help

Figura 4.26: Condiciones iniciales en HAMMER V8i

Transient Calculation Summary

Summary	Initial Conditions	Extreme Pressure and Heads
Time Step:	0.046200	sec
Number of Time Steps:	900	
Total Simulated Time:	41.5	sec
Number of Nodes:	7	
Number of Pipes:	9	
Specific Gravity:	0.998	
Wave Speed (Global):	1,250.00	m/s
Vapor Pressure:	-9,980	mm H2O
Number of Report Paths:	0	

Report Close Help

Figura 4.27: Resumen del calculo transitorio en HAMMER V8i

4.4. Programación en MATLAB

Transient Calculation Summary

Summary	Initial Conditions	Extreme Pressure and Heads				
	End Point	Upsurge Ratio	Max. Pressure (mm H2O)	Min. Pressure (mm H2O)	Max. Head (m)	Min. Head (m)
1	P-6-J-4	1.000	50,955	50,955	2,984.06	2,984.06
2	P-6-J-5	1.000	31,822	31,822	2,975.89	2,975.89
3	P-9-J-6	1.000	6,544	6,544	2,937.56	2,937.56
4	P-9-J-7	1.000	2,604	2,604	2,932.61	2,932.61
5	P-1-R-1	1.000	2,994,011	2,994,011	3,000.00	3,000.00
6	P-1-J-2	1.000	51,827	51,827	2,989.93	2,989.93
7	P-4-J-3	1.000	38,687	38,687	2,981.76	2,981.76
8	P-4-J-4	1.000	50,955	50,955	2,984.06	2,984.06
9	P-2-J-2	1.000	51,827	51,827	2,989.93	2,989.93
10	P-2-J-3	1.000	38,687	38,687	2,981.76	2,981.76
11	P-5-J-3	1.000	38,687	38,687	2,981.76	2,981.76
12	P-5-J-5	1.000	31,822	31,822	2,975.89	2,975.89
13	P-8-J-6	1.000	6,544	6,544	2,937.56	2,937.56
14	P-8-J-5	1.000	31,822	31,822	2,975.89	2,975.89
15	P-3-J-2	1.000	51,827	51,827	2,989.93	2,989.93
16	P-3-J-4	1.000	50,955	50,955	2,984.06	2,984.06
17	P-7-J-4	1.000	50,955	50,955	2,984.06	2,984.06
18	P-7-J-6	1.000	6,544	6,544	2,937.56	2,937.56

Report Close Help

Figura 4.28: Presiones y alturas piezométricas extremas en HAMMER V8i

Capítulo 5

APLICACIÓN DEL MODELO

En esta sección se presenta la aplicación del modelo a un caso real mediante el programa *GAMEF V2014*, que ha sido elaborado utilizando el Método de Elementos Finitos (MEF) para la simulación numérica del Golpe de Ariete para Redes de Agua Potable y que a la vez se resolverá el problema de aplicación con un programa comercial con el fin de comparar y validar el modelo.

En la actualidad existen numerosos programas de análisis del *Golpe de Ariete*, uno de los programas mas utilizados en este campo es el HAMMER V8 XM por tratarse de una herramienta versátil de fácil uso y manejo. Es un software de simulación ingenieril, especializado en análisis del Golpe de ariete, que permite modelar cualquier evento transitorio con diferentes dispositivos hidráulicos y posee una completa integración con WaterGEMS/CAD, que son software comunes para el análisis de distribución y transmisión de Redes de agua potable.

5.1. Aspectos generales del proyecto

La aplicación del modelo desarrollado se hará al proyecto: “*Ampliación y mejoramiento del servicio de agua potable e instalación de servicio de saneamiento en las comunidades de*

5.1. Aspectos generales del proyecto

Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha, Distrito de Vilcanchos, Víctor Fajardo - Ayacucho".



Figura 5.1: Comunidad de Miraflores del Distrito Vilcanchos

5.1.1. Ubicación geográfica

La comunidad de Miraflores está ubicada en el Distrito de Vilcanchos, Provincia de Víctor Fajardo, Región Ayacucho, en el mismo corazón de los Andes Centrales. Ocupa una terraza aluvial formada por el río Pampas. Tiene una superficie de 498.54 Km^2 . Su densidad poblacional es de 5.76 habitantes por Km^2 y su región natural es Sierra. Su relieve es heterogéneo, cuyas altitudes varían desde 2200 a 5000 m.s.n.m. presentando un relieve accidentado y agreste formado por bajas y altas mesetas o punas, originadas por fenómenos fluvio-glaciares y derrames volcánicos, rodeadas por montañas aisladas de relativa altitud y el río Pampas:

5.1. Aspectos generales del proyecto

La zona de estudio, en coordenadas UTM, tiene la siguiente información:

X	Y	Z
528860.68 E	8491815.57 N	3701.00 msnm

5.1.2. Población beneficiaria

La población beneficiaria que será atendido por el proyecto está conformada por la Población de las comunidades *Antacocha*, *Cruzpampa*, *Miraflores* y *Urancancha*, con un total de 874 habitantes para el 2012, datos según el padrón de beneficiarios realizado a las localidades del área de influencia del proyecto; estas comunidades pertenecen a una zona eminentemente rural, donde los problemas que se tiene no es ajeno a los problemas de los pueblos más alejados del país. En el presente trabajo de investigación solamente se hará la simulación numérica de la red de agua potable de la comunidad de *Miraflores* con una población total de 122 *Hab* como se muestra en el cuadro 5.1.

Cuadro 5.1: Población de la zona del proyecto

Población	N° de familias	Densidad Poblacional	Total
Miraflores	31	4	122
Cruz pampa	36	4	146
Antacocha	104	4	392
Urancancha	56	4	214
Total	227	4	874

Y, con fines de cálculo y el estudio del presente del Expediente Técnico se tomaron en consideración la población establecido en el padrón general de beneficiarios; población equivalente a 227 familias, y con una densidad poblacional de aproximadamente 4/hab./vivienda. Y una tasa de crecimiento de 1.16 % anual (tomado como referencia de los censos nacionales 1993, 2005 y 2007, para la región de Ayacucho).

5.1.3. Situación actual del servicio de saneamiento básico

Actualmente se abastece de un manantial ubicado a 1.3 km de la misma comunidad, el cual tiene un caudal promedio de 0.26 lts/seg que abastece adicionalmente a la comunidad de Cruzpampa. Según el trabajo de campo aforo realizado en el mes de junio, esta captación es de concreto tiene una antigüedad de 13 años aproximadamente y se encuentran en mal estado de conservación con presencia de fisuras, óxidos y los accesorios se encuentran deteriorados, la infraestructura se encuentra en un estado deficiente y no abastece la dotación de agua en épocas de estiaje. Actualmente la población de la comunidad de Miraflores está consumiendo el agua en pésimas condiciones para consumo no es adecuado por presentar contaminantes que requieren un tratamiento adecuado.

La población de *Miraflores*, cuenta con un sistema de agua del tipo Gravedad con tratamiento construido hace más de 13 años el cual ya cumplió su tiempo de diseño y se encuentra deteriorado presentando fugas en los accesorios como las válvulas y fisuras en la infraestructura así mismo estas presentan algas verdes y oxido por el mal manejo en el mantenimiento.

En estos últimos años la población de la comunidad de *Miraflores* ha presentado un crecimiento en la población, por lo que algunas familias que recién se instalaron son afectadas porque no cuentan con el abastecimiento de agua para su consumo por lo que optan por otros medio el consumo de agua, como son el agua de las lluvias, ríos cercanos, acequias entre otros, que son almacenados en baldes, lavatorios, y no recibe tratamiento alguno, sin importar los perjuicios que esto ocasione.

Esta problemática es de antaño la necesidad de este elemento vital hace que los pobladores sigan consumiendo agua de mala calidad, que posteriormente trae como consecuencia enfermedades gastrointestinales, parasitarias y dérmicas, ocasionando gastos en salud, afectando sus recursos económicos, los más afectados son los niños que al contraer enfermedades su capacidad inmunológica disminuyen contrayendo la desnutrición crónica

afectando su rendimiento académico, capacidad intelectual deteriorando su formación y calidad de vida, esta demanda social hasta la actualidad, no han sido atendidas y el problema que se suscita es muy agravante y denigrante se subraya que estos sistemas en la mayoría de los sectores se encuentran deteriorados, brindando un servicio deficiente por falta de mantenimiento y operación de los sistemas ya que hasta el momento no se ha podido concientizar sobre el rol gravitante del agua en la salud pública.

5.1.4. Descripción del proyecto

El proyecto considerado como aplicación del modelo desarrollado en la presente tesis consiste en el Mejoramiento y Ampliación del Sistema de Agua Potable y Alcantarillado, con la instalación de tuberías, dispositivos de control hidráulico, construcción de reservorios, así mismo la instalación y construcción del sistema de alcantarillado.

5.2. Configuración del modelo

5.2.1. Periodo Óptimo de Diseño (POD)

El periodo óptimo de diseño es el tiempo de duración de todos los elementos que componen el Proyecto

Existen diversos factores que determinan el periodo óptimo de diseño mencionándose algunos:

- La vida útil de las estructuras, que está en función de la resistencia física del material que lo constituye y el desgaste que sufren estas.
- El estudio de factibilidad, que depende primordialmente del aspecto económico.
- El crecimiento poblacional, que es un factor muy importante porque incluye posibles cambios en el desarrollo industrial y comercial de la comunidad ya que pueden variar los índices económicos.

5.2. Configuración del modelo

- La tasa de interés, que es un factor muy importante por cuanto si la tasa de interés es bajo se puede pensar en periodos largos.

El crecimiento de la población y la tasa de interés tienen cierta relación; así a menor relación de crecimiento menor tasa de interés, esto implica un menor funcionamiento en los primeros años. El proporcionarle desagüe a una población, es un servicio cuyo costo debe ser retribuido por los beneficiarios, siendo estos muy elevados si se toma periodos muy largos para poblaciones con desarrollos muy violentos esta podría causar una gran quiebra administrativa.

Esto nos indica que de acuerdo a las tendencias de aumento de la población es conveniente elegir periodos óptimos de diseño más largo para crecimientos lentos y viceversa.

Generalmente los sistemas se diseñan y se constituyen para satisfacer la población mayor que la actual.

El *Reglamento Nacional de Edificaciones* sugiere periodos de diseño basados en cantidades de habitantes de la población en estudio de acuerdo al cuadro siguiente:

Cuadro 5.2: Periodos de diseño según el Reglamento Nacional de Edificaciones

Población (Habitantes)	Periodo de diseño (Años)
De 2,000 a 20,000	20
De 20,000 a más	10

Sharma y Swamee (2004) dieron la siguiente ecuación para el periodo de diseño T , para sistemas de gravedad y presión.

$$T = T_u (1 + 2\alpha r T_u^2)^{-0,5} \quad (5.2.1)$$

Y el periodo de diseño T , para sistemas de bombeo como:

$$T = T_u (1 + 0,417\alpha r T_u^2 + 0,01\alpha^2 T_u^2)^{-0,375} \quad (5.2.2)$$

5.2. Configuración del modelo

El periodo de diseño es el tiempo que se decide cómo vida útil para el funcionamiento del conjunto de estructuras de un sistema de abastecimiento y red de alcantarillado. Y depende directamente de la vida útil de las tuberías y del material fabricado, El valor de T_u se puede obtener del cuadro.

Cuadro 5.3: Vida útil de las tuberías

Pipe Material	Life, T_u (Years)
Cast iron (CI)	120
Galvanized iron (GI)	120
Electric resistance welded (ERW)	120
Asbestos cement (AC)	60
Poly (vinyl chloride) (PVC)	60

La población de la comunidad de *Miraflores* es de crecimiento moderado pues tiene una tasa de crecimiento de 1.16 por ciento, por ende con muchas posibilidades de desarrollo pero con un área rural-urbana no definida y con una población mucho menor de 500 habitantes. Utilizando las ecuaciones anteriores se calculará el periodo de diseño para este proyecto.

5.2.2. Población de diseño

La estimación de la población de diseño se puede hacer por diferentes métodos, teniendo como dato la población actual, la tasa de crecimiento y el periodo de diseño del proyecto.

5.2.2.1. Crecimiento aritmético

$$P_f = P_o \left(1 + i \frac{t}{100}\right) \quad (5.2.3)$$

5.2.2.2. Crecimiento geométrico

$$P_f = P_o \left(1 + \frac{i}{100}\right)^t \quad (5.2.4)$$

5.2.2.3. Método de Wappaus

$$P_f = P_o \left(\frac{200 + it}{200 - it} \right) \quad (5.2.5)$$

5.2.2.4. Método exponencial

$$P_f = P_o e^{\frac{it}{100}} \quad (5.2.6)$$

Donde:

P_f : Población futura.

P_o : Población inicial del año base.

i : Tasa de crecimiento.

t : Período de diseño.

5.2.3. Dotación de agua

La dotación representa la cantidad de agua necesaria para el desarrollo de las actividades de un núcleo urbano, y está dada en litros por habitantes por día ($L/h/d$); incluyendo en ella los consumos correspondientes al doméstico, comercial, industrial y otros usos.

El consumo de agua de una población es variable, porque depende de diversos factores que deben ser analizados entre las cuales tenemos:

- Los factores económicos sociales que influyen directamente sobre el consumo de agua, es decir que la población consume más agua al mejorar su nivel de vida.
- Los factores climatológicos, mencionándose que en épocas de temperaturas altas la población consume más agua que en épocas de temperaturas bajas.

5.2. Configuración del modelo

- El tamaño de la localidad, determinándose que el consumo de agua *per cápita* aumenta con el tamaño de la comunidad.
- Las medidas de control y medidas de agua, comprobándose que en viviendas que poseen medidor de agua el consumo es menor que las que no poseen medidor.

Asumiendo dotaciones de acuerdo a las recomendaciones de diversas fuentes:

Cuadro 5.4: Dotaciones según el número de habitantes

Población (Habitantes)	Dotación L/hab/día
Hasta 500	60
500 - 1000	60 - 80
1000 - 2000	80 - 100

Cuadro 5.5: Dotación por Región sin proyección de servicios de alcantarillado

Región	Dotación L/hab/día
Selva	70
Costa	60
Sierra	50

Cuadro 5.6: Dotación por Región con proyección de servicios de alcantarillado

Región	Dotación L/hab/día
Selva	140
Costa	120
Sierra	100

Cuadro 5.7: Dotación según el Reglamento Nacional de Edificaciones

Poblaciones	Frio (lt/hab/día)	Templado Cálido (lt/hab/día)
De 2,000 a 10000	120	150
De 10,000 a 50,000	150	200
Más de 50,000	200	250

Los principales factores que afectan el consumo de agua son: El tipo de comunidad, factores económicos y sociales, factores climáticos, ubicación geográfica, aspectos culturales

y tamaño de la comunidad. Para el presente proyecto y la aplicación de la Tesis, modelo matemático de elementos finitos para el análisis del flujo no permanente en redes de agua potable se asume una dotación de $100,00 \text{ Lt/hab/día}$ para la comunidad de *Miraflores* a partir de los Cuadros 5.4, 5.5, 5.6 y 5.7 por lo criterios anteriores y el Reglamento Nacional de Edificaciones.

5.2.4. Caudales de diseño

El caudal, se relaciona a la demanda de agua que requiera la población en un periodo de diseño determinado. Para esto es necesario determinar el Q_{md} (*Caudal medio diario*), Q_{md} (*Caudal máximo diario*), y el caudal máximo horario (Q_{mh}).

5.2.4.1. Caudal máximo diario (Q_{md})

Se define como el día de máximo consumo de una serie de registros observados durante los 365 días del año. Para calcular el consumo máximo diario, se considerará un valor de $k_1 = 1,3$ veces el consumo promedio diario anual.

$$Q_{md} = 1.3 \times Q_m \quad (5.2.7)$$

5.2.4.2. Caudal máximo horario (Q_{mh})

Se define como la hora de máximo consumo de una serie de registros observados durante las 24 horas del día. Para calcular el consumo máximo horario, se considerará un valor de $k_2 = 2$ veces el consumo promedio diario anual.

$$Q_{md} = 2 \times Q_m \quad (5.2.8)$$

Una vez configurado todos los parámetros y datos de entrada al modelo se procede a a la simulación numérica en regimen *permanente* y *no permanente* de la Red de Agua potable de la Comunidad de Miraflores.

5.2.5. Red de agua potable Miraflores

La Red de Agua Potable de la comunidad de Miraflores se encuentra en el Distrito de Vilcanchos, Víctor Fajardo - Ayacucho como se ha mencionado al inicio ce este capitulo. Esta RAP de la comunidad Miraflores esta conformado por 32 nodos, 42 tuberías y una valvula como se muestra en la Figura 5.2.

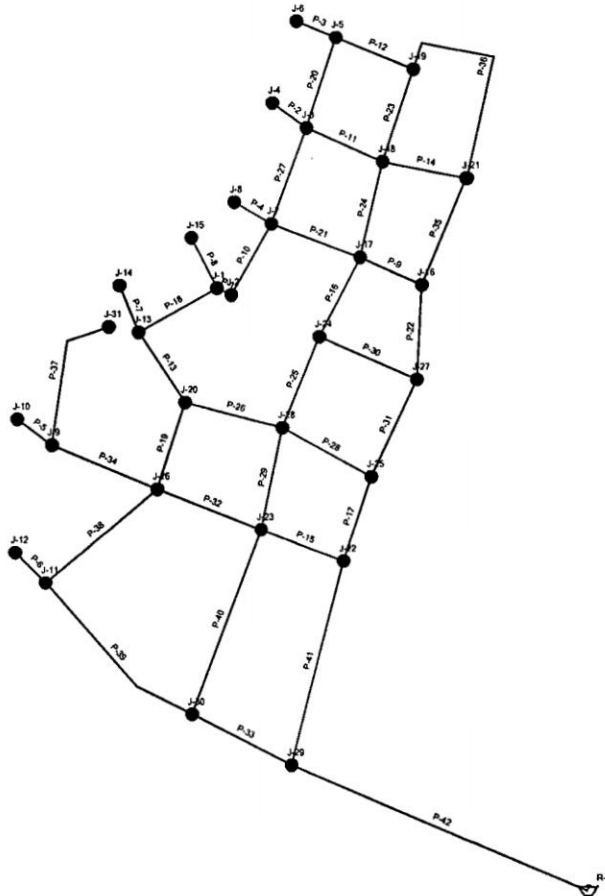


Figura 5.2: Red de agua potable de la comunidad de Miraflores

5.2.5.1. Solución en regimen permanente

La solución en regimen puramente se hará con el programa *GAMEF-V2014* y el software *WaterCAD V8i*. Los resultados se presentan a continuación gráficamente y en cuadros.

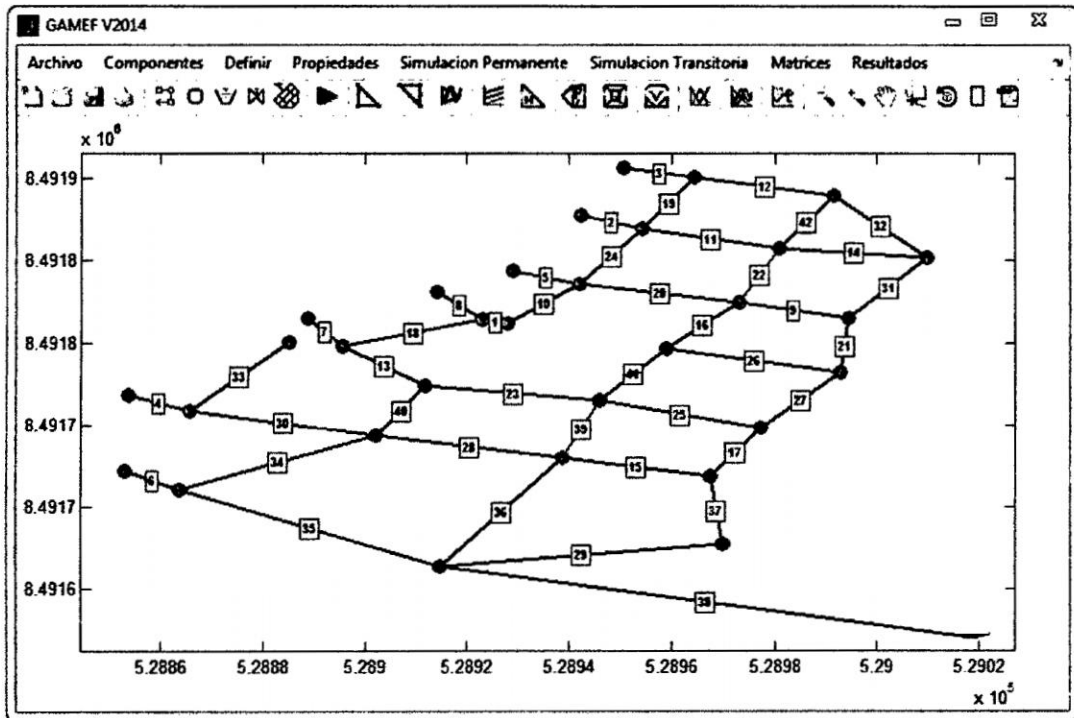


Figura 5.3: Red de Agua Potable (RAP) de la Comunidad de Miradores *GAMEF-V2014*

5.2. Configuración del modelo

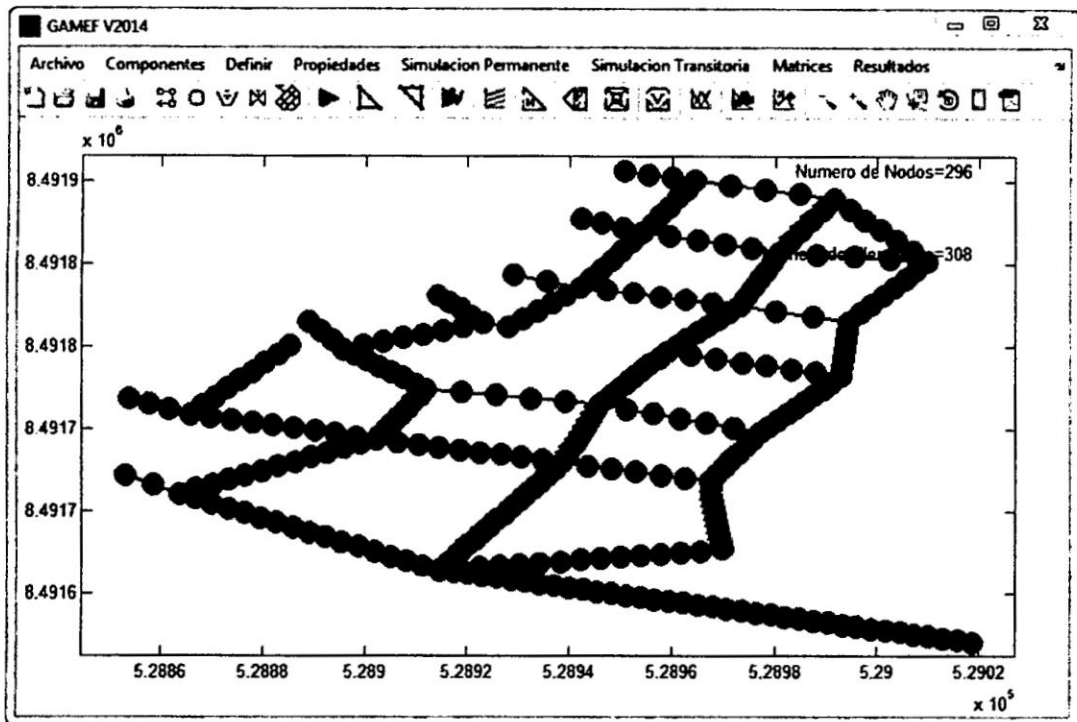


Figura 5.4: Enmallado en 296 nodos y 308 elementos de la RAP de la Comunidad de Miradores GAMEF-V2014

PROPIEDADES

METODO DE CALCULO
Darcy-Weisbach

PROPIEDADES DEL FLUIDO

Agua a 4C(38F)	Viscosidad Cinematica (m ² /s)	0.00001003700003
Agua Salada a 10C(50F) con 3.3% de salinidad	Gravedad Especifica	0.998
Mercurio a 20C(68F)	Temperatura (C)	20
Kerosene a 20C(68F)	Presion de Vapor (kPa)	-98.9487310242027
Glicerina a 20C(68F)	Modulo de Elasticidad (kPa)	2188127.97096367
Alcohol Etílico a 20C(68F)		

PROPIEDADES DE LA TUBERIA

PVC	Coefficiente de Kutlers	0.010
Hierro Dúctil	Coefficiente de Mannings	0.010
Hierro Galvanizado	Coefficiente de Hazen-Williams	150
Concreto	Espesor de la rugosidad (mm)	0.0015240000000000
Vidrio	Modulo de Youngs (kPa)	3300000
Acero	Modulo de Poissons	0.45
Acero Revestido (Nuevo, Rugoso)		
Suelo Cemento		
Aluminio		
Asbesto Cemento		

ACEPTAR SALIR

Figura 5.5: Propiedades del fluido y la tubería para la RAP de la Comunidad de Miradores GAMEF-V2014

5.2. Configuración del modelo

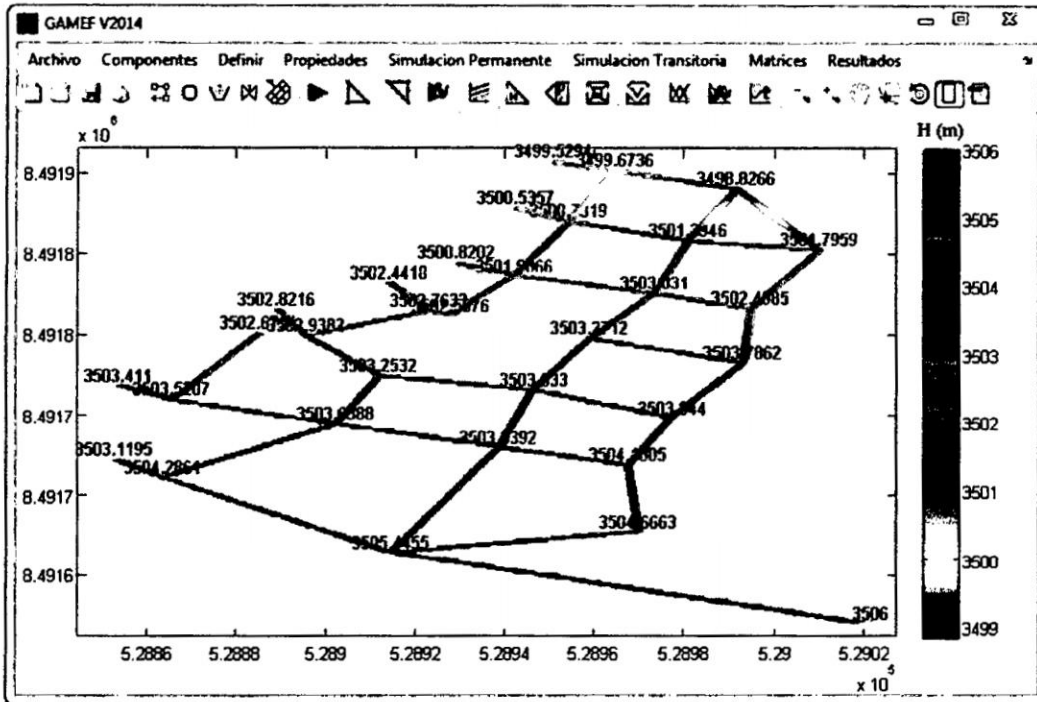


Figura 5.6: Alturas piezométricas en la RAP de la Comunidad de Miradores *GAMEF-V2014*

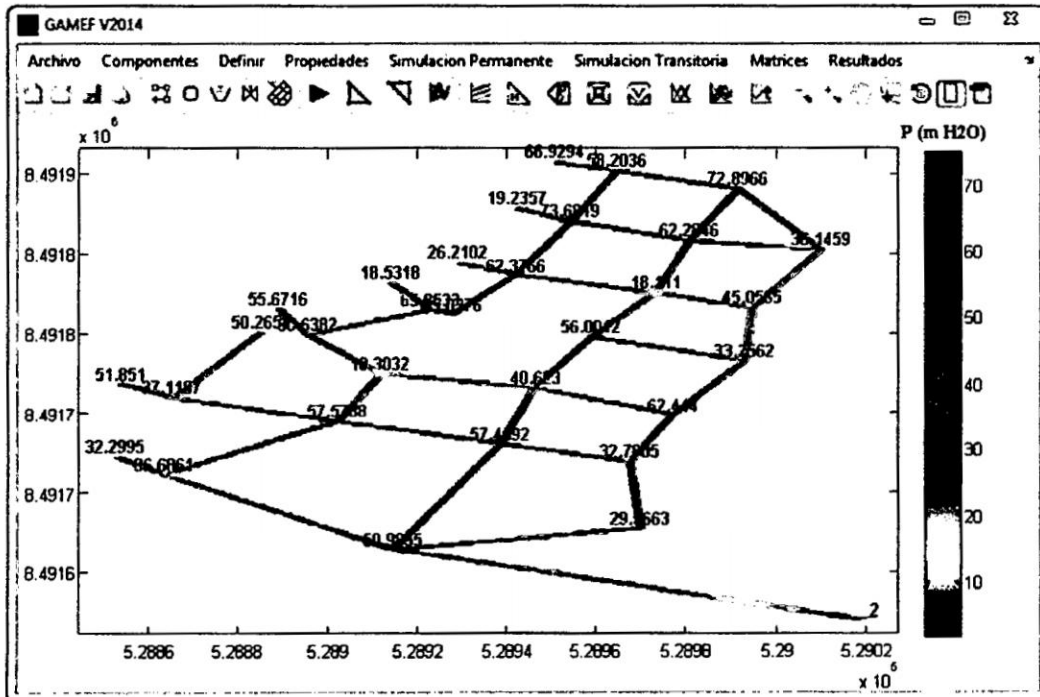
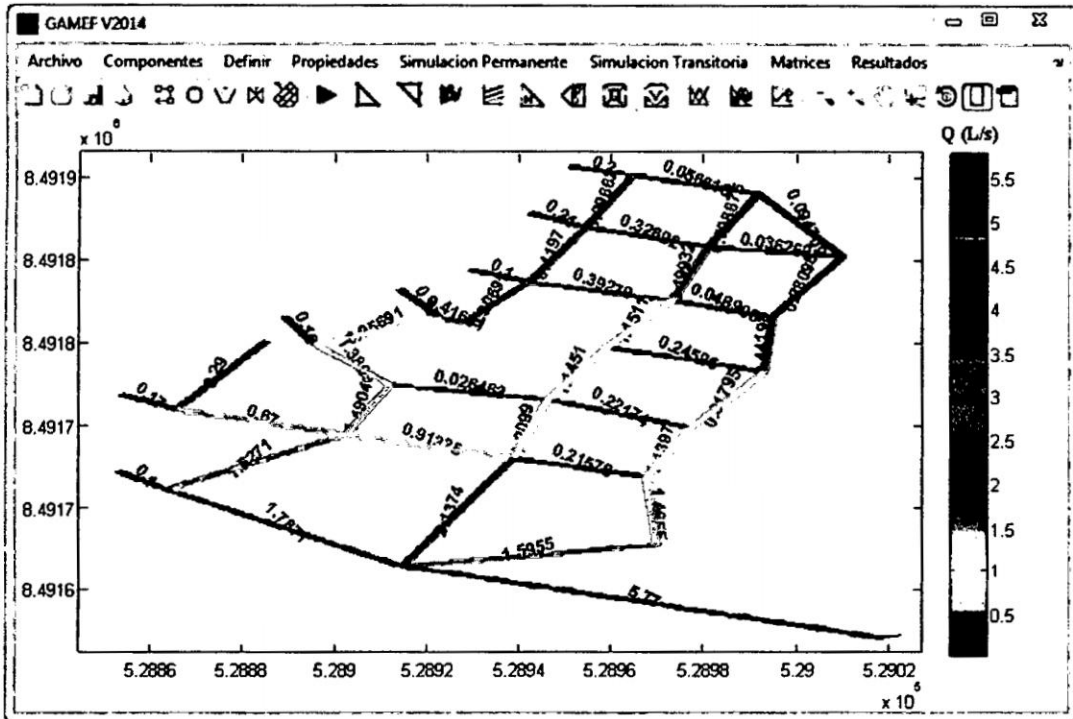


Figura 5.7: Presiones en la RAP de la Comunidad de Miradores *GAMEF-V2014*

5.2. Configuración del modelo



5.2. Configuración del modelo

Cuadro 5.8: Resultado de los nodos con *GAMEF v2014*

Nodo	Q _d (L/s)	Z (m)	H (m)	P (m H2O)
1	0.27	3436.91	3502.76	65.85
2	0.11	3427.53	3502.57	75.04
3	0.11	3427.05	3500.73	73.68
4	0.24	3481.30	3500.54	19.24
5	0.14	3441.47	3499.67	58.20
6	0.20	3432.60	3499.53	66.93
7	0.18	3439.61	3501.99	62.38
8	0.10	3474.61	3500.82	26.21
9	0.21	3466.41	3503.52	37.11
10	0.17	3451.56	3503.41	51.85
11	0.16	3467.60	3504.29	36.69
12	0.10	3470.82	3503.12	32.30
13	0.27	3472.30	3502.94	30.64
14	0.16	3447.15	3502.82	55.67
15	0.27	3483.91	3502.44	18.53
16	0.21	3457.44	3502.50	45.06
17	0.21	3484.92	3503.03	18.11
18	0.11	3439.11	3501.39	62.28
19	0.25	3425.93	3498.83	72.90
20	0.13	3484.95	3503.25	18.30
21	0.15	3465.65	3501.80	36.15
22	0.11	3471.40	3504.18	32.78
23	0.23	3446.38	3503.84	57.46
24	0.24	3447.27	3503.27	56.00
25	0.10	3441.50	3503.94	62.44
26	0.28	3446.06	3503.64	57.58
27	0.13	3470.53	3503.79	33.26
28	0.26	3462.91	3503.53	40.62
29	0.13	3475.10	3504.67	29.57
30	0.25	3454.46	3505.45	50.99
31	0.29	3452.41	3502.68	50.27
32	0.00	3504.00	3506.00	2.00

Cuadro 5.9: Resultado de los nodos con *WaterCAD V8i*

Label	Elevation (m)	Demand (L/s)	Hydraulic Grade (m)	Pressure (m H ₂ O)
1	3,436.91	0.27	3,502.77	65.73
2	3,427.53	0.11	3,502.57	74.89
3	3,427.05	0.11	3,500.69	73.49
4	3,481.30	0.24	3,500.49	19.15
5	3,441.47	0.14	3,499.57	57.99
6	3,432.60	0.20	3,499.43	66.70
7	3,439.61	0.18	3,501.98	62.24
8	3,474.61	0.10	3,500.81	26.15
9	3,466.41	0.21	3,503.53	37.04
10	3,451.56	0.17	3,503.42	51.75
11	3,467.60	0.16	3,504.28	36.61
12	3,470.82	0.10	3,503.11	32.23
13	3,472.30	0.27	3,502.95	30.58
14	3,447.15	0.16	3,502.83	55.57
15	3,483.91	0.27	3,502.45	18.50
16	3,457.44	0.21	3,502.57	45.04
17	3,484.92	0.21	3,503.04	18.08
18	3,439.11	0.11	3,501.37	62.13
19	3,425.93	0.25	3,498.37	72.30
20	3,484.95	0.13	3,503.26	18.27
21	3,465.65	0.15	3,501.93	36.20
22	3,471.40	0.11	3,504.19	32.73
23	3,446.38	0.23	3,503.85	57.35
24	3,447.27	0.24	3,503.28	55.89
25	3,441.50	0.10	3,503.96	62.33
26	3,446.06	0.28	3,503.64	57.47
27	3,470.53	0.13	3,503.80	33.21
28	3,462.91	0.26	3,503.54	40.55
29	3475.10	0.13	3504.68	29.52
30	3454.46	0.25	3505.45	50.89
31	3452.41	0.29	3502.57	50.05
Reservoir	3504.00	0.00	3506.00	2.00

Cuadro 5.10: Resultado de las tuberías con *GAMEF v2014*

Tubería	Ni	Nj	D	SK	L	Material	f	LGH (Ni)	LGH (Nj)	HG	SF	Q	V
1	1	2	1	0	5.59	PVC	0.025763	3502.76	3502.57	-0.20	-0.04	0.42	0.82
2	3	4	1	0	14.74	PVC	0.029552	3500.73	3500.54	-0.20	-0.01	0.24	0.47
3	5	6	1	0	14.88	PVC	0.030985	3499.67	3499.53	-0.14	-0.01	0.20	0.39
4	9	10	1	0	15.01	PVC	0.032350	3503.52	3503.41	-0.11	-0.01	0.17	0.34
5	7	8	0.5	0	15.00	PVC	0.031077	3501.99	3500.82	-1.17	-0.08	0.10	0.79
6	11	12	0.5	0	15.01	PVC	0.031077	3504.29	3503.12	-1.17	-0.08	0.10	0.79
7	13	14	1	0	17.71	PVC	0.032882	3502.94	3502.82	-0.12	-0.01	0.16	0.32
8	1	15	1	0	19.67	PVC	0.028677	3502.76	3502.44	-0.32	-0.02	0.27	0.53
9	16	17	0.5	0	23.52	PVC	0.037688	3502.50	3503.03	0.53	0.02	-0.05	-0.39
10	2	7	1	0	28.41	PVC	0.027769	3502.57	3501.99	-0.58	-0.02	0.31	0.61
11	18	3	1	0	29.01	PVC	0.027336	3501.39	3500.73	-0.66	-0.02	0.33	0.65
12	19	5	0.5	0	29.14	PVC	0.036245	3498.83	3499.67	0.85	0.03	-0.06	-0.45
13	20	13	2	0	29.40	PVC	0.022798	3503.25	3502.94	-0.32	-0.01	1.39	0.68
14	21	18	0.5	0	29.60	PVC	0.041186	3501.80	3501.39	-0.40	-0.01	0.04	0.29
15	22	23	1	0	30.87	PVC	0.030375	3504.18	3503.84	-0.34	-0.01	0.22	0.43
16	24	17	2	0	31.18	PVC	0.023799	3503.27	3503.03	-0.24	-0.01	1.15	0.57
17	22	25	2	0	31.25	PVC	0.023856	3504.18	3503.94	-0.24	-0.01	1.14	0.56
18	13	1	2	0	31.44	PVC	0.024860	3502.94	3502.76	-0.17	-0.01	0.96	0.47
19	3	5	1	0	33.00	PVC	0.026075	3500.73	3499.67	-1.06	-0.03	0.40	0.78
20	17	7	1	0	33.12	PVC	0.026137	3503.03	3501.99	-1.04	-0.03	0.39	0.78
21	27	16	1	0	33.13	PVC	0.025409	3503.79	3502.50	-1.29	-0.04	0.44	0.87

Cuadro 5.11: Resultado de las tuberías con *GAMEF v2014*

Tubería	Ni	Nj	D	SK	L	Material	f	LGH (Ni)	LGH (Nj)	HG	SF	Q	V
22	17	18	1	0	34.01	PVC	0.024684	3503.03	3501.39	-1.64	-0.05	0.50	0.99
23	28	20	0.5	0	35.25	PVC	0.045309	3503.53	3503.25	-0.28	-0.01	0.03	0.21
24	7	3	1	0	35.42	PVC	0.025723	3501.99	3500.73	-1.25	-0.04	0.42	0.83
25	25	28	1	0	35.45	PVC	0.030160	3503.94	3503.53	-0.41	-0.01	0.22	0.44
26	27	24	1	0	37.08	PVC	0.029364	3503.79	3503.27	-0.51	-0.01	0.25	0.49
27	25	27	2	0	37.39	PVC	0.025818	3503.94	3503.79	-0.16	0.00	0.82	0.40
28	23	26	2	0	39.10	PVC	0.025139	3503.84	3503.64	-0.20	-0.01	0.91	0.45
29	29	30	2	0	56.73	PVC	0.022085	3504.67	3505.45	0.78	0.01	-1.60	-0.79
30	26	9	2	0	39.72	PVC	0.027112	3503.64	3503.52	-0.12	0.00	0.67	0.33
31	16	21	1	0	40.10	PVC	0.028388	3502.50	3501.80	-0.70	-0.02	0.28	0.55
32	21	19	0.5	0	41.98	PVC	0.031521	3501.80	3498.83	-2.97	-0.07	0.09	0.75
33	9	31	1	0	45.65	PVC	0.028165	3503.52	3502.68	-0.85	-0.02	0.29	0.57
34	11	26	2	0	50.93	PVC	0.022305	3504.29	3503.64	-0.65	-0.01	1.53	0.75
35	30	11	2	0	69.01	PVC	0.021533	3505.45	3504.29	-1.16	-0.02	1.79	0.88
36	30	23	2	0	69.51	PVC	0.020702	3505.45	3503.84	-1.61	-0.02	2.14	1.05
37	29	22	2	0	41.12	PVC	0.022514	3504.67	3504.18	-0.49	-0.01	1.47	0.72
38	32	30	4	0	112.73	PVC	0.019351	3506.00	3505.45	-0.55	0.00	5.77	0.71
39	23	28	2	0	36.39	PVC	0.023525	3503.84	3503.53	-0.31	-0.01	1.21	0.60
40	26	20	2	0	31.68	PVC	0.022428	3503.64	3503.25	-0.39	-0.01	1.49	0.74
41	28	24	2	10	34.29	PVC	0.023829	3503.53	3503.27	-0.26	-0.01	1.15	0.56
42	18	19	0.5	0	33.80	PVC	0.031185	3501.39	3498.83	-2.57	-0.08	0.10	0.78

Cuadro 5.12: Resultado de las tuberías con *WaterCAD V8i*

Label	Length (m)	Start Node	Stop Node	Diameter (in)	Material	Hazen-Williams C	Flow (L/s)	Velocity (m/s)	Headloss Gradient (m/m)
1	6	1	2	1	PVC	150	0.42	0.83	0.035
2	15	3	4	1	PVC	150	0.24	0.47	0.013
3	15	5	6	1	PVC	150	0.2	0.39	0.01
4	15	9	10	1	PVC	150	0.17	0.34	0.007
5	15	7	8	0.5	PVC	150	0.1	0.79	0.078
6	15	11	12	0.5	PVC	150	0.1	0.79	0.078
7	18	13	14	1	PVC	150	0.16	0.32	0.007
8	20	1	15	1	PVC	150	0.27	0.53	0.016
9	24	16	17	0.5	PVC	150	-0.05	0.36	0.02
10	28	2	7	1	PVC	150	0.31	0.61	0.021
11	29	18	3	1	PVC	150	0.33	0.66	0.023
12	29	19	5	0.5	PVC	150	-0.07	0.54	0.041
13	29	20	13	2	PVC	150	1.39	0.69	0.011
14	30	21	18	0.5	PVC	150	0.04	0.35	0.019
15	31	22	23	1	PVC	150	0.22	0.43	0.011
16	31	24	17	2	PVC	150	1.16	0.57	0.008
17	31	22	25	2	PVC	150	1.14	0.56	0.007
18	31	13	1	2	PVC	150	0.96	0.47	0.006
19	33	3	5	1	PVC	150	0.41	0.81	0.034
20	33	17	7	1	PVC	150	0.4	0.78	0.032
21	33	27	16	1	PVC	150	0.43	0.85	0.037

Cuadro 5.13: Resultado de las tuberías con *WaterCAD V8i*

Label	Length (m)	Start Node	Stop Node	Diameter (in)	Material	Hazen-Williams C	Flow (L/s)	Velocity (m/s)	Headloss Gradient (m/m)
22	34	17	18	1	PVC	150	0.51	1	0.049
23	35	28	20	0.5	PVC	150	0.03	0.25	0.008
24	35	7	3	1	PVC	150	0.43	0.84	0.036
25	35	25	28	1	PVC	150	0.22	0.44	0.012
26	37	27	24	1	PVC	150	0.25	0.49	0.014
27	37	25	27	2	PVC	150	0.81	0.4	0.004
28	39	23	26	2	PVC	150	0.92	0.45	0.005
29	57	29	30	2	PVC	150	-1.59	0.79	0.014
30	40	26	9	2	PVC	150	0.67	0.33	0.003
31	40	16	21	1	PVC	150	0.27	0.53	0.016
32	78	21	19	0.5	PVC	150	0.07	0.58	0.046
33	52	9	31	1	PVC	150	0.29	0.57	0.019
34	51	11	26	2	PVC	150	1.52	0.75	0.013
35	70	30	11	2	PVC	150	1.78	0.88	0.017
36	70	30	23	2	PVC	150	2.14	1.06	0.023
37	41	29	22	2	PVC	150	1.46	0.72	0.012
38	113	R-1	30	4	PVC	150	5.77	0.71	0.005
39	36	23	28	2	PVC	150	1.21	0.6	0.008
40	32	26	20	2	PVC	150	1.49	0.74	0.012
41	34	28	24	2	PVC	150	1.15	0.57	0.008
42	34	18	19	0.5	PVC	150	0.11	0.85	0.089

5.2.5.2. Solución en regimen no permanente

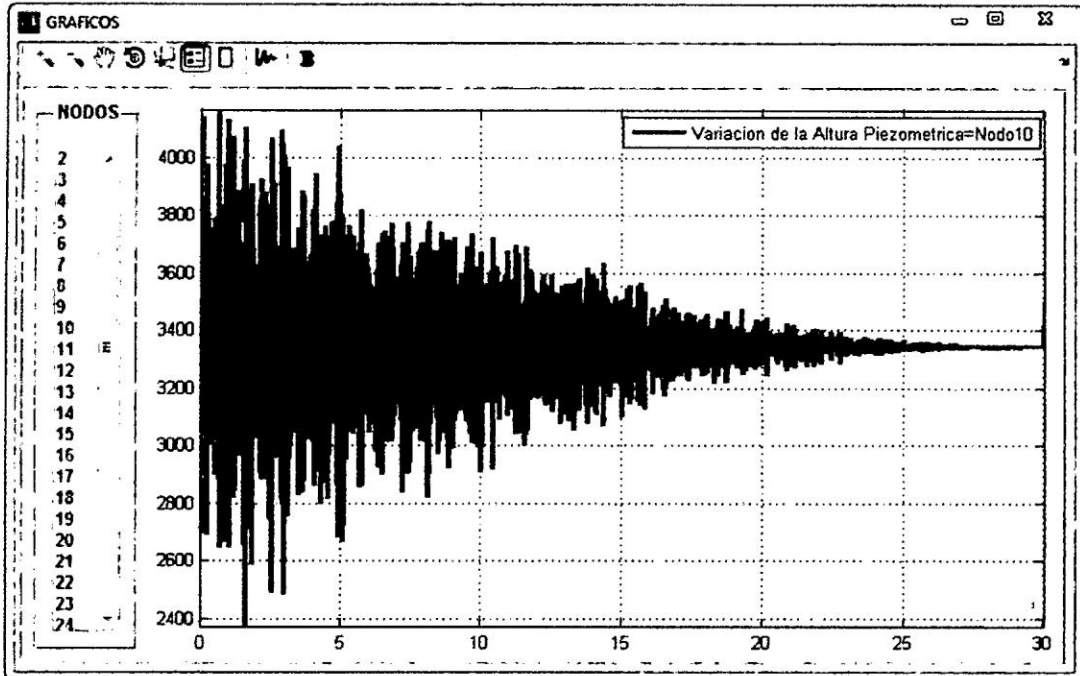


Figura 5.10: Evolución temporal de la altura piezométrica en el *nodo 10 GAMEF-V2014*

5.2. Configuración del modelo

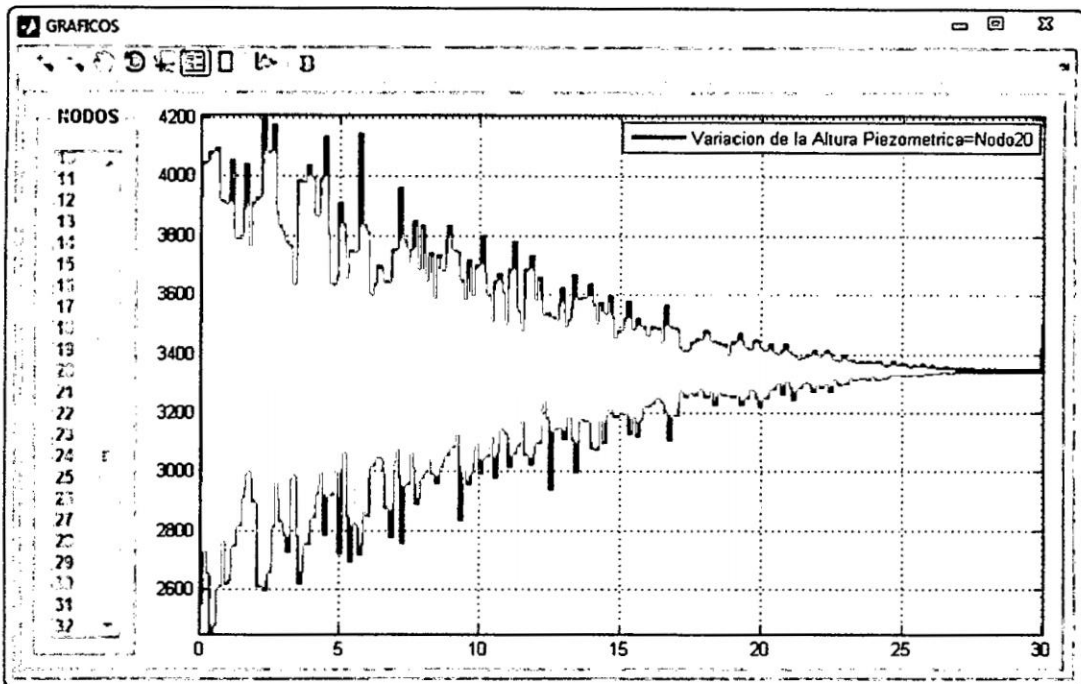


Figura 5.11: Evolución temporal de la altura piezométrica en el *nodo 20 GAMEF-V2014*

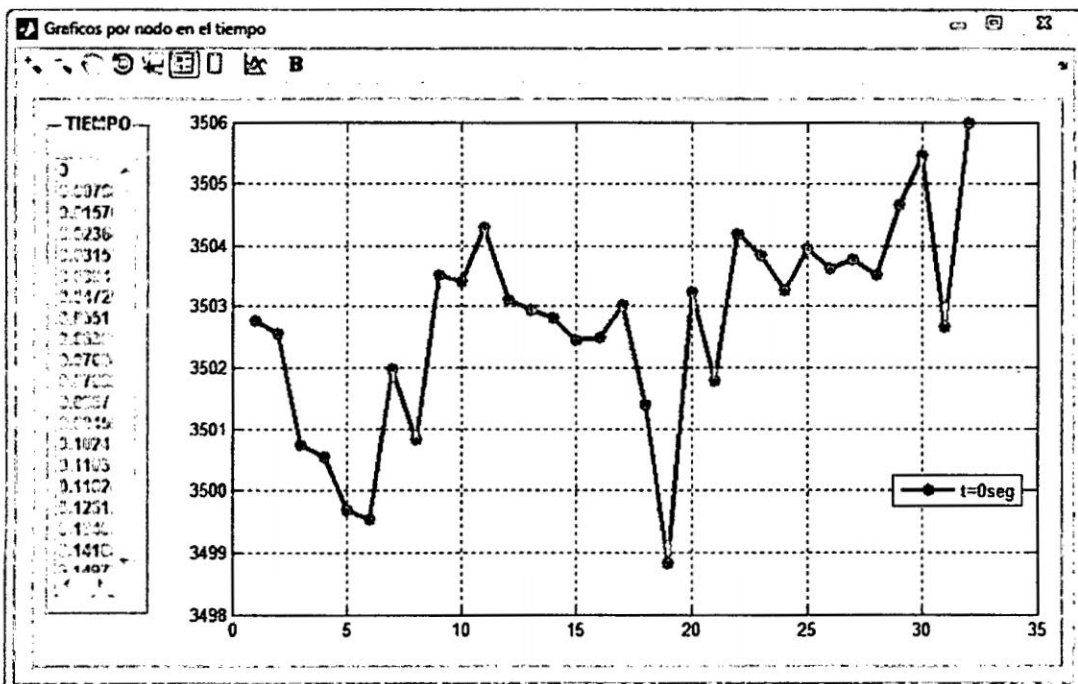


Figura 5.12: Variación nodal de la altura piezométrica en $t = 0 \text{ seg}$ *GAMEF-V2014*

5.2. Configuración del modelo

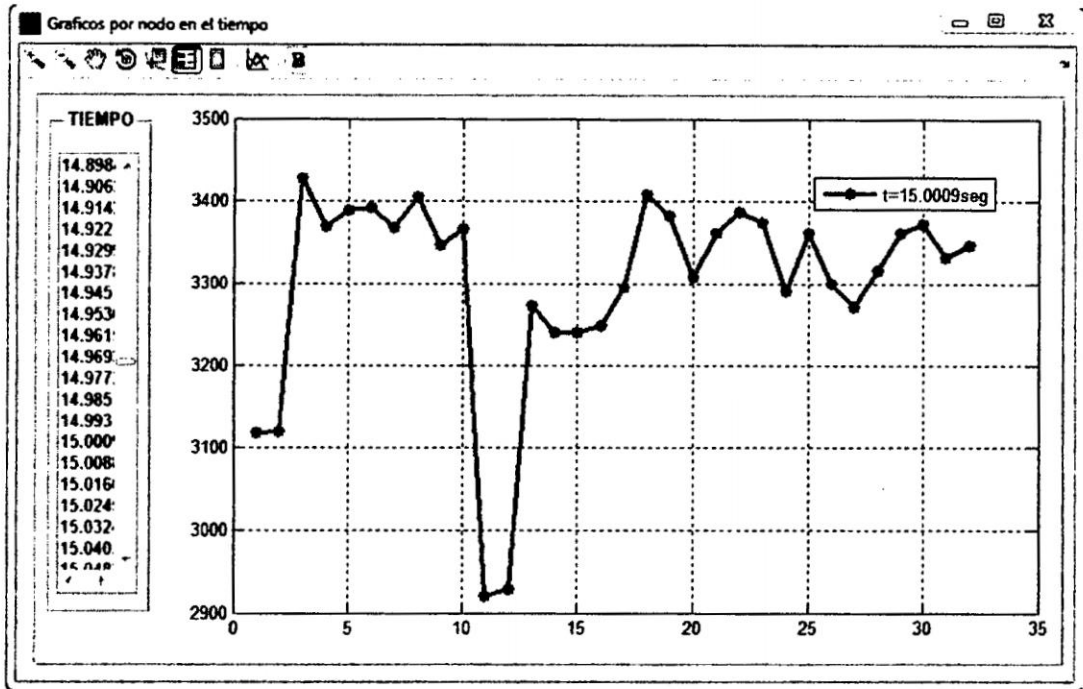


Figura 5.13: Variación nodal de la altura piezométrica en $t = 15\text{seg}$ GAMEF-V2014

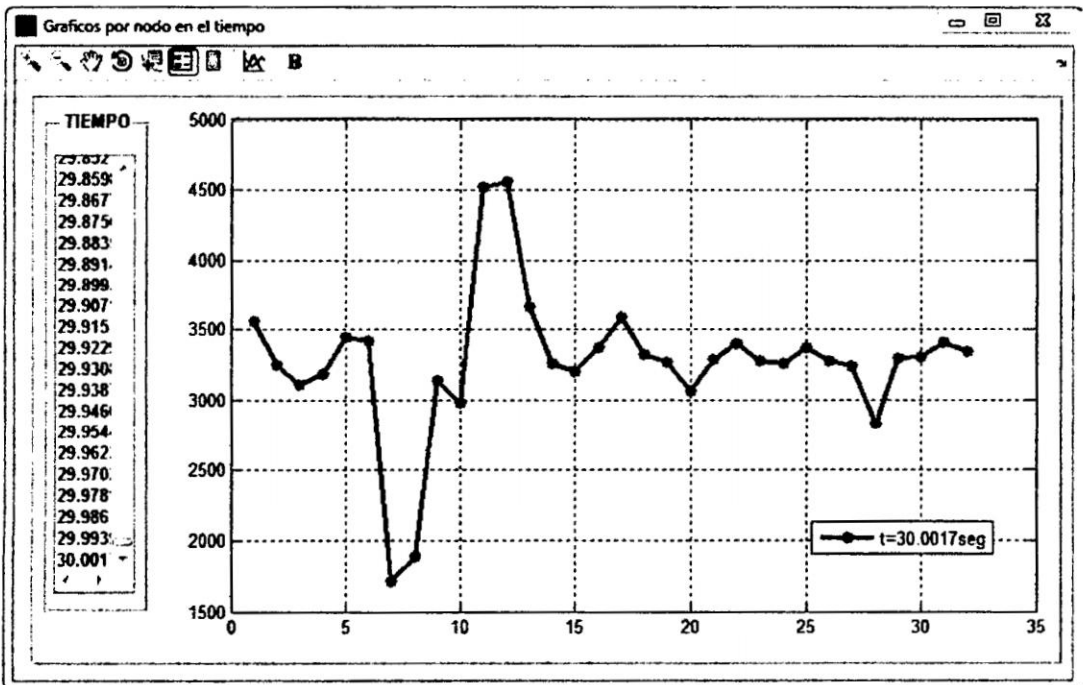


Figura 5.14: Variación nodal de la altura piezométrica en $t = 30\text{seg}$ GAMEF-V2014

Cuadro 5.14: Alturas piezométricas y presiones extremas en los nodos con *GAMEF v2014*

Nodo	Elevacion (m)	H Maximo (m)	H Minimo (m)	Presion Maximo (m H2O)	Presion Minimo (m H2O)
1	3436.91	3518.47	3465.29	81.56	28.38
2	3427.53	3541.30	3489.55	113.77	62.02
3	3427.05	3510.46	3473.16	83.41	46.11
4	3481.30	3544.12	3482.56	62.82	1.26
5	3441.47	3545.87	3472.54	104.40	31.07
6	3432.60	3530.69	3467.33	98.09	34.73
7	3439.61	3538.63	3466.97	99.02	27.36
8	3474.61	3528.48	3474.43	53.87	-0.18
9	3466.41	3523.17	3485.85	56.76	19.44
10	3451.56	3549.05	3475.22	97.49	23.66
11	3467.60	3517.70	3488.25	50.10	20.65
12	3470.82	3514.70	3474.89	43.88	4.07
13	3472.30	3510.71	3470.24	38.41	-2.06
14	3447.15	3521.37	3484.72	74.22	37.57
15	3483.91	3532.40	3484.75	48.49	0.84
16	3457.44	3554.30	3468.88	96.86	11.44
17	3484.92	3536.83	3479.06	51.91	-5.86
18	3439.11	3507.72	3472.06	68.61	32.95
19	3425.93	3523.46	3464.19	97.53	38.26
20	3484.95	3536.04	3494.35	51.09	9.40
21	3465.65	3522.84	3465.68	57.19	0.03
22	3471.40	3526.72	3472.84	55.32	1.44
23	3446.38	3525.56	3465.77	79.18	19.39
24	3447.27	3546.83	3467.95	99.56	20.68
25	3441.50	3544.59	3469.84	103.09	28.34
26	3446.06	3556.71	3471.20	110.65	25.14
27	3470.53	3526.34	3486.98	55.81	16.45
28	3462.91	3541.83	3466.39	78.92	3.48
29	3475.10	3527.16	3480.75	52.06	5.65
30	3454.46	3523.13	3486.41	68.67	31.95
31	3452.41	3517.04	3460.87	64.63	8.46
Rcscervorio	3504.00	3506.00	3506.00	2.00	2.00

5.2. Configuración del modelo

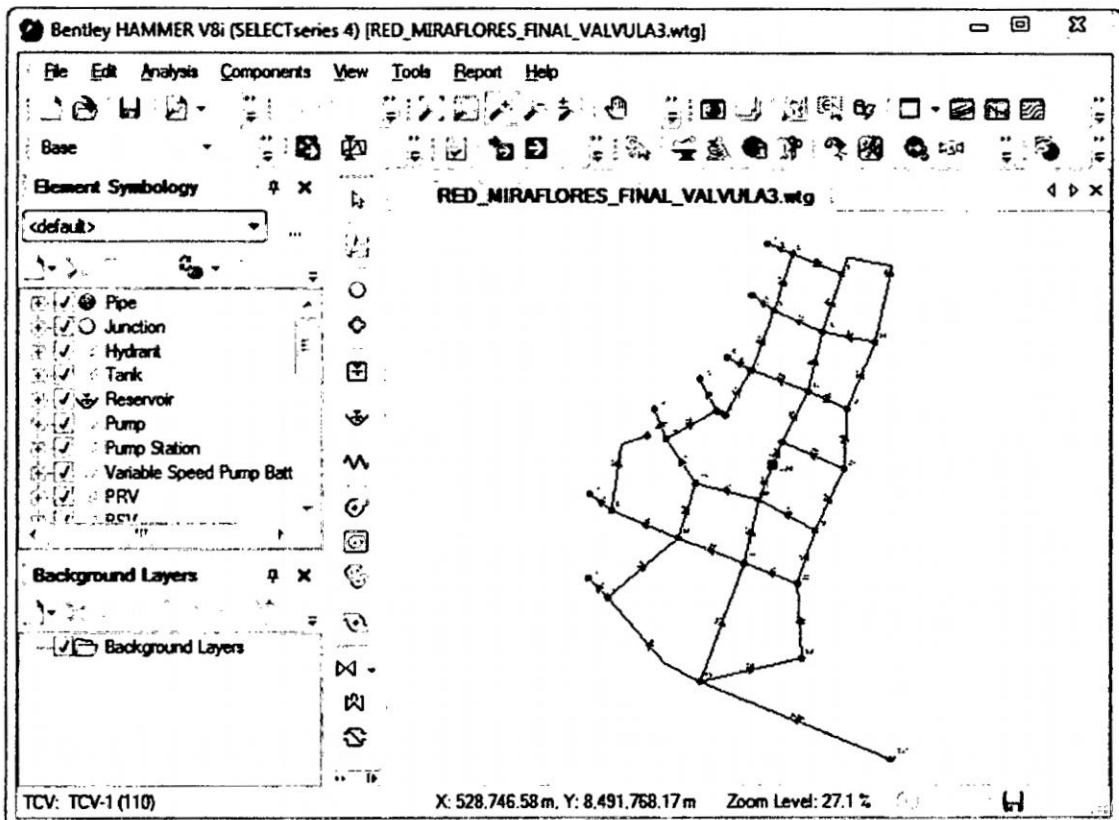


Figura 5.15: Solución del problema con el programa comercial *HAMMER V8i*

Cuadro 5.15: Alturas piezométricas y presiones extremas en los nodos con *HAMMER V8i*

Label	Elevation (m)	Head Maximum (m)	Head Minimum (m)	Pressure Maximum (m H2O)	Pressure Minimum (m H2O)
1	3436.91	3520.59	3466.69	83.68	29.78
2	3427.53	3537.14	3487.32	109.61	59.79
3	3427.05	3512.73	3468.94	85.68	41.89
4	3481.30	3541.34	3479.55	60.04	-1.75
5	3441.47	3543.14	3468.49	101.67	27.02
6	3432.60	3526.55	3466.16	93.95	33.56
7	3439.61	3537.00	3464.16	97.39	24.55
8	3474.61	3526.46	3470.72	51.85	-3.89
9	3466.41	3524.56	3481.26	58.15	14.85
10	3451.56	3547.10	3471.54	95.54	19.98
11	3467.60	3518.34	3488.98	50.74	21.38
12	3470.82	3515.99	3477.56	45.17	6.74
13	3472.30	3514.06	3474.10	41.76	1.80
14	3447.15	3525.31	3489.51	78.16	42.36
15	3483.91	3531.40	3482.13	47.49	-1.78
16	3457.44	3550.09	3465.64	92.65	8.20
17	3484.92	3536.48	3483.24	51.56	-1.68
18	3439.11	3512.17	3476.08	73.06	36.97
19	3425.93	3521.00	3462.45	95.07	36.52
20	3484.95	3540.77	3491.22	55.82	6.27
21	3465.65	3526.30	3468.42	60.65	2.77
22	3471.40	3525.60	3477.13	54.20	5.73
23	3446.38	3522.98	3466.41	76.60	20.03
24	3447.27	3551.00	3466.39	103.73	19.12
25	3441.50	3548.65	3465.87	107.15	24.37
26	3446.06	3553.91	3472.06	107.85	26.00
27	3470.53	3523.35	3488.20	52.82	17.67
28	3462.91	3541.33	3464.87	78.42	1.96
29	3475.10	3529.05	3476.43	53.95	1.33
30	3454.46	3527.30	3484.25	72.84	29.79
31	3452.41	3517.39	3464.80	64.98	12.39
Reservoir	3504.00	3506.00	3506.00	2.00	2.00

Capítulo 6

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con el desarrollo de este trabajo se logro el desarrollo de una herramienta computacional para el cálculo del golpe de ariete en sistemas a presión, a través de la implementación del software GAMEF. Este aplicativo computacional representa con gran exactitud el fenómeno real, ya que las ecuaciones diferenciales parciales no lineales se transforman en algebraicas por el Método de Elementos Finitos. Estas ecuaciones son las que usando una rutina computacional desarrollada en MATLAB muestra los resultados de las variables que determinan en el fenómeno de golpe de ariete debido al cierre de válvulas. El cálculo del fenómeno se efectúa en un entorno gráfico, de fácil entendimiento y mediante la lectura de su manual de usuario se podrá familiarizar con todas las funciones del programa. Aquí presentaremos algunas soluciones específicas y generales para ver las diferencias con respecto a los otros métodos.

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

Como se ha visto en el Capítulo 4, el modelamiento del problema del flujo no permanente en redes de agua potable es lo mismo que el modelamiento del flujo no permanente en muchos sistemas a presión como centrales hidroeléctricas, centrales nucleares, etc. Para este efecto utilizamos el *Método Elementos Finitos* (MEF) y el *Método de las Características*

(MOC) para el modelamiento; esto corresponden al uso de los programas *GAMEF v2014* y *HAMMER V8i* respectivamente, el primero elaborado especialmente para los fines de esta investigación.

Como primera controversia para la validación del modelamiento del flujo no permanente en sistemas de agua potable con el Método de Elementos Finitos usamos el modelamiento de flujo no permanente en sistemas a presión con el Método de las características que el programa comercial HAMMER incluye en su formulación ; considerando válida esta modelación se toma un ejemplo clásico de la literatura y modelamos con el programa que hemos elaborado (*GAMEF v2014*) que utiliza el modelamiento con el Método de Elementos Finitos.

6.1.1. Sobre el modelamiento de la red típica

Según como se ha presentado los resultados en la Sección 4.4.3, los modelos tiene presentan convergencia y similaridad en sus reporte; siendo esta un primer punto de validación del modelo con MEF. Los reportes de comparación en este caso son:

Con las ecuaciones matemáticas es posible calcular la intensidad del *golpe de ariete*. Este cálculo permite dimensionar los elementos destinados para amortiguar el efecto del golpe de ariete en las conducciones hidráulicas.

6.1.2. Otras soluciones

También se probó la versatilidad del modelo, en este caso resolviendo un sistema de agua potable con 2 reservorios. El programa *GAMEF v2014*, automáticamente configura y establece las condiciones de borde para ambos reservorios internamente, de igual forma asigna las condiciones de borde debido al cierre de valvula en la tubería 13.

Como se puede observar la variación de las ondas de presión en la Figura 6.16, debido al cierre de valvula en la tubería 13, este fenómeno llamado golpe de apriete puede dañar

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

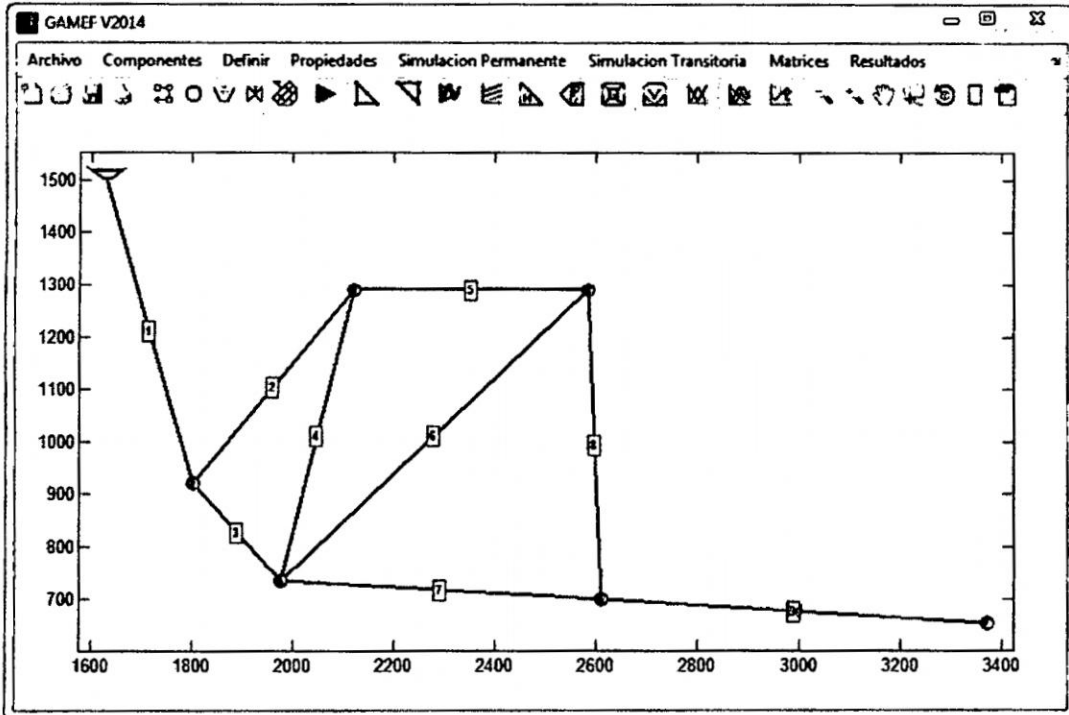


Figura 6.1: Red típica de agua potable

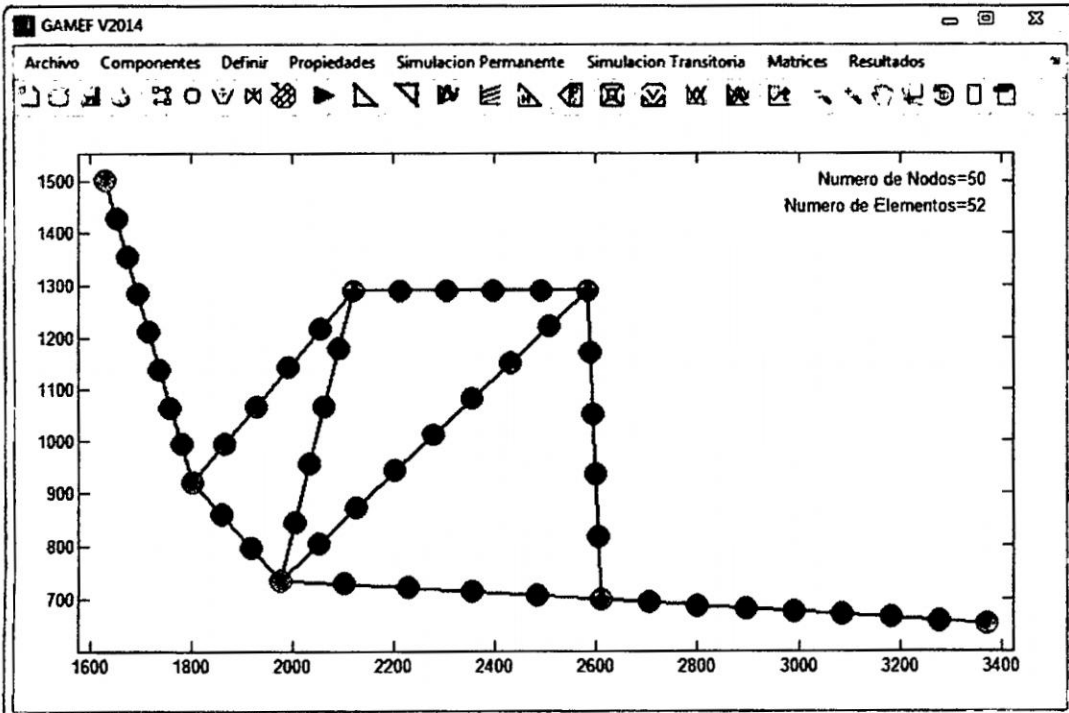


Figura 6.2: Generación de malla de la red típica en 50 nodos y 52 elementos

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

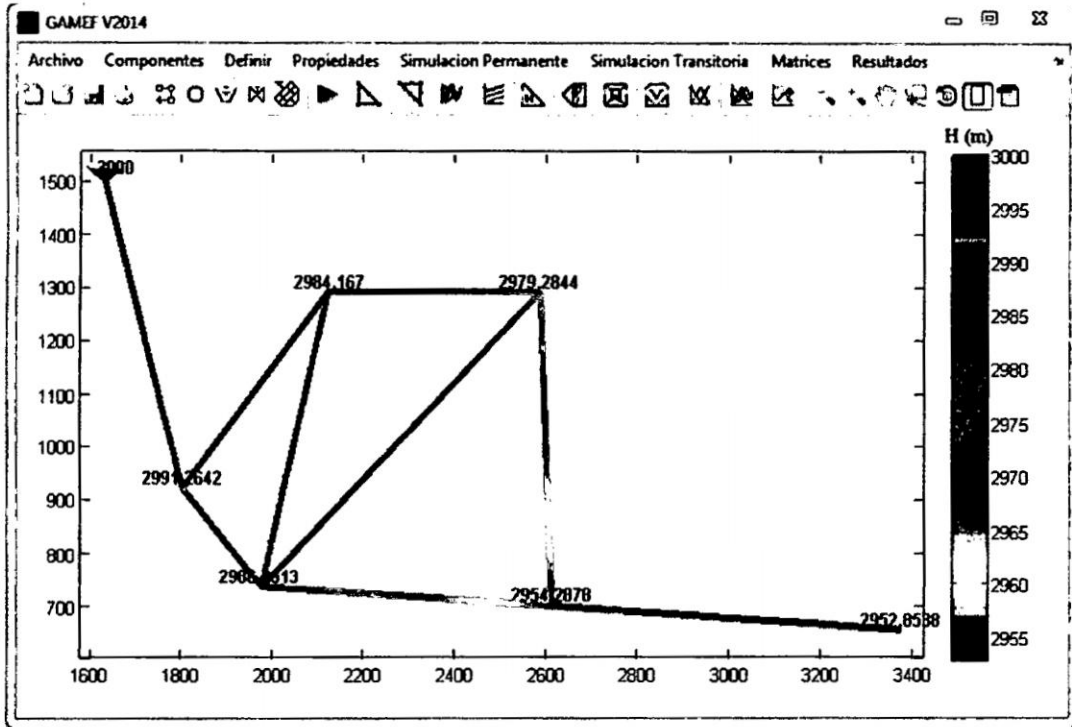


Figura 6.3: Alturas piezometricas en la red típica

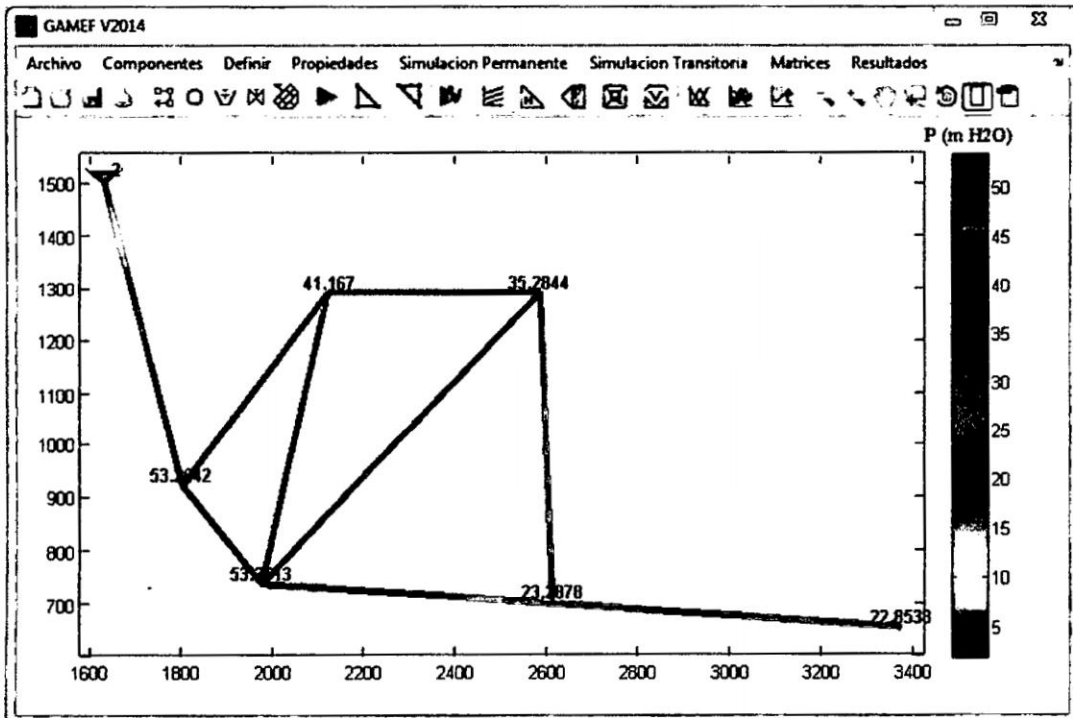


Figura 6.4: Altura de presiones en la red típica

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

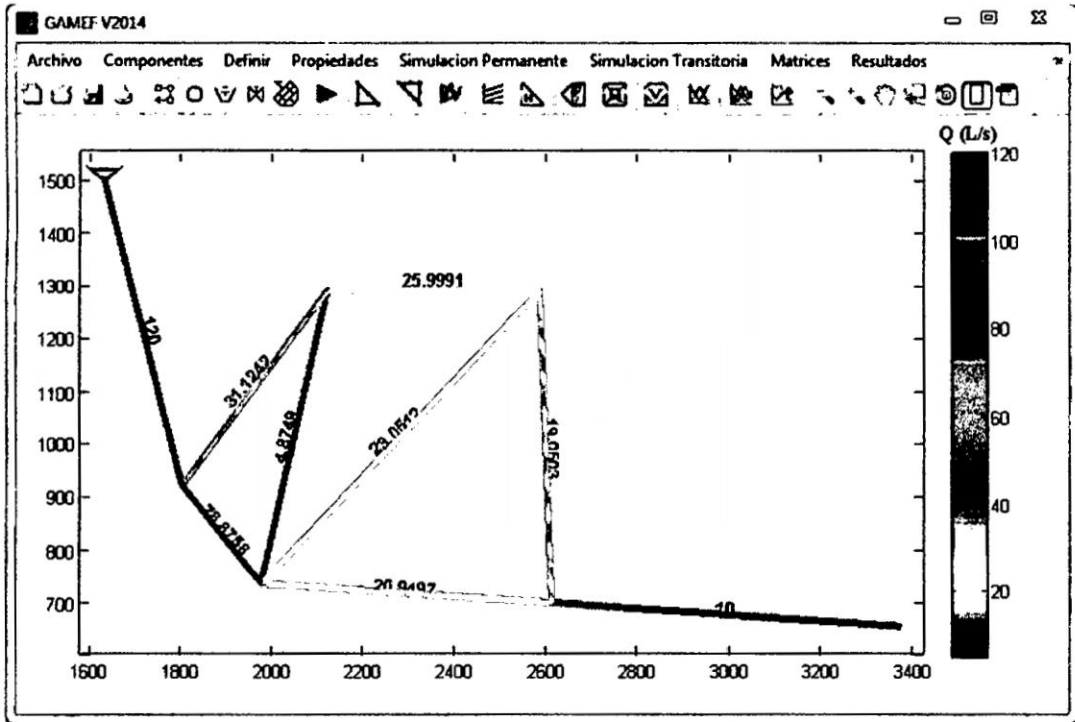


Figura 6.5: Caudales en la red típica

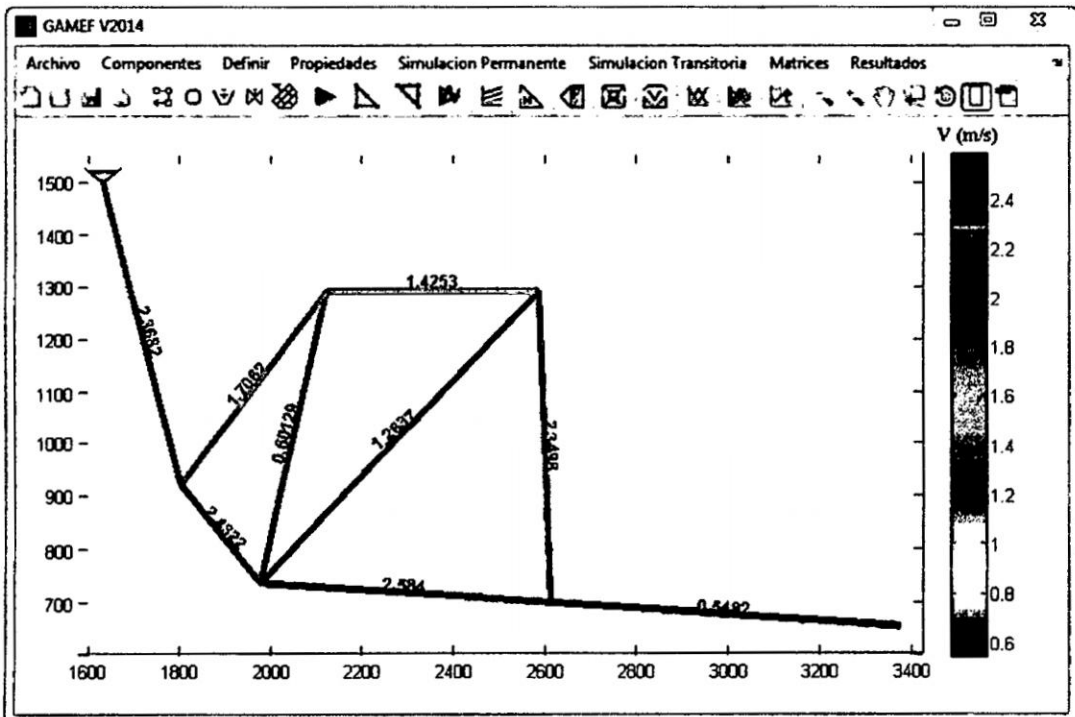


Figura 6.6: Velocidades en la red típica

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

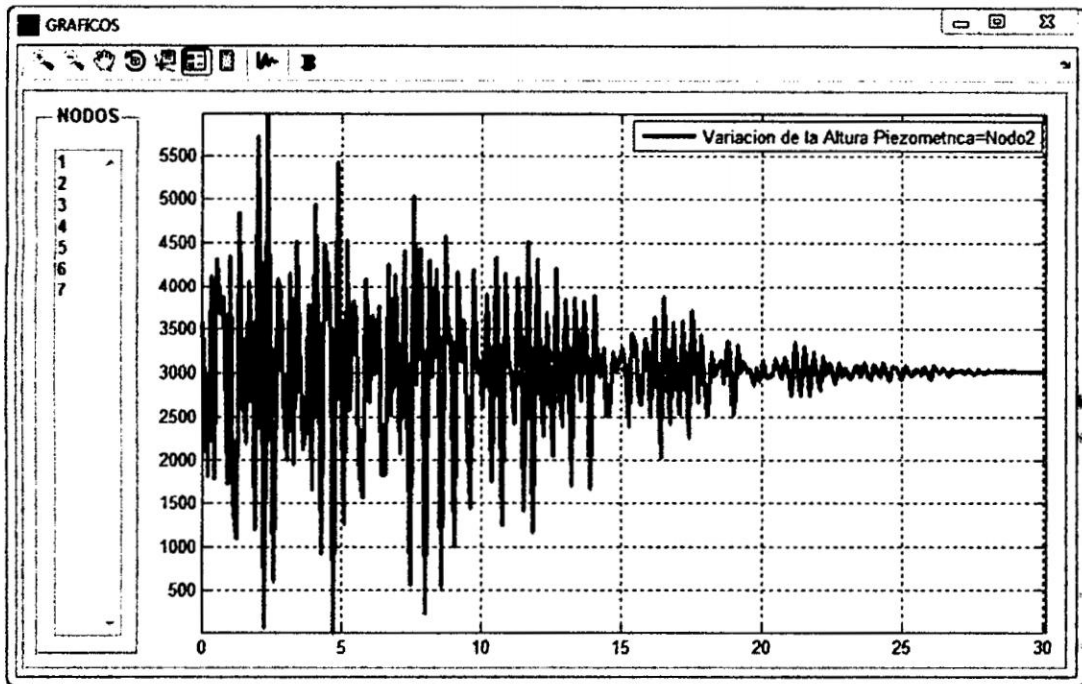


Figura 6.7: Variación de las alturas piezométricas con respecto al tiempo del nodo 2 de la red típica

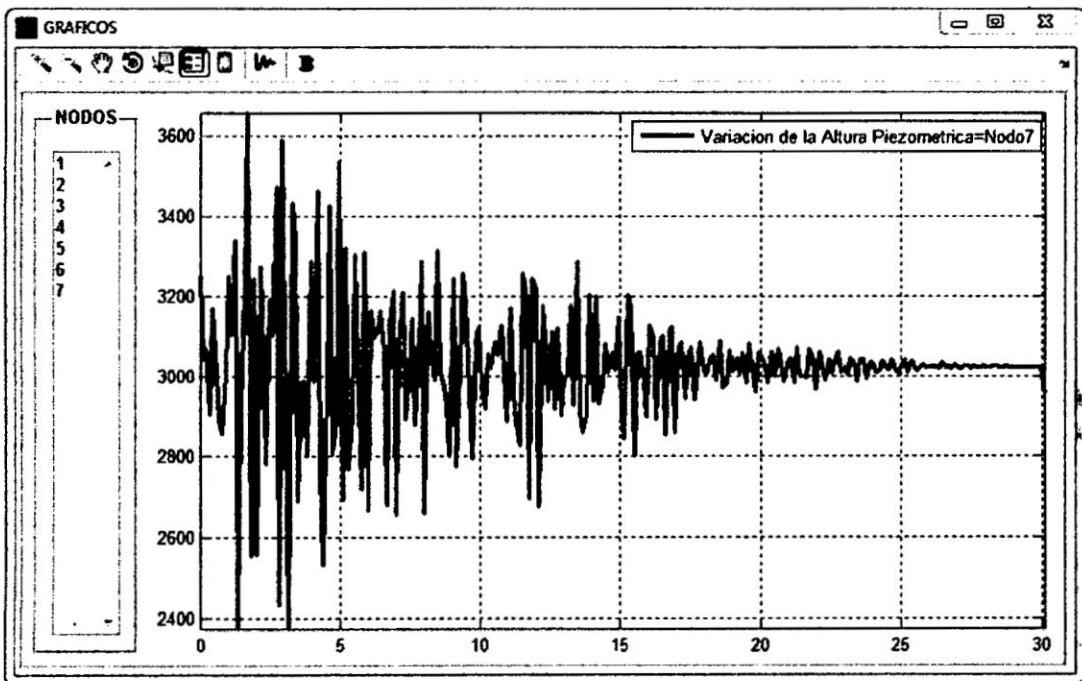


Figura 6.8: Variación de las alturas piezométricas con respecto al tiempo del nodo 7 de la red típica

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

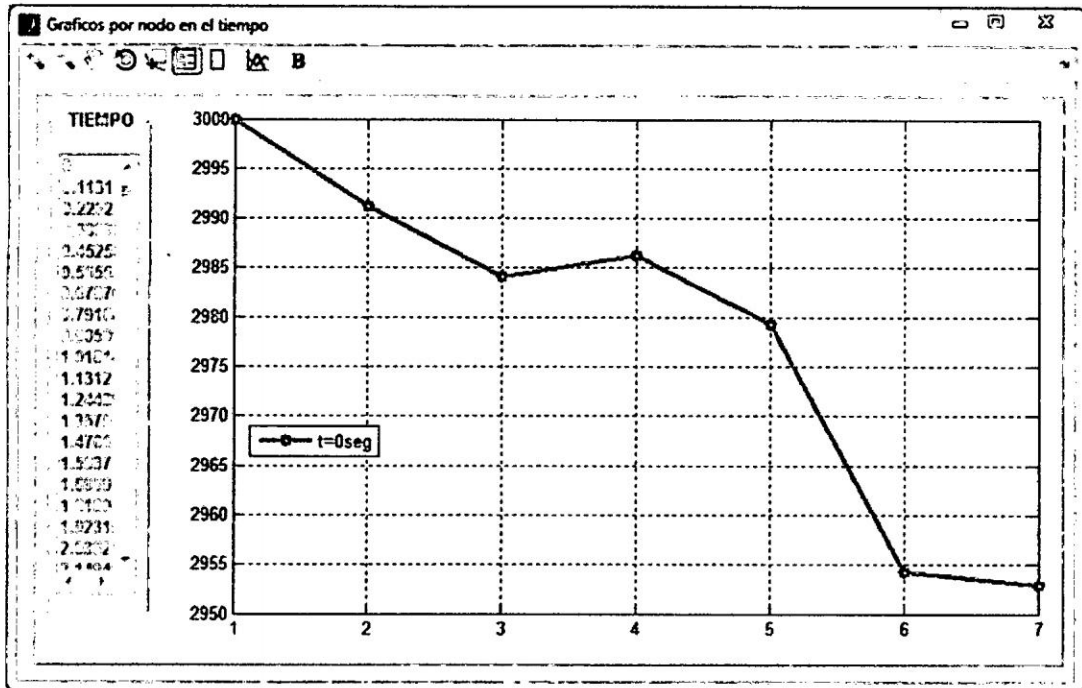


Figura 6.9: Variación de la altura piezométrica de todos los nodos en $t = 0\text{seg}$ de la red típica

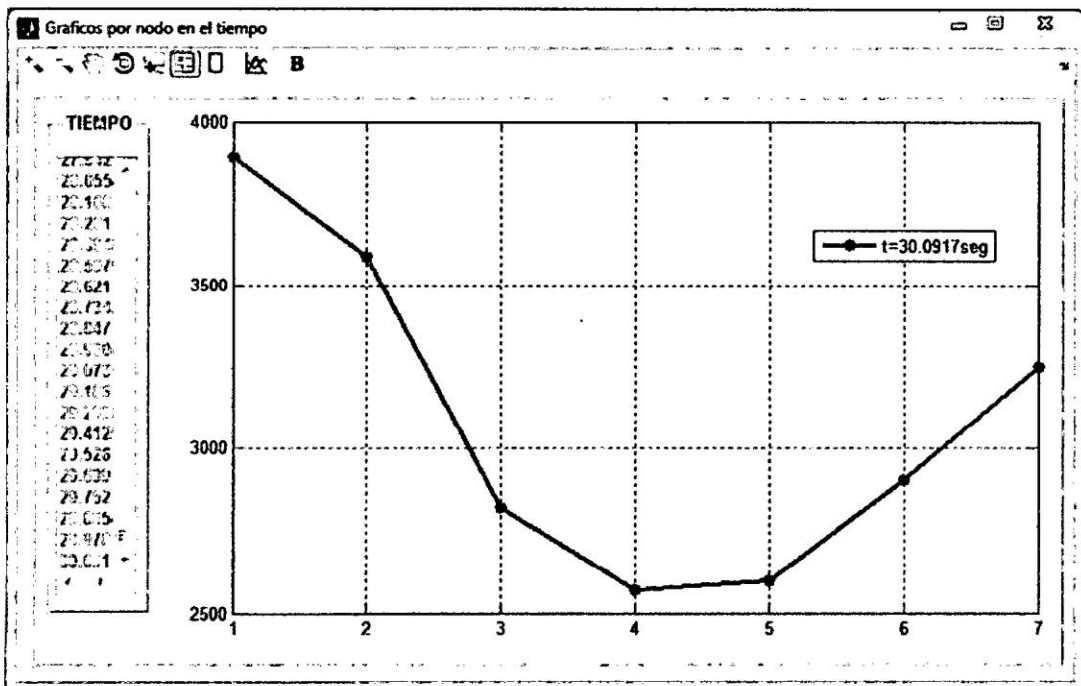


Figura 6.10: Variación de la altura piezométrica de todos los nodos en $t = 30,0917\text{seg}$ de la red típica

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

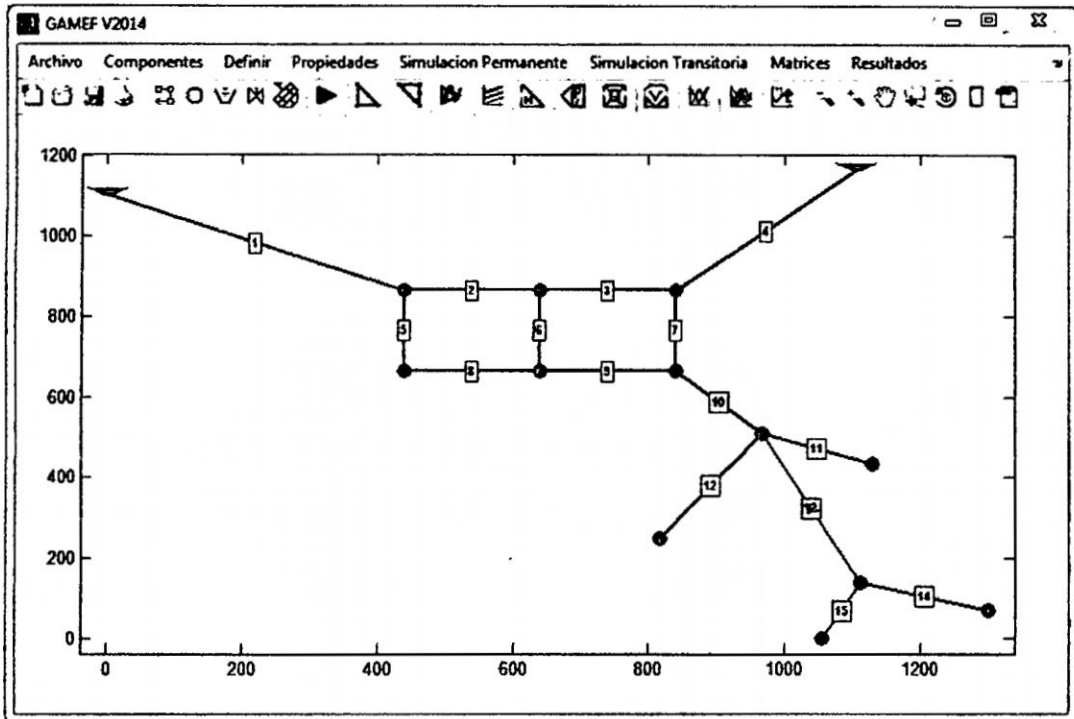


Figura 6.11: Red de agua potable con 2 reservorios

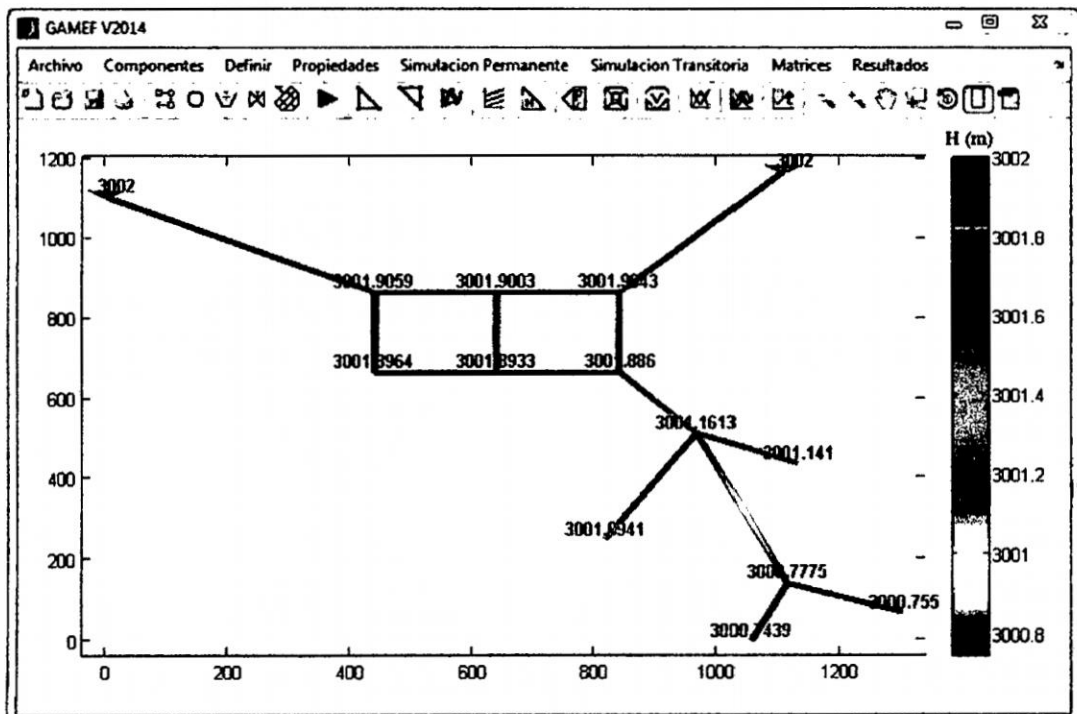


Figura 6.12: Alturas piezométricas en la RAP de dos reservorios

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

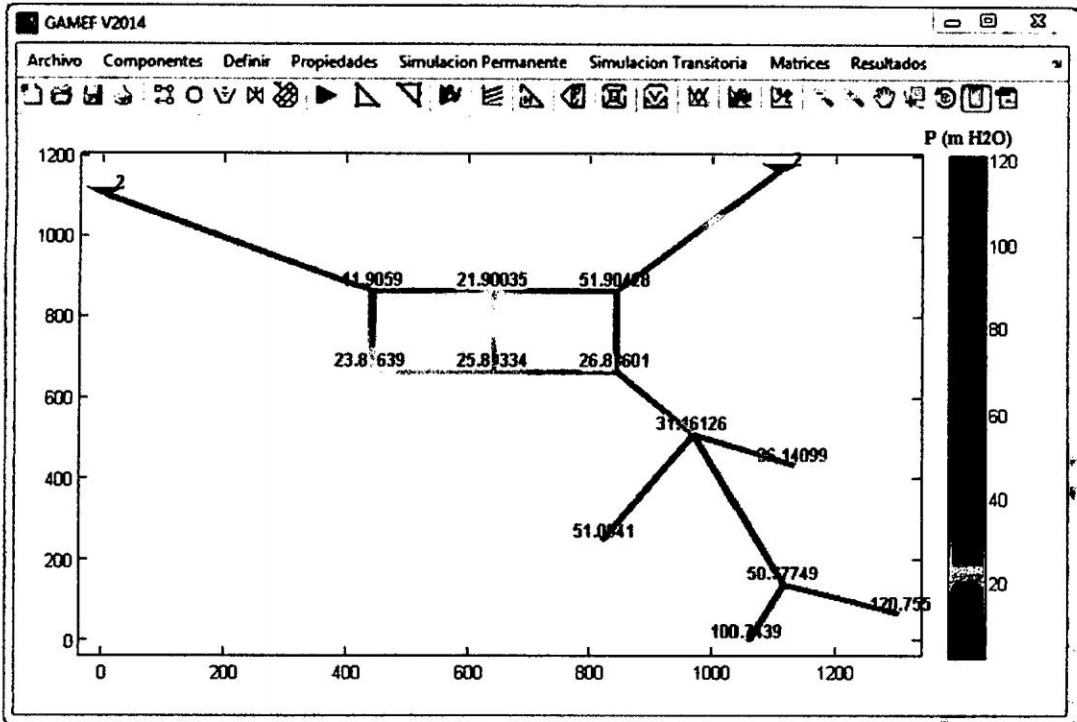


Figura 6.13: Altura de presiones en la RAP de dos reservorios

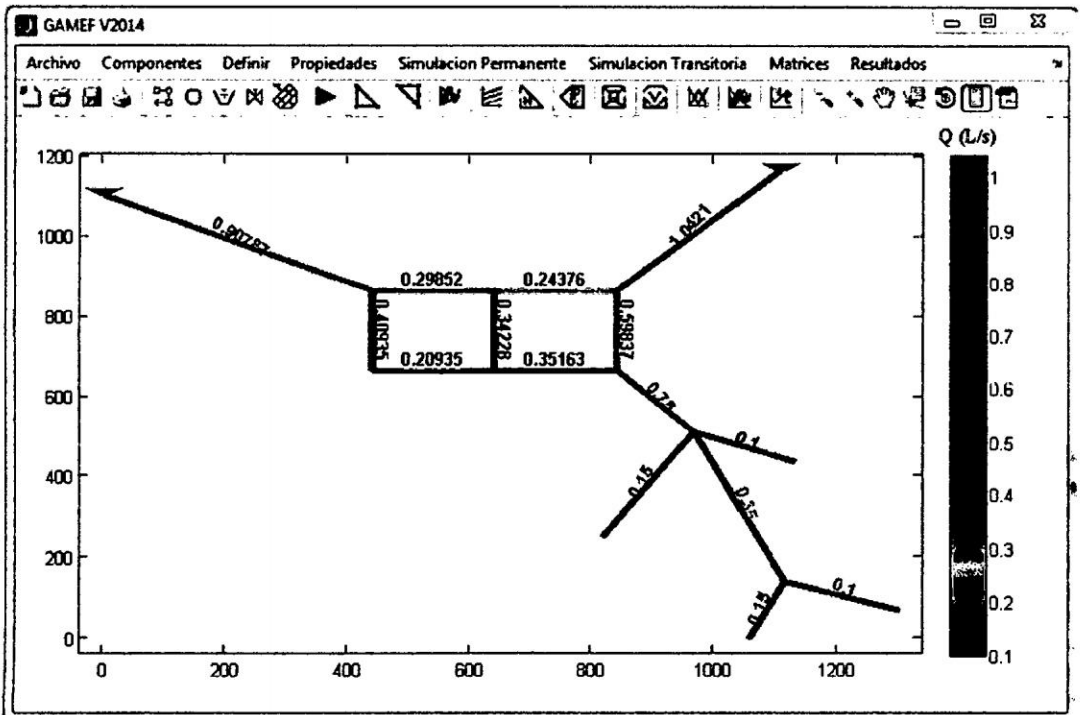


Figura 6.14: Caudales en la RAP de dos reservorios

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

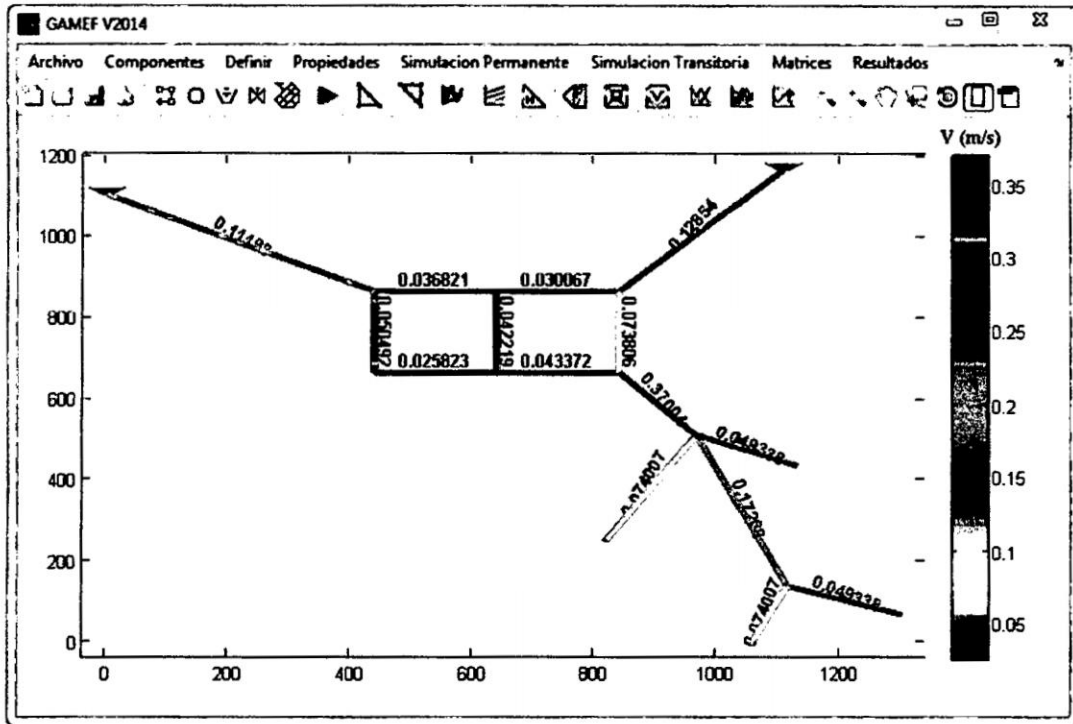


Figura 6.15: Velocidades típicas de agua potable

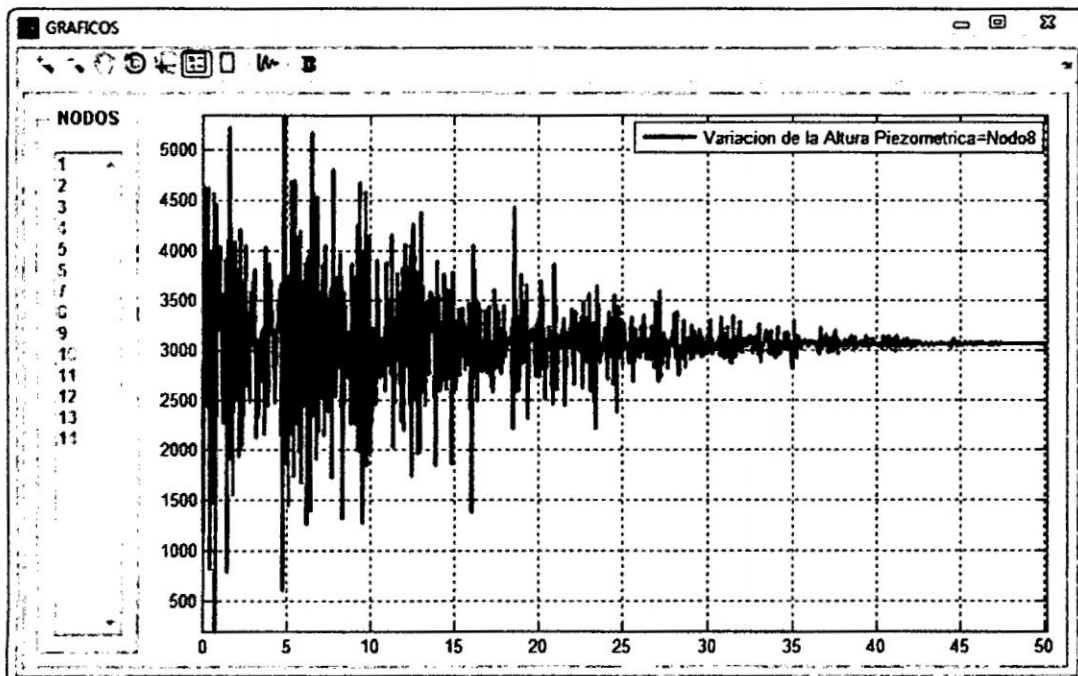


Figura 6.16: Variación de la altura piezométrica con respecto al tiempo en el nodo 8 de la RAP de dos reservorios

6.1. Discusión sobre el modelo propuesto

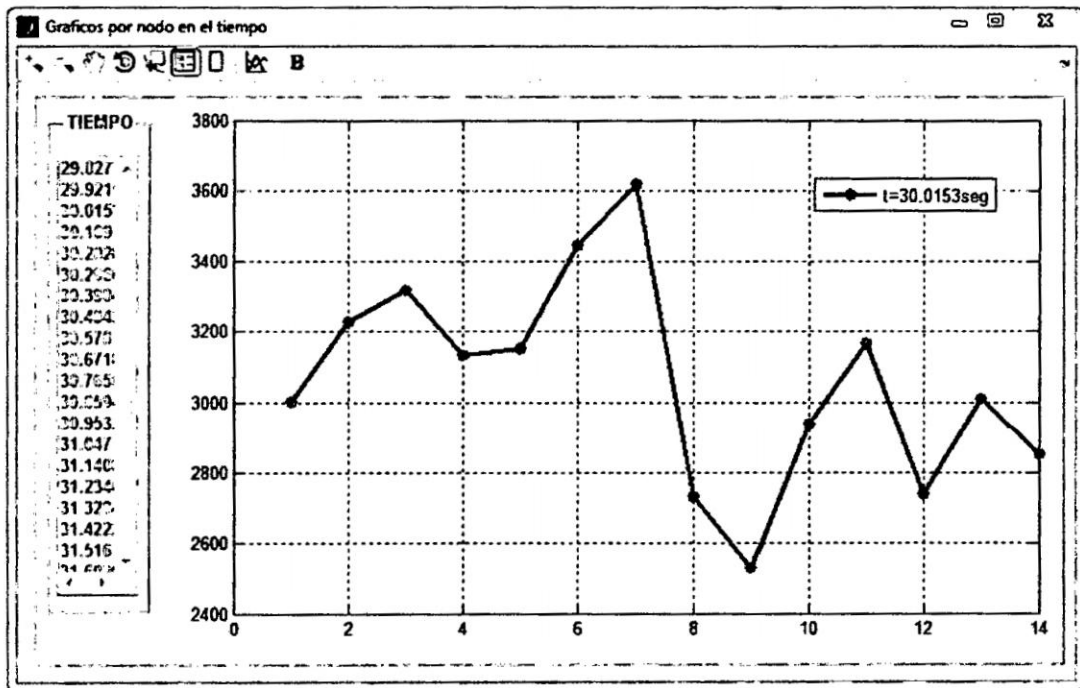


Figura 6.17: Variación de la altura piezométrica de todos los nodos en el minuto $t = 30,0153$ de la RAP de dos reservorios

6.2. De la RAP de la comunidad de Miraflores

los elementos del sistema de abastecimiento de agua potable, afectando los dispositivos de control hidráulico como bombas y válvulas, además de otros accesorios y haciendo colapsar tuberías.

Es esencial y necesario que el ingeniero sea capaz de predecir el golpe de ariete, a la vez que estima la presión máxima que éste pueda llegar a producir, y si es posible debe instalar equipo capaz de reducir esta presión hasta que quede dentro de los límites de seguridad.

La correcta operación del equipo, en especial para la toma de datos y en el abrir o cerrar de las *válvulas* es importante, para un buen funcionamiento y adecuado desarrollo de los ensayos.

6.2. De la RAP de la comunidad de Miraflores

La condición inicial para la simulación del flujo no permanente en el sistema de agua potable del caso de aplicación son los resultados del análisis en régimen permanente. Este análisis se puede hacer con el programa *GAMEF V2014* a través del *Método de Gradiente Hidráulico* como el *Método de Elementos Finitos*. Con los resultados se decide por modificar la Red, en específico la confección del reservorio.

Con respecto al sistema de agua potable "*Ampliación y mejoramiento del servicio de agua potable e instalación de servicio de saneamiento en las comunidades de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha, Distrito de Vilcanchos, Víctor Fajardo - Ayacucho*", aplicación del modelo desarrollado en la presente tesis, podemos concluir lo siguiente.

Dado que esta red de agua potable solamente cuenta con una válvula en la tubería 41, es recomendable después de la simulación que se debe colocar más de una válvula con fines de mantenimiento y control del golpe de ariete, según se ha diseñado, por ejemplo: las válvulas de descarga deben estar localizadas en los puntos más bajos de la tubería, las válvulas de expulsión de aire deben estar en los puntos más altos, las cámaras de aire comprimido deben estar dispuestas en la parte inicial de las tuberías de descarga, etc.

6.2. De la RAP de la comunidad de Miraflores

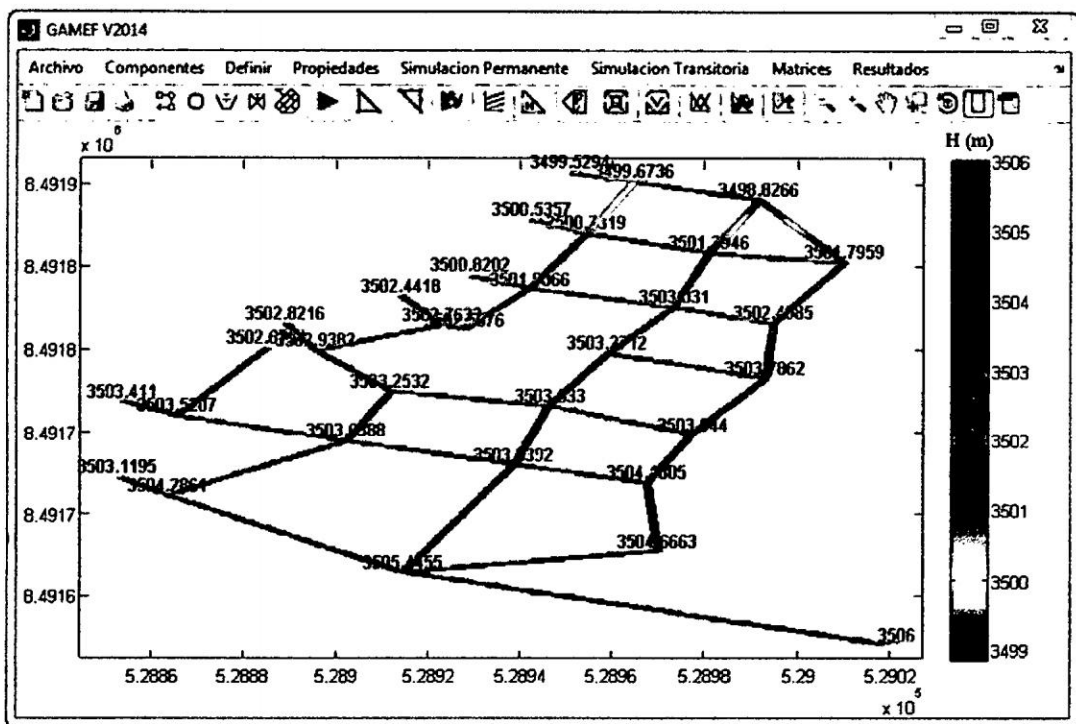


Figura 6.18: Alturas piezométricas en la RAP de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha - Vilcanchos

6.2. De la RAP de la comunidad de Miraflores

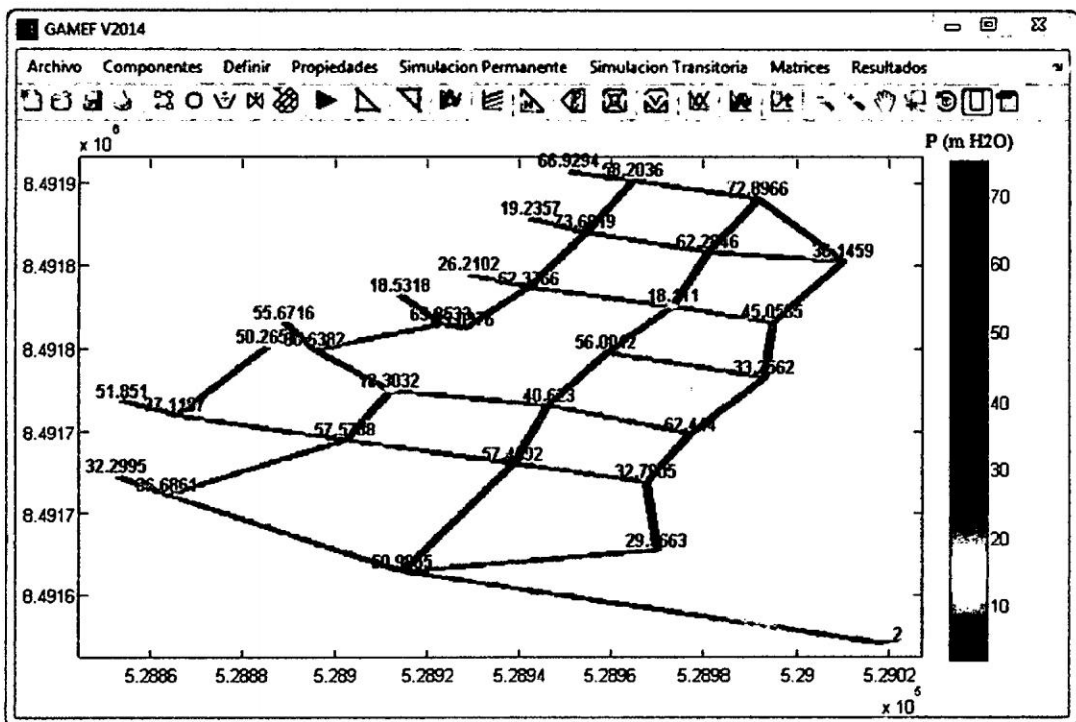


Figura 6.19: Altura de presiones en la RAP de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha - Vilcanchos

6.2. De la RAP de la comunidad de Miraflores

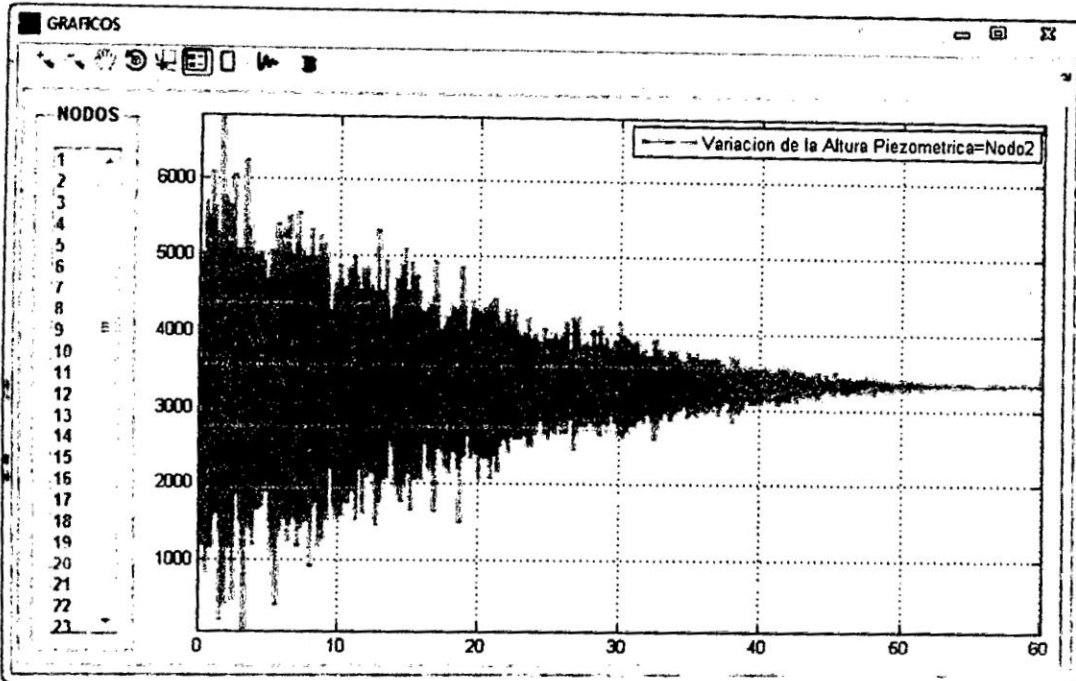
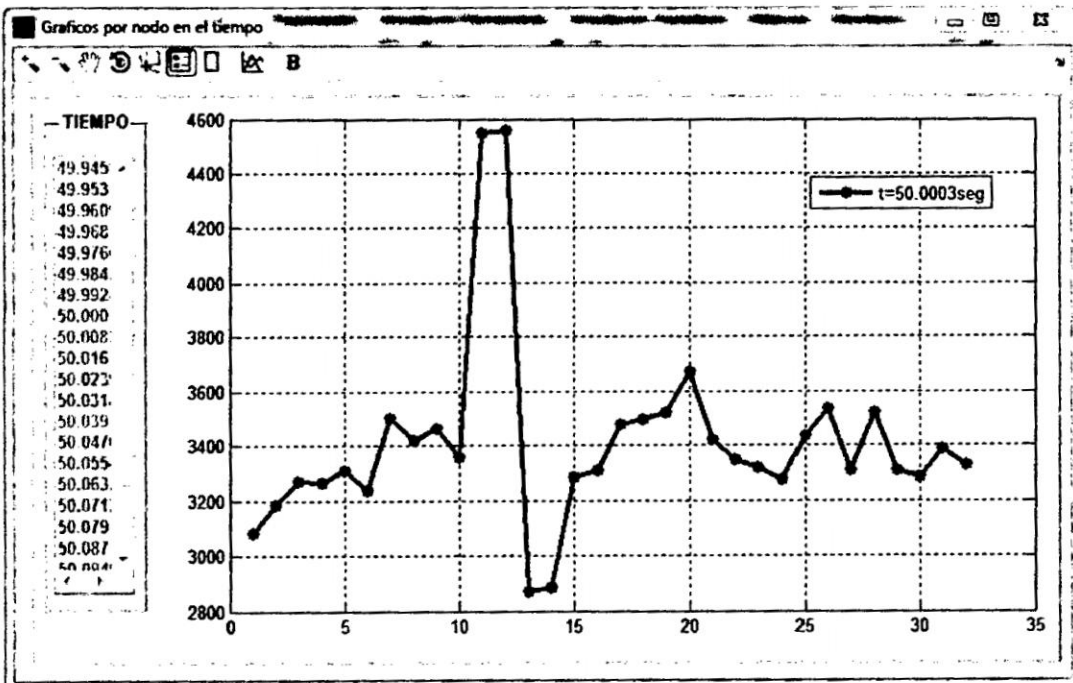


Figura 6.20: Variación de la altura piezométrica con respecto al tiempo en el nodo 2 de la red



6.2. De la RAP de la comunidad de Miraflores

El caso más desfavorable para la conducción (máximo golpe de ariete) se da con el cierre instantáneo ($t \approx 0$). En la práctica esto sólo ocurre en impulsiones de gran pendiente hidráulica, no siendo lo habitual.

Puesto que a mayor tiempo de cierre (t_c) menor sobrepresión, sí se puede controlar el t_c se limitarán en gran medida los problemas en tuberías, siendo éste el caso de los abastecimientos por gravedad.

Capítulo 7

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1. Conclusiones

7.1.1. De la teoría

1. La *ecuación dinámica* (o impulso) y la *ecuación de continuidad* (o conservación de masa) han sido obtenidos bajo el supuesto de que los términos advectivos son insignificantes.
2. La ecuación de la *celeridad* de traslación de la *onda de presión*, se han derivado bajo la hipótesis de que la fracción de aire libre del líquido es pequeño tal que la celeridad de onda puede ser considerada como un constante y se conoce como la fórmula ampliada de *Joukowsky*
3. El modelo de análisis abordado en la presente tesis para resolver el problema del *Golpe de Ariete* o flujo no permanente en sistemas de tuberías es la *Teoría Elástica* o la teoría *Waterhammer*, en el que la elasticidad tanto del fluido como de las paredes de las tuberías es tomada en cuenta en los cálculos, es decir que la tubería es *deformable* y el líquido es *compresible*.

7.1.2. De la metodología

1. El *Método de Elementos Finitos* resulta una formulación más versátil para el entendimiento de la solución de las *ecuaciones diferenciales cuasi lineales hiperbólicas parciales* que gobierna el fenómeno del *flujo no permanente* sistemas de redes de distribución de agua potable.
2. El *Método de Elementos Finitos* es una técnica numérica de altísima potencia para la solución de ecuaciones diferenciales. En este caso inicia el estudio con la discretización del dominio (*tubería*) en elementos finitos lineales de longitud constante, unidos por nodos en sus extremos.
3. El *Método de Elementos Finitos*, puede formularse bajo distintas configuraciones de funciones de interpolación y de forma y es de fácil integración numérica y sistematización de las ecuaciones en forma matricial, manipulable para la solución aproximada del golpe de ariete en sistemas de agua potable.

7.1.3. Del modelo

1. Para problemas de *flujo no permanente* en redes de distribución de agua resulta adecuada la formulación del *Método de Elementos Finitos* con elementos lineales.
2. En el presente trabajo se presentó un modelo en *Elementos Finitos* para la simulación del fenómeno de *Golpe de Ariete*. En las ecuaciones del modelo se observa que el término de la fricción ha sido linealizado y se ha supuesto que la fricción durante el transitorio hidráulico se comporta de la misma manera que durante el estado permanente. Las ecuaciones utilizadas, y el modelo en computador desarrollado pueden ser utilizados en redes hidráulicas.
3. El *Método de Elementos Finitos* ofrece una solución general a los problemas de redes de tuberías. Los modelos se construyen con el programa *GAMEF* con su respectiva

librería de elementos y la solución se logra empleando algoritmos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. El modelo de tuberías presentado en este trabajo representa uno de los problemas de mayor complejidad en la mecánica de fluidos.

4. La utilización de este método de solución implica ciertas ventajas. Entre otras, no es necesario introducir valores iniciales de caudales supuestos ni estar atento de la continuidad. Estos aspectos conllevan a que el preproceso de una malla grande sea más ágil y menos susceptible al error humano.
5. Cuando la formulación por el Método de Elementos Finitos es apropiada y correcta, la obtención de resultados confiables es responsabilidad del ingeniero quién está tratando de resolver el problema, puesto que los resultados dependen directamente de la calidad de datos ingresados y las condiciones de borde impuestos.
6. La implementación computacional *GAMEF* se hizo en *MATLAB* que además de ser una herramienta de investigación, nos permite escribir códigos que interpreta en el momento de la ejecución. Aunque desde el punto de vista de una programación optima, los lenguajes interpretados son muy lentos, *MATLAB* nos permite hacer uso de toda la librería matricial implementada lo que permite optimizar los cálculos hasta el punto de competir eficientemente con otros lenguajes compilados.
7. Haciendo la comparación entre los resultados del modelamiento de la red de distribución de agua del problema modelo y del caso de estudio, desarrollado en el capítulo 5, uno por el programa *HAMMER V8i*, basado en la formulación por el *Método de las Características* y por otro lado el programa *GAMEF V2014*, que utiliza la formulación por *Elementos Finitos*, se concluye que las dos metodologías desarrolladas arrojan resultados similares y en consecuencia nuestra formulación es correcta.

7.1.4. De los resultados

1. Los resultados dependen mucho de la definición de las condiciones iniciales y de borde además de los datos de la topografía de la red, las propiedades del fluido y de las tuberías.
2. La simulación del *flujo permanente* se puede hacer mediante el *Método de Gradiente Hidráulico* o el *Método de Elementos Finitos* ambos incorporados en el programa *GAMEF V2014*, estos resultados es la *condición inicial* para el análisis en régimen transitorio.
3. En cuanto a la aplicación del modelo propuesto al proyecto “*Ampliación y mejoramiento del servicio de agua potable e instalación de servicio de saneamiento en las comunidades de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha, Distrito de Vilcanchos, Víctor Fajardo - Ayacucho*”, los resultados concuerdan con los obtenidos con el software comercial HAMMER V8i, por tanto el modelo es válido para sistemas de redes de tuberías.
4. Los resultados obtenidos con el programa de elementos finitos *GAMEF* presentan un buen grado de aproximación respecto de la solución con los métodos tradicionales como el Método de las Características y Diferencias Finitas. Esto garantiza la efectividad del modelo utilizado y otorga confiabilidad a los valores encontrados para las variables primarias y secundarias.
5. El análisis realizado con el programa demuestra la gran versatilidad y eficiencia que puede obtenerse en el *preproceso, solución y posproceso* de un sistema cualquiera de redes de distribución de agua potable.
6. El programa *GAMEF V2014* desarrollado en la presente tesis para la modelación del Golpe de Ariete por el Método de Elementos Finitos, genera automáticamente

el enmallado de la red de distribución de agua, una vez ingresado los datos de la topología de la red, las propiedades de la tubería y el fluido. La única condición necesaria que debe cumplirse es que el Numero de Courant en cada una de las tuberías debe ser igual o muy próximo a 1.

7. El programa *GAMEF V2014* es un simulador numérico del fenómeno del golpe de ariete en sistemas a presión y puede manejar cualquier tipo de liquido y tuberías de cualquier material, simplificando la entrada de datos y permite interactuar diariamente la visualización de resultados.
8. Finalmente el modelo desarrollado y el código computacional están en condiciones de aplicarse a una amplia gama de problemas de simulación numérica del golpe de ariete como cualquier otro programa comercial en consecuencia se afirma que el modelo es correcto.

7.1.5. De la tesis

1. La presente tesis cumpliendo con los objetivos trazados en su planteamiento, tiene un carácter científico y aplicativo en el campo de la *ingeniería hidráulica*; primero por el modelamiento con el *Método de Elementos Finitos*, segundo por la aplicación a un caso real, en específico al proyecto “*Ampliación y mejoramiento del servicio de agua potable e instalación de servicio de saneamiento en las comunidades de Miraflores, Cruz Pampa, Antacocha y Urancancha, Distrito de Vilcanchos, Víctor Fajardo - Ayacucho*”.

7.2. Recomendaciones

1. La implementación del modelo computacional en *MATLAB*, permitirán a las demás generaciones de investigadores en el tema, la utilización de una herramienta para la

simulación de muchos más casos aplicados a este tema. El modelo computacional es efectivo y amigable con el usuario, posee una interfase gráfica de fácil uso.

2. Antes de cargar un modelo con características complejas es recomendable contar con un modelo conceptual claro de lo que quiere analizarse con fines de diseño o de decisión ingenieril.
3. La velocidad de los programas implementados podría ser mejorada si para el proceso de inversión de matrices se utilizara algoritmos de inversión de *matrices Sparsa* (de muchos ceros).

7.3. Investigaciones futuras

1. Desarrollar un esquema de segundo orden de *Volúmenes Finitos* (MVF) tipo *Godunov* basado en la solución de *Reimann* de las ecuaciones de continuidad y momentum incluyendo el termino convectivo para la modelación de flujo no permanente en sistemas a presión.
2. Desarrollar modelos acoplados de *Elementos Finitos* o *Volúmenes Finitos* con *Inteligencia Artificial* para el diseño óptimo de sistemas de distribución de agua en régimen no permanente.

Bibliografía

- [1] *Catálogo y Manual Técnico de Sistema Presión-NTP-ISO 4422*. Nicoll Perú, primera edición, 2006.
- [2] YOUNG W. KWON & HYOCHOONG BANG. *The Finite Element Method using MATLAB*. CRC Press LLC. Boca Raton London New York Washington, D.C., 2000.
- [3] TIRUPATHI R. CHANDRUPATLA & ASHOK D. BELEGUNDU. *Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería*. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, segunda edición, 1999.
- [4] J. J. CONNOR & C. A. BREBBIA. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. ©Butterworth & Co (Publishers) Ltd, 1978.
- [5] M. HANIF CHAUDHRY. *Applied Hydraulic Transients*. Nostrand Reinhold Company, 135 West 50th Street, New York, NY 10020, 1979.
- [6] JACK CHESSA. *Programing the Finite Element Method with Matlab*. Northwestern University, 3rd October 2002.
- [7] YUNUS A. CENGEL & JOHN M. CIMBALA. *Mecánica de Fluidos: Fundamentos y aplicaciones*. McGraw-Hill, Interamericana, 2006.
- [8] AGUSTÍN MARTÍN DOMINGO. *Apuntes de mecanica de fluidos*. Creative Commons, Copyright ©1997-2011 Agustín Martín Domingo.

- [9] JEAN DONEA and ANTONIO HUERTA. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0-471-49666-9, copyright ©2003.
- [10] DELORES M. ETTER. *Solución de problemas de ingeniería con MATLAB*. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., Segunda edición, 1998.
- [11] IREX MOISÉS FALCON MARTINEZ. *Análisis y diseño de redes de distribución de agua potable por el método de elementos finitos en flujos permanentes*. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, Escuela de Formación Profesional de Ingeniería Civil, Tesis de grado, Ayacucho - Perú, 15/04/2004.
- [12] ARTURO ROCHA FELICES. *Hidráulica de tuberías y canales*. Universidad Nacional de Ingeniería, 1998.
- [13] JAMES W. DAILY & DONALD R. F. HARLEMAN. *Dinámica de los fluidos con aplicaciones en la ingeniería*. Trillas Mexico, 1975.
- [14] DAVID V. HUTTON. *Fundamentals of Finite Element Analysis*. McGraw-Hill Companies. Inc. New York NY 10020, copyright ©2004.
- [15] ZIENKIEWICZ O. C. & TAYLOR R. L. *El Método de los Elementos Finitos Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales*. McGraw-Hill, Cuarta Edición, 1994.
- [16] ZIENKIEWICZ O. C. & TAYLOR R. L. *El Método de los Elementos Finitos Volumen 2: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y no Linealidad*. McGraw-Hill, Cuarta Edición, 1994.
- [17] ZIENKIEWICZ O. C. & TAYLOR R. L. *The Finite Element Method Volume 3: Fluid Dynamics*. Butterworth - Heinemann, Fifth edition., 2000.
- [18] BEN Q. LI. *Computational Fluid and Solid Mechanics: Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. ©Springer-Verlag London Limited, 2006.

- [19] ANTONIO F. TOLEDO LÓPEZ. *Estudio y experimento del fenómeno de golpe de ariete, debido a cierre de válvulas, para el laboratorio de hidráulica*. Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de ingeniería Civil, Guatemala, agosto de 2009.
- [20] GUSTAVO A. ORTIZ MASEK. *Tesis: El golpe de ariete en sistemas de abastecimiento de agua potable*. Universidad de San Carlos de Guatemala, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Civil, Guatemala, agosto de 2006.
- [21] BRYAN W. KARNEY; MCINNIS. *Efficient Calculation of Transient Flow in Simple Pipe Networks*. Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 118, No.7, July, 1992., 1 de diciembre de 1992.
- [22] SAEED MOAVENI. *Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1999.
- [23] RAFAEL CARMONA PAREDES & LÁZARO AGUILAR MORENO. *Transitorios hidráulicos en conductos a presión*. Instituto de Ingeniería Hidráulica, UNAM, Enero-Abril de 1987.
- [24] ROLAND W. LEWIS & PERUMAL NITHIARASU & KANKANHALLY N.SEETHARAMU. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons, Ltd ISBNs: 0-470-84788-3 (HB); 0-470-84789-1 (PB), ©2001.
- [25] UNIVERSIDAD DE OVIEDO. *Prácticas de instalaciones de fluidos - golpe de ariete*. Área de mecánica de fluidos, Ingenieros Industriales, Universidad de Oviedo, Oviedo, España 2005-2006.
- [26] John Parmakian. *Waterhammer Analysis*. Dover Publications Inc., New York, 1963.
- [27] G. R. LIU & S. S. QUEK. *The Finite Method: A practical course*. Butterworth-Heinemann, 2003.

- [28] AYALA. R. *Optimización de una herramienta computacional para el estudio del fenómeno de Golpe de Ariete en una línea de tuberías*. Trabajo de Grado UDO, Ingeniería Civil, 2003.
- [29] LARRY J. SEGERLIND. *Applied Finite Element Analysis*. copyright ©, by John Wiley & Sons, Inc., 1984.
- [30] VICTOR L. STREETER. *Mecánica de los Fluidos*. McGraw-Hill de México, S.A, Atlacomulco, 499-501. Naucalpan de Juárez, Edo. de México, 1970.
- [31] JUAN LUIS TAIBE CARRASCO. *Análisis de flujo no permanente en redes de tuberías de agua potable por método híbrido*. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, Escuela de Formación Profesional de Ingeniería Civil, Tesis de grado, Ayacucho - Perú 2010.
- [32] JOHN A. TWYMAN. *Decoupled Hybrid Methods for Unsteady Flow Analysis in Pipe Networks*. Editorial La Cálifa, 2004.
- [33] JOHN A. TWYMAN. *Decoupled Hybrid Methods for Unsteady Flow Analysis in Pipe Networks*. Editorial La Cálifa, Lo Arcaya, Santiago de Chile, January 2004.
- [34] MARYORY URDANETA. *Aplicación del método de diferencias finitas en el dominio del tiempo para la simulación de la propagación de ondas electromagnéticas en ambientes cerrados*. Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, División de Postgrado, Programa de Postgrado en Matemática Aplicada, Maracaibo, Venezuela octubre de 2007.
- [35] JUAN G. SALDARRIAGA V. *Hidráulica de Tuberías*. McGraw-Hill, Interamericana, S.A, Avenida de las Américas, 46-41. Santafé de Bogotá, D. C., Colombia, 1998.

Apéndice A

Manual del Programa GAMEF

El programa *GAMEF* tiene como objetivo introducir a los estudiantes, profesionales de ingeniería civil y ramas afines en la utilización práctica del *MEF* y *MATLAB* explicando, al mismo tiempo, los detalles de cada una de las etapas del cálculo. Aunque el problema que específicamente resuelve el programa es el análisis del *flujo no permanente* en sistemas de redes de tuberías a presión, muchos de los conceptos que aparecen son totalmente generales y extrapolables a la solución de otros problemas por el MEF en diversos campos de la física y la ingeniería.

GAMEF es el resultado de la presente investigación desarrollado en la *Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga* y esta organizado en tres bloques bien diferenciados de *Preproceso*, *Proceso* y *Postproceso* que engloban las tres etapas básicas del análisis de infiltración por el MEF. Así, en el bloque de *Preproceso* se definen de forma gráfica y sencilla la geometría del sistema de agua potable ingresando las coordenadas del dominio (nodos, elementos, reservorio y válvulas), se ingresan las propiedades de la tubería y el fluido, además se asignan las condiciones de borde y se ingresa todos los datos para el análisis por el MEF. En el bloque de *Proceso* se soluciona el problema de flujo no permanente (*Waterhammer*) en sistemas a presión, obteniendo las *alturas piezométricas*. Finalmente el bloque de *Postproceso* permite calcular todas las variables secundarias y visualizar grá-

ficamente los resultados más representativos del análisis. La creación de nuevos problemas es ilimitada, pudiendo incluirse dominios de análisis de interés práctico.

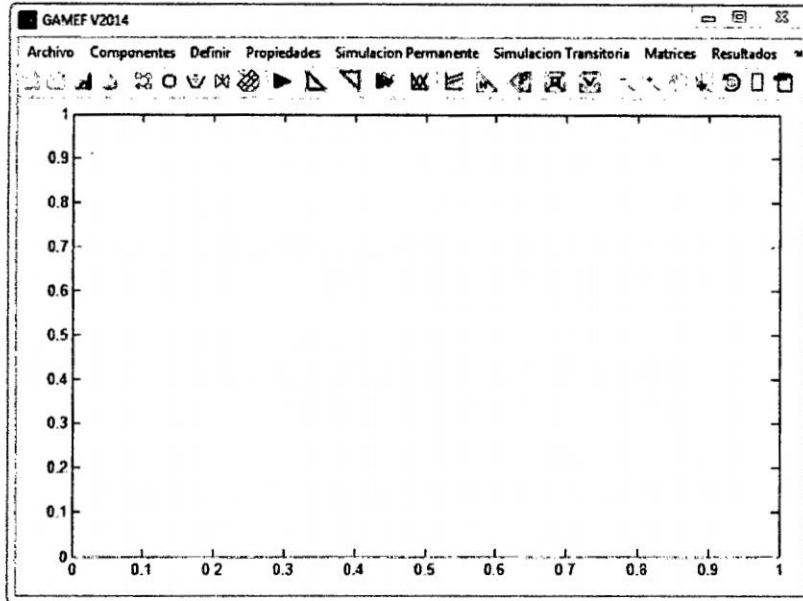


Figura A.1: Ventana principal del programa “*GAMEF-V2014*”

La aplicación “*GAMEF*” cuenta con una interfaz basado en *menús*, *submenús* y *barra de herramientas*, Figura A.1; el usuario dispone desde una única interfaz para: el ingreso de los datos, *Preproceso*, *proceso* y *Postproceso* del *problema de flujo no permanente en redes a presión*. Espero sinceramente que *GAMEF* sea útil tanto para estudiantes que se inician en el estudio de la teoría y aplicaciones del MEF, como para profesionales que aplican cotidianamente el MEF para solución de problemas prácticos.

A.1. Fase Preproceso

Esta etapa permite introducir los datos de geometría que definen el sistema de redes de tuberías a analizar, elementos de control hidráulico y las propiedades tanto de la tubería como del fluido, la generación de la malla, asignación de las condiciones de contorno y la lección del método de solución de flujo permanente.

A.1.1. Definir la geometría del sistema a presión

Como se mencionó anteriormente el código *GAMEF* trabaja de manera automática, considerando como malla inicial la geometría que se ha ingresado, es decir que cada tubería es un elemento y los extremos los nodos, tratándose de un elemento lineal, la conectividad de las tuberías y las coordenadas de los nodos se ordenan convenientemente en el formato establecido y se guardan como base de datos en un block de notas de donde serán importados fácilmente al programa véase las Figuras A.2, A.3, A.4, A.5.

Nodo	X (m)	Y (m)	Z (m)	Demanda (l/s)
1	1.6305e+03	1.5009e+03	2908	8
2	1.8027e+03	921.3462	2936	19
3	2.1208e+03	1.2899e+03	2943	10
4	1.9781e+03	735.8952	2933	30
5	2.5848e+03	1.2800e+03	2944	30
6	2.6114e+03	899.0982	2931	30
7	3.3709e+03	654.4780	2930	20

Figura A.2: Matriz de descripción de coordenadas de los nodos *GAMEF-V2014*

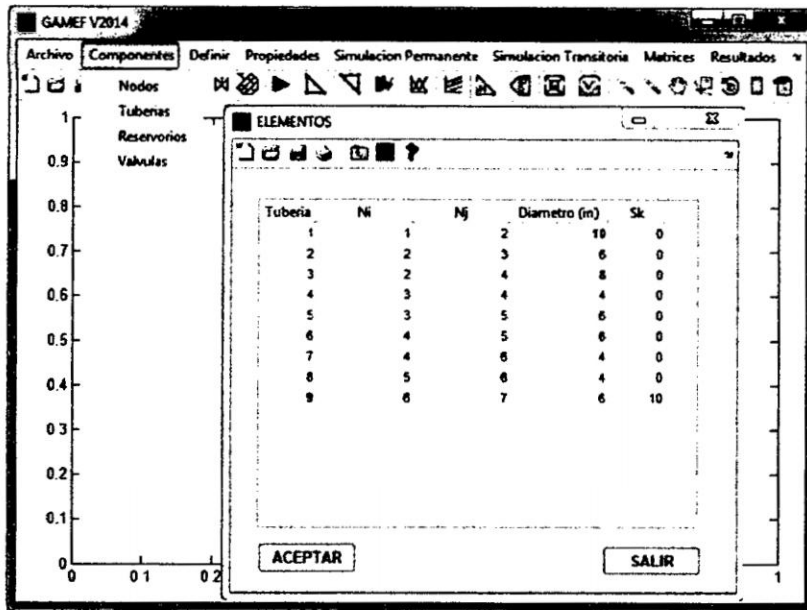


Figura A.3: Matriz de descripción de la conectividad de las tuberías *GAMEF-V2014*

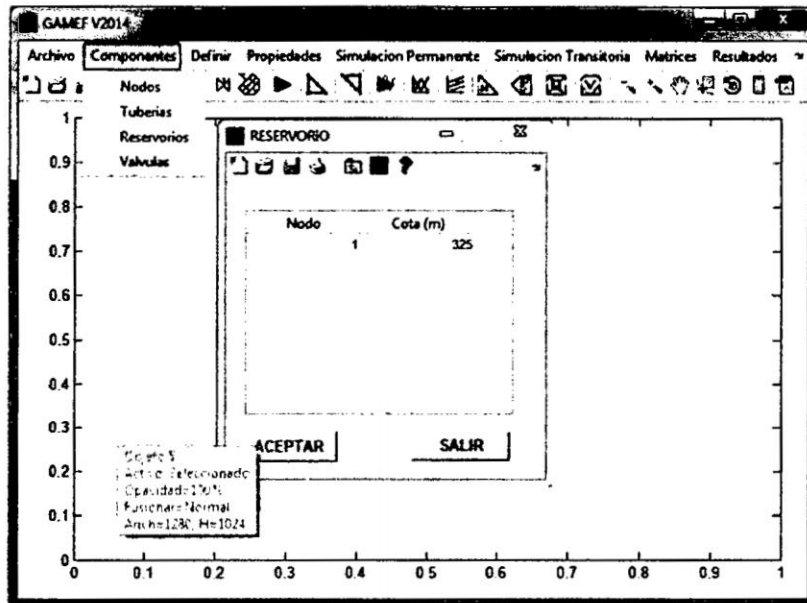


Figura A.4: Matriz de descripción de los reservorios *GAMEF-V2014*

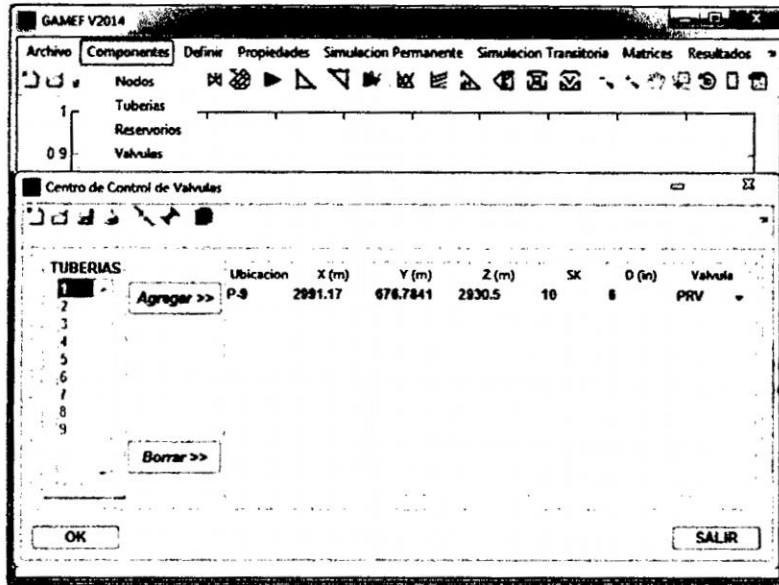


Figura A.5: Matriz de descripción de las válvulas *GAMEF-V2014*

Luego de importar la conectividad, las coordenadas y definir los elementos de control hidráulico se debe visualizar la red de agua potable, a partir de esto se decide incorporar mas o menos elementos de control hidráulico, además se toma los criterios de enmallado en el modelo.

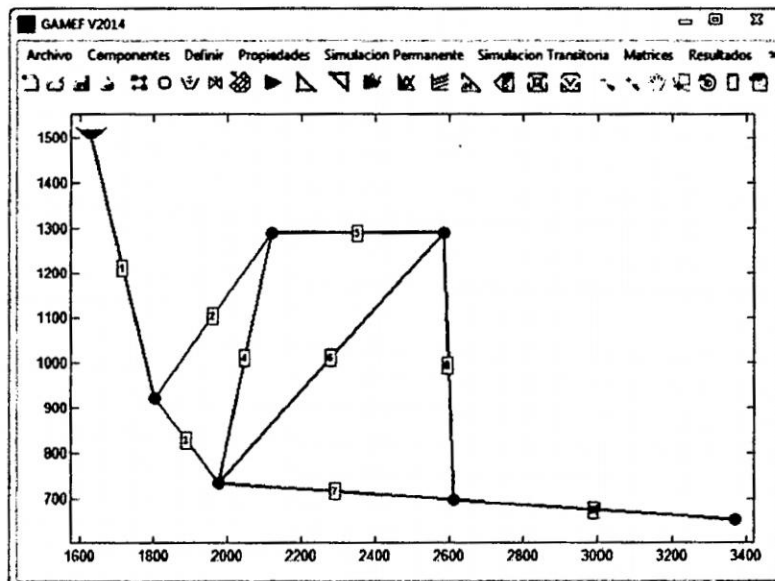


Figura A.6: Vizualizando la red de agua potable *GAMEF-V2014*

A.1.2. Propiedades del fluido y la tubería

Aquí se define las propiedades del fluido, pudiendo ser agua o cualquier otro tipo de fluido así mismo se define las propiedades de la tubería puede ser de PVC, Hierro dúctil, etc. como se muestra en la Figura A.7


METODO DE CALCULO		
Darcy-Weisbach		
PROPIEDADES DEL FLUIDO		
Agua a 20C(68F)	Viscosidad Cinematica (m ² /s)	0.000001003700003
Agua a 4C(38F)	Gravedad Especifica	0.998
Agua Salada a 10C(50F) con 3.3% de salinidad	Temperatura (C)	20
Mercurio a 20C(68F)	Presion de Vapor (kPa)	-98.9487310242027
Kerosene a 20C(68F)	Modulo de Elasticidad (kPa)	2188127.97096987
Glicerina a 20C(68F)		
Alcohol Etílico a 20C(68F)		
PROPIEDADES DE LA TUBERIA		
PVC	Coefficiente de Kutters	0.010
Hierro Dúctil	Coefficiente de Mannings	0.010
Hierro Galvanizado	Coefficiente de Hazen-Williams	150
Concreto	Espesor de la rugosidad (mm)	0.001524000000006
Vidrio	Modulo de Youngs (kPa)	3300000
Acero	Modulo de Poissons	0.45
Acero Revestido (Nuevo, Rugoso)		
Suelo Cemento		
Aluminio		
Asbesto Cemento		

ACEPTAR SALIR

Figura A.7: Vizualizando la red de agua potable *GAMEF-V2014*

A.1.3. Discretización de las tuberías

A.1.3.1. Malla inicial

Generar la malla triangular inicial mediante el icono  de la barra de herramientas. El programa *GAMEF*, utiliza los parámetros por defecto del algoritmo de generación de la malla en base a la condición courant, que producen buenos resultados como se muestra en la Figura A.8.

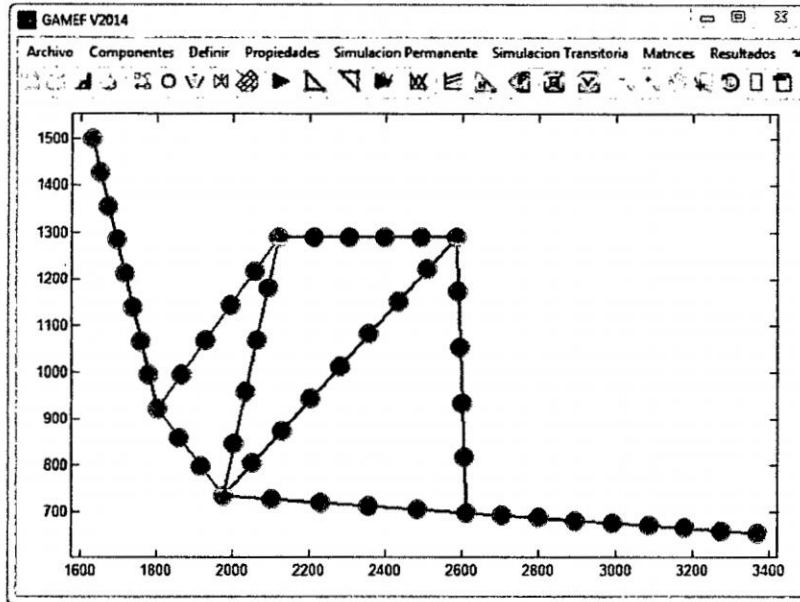



Figura A.8: Generación de la malla inicial *GAMEF-V2014*

A.1.3.2. Refinar malla

Si es necesario, se debe refinar la malla, dependiendo de cada problema o el interés perseguido por cada proyectista. En cada refinamiento, el número de elementos y nodos aumenta. Cuanto más fina sea la malla mayor será el tiempo requerido para calcular la solución. Es importante tomar en cuenta que una malla no se puede refinar indefinidamente, si se refina demasiado el cálculo puede demorar demasiado o pueden aparecer oscilaciones espurias. *Esto marca un compromiso de rapidez y precisión.* En la Figura A.9 se muestra un primer refinamiento obtenido al dar *click* en el icono 

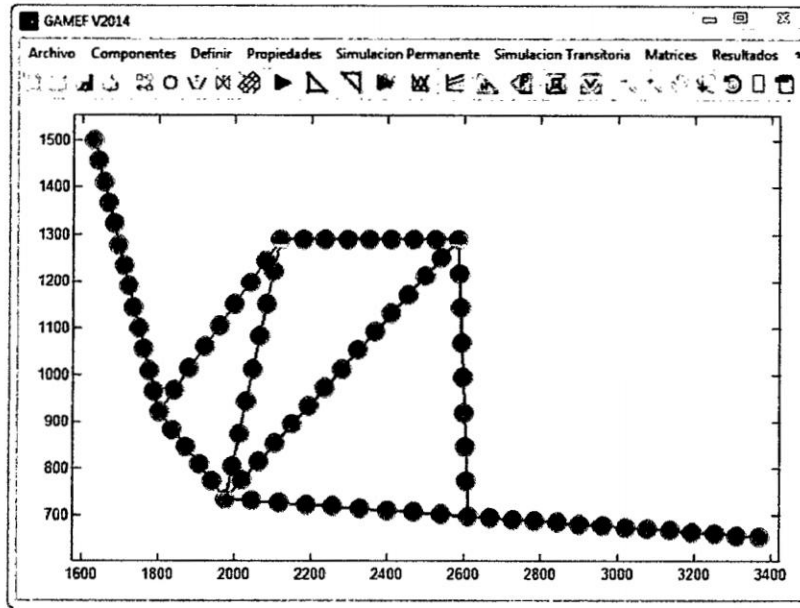


Figura A.9: Refinamiento del enmallado *GAMEF-V2014*

A.1.4. Condiciones de borde

Las condiciones de borde considerando en el programa *GAMEF* son las condiciones de nodo simple, línea de reservorio y línea de válvula (la apertura o el cierre de válvula es la causa principal de flujo transitorio en redes de tubería. Partiendo desde la condición inicial el programa asigna automáticamente las condiciones de borde en el sistema durante el tiempo de análisis.

A.2. Fase solución

Luego de haber definido y discretizado el dominio del sistema de tuberías y las condiciones de borde, el análisis del flujo permanente y flujo no permanente se realiza desde la barra de herramientas *menú ejecutar*, mostrado en la figura A.15.

A.2.1. Solución en regimen permanente

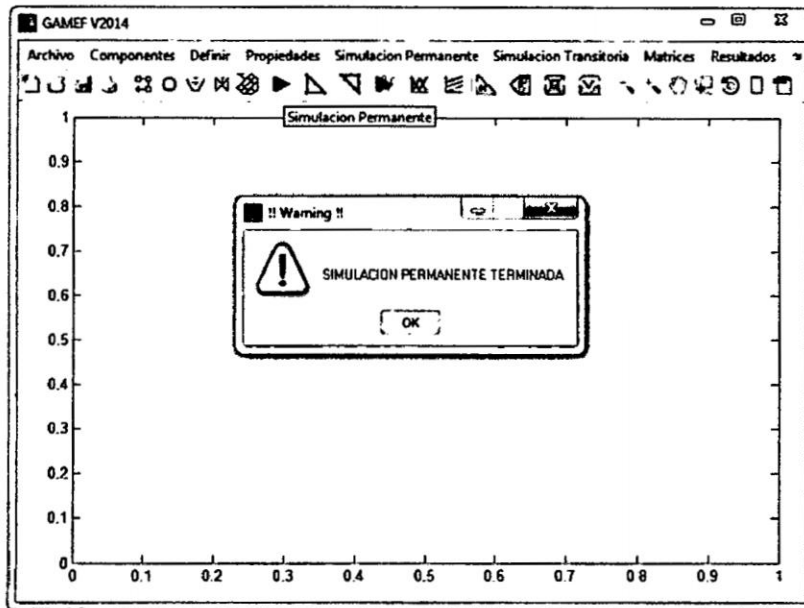


Figura A.10: Ejecutando la simulación en regimen permanente *GAMEF-V2014*

La primera variable directa que se calcula son las *alturas piezométrica*, una vez calculado estos valores se puede calcular todas la s variables secundarias.

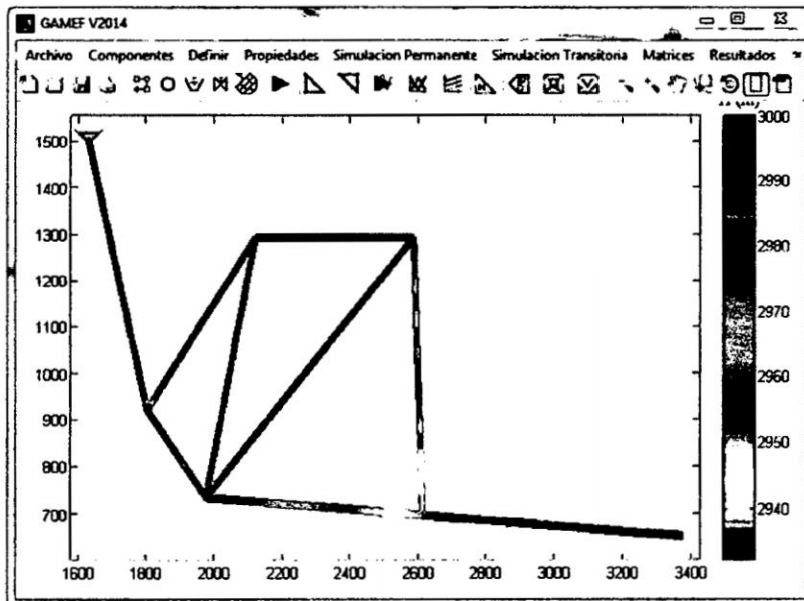


Figura A.11: Alturas Piezométricas calculados con *GAMEF-V2014*

A.2.1.1. Fase Postproceso

Los resultados representativos en todos los nodos y elementos, se acceden desde el *menú resultados*, la altura piezométrica sobre cada nodo del dominio de la red de tubería se muestra en la Figura A.11. Los resultados implementados en el programa *GAMEF* se encuentran desde el *Resultados* y son:

- Sub menú **Nodos**: Puede Visualizar las alturas piezométricas, presiones y pérdidas en todos los nodos, representa la solución directa del sistema de ecuaciones lineales simultáneas formadas mediante la discretización por elementos finitos.
- Sub menú **Tuberías**: Aquí se encuentra los resultados de caudales, velocidades y todas propiedades geométricas e hidráulicas de las tuberías.
- Sub menú **Reservorios**: Las alturas de agua en todos los reservorios del sistema.
- sub menú **Válvulas**: Alturas, piezométricas, presiones y velocidades en todas las válvulas del sistema.

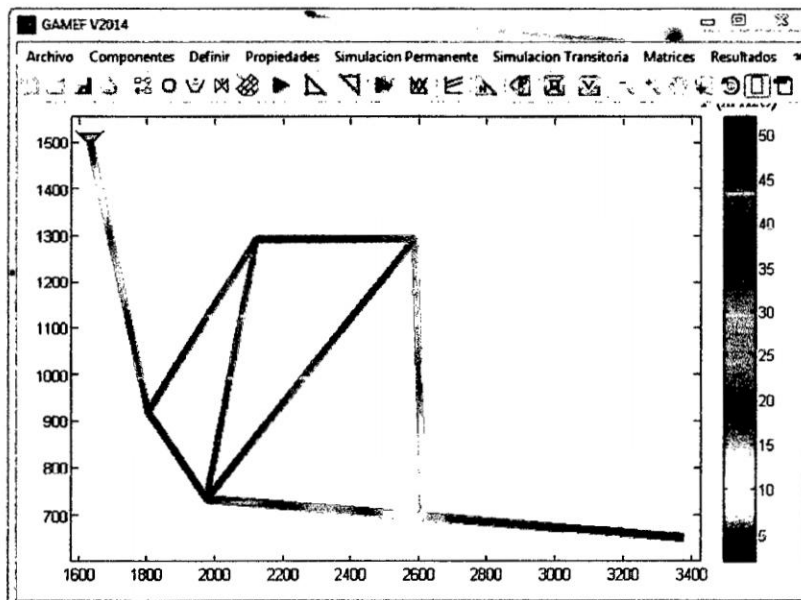


Figura A.12: Presiones calculados con *GAMEF-V2014*

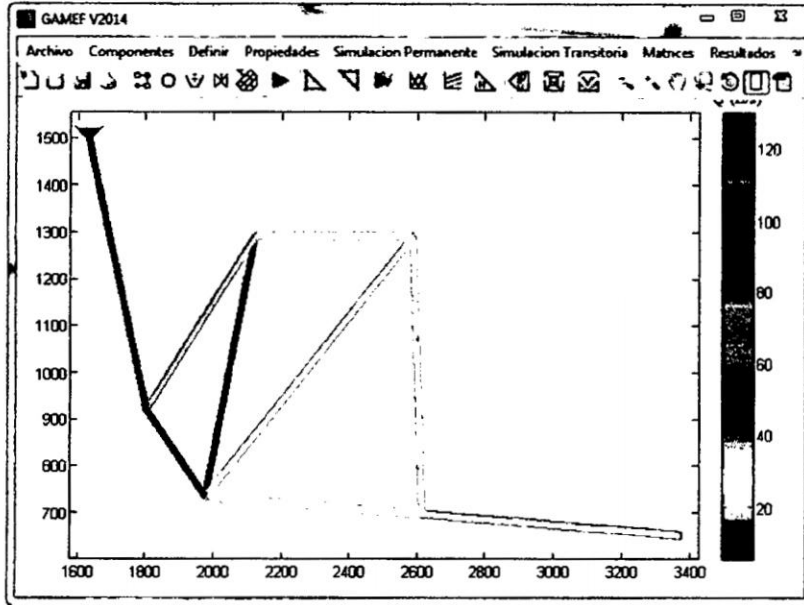


Figura A.13: Caudales en las tuberías del sistema *GAMEF-V2014*

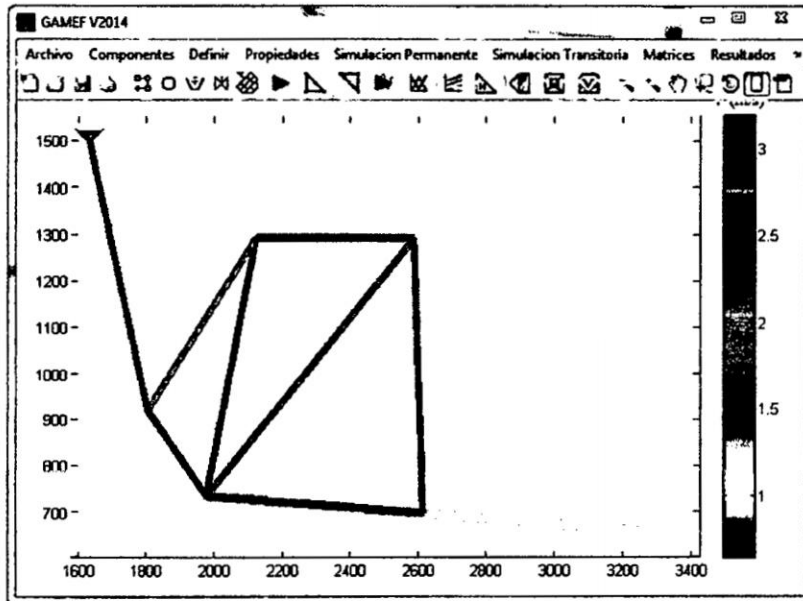


Figura A.14: Velocidades en las tuberías del sistema *GAMEF-V2014*

A.2.2. Solución en regimen no permanente

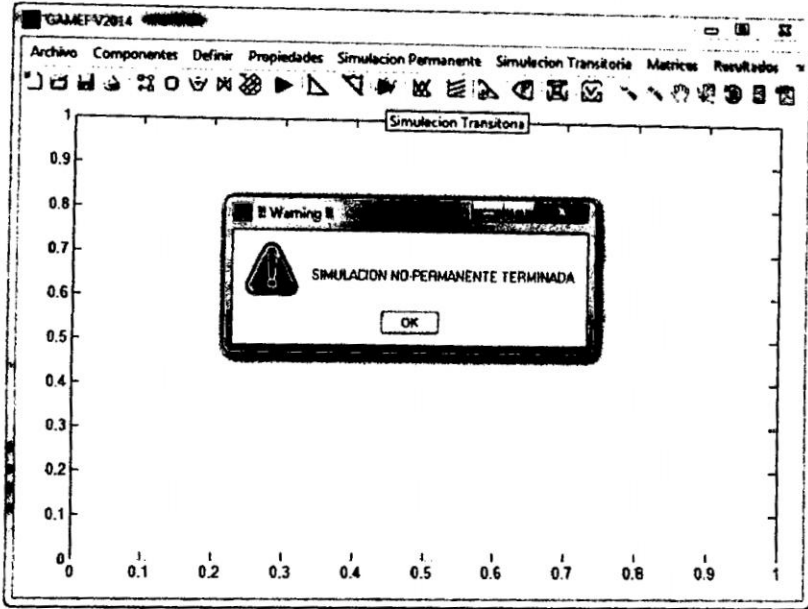


Figura A.15: Ejecutando la simulación en regimen no permanente *GAMEF-V2014*

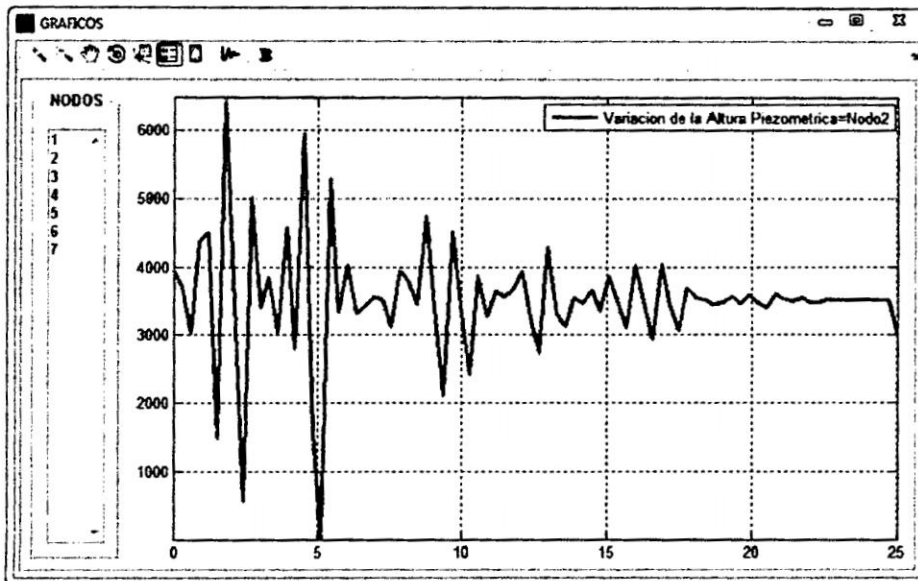


Figura A.16: Evolución temporal de la presión en el nodo 2 *GAMEF-V2014*

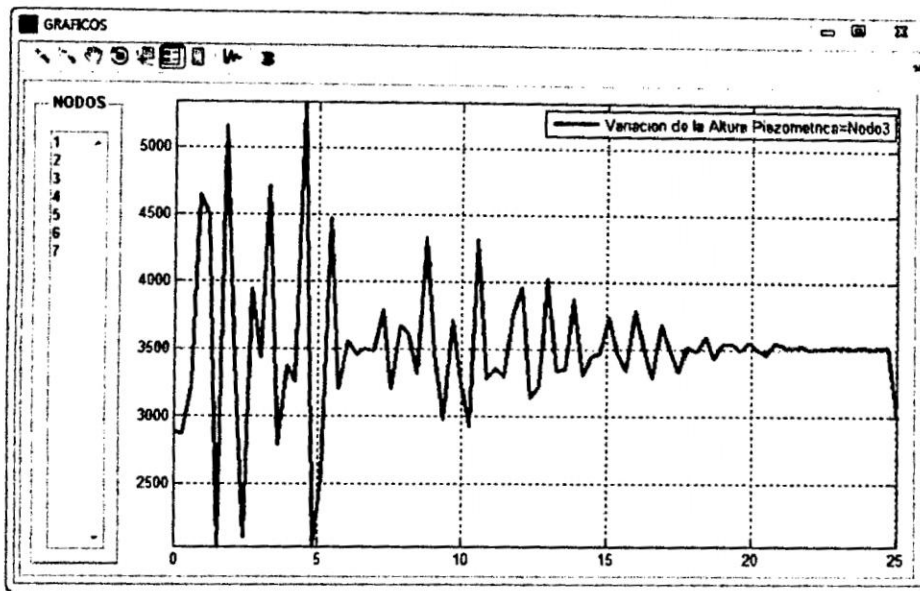


Figura A.17: Evolución temporal de la presión en el nodo 3 *GAMEF-V2014*

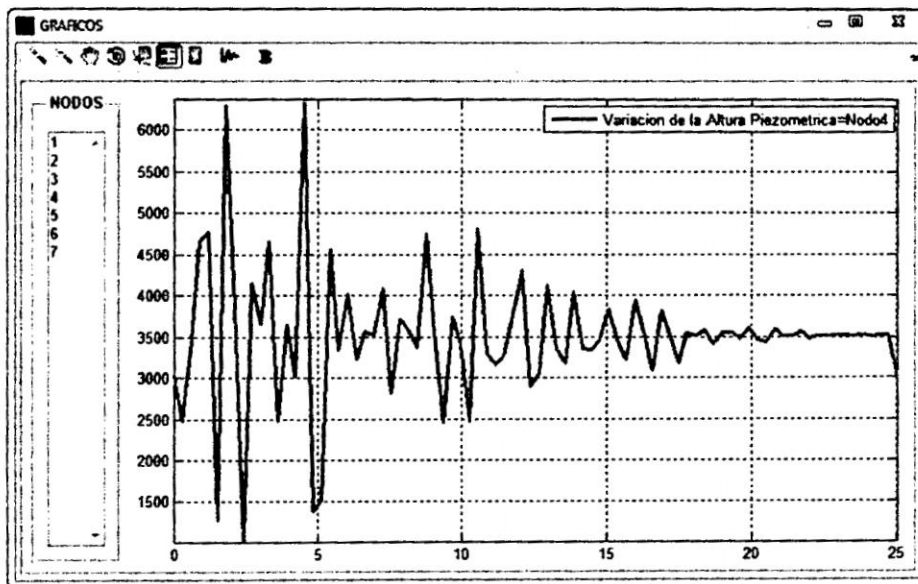


Figura A.18: Evolución temporal de la presión en el nodo 4 *GAMEF-V2014*

A.2. Fase solución

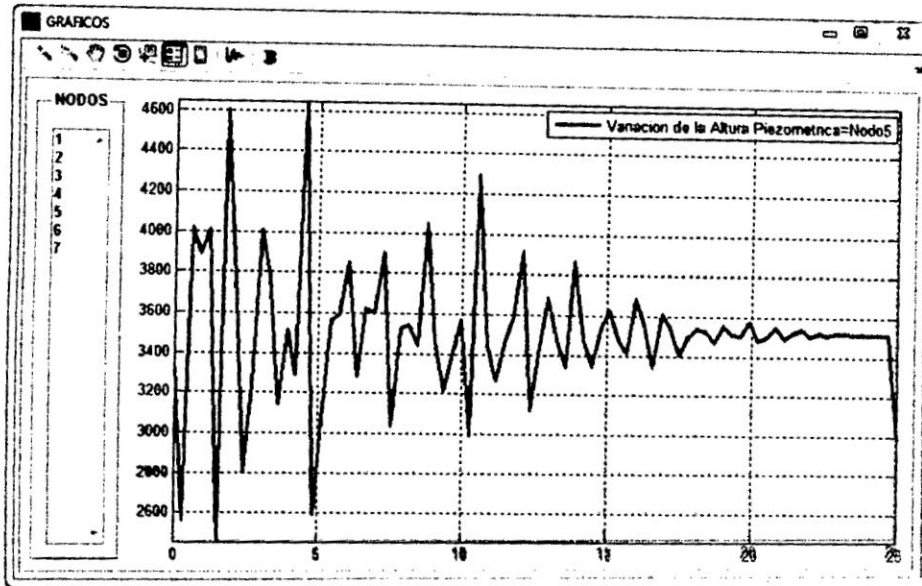


Figura A.19: Evolución temporal de la presión en el nodo 5 *GAMEF-V2014*

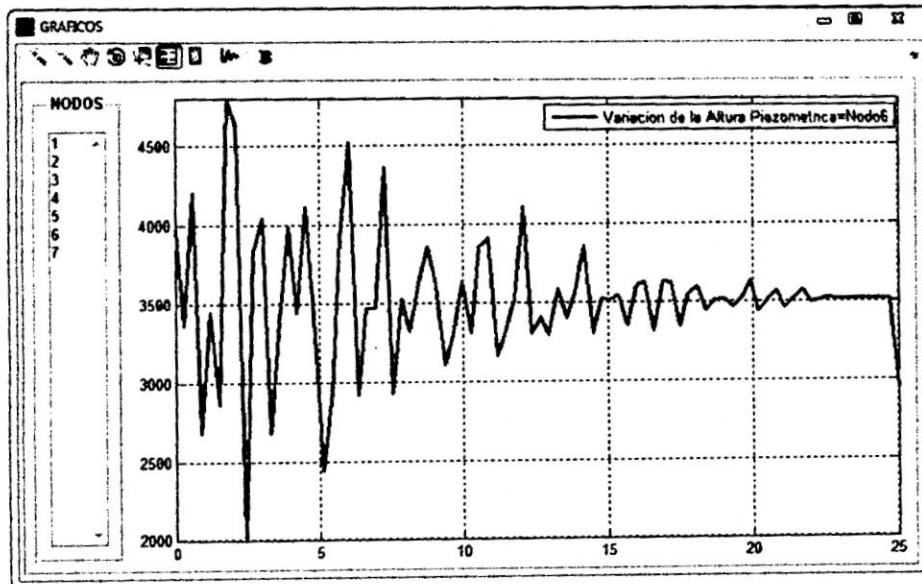


Figura A.20: Evolución temporal de la presión en el nodo 6 *GAMEF-V2014*

A.2. Fase solución

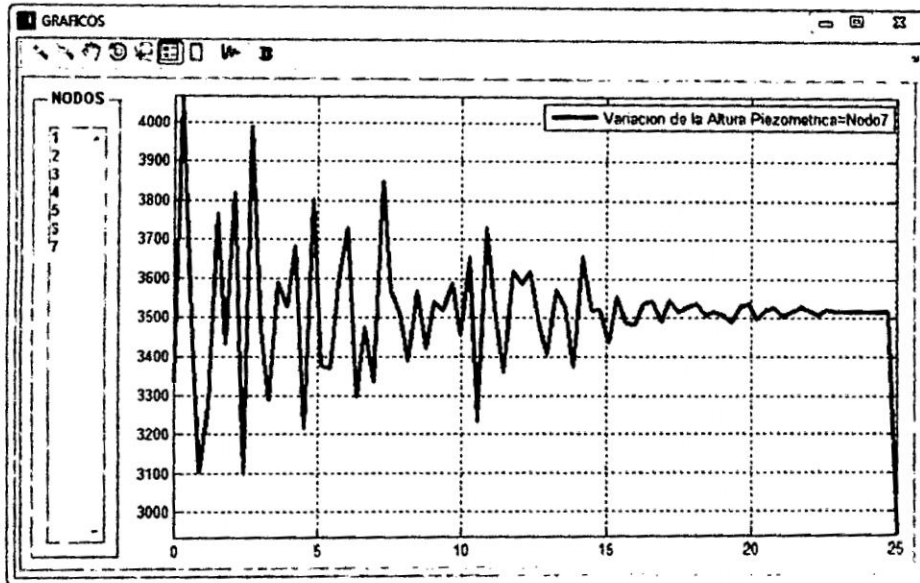


Figura A.21: Evolución temporal de la presión en el nodo 7 *GAMEF-V2014*

Apéndice B

Código Fuente Programa GAMEF

Listing B.1: Código fuente del programa GAMEF

```
1 function varargout = GAMEF(varargin)
2 %←
   =====←
3 %           GAMEF V2014
4 %   PROGRAMA PARA EL ANÁLISIS DEL FLUJO NO PERMANENTE EN REDES DE
5 %   DISTRIBUCUON DE AGUA POR EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS
6 % AUTOR:
7 %   TANTA PABLO JULIÁN
8 %←
   =====←

9 gui_Singleton = 1;
10 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
11                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
12                   'gui_OpeningFcn', @GAMEF_OpeningFcn, ...
13                   'gui_OutputFcn',  @GAMEF_OutputFcn, ...
14                   'gui_LayoutFcn',  [], ...
15                   'gui_Callback',   []);
16 if nargin && ischar(varargin{1})
17     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
18 end
19 if nargin
20     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
21 else
22     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
23 end
24 function GAMEF_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
25 %cla;
26 %colorbar('off')
27 box on
28 handles.output = hObject;
```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```
29 guidata(hObject, handles);
30 function varargout = GAMEF_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
31 varargout{1} = handles.output;
32 function Untitled_1_Callback(hObject, eventdata, handles)
33 function Untitled_2_Callback(hObject, eventdata, handles)
34 function Untitled_3_Callback(hObject, eventdata, handles)
35 function Untitled_4_Callback(hObject, eventdata, handles)
36 NODOS;
37 function Untitled_5_Callback(hObject, eventdata, handles)
38 ELEMENTOS;
39 function Untitled_6_Callback(hObject, eventdata, handles)
40 RESERVORIO;
41 function run_permanente_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
42 %RUN_PERMANENTE();
43 %SOLUTION();
44 GradientMethod_Solution();
45 function RUN_PERMANENTE()
46 global NODE ELEMET RESERV KG
47 %=====Datos generales=====
48 ks=6e-005
49 v=1.004e-006
50 g=9.81
51 Precision=0.000001
52 %=====
53 X=NODE(:,2);
54 Y=NODE(:,3);
55 Z=NODE(:,4);
56 Qd=NODE(:,5);
57 Ni=ELEMET(:,2);
58 Nj=ELEMET(:,3);
59 D=ELEMET(:,4);
60 D=1/1000*D;
61 Sk=ELEMET(:,5);
62 Nr=RESERV(:,1);
63 Ho=RESERV(:,2);
64 NN=length(X);
65 NT=length(Ni);
66 NR=length(Ho);
67 Homax=max(Ho);
68 A12=zeros(NT,NN);
69 for I=1:NT
70     ni=Ni(I);
71     nj=Nj(I);
72     A12(I,ni)=-1;
73     A12(I,nj)=1;
74     dx=X(nj)-X(ni);
75     dy=Y(nj)-Y(ni);
76     L(I)=sqrt(dx^2+dy^2);
77 end
78 A21=A12';
79 for I=1:NN
80     u=0;
81     T=[];
```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

82     for J=1:NT
83         w=A21(I,J);
84         if w~=0
85             u=u+1;
86             T(u,1)=J;
87             T(u,2)=w;
88         end
89     end
90     EC{I,1}={T(:,1),T(:,2)};
91 end
92 nc=EC{1,1}{1,1}
93 nc=EC{1,1}{1,2}
94 %=====Asumiendose las alturas piezometricas=====
95 for I=1:NN
96     HA(I,1)=Z(I)/Homax*abs(Homax-Z(I))+Z(I);
97 end
98 for I=1:NR
99     nr=Nr(I);
100    HA(nr,1)=Ho(I);
101 end
102 %=====calculo=====
103 Esim=Inf;
104 jj=0
105 while Esim>=Precsion
106     KG=zeros(NN,NN);
107     for I=1:NT
108         ni=Ni(I);
109         nj=Nj(I);
110         dx=X(nj)-X(ni);
111         dy=Y(nj)-Y(ni);
112         Li=L(I);
113         Di=D(I);
114         ski=Sk(I);
115         A=pi*Di^2/4;
116         Ev=Inf;
117         V=0.2;
118         hf=abs(HA(nj)-HA(ni));
119         %=====Calculo de velocidades iniciales←
120             *=====
121         j=0;
122         while Ev>=Precsion
123             j=j+1;
124             Vo=V;
125             V=-2*sqrt(2*g*Di*hf/Li)*log10(ks/(3.7*Di)+(2.51*v*sqrt(Li)←
126                 )/(Di*sqrt(2*g*Di*hf)));
127             hf=abs(HA(ni)-HA(nj)-ski*V^2/(2*g));
128             Ev=abs(V-Vo);
129             if j>100
130                 break
131             end
132         end
133         end
134         VV(I)=V;
135         Q(I)=V*A;

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

133      %←
      =====←
134      fo=0.025;
135      Ef=Inf;
136      j=0;
137      %=====Calculo de coeficientes de friccion←
      =====
138      while Ef>=Precsion
139          j=j+1;
140          Re=D(I)*V/v;
141          f(I)=0.25/(log10(ks/(3.7*Di)+2.51/(Re*sqrt(fo))))^2;
142          ff(I)=1.325/(log(ks/(3.7*Di)+5.74/Re^0.9))^2;
143          Ef=abs(f(I)-fo);
144          fo=f(I);
145      end
146      Q(I)=A*sqrt(2*g)*(HA(nj)-HA(ni))/sqrt(ski+f(I)*Li/Di)*abs(HA(←
      nj)-HA(ni))^-0.5);
147      %=====Ensanblando matriz global del sistema←
      =====
148      df=A*sqrt(2*g)/sqrt(ski+f(I)*Li/Di)*abs(HA(nj)-HA(ni))^-0.5);
149      KK=[-df,df;df,-df];
150      V=[ni,nj];
151      for j=1:2
152          for w=1:2
153              KG(V(j),V(w))=KG(V(j),V(w))+KK(j,w);
154          end
155      end
156      %←
      =====←

157      end
158      FG=zeros(NN,1);
159      for I=1:NT
160          ni=Ni(I);
161          nj=Nj(I);
162          A=pi*D(I)^2/4;
163          NK=[ni,nj];
164          kq=A*sqrt(2*g)/sqrt(Sk(I)+f(I)*L(I)/D(I))*abs(HA(nj)-HA(ni))←
      ^(-0.5);
165          F1=kq*HA(ni)-kq*HA(nj);
166          F2=-kq*HA(ni)+kq*HA(nj);
167          for J=1:2
168              SQ=0;
169              nk=NK(J);
170              nc=EC{nk,1}{1,1};
171              SG=EC{nk,1}{1,2};
172              NC=length(nc);
173              for w=1:NC
174                  t=nc(w);
175                  sg=SG(w);
176                  nu=Ni(t);
177                  nv=Nj(t);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

178         Di=D(t);
179         A=pi*Di^2/4;
180         q=A*sqrt(2*g)*((HA(nv)-HA(nu))/(sqrt(Sk(t)+f(t)*L(t)/D(t))))*abs(HA(nv)-HA(nu))^( -0.5);
181         SQ=SQ+sg*q;
182     end
183     %FG(nk,1)=SQ;
184     %if J==1
185     %FG(nk,1)=FG(nk,1)+F1-SQ;
186     %else
187     %FG(nk,1)=FG(nk,1)+F2+SQ;
188     %end
189 end
190 q=A*sqrt(2*g)*((HA(nj)-HA(ni))/(sqrt(Sk(I)+f(I)*L(I)/D(I))))*abs(HA(nj)-HA(ni))^( -0.5);
191 FG(ni,1)=FG(ni,1)+F1-q;
192 FG(nj,1)=FG(nj,1)+F2+q;
193 end
194 FG=FG-Qd;
195 %=====Aplicando enfoque de penalizacion=====
196 FG(Nr,:)=0;
197 KG(Nr,:)=0;
198 for I=1:NR
199     nr=Nr(I);
200     KG(nr,nr)=1;
201 end
202 dH=inv(KG)*FG
203 HA=HA+dH
204 Esim=sqrt(norm(dH))
205 jj=jj+1
206 if jj>500
207     break
208 end
209 end
210 end
211 Q=Q*1000;
212 H1=HA(1,1);
213 H14=HA(14,1);
214 function SOLUTION()
215 global NODE ELEMET RESERV KG KGM FG
216 %=====Datos generales=====
217 ks=0.00006
218 v=1.14e-006
219 g=9.81
220 Precision=0.000001
221 %=====
222 X=NODE(:,2);
223 Y=NODE(:,3);
224 Z=NODE(:,4);
225 Qd=NODE(:,5);
226 Ni=ELEMET(:,2);
227 Nj=ELEMET(:,3);
228 D=ELEMET(:,4);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

228 D=1/1000*D;
229 Sk=ELEMET(:,5);
230 Nr=RESERV(:,1);
231 Ho=RESERV(:,2);
232 NN=length(X);
233 NT=length(Ni);
234 NR=length(Ho);
235 Homax=max(Ho);
236 %=====Asumiendose las alturas piezometricas←
      =====
237 for I=1:NN
238     HA(I,1)=Z(I)/Homax*abs(Homax-Z(I))+Z(I);
239 end
240 for I=1:NR
241     nr=Nr(I);
242     HA(nr,1)=Ho(I);
243 end
244 HA=[100 92 80 75 90 95]';L=[500 400 200 200 400 600 300]';
245 %←
      =====←

6 A12=zeros(NT,NN);
7 for I=1:NT
8     ni=Ni(I);
9     nj=Nj(I);
10    A12(I,ni)=-1;
11    A12(I,nj)=1;
12    dx=X(nj)-X(ni);
13    dy=Y(nj)-Y(ni);
14    %L(I)=sqrt(dx^2+dy^2);
15    A=pi*D(I)^2/4;
16    Ev=Inf;
17    V=0.2;
18    hf=abs(HA(nj)-HA(ni));
19    j=0;
20    while Ev>=Precision
21        j=j+1;
22        Vo=V;
23        V=-2*sqrt(2*g*D(I)*hf/L(I))*log10(ks/(3.7*D(I))+(2.51*v*sqrt(←
24            (L(I)))/(D(I)*sqrt(2*g*D(I)*hf)));
25        hf=abs(HA(nj)-HA(ni)-Sk(I)*V^2/(2*g));
26        Ev=abs(V-Vo);
27        if j>100
28            break
29        end
30    end
31    Q1(I)=V*A;
32    f(I)=0.0025;
33    Q(I)=A*sqrt(2*g)*(HA(nj)-HA(ni))/sqrt(Sk(I)+f(I)*L(I)/D(I))*abs(←
34        HA(nj)-HA(ni))^-0.5);
35 end
A21=A12';
for I=1:NN

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

276     u=0;
277     T=[];
278     for J=1:NT
279         w=A21(I,J);
280         if w~=0
281             u=u+1;
282             T(u,1)=J;
283             T(u,2)=w;
284         end
285     end
286     EC{I,1}={T(:,1),T(:,2)};
287 end
288 %=====calculo=====
289 Esim=Inf;
290 jj=0
291 while Esim>=Precsion
292     KG=zeros(NN,NN);
293     for I=1:NT
294         ni=Ni(I);
295         nj=Nj(I);
296         dx=X(nj)-X(ni);
297         dy=Y(nj)-Y(ni);
298         Li=L(I);
299         Di=D(I);
300         ski=Sk(I);
301         A=pi*Di^2/4;
302         %=====Calculo de coeficientes de friccion←
303         %=====
304         fo=f(I);
305         Ef=Inf;
306         V=abs(Q(I)/A);
307         Re=D(I)*V/v
308         while Ef>=Precsion
309             f(I)=0.25/(log10(ks/(3.7*Di)+2.51/(Re*sqrt(fo))))^2;
310             ff(I)=1.325/(log(ks/(3.7*Di)+5.74/Re^0.9))^2;
311             Ef=abs(f(I)-fo);
312             fo=f(I);
313         end
314         Q(I)=A*sqrt(2*g)*(HA(nj)-HA(ni))/sqrt(ski+f(I)*Li/Di)*abs(HA(←
315             nj)-HA(ni))^-0.5);
316         %=====Ensanblando matriz global del sistema←
317         %=====
318         df=A*sqrt(2*g)/sqrt(ski+f(I)*Li/Di)*abs(HA(nj)-HA(ni))^-0.5);
319         KK=[-df,df;df,-df];
320         V=[ni,nj];
321         for j=1:2
322             for w=1:2
323                 KG(V(j),V(w))=KG(V(j),V(w))+KK(j,w);
324             end
325         end
326     end
327     %←
328     %=====←

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

324     end
325     FG=zeros(NN,1);
326     for I=1:NT
327         ni=Ni(I);
328         nj=Nj(I);
329         A=pi*D(I)^2/4;
330         NK=[ni,nj];
331         kq=A*sqrt(2*g)/sqrt(Sk(I)+f(I)*L(I)/D(I))*abs(HA(nj)-HA(ni))<-
            ^(-0.5);
332         F1=kq*HA(ni)-kq*HA(nj);
333         F2=-kq*HA(ni)+kq*HA(nj);
334         for J=1:2
335             SQ=0;
336             nk=NK(J);
337             nc=EC{nk,1}{1,1};
338             SG=EC{nk,1}{1,2};
339             NC=length(nc);
340             for w=1:NC
341                 t=nc(w);
342                 sg=SG(w);
343                 nu=Ni(t);
344                 nv=Nj(t);
345                 Di=D(t);
346                 A=pi*Di^2/4;
347                 q=A*sqrt(2*g)*((HA(nv)-HA(nu))/(sqrt(Sk(t)+f(t)*L(t)/D<-
348                     (t))))*abs(HA(nv)-HA(nu))<-
349                     ^(-0.5);
350                 SQ=SQ+sg*q;
351             end
352             %FG(nk,1)=SQ;
353             %if J==1
354             %FG(nk,1)=FG(nk,1)+F1-SQ;
355             %else
356             %FG(nk,1)=FG(nk,1)+F2+SQ;
357             %end
358         end
359         q=A*sqrt(2*g)*((HA(nj)-HA(ni))/(sqrt(Sk(I)+f(I)*L(I)/D(I))))<-
360             abs(HA(nj)-HA(ni))<-
361             ^(-0.5);
362         FG(ni,1)=FG(ni,1)+F1+Q(I);
363         FG(nj,1)=FG(nj,1)+F2+Q(I);
364     end
365     FG=FG-Qd;
366     %=====Aplicando enfoque de penalizacion<-
367     %=====
368     FG(Nr,:)=0;
369     KG(Nr,:)=0;
370     for I=1:NR
371         nr=Nr(I);
372         KG(nr,nr)=1;
373     end
374     dH=inv(KG)*FG
375     HA=HA+dH
376     Esim=sqrt(norm(dH))
377     jj=jj+1

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

373     if jj>1
374         break
375     end
376 end
377 Q=Q*1000;
378 H1=HA(1,1);
379 H2=HA(2,1);
380 H3=HA(3,1);
381 H14=HA(14,1);
382 %←
=====

83 function GradientMethod_Solution()
84 global Ni Nj D SK NT X Y Z Qd NN NH HR NR v Ge K ks E u ELEMET PTAB ←
      JTAB
85 g=9.80665;
86 pres=0.0001;
87 for I=1:NT
88     L(I)=sqrt((X(Nj(I))-X(Ni(I)))^2+(Y(Nj(I))-Y(Ni(I)))^2);
89 end
90 PE = zeros(NN,1);
91 for i=1:NR
92     PE(NH(i))=1;
93 end
94 Qa=sum(Qd)/NT
95 for i=1:NT
96     Q(i,1)=Qa;
97 end
98 fila=0;
99 for i=1:NN
100     if PE(i)==0
101         fila=fila+1;
102         q(fila,1)=Qd(i);
103     end
104 end
105 Ho=zeros(NN-NR,1);
106 MC=zeros(NN);
107 for i=1:NN
108     for j=1:NT
109         if i==Ni(j)
110             MC(i,j)=-1;
111         end
112         if i==Nj(j)
113             MC(i,j)=1;
114         end
115     end
116 end
117 fila=0;
118 for i=1:NN
119     if PE(i)==0
120         fila=fila+1;
121         for j=1:NT
122             A21(fila, j)=MC(i, j);

```

```

423     end
424   end
425 end
426 A12=A21';
427 col=0;
428 for i=1:NN
429   if PE(i) == 1
430     col=col+1;
431     for j=1:NT
432       A10(j,col)=MC(i, j);
433     end
434   end
435 end
436 I=eye(NT);
437 N=2*I;
438 delta=8/(g*pi^2);
439 w=5;
440 m=2;
441 Err=1;
442 pres=0.000001;
443 Ho=HR;
444 fo=0.01;
445 while Err>pres
446   Qo=Q;
447   for i=1:NT
448     Re=(4*abs(Q(i)))/(pi*D(i)*v);
449     Error=1;
450     while Error>pres
451       f(i)=0.25/(Log10(ks/(3.7*D(i))+2.51/(Re*sqrt(fo))))^2;
452       Error=abs(f(i)-fo);
453       fo=f(i);
454     end
455     alfa=(delta*f(i)*L(i))/(D(i)^w);
456     A11(i,i)=alfa*(abs(Q(i)))^(m-1);
457   end
458   H=- (inv(A21*inv(N)*inv(A11)*A12)*(A21*inv(N)*(Q+inv(A11)*A10*Ho)+(←
      q-A21*Q));
459   Q=(I-inv(N))*Q-inv(N)*inv(A11)*(A12*H+A10*Ho);
460   Err=norm(Q-Qo);
461 end
462 k=0;
463 j=0;
464 for i=1:NN
465   if PE(i)==1
466     j=j+1;
467     h=HR(j)
468   else
469     k=k+1;
470     h=H(k);
471   end
472   HT(i,1)=h;
473   JTAB(i,1)=i;
474   JTAB(i,2)=1000*Qd(i);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

475     JTAB(i,3)=Z(i);
476     JTAB(i,4)=h
477     JTAB(i,5)=h-Z(i);
478
479 end
480 for i=1:NT
481     ni=Ni(i);
482     nj=Nj(i);
483     hg=HT(nj)-HT(ni);
484     A=pi*D(i)^2/4;
485     NTB(i,1)=L(i);
486     NTB(i,2)=1;
487     NTB(i,3)=f(i);
488     NTB(i,4)=HT(ni);
489     NTB(i,5)=HT(nj);
490     NTB(i,6)=hg;
491     NTB(i,7)=hg/L(i);
492     NTB(i,8)=1000*Q(i);
493     NTB(i,9)=Q(i)/A;
494 end
495 PTAB=[ELEMET,NTB];
496 warndlg('SIMULACION PERMANENTE TERMINADA','!! Warning !!')
497 %←
=====←

498 function Untitled_7_Callback(hObject, eventdata, handles)
499 function Untitled_8_Callback(hObject, eventdata, handles)
500 global mat
501 mat=1;
502 MATRICES;
503 function Untitled_9_Callback(hObject, eventdata, handles)
504 global mat
505 mat=2;
506 MATRICES;
507 function Untitled_10_Callback(hObject, eventdata, handles)
508 global mat
509 mat=3;
510 MATRICES;
511 function Untitled_11_Callback(hObject, eventdata, handles)
512 function Untitled_12_Callback(hObject, eventdata, handles)
513 J_REPORT;
514 function Untitled_13_Callback(hObject, eventdata, handles)
515 R_TUBERIAS;
516 function Untitled_14_Callback(hObject, eventdata, handles)
517 global X Y Z JTAB
518 figure;
519 Network3D();
520 function Network3D()
521 global JTAB Ni Nj NT X Y Z
522 H=JTAB(:,4);
523 for k=1:NT
524     xm=(X(Ni(k))+X(Nj(k)))/2;
525     ym=(Y(Ni(k))+Y(Nj(k)))/2;

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

526     line([X(Ni(k)) X(Nj(k))],[Y(Ni(k)) Y(Nj(k))],[Z(Ni(k)) Z(Nj(k))], '←
       LineStyle','-','Color','b','LineWidth',1.5);
527     line([X(Ni(k)) X(Nj(k))],[Y(Ni(k)) Y(Nj(k))],[H(Ni(k)) H(Nj(k))], '←
       LineStyle','-','Color','r','LineWidth',1.5);
528     line([X(Ni(k)) X(Ni(k))],[Y(Ni(k)) Y(Ni(k))],[Z(Ni(k)) H(Ni(k))], '←
       LineStyle','-','Color','c','LineWidth',1.5);
529     line([X(Nj(k)) X(Nj(k))],[Y(Nj(k)) Y(Nj(k))],[Z(Nj(k)) H(Nj(k))], '←
       LineStyle','-','Color','c','LineWidth',1.5);
530     % text(xm,ym,num2str(k),'color','k',...
531           % 'BackgroundColor',c,'EdgeColor','b','FontWeight','bold',...
532           % 'HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','Middle','←
           FontSize',7);
533 end
534 xmin=min(X)
535 xmax=max(X)
536 ymin=min(Y)
537 ymax=max(Y)
538 zmin=min(Z)
539 zmax=max(Z)
540 axis([xmin xmax ymin ymax zmin zmax])
541 grid on;
542 function uipushtool1_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
543 cla reset
544 box on
545 %←
=====←

546 function Initial_Mesh_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
547 global Nm
548 Nm=1;
549 [p,t]=Mesh_Generation(Nm);
550 %←
=====←

551 function Refine_Mesh_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
552 global Nm
553 Nm=round(Nm+2*Nm/3);
554 [p,t]=Mesh_Generation(Nm);
555 %←
=====←

556 function [p,t]=Mesh_Generation(Nm)
557 global Ni Nj D SK NT X Y Z NN v Ge K ks E u s
558 e=0.004
559 cla;
560 for I=1:NT
561     Dk=D(I);
562     L(I)=sqrt((X(Nj(I))-X(Ni(I)))^2+(Y(Nj(I))-Y(Ni(I)))^2);
563     fi=1-u^2;
564     a(I)=sqrt((K/Ge)*(1/(1+Dk*K*fi/(E*e))));
565     DT(I)=L(I)/(Nm*a(I));
566 end
567 dt=min(DT);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

568 for I=1:NT
569     N(I)=round(L(I)/(dt*a(I)));
570     DX(I)=L(I)/N(I);
571     CN(I)=dt*a(I)/DX(I);
572 end
573 i=0;
574 j=NN;
575 w=1;
576 p(1,1)=w;
577 p(1,2)=X(w);
578 p(1,3)=Y(w);
579 for k=1:NT
580     Nk=N(k);
581     ni=Ni(k);
582     nj=Nj(k);
583     Xij=[X(ni);X(nj)];
584     Yij=[Y(ni);Y(nj)];
585     for n=1:Nk
586         i=i+1;
587         S=[1-n/Nk,n/Nk];
588         t(i,1)=ni;
589         if n<Nk
590             j=j+1;
591             w=w+1;
592             p(w,1)=j;
593             p(w,2)=S*Xij;
594             p(w,3)=S*Yij;
595             t(i,2)=j;
596         else
597             if isempty(find(p(:,1)==nj))
598                 w=w+1;
599                 p(w,1)=nj;
600                 p(w,2)=S*Xij;
601                 p(w,3)=S*Yij;
602             end
603             t(i,2)=nj;
604         end
605         t(i,3)=k;
606         ni=j;
607     end
608 end
609 %figure;
610 hold on;
611 p=sortrows(p,1);
612 [np mp]=size(p);
613 [nt mt]=size(t);
614 xc=max(X)
615 yc=max(Y)
616
617 Draw_Pipe();
618 plot(p(:,2),p(:,3),'o','MarkerEdgeColor','g','MarkerFaceColor','g','←
        MarkerSize',12);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

619 plot(X,Y,'o','MarkerEdgeColor','m','MarkerFaceColor','m','MarkerSize'←
    ,12)
620 text(p(:,2),p(:,3),strcat(num2str(p(:,1))),'color','k','←
    HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','Middle','←
    FontSize',8);
621
622 text(xc,yc,strcat('Numero de Nodos=',num2str(np)), 'color','k','←
    HorizontalAlignment','Right','VerticalAlignment','Middle','FontSize←
    ',10);
623 text(xc,yc-50,strcat('Numero de Elementos=',num2str(nt)), 'color','k','←
    HorizontalAlignment','Right','VerticalAlignment','Middle','FontSize←
    ',10);
624
625 %legend(strcat('Nodos=',num2str(np)), 'Location','best');
626 %legend(strcat('Elementos=',num2str(nt)), 'Location','best');
627 %axis equal
628 Axis_Limit();
629 %axis off
630 %box off
631 %←
    =====←
632 function [SW,Dtime,Ntime] =SpeedWave(Nm)
633 global Ni Nj D SK NT X Y Z NN v Ge K ks E u s Stime
634 e=0.004;
635 cla;
636 for I=1:NT
637     Dk=D(I);
638     L(I)=sqrt((X(Nj(I))-X(Ni(I)))^2+(Y(Nj(I))-Y(Ni(I)))^2);
639     fi=1-u^2;
640     SW(I)=sqrt((K/Ge)*(1/(1+Dk*K*fi/(E*e))));
641     DT(I)=L(I)/(Nm*SW(I));
642 end
643 Dtime=min(DT);
644 Ntime=ceil(Stime/Dtime);
645 function Untitled_15_Callback(hObject, eventdata, handles)
646 function Untitled_16_Callback(hObject, eventdata, handles)
647 PROPIEDADES;
648 function Drawin_Network_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
649 Draw_Network();
650 function Draw_Network()
651 global X Y Z NN Ni Nj D SK NT NH HR NR
652 cla reset;
653 XYH=nodes();
654 hold on;
655 c=[1 1 0.8];
656 for k=1:NT
657     xm=(X(Ni(k))+X(Nj(k)))/2;
658     ym=(Y(Ni(k))+Y(Nj(k)))/2;
659     line([X(Ni(k)) X(Nj(k))],[Y(Ni(k)) Y(Nj(k))], 'LineStyle','-', '←
        Color','b','LineWidth',1.5);
660     text(xm,ym,num2str(k), 'color','k',...
661         'BackgroundColor',c,'EdgeColor','b','FontWeight','bold',...

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

662         'HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','Middle','↵
           FontSize',7);
663 end
664 plot(XYH(:,2),XYH(:,3),'o','MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','c'↵
        , 'MarkerSize',8);
665 Draw_Valve();
666 Draw_Reservoir();
667 text(XYH(:,2),XYH(:,3),strcat(num2str(XYH(:,1))),'color','k','↵
        HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','Middle','↵
        FontWeight','bold','FontSize',7);
668 %axis equal
669 Axis_Limit();
670 %↵
        =====↵

671 function XYH=nodes()
672 global X Y Z NN NR NH
673 w=0;
674 for j=1:NN
675     for i=1:NR
676         if j==NH(i)
677             break
678         end
679         if i==NR
680             w=w+1;
681             XYH(w,1)=j;
682             XYH(w,2)=X(j);
683             XYH(w,3)=Y(j);
684             ZN(w,1)=Z(j);
685         end
686     end
687 end
688 function Draw_Pipe()
689 global Ni Nj NT X Y
690 for k=1:NT
691     line([X(Ni(k)) X(Nj(k))],[Y(Ni(k)) Y(Nj(k))],'LineStyle','-','↵
        Color','b','LineWidth',1.5);
692 end
693 %↵
        =====↵

694 function Draw_Reservoir()
695 global X Y NH HR NR
696 b=0.01*(max(X)-min(X))
697 h=b+b/3
698 an=pi/5
699 for j=1:NR
700     i=NH(j);
701     xo=X(i);
702     yo=Y(i);
703     xx=[xo-h*cot(an)-b/2,xo-b*cot(an)-b/2,xo-b/2,xo+b/2,xo+b/2+b*cot(↵
        an),xo+b/2+h*cot(an)];
704     yy=[yo+h,yo+b,yo,yo,yo+b,yo+h];

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

705     plot(xx,yy,'color','k');
706     fill(xx(:,2:5),yy(:,2:5),'c');
707 end
708 %←
=====←

709 function Draw_Valve()
710 global X Y Ni Nj SK NT XYV XYVL NV
711 d=0.008*(max(X)-min(X));
712 if isempty(XYV & NV)
713     [XYV,XYVL,NV]=Coordinate_Valve();
714 end
715 for n=1:NV
716     i=XYV(n,1);
717     nv=0;
718     vc=XYV(n,8);
719     sg=-1;
720     for j=1:2
721         xi=X(Ni(i));
722         yi=Y(Ni(i));
723         xj=X(Nj(i));
724         yj=Y(Nj(i));
725         l=sqrt((xj-xi)^2+(yj-yi)^2);
726         x1=(xj-xi)/l;
727         x2=(yj-yi)/l;
728         if vc==1
729             x=XYV(n,2)+sg*d*(xj-xi)/l;
730             y=XYV(n,3)+sg*d*(yj-yi)/l;
731             m=(yj-yi)/(xj-xi);
732         else
733             x=XYV(n,2)+sg*d;
734             y=XYV(n,3);
735             m=0;
736             yi=y;
737         end
738         gs=1;
739         for w=1:2
740             nv=nv+1;
741             xyv=inv([1 m; m -1])*[x+m*y;gs*d*sqrt(1+m^2)+m*xi-yi];
742             xv(nv,1)=xyv(1,1);
743             yv(nv,1)=xyv(2,1);
744             gs=-1*gs;
745         end
746         sg=-1*sg;
747     end
748     cv=XYV(n,8);
749     if cv==1
750         c=[0.8549     0.4941     0.1373];
751     else
752         c=[0.8471     0.1608         0];
753     end
754     fill(xv,yv,c);
755     plot([xv;xv(1,1)],[yv;yv(1,1)],[color',c);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

756 end
757 %←
=====←

758 function [XYV,XYVL,NV]=Coordinate_Valve()
759 global Ni Nj SK NT X Y Z
760 NV=0;XYV=[];XYVL={};
761 for i=1:NT
762     val=SK(i)
763     if val~=0
764         NV=NV+1;
765         xm=(X(Ni(i))+X(Nj(i)))/2;
766         ym=(Y(Ni(i))+Y(Nj(i)))/2;
767         zm=(Z(Ni(i))+Z(Nj(i)))/2;
768         XYV(NV,1)=i;
769         XYV(NV,2)=xm;
770         XYV(NV,3)=ym;
771         XYV(NV,4)=zm;
772         XYV(NV,5)=val;
773         XYV(NV,6)=6;
774         XYV(NV,7)=1;
775         XYV(NV,8)=1;
776         XYVL(NV,1)=cellstr(strcat('P-',num2str(i)));
777         XYVL(NV,2)=cellstr(strcat(num2str(xm)));
778         XYVL(NV,3)=cellstr(strcat(num2str(ym)));
779         XYVL(NV,4)=cellstr(strcat(num2str(zm)));
780         XYVL(NV,5)=cellstr(strcat(num2str(val)));
781         XYVL(NV,6)=cellstr(strcat(num2str(6)));
782         XYVL(NV,7)=cellstr(strcat('PRV'));
783     end
784 end
785 %←
=====←

786 function Valve_Edit_Callback(hObject, eventdata, handles)
787 global NODE ELEMET NT XYV XYVL NV sel TL cv
788 if isempty(NODE)
789     errordlg('Ingreso datos de lo nodos de la red','ERROR');
790     return;
791 end
792 if isempty(ELEMET)
793     errordlg('Ingreso datos de las tuberias de la red','ERROR');
794     return;
795 end
796 if isempty(XYV)
797     cv=1;
798     sel=linspace(1,NT,NT);
799     TL='TUBERIAS';
800     [XYV,XYVL,NV]=Coordinate_Valve()
801 end
802 VALVULAS;
803 function Transient_Simulation_ClickedCallback(hObject, eventdata, ←
handles)

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

801 global PTAB JTAB NN NT Ni Nj D SK KG1 KG2 Stime Nm SWG HTIME TIME ←
      TIME2 v HEXTREM PEXTREM Z
805 cla reset
806 box on
807 alfa=0.5;
808 e=0.004;
809 g=9.81;
810 [SW,Dtime,Ntime]=SpeedWave(Nm);
811 %a=1250
812 %ts=140
813 %dt=0.5
814 L=PTAB(:,6);
815 Ho=abs(JTAB(:,4));
816 Vi=PTAB(:,14);
817 V=abs(PTAB(:,14));
818 F=PTAB(:,8);
819 Vo=DVelocity(V);
820 Vt=Vo;
821 KG1=zeros(NN,NN);
822 KG2=zeros(NN,NN);
823 KG3=zeros(NN,NN);
824 KG4=zeros(NN,NN);
825 KG5=zeros(NN,NN);
826 h = waitbar(0,'Simulacion Transitoria');
827 for i=1:NT
828     ni=Ni(i,1);
829     nj=Nj(i,1);
830     l=L(i,1)/6;
831     f=F(i,1);
832     d=D(i,1);
833     a=SW(i);
834     %a=SWG;
835     K0=(1/l)*[-1 1;-1 1];
836     %K0=(3/l)*[-1 1;1 -1];
837     K1=l*[2 1;1 2];
838     K2=0.5*[-1 1;-1 1];
839     K3=a^2*K0;
840     K4=(g*Dtime)*K0;
841     K5=((f*Dtime*abs(Vi(i,1)))/(2*d))*[1 0;0 1];
842     V=[ni;nj];
843     for j=1:2
844         for k=1:2
845             KG1(V(j,1),V(k,1))=KG1(V(j,1),V(k,1))+K1(j,k);
846             KG2(V(j,1),V(k,1))=KG2(V(j,1),V(k,1))+K2(j,k);
847             KG3(V(j,1),V(k,1))=KG3(V(j,1),V(k,1))+K3(j,k);
848             KG4(V(j,1),V(k,1))=KG4(V(j,1),V(k,1))+K4(j,k);
849             KG5(V(j,1),V(k,1))=KG5(V(j,1),V(k,1))+K5(j,k);
850         end
851     end
852     waitbar(i/NT);
853 end
854 close(h);
855 xx=linspace(1,NN,NN);

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

856 %figure
857 %IK=KG1^(-1)*KG2;
858 %Ht=Ho+(Dtime*a^2/g)*IK*((alfa-1)*Vo-alfa*Vt)
859 %Vt=Vo+g*dt*IK*((alfa-1)*Ho-alfa*Ht)
860 %Ht2=Ho+KG3*((alfa-1)*Vo-alfa*Vt)
861 %Vt=Vo+KG4*((alfa-1)*Ho-alfa*Ht)+KG5*((alfa-1)*Vo-alfa*Vt)
862 %cla reset
863 %hold on
864 HTIME=Ho;
865 TIME=0;
866 Ht=Ho;
867 h = waitbar(0,'Simulacion Transitoria');
868 for i=1:Ntime
869     dt=i*Dtime;
870     TIME=[TIME dt];
871     Htt=Ht+(dt/g)*KG3*((alfa-1)*Vo+alfa*Vt);
872     for j=1:NT
873         ni=Ni(j,1);
874         nj=Nj(j,1);
875         l=L(j,1);
876         d=D(j,1);
877         hf=abs(Htt(nj)-Htt(ni));
878         Vtt(j,1)=((-2*sqrt(2*g*d*hf))/(sqrt(1)))*log10(e/(3.7*d)←
            +(2.51*v*sqrt(1))/(d*sqrt(2*g*d*hf)));
879     end
880     Vo=Vt;
881     Vt=DVelocity(Vtt);
882     HTIME=[HTIME Htt];
883     %c=[rand rand rand];
884     %plot(xx,Htt,'color',c);
885     %Ht=Htt;
886     waitbar(i/Ntime);
887 end
888 close(h);
889 %for i=1:NN
890     %ho=Ho(i,1);
891     %for j=1:Ntime
892         %h=HTIME(i,j);
893         %hM=1.37*ho;
894         %hm=ho-75;
895         %if h>hM
896             %HTIME(i,j)=hM;
897         %end
898         %if h<hm
899             %HTIME(i,j)=hm;
900         %end
901     %end
902 %end
903 HTIME;
904 HMAX=max(HTIME');
905 HMIN=min(HTIME');
906 TIME2=max(TIME)-TIME;
907 TIME;

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

38 %Vtt;
39 Hmax=max(HMAX);
40 Hmin=min(HMIN);
41 Homax=max(Ho);
42 coe=Hmax/Homax;
43 HTIME=HTIME/coe;
44 coe2=min(min(HTIME));
45 HTIME=HTIME+abs(coe2)+15;
46 HTIME(:,1)=Ho;
47 HMAXT=max(HTIME)'
48 HMINT=min(HTIME)'
49 PMAXT=HMAXT-Z;
50 PMINT=HMINT-Z;
51 HEXTREM=[HMAXT, HMINT];
52 PEXTREM=[PMAXT, PMINT];
53 %hold on
54 %plot(xx,Ht)
55 %plot(xx,Ht2)
56 warndlg('SIMULACION NO-PERMANENTE TERMINADA','!! Warning !!');
57 function Vo=DVelocity(V)
58 global PTAB JTAB NN NT Ni Nj
59 for j=1:NN
60     Sv=0;
61     Sf=0;
62     n=0;
63     for k=1:NT
64         if j==Ni(k) | j==Nj(k)
65             Sv=Sv+V(k);
66             n=n+1;
67         end
68     end
69     Vo(j,1)=Sv/n;
70 end
71 function uipushtool23_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
72 global Ntime HTIME NN
73 xx=linspace(1,NN,NN);
74 [nn nh]=size(HTIME);
75 cla reset
76 hold on
77 %h = waitbar(0,'Graficando solucion');
78 for i=1:Ntime+1
79     Htt=HTIME(:,i);
80     c=[rand rand rand];
81     plot(xx,Htt, 'color',c);
82     %waitbar(i/(Ntime+1));
83 end
84 axis tight
85 box on
86 return
87 global Ni Nj D SK NT X Y Z Qd NN NH HR NR v Ge K ks E u ELEMET PTAB ←
88     JTAB ncopc
89 if ncopc==1
90     u=4;

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

160 elseif ncopc==2
161     u=5
162 end
163 time=linspace(0,200,101);
164 cla
165 %figure
166 hold on
167 nt=101;
168 kk=6;
169 for i=kk:kk
170     h=JTAB(Ni(i),u);
171     %h2=JTAB(Nj(i),u);
172     xx=[];
173     yy=[];
174     A=h;
175     for j=1:nt
176         x=time(j);
177         xx(j)=x;
178         y=h+A*sin(x)-A*rand+A*rand;
179         if y>h+h/2
180             %y=h+h/2;
181         end
182         if y<h-h/2
183             %y=h-h/2;
184         end
185         yy(j)=y;
186         A=A-30;
187     end
188     c1=[rand rand rand];
189     c2=[rand rand rand];
190     c3=[rand rand rand];
191     plot(xx,yy,'-o','LineWidth',2.5,'color',c1,'MarkerEdgeColor',c2,'←
        MarkerFaceColor',c3,'MarkerSize',7);
192 end
193 function Untitled_17_Callback(hObject, eventdata, handles)
194 global MetCal
195 MetCal=1;
196 function Untitled_18_Callback(hObject, eventdata, handles)
197 function Untitled_19_Callback(hObject, eventdata, handles)
198 global MetCal
199 MetCal=2;
200 function Untitled_20_Callback(hObject, eventdata, handles)
201 function uipushtool25_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
202 global ncopc
203 ncopc=1;
204 Rcolormap();
205 Assign();
206 function Rcolormap()
207 global ELEMET Ni Nj D SK NT NODE X Y Z Qd NN JTAB PTAB ncopc
208 if ncopc==1
209     u=4;
210 elseif ncopc==2
211     u=5

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

12 end
13 np=100;%100 Number of divisions of each pipe
14 nd=100;%100 Number of divisions of each diameter
15 nt=200;
16 %D=D+1
17 XG=[];
18 YG=[];
19 ZG=[];
20 cla reset
21 %figure
22 thk=Thickness();
23 hold on
24 for i=1:NT
25     d=D(i)+thk;
26     if ncopc==1 | ncopc==2
27         h1=JTAB(Ni(i),u);
28         h2=JTAB(Nj(i),u);
29     elseif ncopc==3
30         h1=abs(PTAB(i,13));
31         h2=h1;
32     elseif ncopc==4
33         h1=abs(PTAB(i,14));
34         h2=h1;
35     end
36     x1=X(Ni(i));
37     y1=Y(Ni(i));
38     x2=X(Nj(i));
39     y2=Y(Nj(i));
40     m=(y2-y1)/(x2-x1);
41     m2=-(x2-x1)/(y2-y1);
42     alfa=atan(m2);
43     mh=(h2-h1)/(x2-x1);
44     my=(h2-h1)/(y2-y1);
45     xmin=min([x1,x2]);
46     xmax=max([x1,x2]);
47     ymin=min([y1,y2]);
48     ymax=max([y1,y2]);
49     xx=linspace(xmin,xmax,np);
50     yg=linspace(ymin,ymax,np);
51     for j=1:np
52         x=xx(j);
53         yh=yg(j);
54         y=m*(x-x1)+y1;
55         x3=x-(d/2)*cos(alfa);
56         y3=m2*(x3-x)+y;
57         x4=x+(d/2)*cos(alfa);
58         y4=m2*(x4-x)+y;
59         xx1=linspace(x3,x4,nd);
60         yf=y-d/2+d;
61         yy=linspace(y-d/2,yf,nd);
62         xh=linspace(x-d/2,x+d/2,nd);
63         h=mh*(x-x1)+h1;
64         hv=my*(yh-y1)+h1;

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

065         for k=1:nd
066             xo=xx1(k);
067             yo=m2*(xo-x3)+y3;
068             Xg(k,j)=xo;
069             Yg(k,j)=yo;
070             if y1==y2
071                 Xg(k,j)=x;
072                 Yg(k,j)=yy(k);
073             end
074             Zg(k,j)=h;
075             if x1==x2
076                 Xg(k,j)=xh(k);
077                 Yg(k,j)=yh;
078                 Zg(k,j)=hv;
079             end
080         end
081     end
082     %[U,V,W] = surfnorm(Xg,Yg,Zg);
083     %quiver3(Xg,Yg,Zg,U,V,W,0.5);
084     %[C,h]=contourf(Xg,Yg,Zg);
085     %text_handle = clabel(C,h);
086     %set(text_handle,'BackgroundColor',[1 1 .6],'Edgecolor',[.7 .7 ←
087         .7]);
088     %contourf(Xg,Yg,Zg);
089     mesh(Xg,Yg,Zg);
090     %colormap(jet)
091     %grid off
092     %hidden off
093     XG=[XG,Xg];
094     YG=[YG,Yg];
095     ZG=[ZG,Zg];
096 } end
097 % [C,h] = contourf(XG,YG,ZG);
098 % clabel(C)
099 % colorbar
100 % contourcmap(1, 'jet');
101 % colorbar('location','southoutside')
102 %[C,h]=contourf(XG,YG,ZG);
103 % mesh(XG,YG,ZG);
104 %[C,h]=contourf(XG,YG,ZG);
105 XYH=nodes();
106 % plotnodes(XYH);
107 Draw_Reservoir();
108 % RLabel(JTAB,XYH);
109 ColorbarScale();
110 % axis equal
111 Axis_Limit();
112 function plotnodes(XYH)
113 plot(XYH(:,2),XYH(:,3),'o','MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','b'←
114     , 'MarkerSize',15);
115 function RLabel(JTAB,XYH);
116 global ncopc
117 if ncopc==1

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

116     RP=round(100*JTAB(XYH(:,1),4))/100;
117 elseif ncopc==2
118     RP=round(100*JTAB(XYH(:,1),5))/100;
119 end
120 text(XYH(:,2),XYH(:,3),strcat(num2str(RP)),'color','k','↵
    HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment','Bottom','↵
    FontWeight','bold','FontSize',15);
21 function ColorbarScale()
22 global ncopc
23 %h=contourcmap(1,'jet')%, 'colorbar','on');
24 colormap(hsv);
25 h = colorbar;
26 if ncopc==1
27     title(h,'H (m)','FontSize',10,'FontWeight','bold','FontName','↵
        Times New Roman');
28     %ylabel(h,'Altura Piezométrica','VerticalAlignment','Bottom','↵
        FontSize',13,'FontAngle','italic','FontWeight','bold','FontName'↵
        ','Times New Roman')
29 elseif ncopc==2
30     title(h,'P (m H2O)','FontSize',10,'FontWeight','bold','FontName','↵
        Times New Roman');
31     %ylabel(h,'Presión Hidrostática','FontSize',13,'FontAngle','↵
        italic','FontWeight','bold','FontName','Times New Roman')
32 elseif ncopc==3
33     title(h,'Q (L/s)','FontSize',10,'FontWeight','bold','FontName','↵
        Times New Roman');
34     %ylabel(h,'Presiones y Velocidades','FontSize',13,'FontAngle','↵
        italic','FontWeight','bold','FontName','Times New Roman')
35 elseif ncopc==4
36     title(h,'V (m/s)','FontSize',10,'FontWeight','bold','FontName','↵
        Times New Roman');
37     %ylabel(h,'Alturas Piezometricas y velocidades','FontSize',13,'↵
        FontAngle','italic','FontWeight','bold','FontName','Times New ↵
        Roman')
38 end
39 function uipushtool26_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
40 global ncopc
41 ncopc=2;
42 Rcolormap();
43 Assign();
44 function uipushtool28_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
45 global ncopc
46 ncopc=3;
47 Rcolormap();
48 Assign();
49 function uipushtool27_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
50 global ncopc
51 ncopc=4;
52 Rcolormap();
53 Assign();
54 box on
55 % -----
56 function uipushtool22_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

157 global JTAB PTAB ncopc NN NT X Y Z Ni Nj D SK
158 for i=1:NT
159     xi=X(Ni(i,1));
160     xj=X(Nj(i,1));
161     yi=Y(Ni(i,1));
162     yj=Y(Nj(i,1));
163     XT(i,1)=(xi+xj)/2;
164     YT(i,1)=(yi+yj)/2;
165     m=(yj-yi)/(xj-xi);
166     alfa(i,1)=180*atan(m)/pi;
167     if m==0
168         alfa(i,1)=0;
169     end
170     if ~isnumeric(m)
171         alfa(i,1)=90;
172     end
173 end
174 if ncopc==1
175     u=4;
176 elseif ncopc==2
177     u=5;
178 elseif ncopc==3
179     u=13;
180 elseif ncopc==4
181     u=14;
182 end
183 if ncopc==1 | ncopc==2
184     G=JTAB(:,u);
185 elseif ncopc==3 | ncopc==4
186     G=abs(PTAB(:,u));
187 end
188 Z=JTAB(:,3);
189 %P=JTAB(:,5);
190 %P=Z+P;
191 n=length(G);
192 %X=linspace(1,n,n);
193 %if u==5
194     %G=Z+G;
195 %end
196 %figure
197 cla
198 set(handles.axes1,'NextPlot','Replace');
199 hold on
200 Draw_Network();
201 %plot(X,H)
202 %plot(X,H,'-o','MarkerEdgeColor','b','MarkerFaceColor','b','MarkerSize←
203     ',15);
204 c1=[rand rand rand];
205 c2=[rand rand rand];
206 c1='g';
207 c2='c';
208 %plot(X,H,'-o','LineWidth',3,'MarkerEdgeColor',c1,'MarkerFaceColor',c1←
209     ', 'MarkerSize',8)

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

208
209 %plot(X,G,'-o','LineWidth',3,'MarkerEdgeColor',c2,'MarkerFaceColor',c2←
    , 'MarkerSize',8)
210 %text(X,G,strcat(num2str(G)),'color','k','HorizontalAlignment','center←
    ', 'VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize',15);
211 if u==4
212     %plot(X,Z,'-o','LineWidth',3,'color','r','MarkerEdgeColor',c1,'←
        MarkerFaceColor',c1,'MarkerSize',8);
213     %text(X,Z,strcat(num2str(Z)),'color','k','HorizontalAlignment','←
        center','VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','←
        FontSize',15);
214     %legend('Presiones');
215 end
216 if ncopc==1
217     legend('Alturas Piezométricas');
218     text(X,Y,strcat(num2str(G)),'color','k','HorizontalAlignment','←
        center','VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','←
        FontSize',15);
219 elseif ncopc==2
220     legend('Presiones');
221     text(X,Y,strcat(num2str(G)),'color','k','HorizontalAlignment','←
        center','VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','←
        FontSize',15);
222 elseif ncopc==3
223     legend('Caudales');
224     for i=1:NT
225         text(XT(i,1),YT(i,1),strcat(num2str(G(i,1))),'color','k','←
            Rotation',alfa(i,1),'HorizontalAlignment','center','←
            VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize'←
            ,15);
226     end
227 elseif ncopc==4
228     legend('Velocidades');
229     for i=1:NT
230         text(XT(i,1),YT(i,1),strcat(num2str(G(i,1))),'color','k','←
            Rotation',alfa(i,1),'HorizontalAlignment','center','←
            VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize'←
            ,15);
231     end
232 end
233 %legend('Elevación','Alturas piezométricas');
234 %legend('Presiones');
235 %legend('show')
236 %legend(G,'parameter_name','parameter_value')
237 axis auto;
238 %grid on;
239 colorbar off
240 Axis_Limit();
241 function Assign()
242 global JTAB PTAB ncopc NN NT X Y Z Ni Nj D SK
243 for i=1:NT
244     xi=X(Ni(i,1));
245     xj=X(Nj(i,1));

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```

246     yi=Y(Ni(i,1));
247     yj=Y(Nj(i,1));
248     XT(i,1)=(xi+xj)/2;
249     YT(i,1)=(yi+yj)/2;
250     m=(yj-yi)/(xj-xi);
251     alfa(i,1)=180*atan(m)/pi;
252     if m==0
253         alfa(i,1)=0;
254     end
255     if ~isnumeric(m)
256         alfa(i,1)=90;
257     end
258 end
259 if ncopc==1
260     u=4;
261 elseif ncopc==2
262     u=5;
263 elseif ncopc==3
264     u=13;
265 elseif ncopc==4
266     u=14;
267 end
268 if ncopc==1 | ncopc==2
269     G=JTAB(:,u);
270 elseif ncopc==3 | ncopc==4
271     G=abs(PTAB(:,u));
272 end
273 if ncopc==1
274     text(X,Y, strcat(num2str(G)), 'color','k','HorizontalAlignment','center',
275           'VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize',10);
276 elseif ncopc==2
277     text(X,Y, strcat(num2str(G)), 'color','k','HorizontalAlignment','center',
278           'VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize',10);
279 elseif ncopc==3
280     for i=1:NT
281         text(XT(i,1),YT(i,1), strcat(num2str(G(i,1))), 'color','k',
282               'Rotation',alfa(i,1),'HorizontalAlignment','center',
283               'VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize',10);
284     end
285 elseif ncopc==4
286     for i=1:NT
287         text(XT(i,1),YT(i,1), strcat(num2str(G(i,1))), 'color','k',
288               'Rotation',alfa(i,1),'HorizontalAlignment','center',
289               'VerticalAlignment','Bottom','FontWeight','bold','FontSize',10);
290     end
291 end
292 end
293 %←
294 =====←

```

Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```
1287 function Axis_Limit()
1288 global X Y
1289 xmin=min(X);
1290 xmax=max(X);
1291 ymin=min(Y);
1292 ymax=max(Y);
1293 r1=0.03*(xmax-xmin);
1294 r2=0.03*(ymax-ymin);
1295 r=max(r1,r2);
1296 axis([xmin-r xmax+r ymin-r ymax+r]);
1297 box on;
1298 % -----
1299 function thk=Thickness()
1300 global X Y thk
1301 xmin=min(X);
1302 xmax=max(X);
1303 ymin=min(Y);
1304 ymax=max(Y);
1305 r1=0.0075*(xmax-xmin);
1306 r2=0.0075*(ymax-ymin);
1307 thk=(r1+r2)/2;
1308 % -----
1309 function uipushtool19_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
1310 [x,y] = ginput(100)
1311 plot(x,y, '-o', 'LineWidth',2.5, 'color', 'b', 'MarkerEdgeColor', 'r', '←
1312     MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize',5);
1313 % -----
1314 function Untitled_21_Callback(hObject, eventdata, handles)
1315 TIME;
1316 % -----
1317 function uipushtool29_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
1318 GRAFICOS;
1319 % -----
1320 function uipushtool30_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
1321 TGRAPHICS;
1322 % -----
1323 function uipushtool20_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
1324 [x,y] = ginput(5);
1325 plot(x,y, 'o', 'LineWidth',2.5, 'color', 'b', 'MarkerEdgeColor', 'r', '←
1326     MarkerFaceColor', 'r', 'MarkerSize',5);
1327 % -----
1328 function Untitled_23_Callback(hObject, eventdata, handles)
1329 % -----
1330 function Untitled_24_Callback(hObject, eventdata, handles)
1331 global mat
1332 mat=4;
1333 MATRICES;
1334 % -----
1335 function Untitled_25_Callback(hObject, eventdata, handles)
1336 global mat
1337 mat=5;
1338 MATRICES;
1339 % -----
```

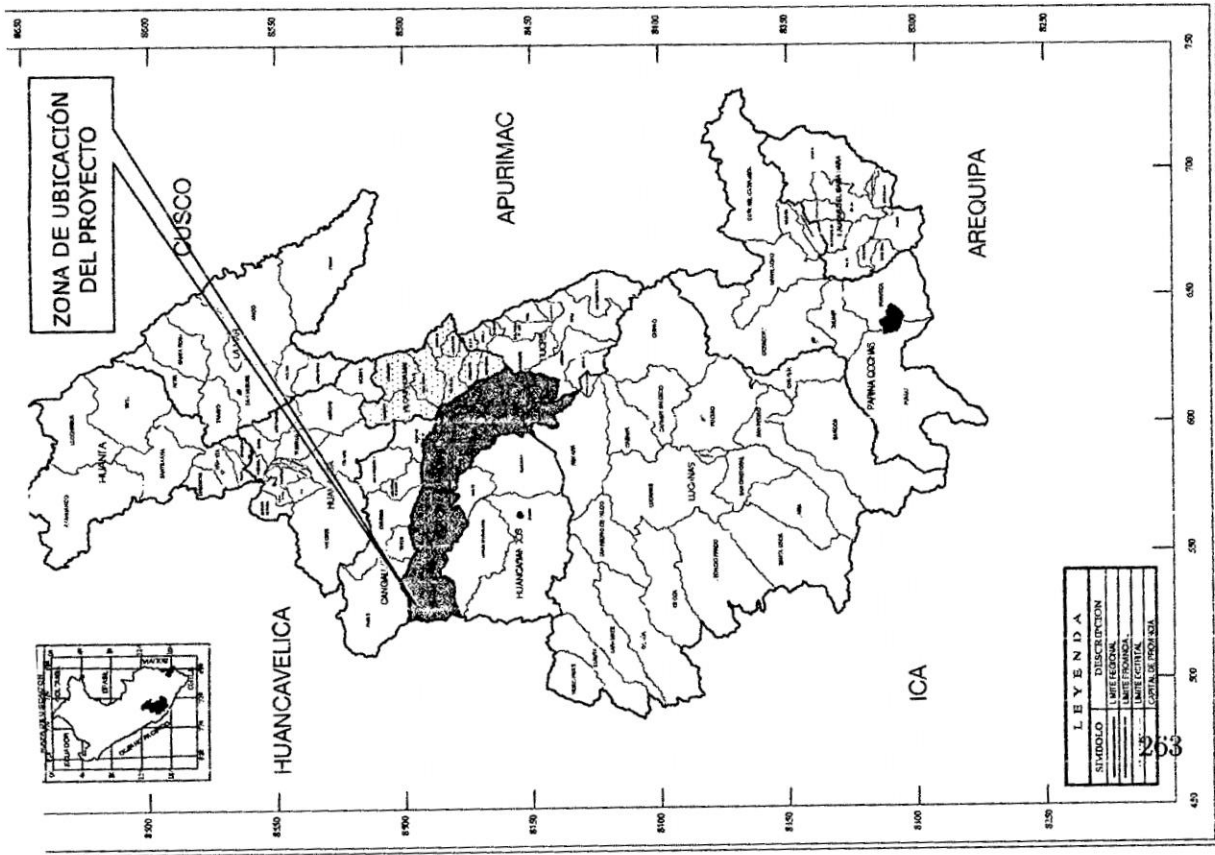
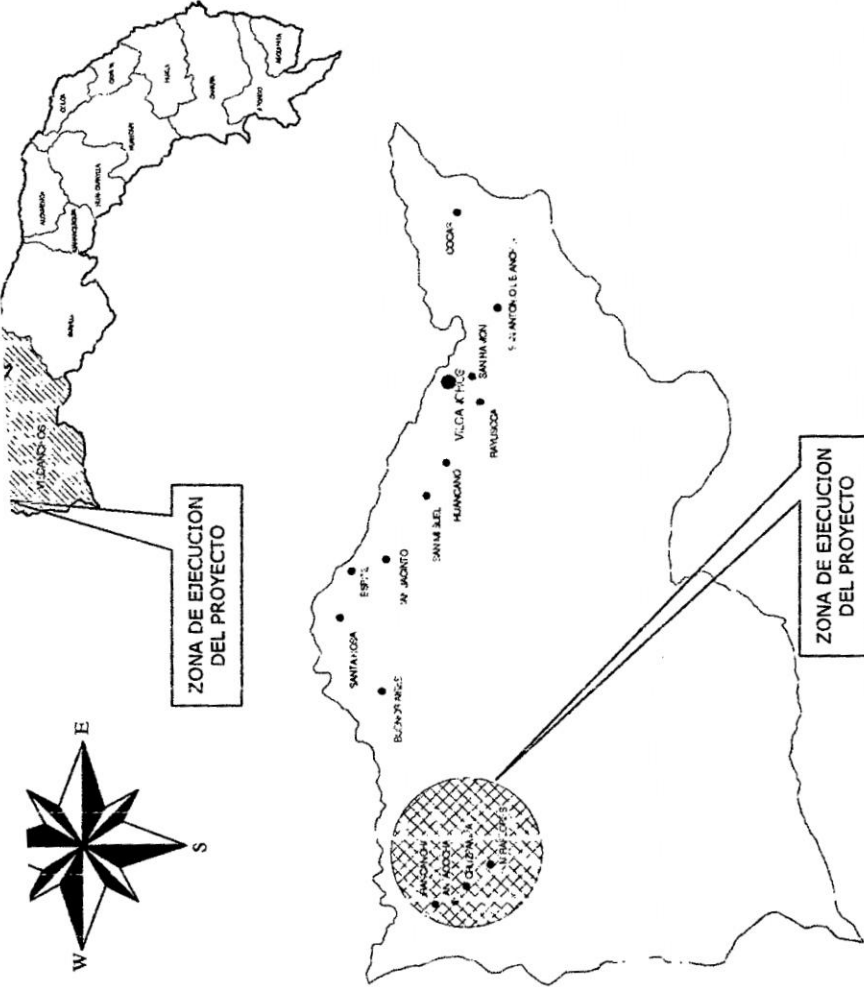
Apéndice B. Código Fuente Programa GAMEF

```
1338 function Untitled_26_Callback(hObject, eventdata, handles)
1339 global mat
1340 mat=6;
1341 MATRICES;
1342 % -----
1343 function Untitled_27_Callback(hObject, eventdata, handles)
1344 % -----
1345 function CBvalvula_Callback(hObject, eventdata, handles)
1346 BORDE;
1347 % -----
1348 function CBreservorio_Callback(hObject, eventdata, handles)
```

Apéndice C

PLANOS

Apéndice C. PLANOS



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

UBICACION Y LOCALIZACION

UL-01



Asesor:	Exp. Jorge L. R. Vela Paredes	Tema:	Barridos, Torre Paredes, An.	Sección:	Dormición Esclavizadora
Proyecto de Tesis:	"MODELACION MATEMATICA COMPUTACIONAL DEL FLUJO NO PERMANENTE EN REDES DE TUBERIAS CON EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS"	Ubicación:	HUAMANGA	Prova:	VIETOR RAMIRO
Curso:	ANÁLISIS DE REDES DE TUBERIAS CON EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS	DISTRITO:	MULTICOMUNAL	LUGAR:	MULTICOMUNAL
		Estado:	Indefinido	Fecha:	AGOSTO 2014

LEYENDA

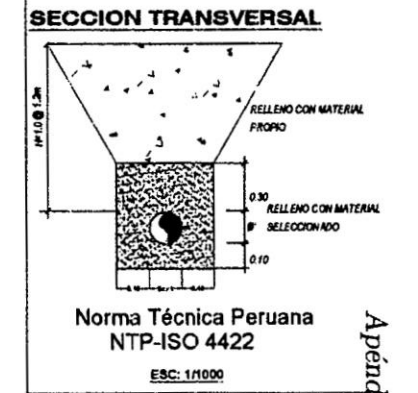
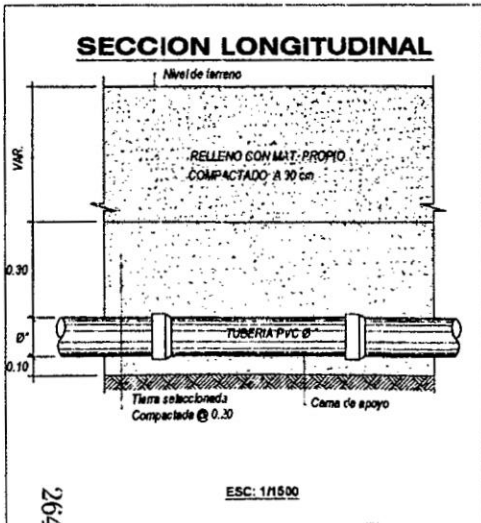
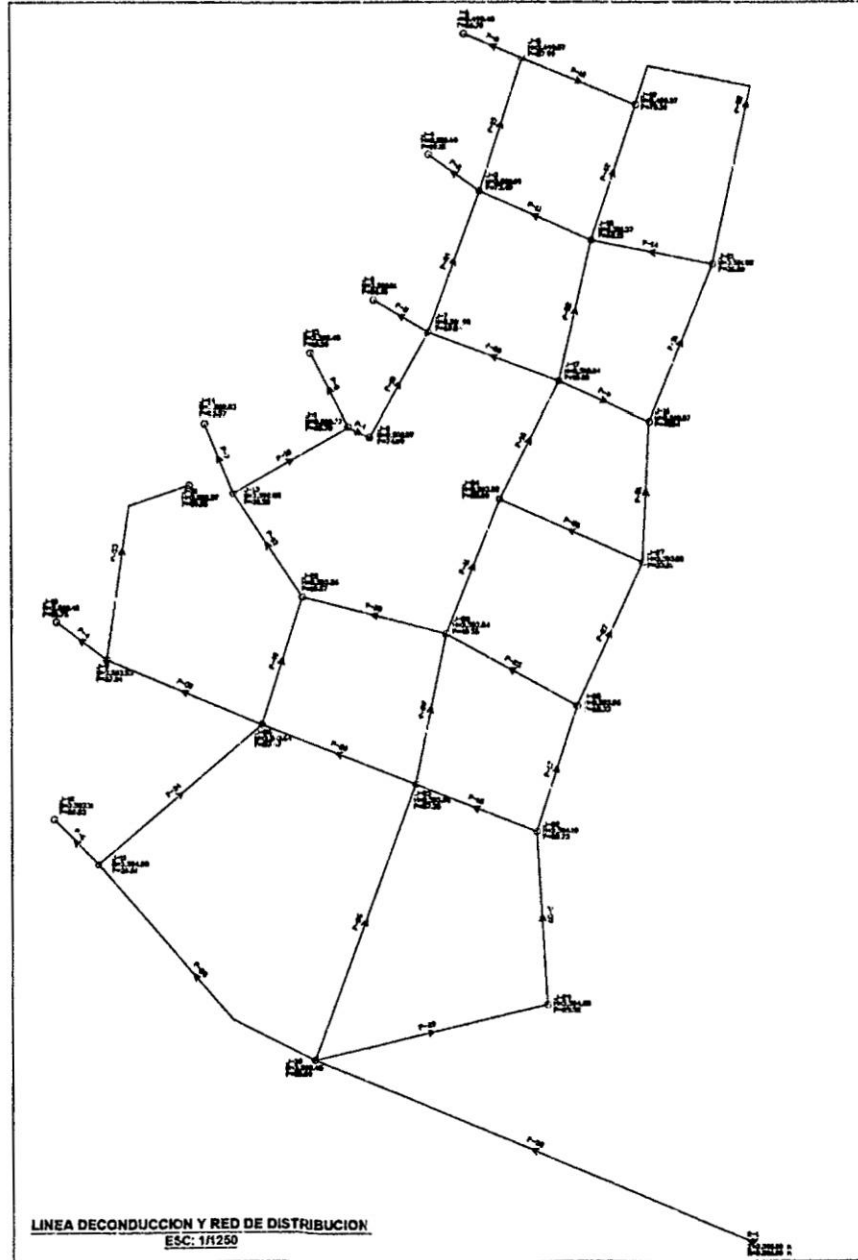
SYMBOLO	DESCRIPCION
(Shaded Area)	ZONA DE EJECUCION DEL PROYECTO
(Dotted Area)	ZONA DE UBICACION DEL PROYECTO
(Line)	LINEA FERROVIARIA
(Line)	LINEA ECHECUAL
(Line)	LINEA DE BARRIO

Reporte de los nodos en régimen permanente con el programa WaterCAD V8i

Label	Elevation (m)	Demand (l/s)	Hydraulic Grade (m)	Pressure (m H ₂ O)
1	3436.91	0.27	3502.77	65.73
2	3427.53	0.11	3502.57	74.08
3	3427.05	0.11	3500.69	73.49
4	3481.30	0.24	3500.49	19.15
5	3441.47	0.14	3499.57	57.99
6	3432.60	0.20	3499.43	66.70
7	3439.61	0.18	3501.98	62.24
8	3474.61	0.10	3500.81	26.15
9	3466.41	0.21	3503.53	37.04
10	3451.56	0.17	3509.42	51.75
11	3467.60	0.16	3504.28	36.61
12	3470.82	0.10	3503.11	32.23
13	3472.30	0.27	3502.95	30.58
14	3447.15	0.16	3502.81	55.57
15	3483.91	0.27	3502.45	18.50
16	3457.44	0.21	3502.57	45.04
17	3484.92	0.21	3503.04	18.08
18	3439.11	0.11	3501.37	62.13
19	3425.93	0.25	3498.37	72.30
20	3484.95	0.13	3503.26	18.27
21	3465.65	0.15	3501.93	36.20
22	3471.40	0.11	3504.19	32.73
23	3446.38	0.23	3503.85	57.35
24	3447.27	0.24	3503.28	55.89
25	3441.50	0.10	3503.96	62.33
26	3446.06	0.28	3503.64	57.47
27	3470.53	0.13	3503.80	33.21
28	3462.91	0.26	3503.54	40.55
29	3475.10	0.13	3504.68	29.52
30	3454.46	0.25	3505.45	50.89
31	3452.41	0.29	3502.57	50.05
32	0.00	3504.00	3506.00	2.00

Reporte de los nodos en régimen permanente con el programa GAFEMv2014

Label	Elevation (m)	Demand (l/s)	Hydraulic Grade (m)	Pressure (m H ₂ O)
1	0.27	3436.91	3502.76	65.85
2	0.11	3427.53	3502.57	75.04
3	0.11	3427.05	3500.73	73.68
4	0.24	3481.30	3500.54	19.24
5	0.14	3441.47	3499.67	58.20
6	0.20	3432.60	3499.53	66.93
7	0.18	3439.61	3501.99	62.38
8	0.10	3474.61	3500.82	26.21
9	0.21	3466.41	3508.52	37.11
10	0.17	3451.56	3503.41	51.65
11	0.16	3467.60	3504.29	36.69
12	0.10	3470.82	3503.12	32.30
13	0.17	3472.30	3502.94	30.64
14	0.16	3447.15	3502.82	55.67
15	0.27	3483.91	3502.44	18.53
16	0.21	3457.44	3502.50	45.06
17	0.21	3484.92	3503.03	18.11
18	0.11	3439.11	3501.39	62.78
19	0.25	3425.93	3498.83	72.90
20	0.13	3484.95	3503.25	18.30
21	0.15	3465.65	3501.80	36.15
22	0.11	3471.40	3504.18	32.78
23	0.23	3446.38	3503.84	57.46
24	0.24	3447.27	3503.27	56.00
25	0.10	3441.50	3503.94	62.44
26	0.28	3446.06	3503.64	57.58
27	0.13	3470.53	3503.79	33.76
28	0.26	3462.91	3503.53	40.62
29	0.13	3475.10	3504.67	29.57
30	0.25	3454.46	3505.45	50.89
31	0.29	3452.41	3502.88	50.27
32	0.00	3504.00	3506.00	2.00



Apéndice

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE
SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA**

DIAGRAMA DE PRESIONES
USAPLORES

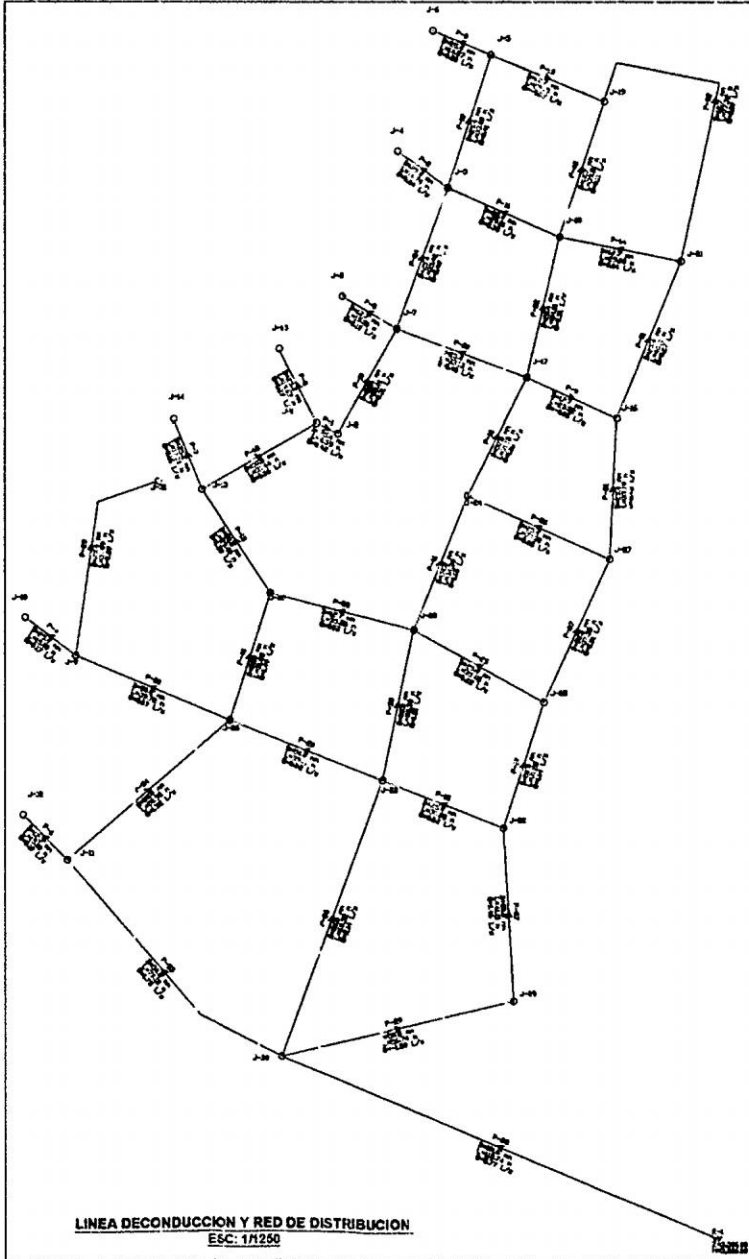
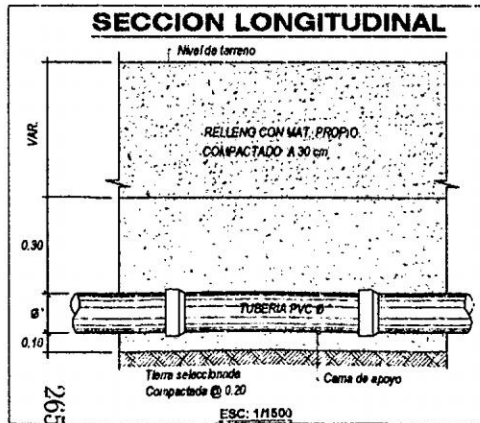
T-01

Esc: 1/1000

Modelo de Matemática Computacional del Flujo de
Presiones en el Sistema de Distribución de Agua

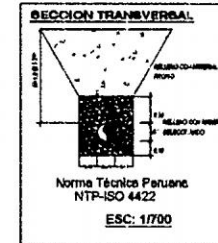
Reporte de las tuberías en régimen permanente del programa WaterCAD V8i

Label	Length Scaled (m)	Diameter (mm)	Material	Hazen-Williams C	Flow (L/s)	Velocity (m/s)	Headloss Gradient (m/m)
P-1	5.59	25.4	PVC	150	0.42	0.83	0.04
P-2	14.74	25.4	PVC	150	0.24	0.47	0.01
P-3	14.87	25.4	PVC	150	0.20	0.39	0.01
P-4	15.00	25.4	PVC	150	0.17	0.34	0.01
P-5	15.00	12.7	PVC	150	0.10	0.79	0.08
P-6	15.00	12.7	PVC	150	0.10	0.79	0.08
P-7	17.71	25.4	PVC	150	0.16	0.32	0.01
P-8	19.67	25.4	PVC	150	0.27	0.53	0.02
P-9	23.52	12.7	PVC	150	-0.05	0.36	0.02
P-10	28.41	25.4	PVC	150	0.31	0.61	0.02
P-11	29.01	25.4	PVC	150	0.33	0.66	0.02
P-12	29.15	12.7	PVC	150	-0.07	0.54	0.04
P-13	29.40	50.8	PVC	150	1.39	0.69	0.01
P-14	29.60	12.7	PVC	150	0.04	0.35	0.02
P-15	30.88	25.4	PVC	150	0.22	0.43	0.01
P-16	31.19	50.8	PVC	150	1.16	0.57	0.01
P-17	31.25	50.8	PVC	150	1.14	0.56	0.01
P-18	31.44	50.8	PVC	150	0.96	0.47	0.01
P-19	33.00	25.4	PVC	150	0.41	0.81	0.03
P-20	33.13	25.4	PVC	150	0.40	0.78	0.03
P-21	33.19	25.4	PVC	150	0.43	0.85	0.04
P-22	34.01	25.4	PVC	150	0.51	1.00	0.05
P-23	35.25	12.7	PVC	150	0.03	0.25	0.01
P-24	35.42	25.4	PVC	150	0.43	0.84	0.04
P-25	35.45	25.4	PVC	150	0.22	0.44	0.01
P-26	37.08	25.4	PVC	150	0.25	0.49	0.01
P-27	37.39	50.8	PVC	150	0.81	0.40	0.00
P-28	39.11	50.8	PVC	150	0.92	0.45	0.01
P-29	56.74	50.8	PVC	150	-1.59	0.79	0.01
P-30	39.72	50.8	PVC	150	0.67	0.33	0.00
P-31	40.11	25.4	PVC	150	0.27	0.53	0.02
P-32	77.72	12.7	PVC	150	0.07	0.58	0.05
P-33	51.89	25.4	PVC	150	0.29	0.57	0.02
P-34	50.93	50.8	PVC	150	1.52	0.75	0.01
P-35	70.12	50.8	PVC	150	1.78	0.88	0.02
P-36	69.52	50.8	PVC	150	2.14	1.06	0.02
P-37	41.11	50.8	PVC	150	1.46	0.72	0.01
P-38	112.74	101.6	PVC	150	5.77	0.71	0.01
P-39	36.38	50.8	PVC	150	1.21	0.60	0.01
P-40	31.68	50.8	PVC	150	1.49	0.74	0.01
P-41	34.29	50.8	PVC	150	1.15	0.57	0.01
P-42	33.81	12.7	PVC	150	0.11	0.65	0.09



Reporte de las tuberías en régimen permanente con el programa GAMES V2014

Tubería	D (mm)	SK	L (m)	Material	f	LGH (M) (m)	LGH (M) (m)	HG (m)	SF (m/m)	Q (L/s)	V (m/s)
1	25.4	0.00	5.59	PVC	0.03	3502.76	3502.57	-0.20	-0.04	0.42	0.82
2	25.4	0.00	14.74	PVC	0.03	3500.71	3501.54	-0.20	-0.01	0.24	0.47
3	25.4	0.00	14.88	PVC	0.03	3489.67	3491.53	-0.14	-0.01	0.20	0.39
4	25.4	0.00	15.01	PVC	0.03	3503.51	3503.41	-0.11	-0.01	0.17	0.34
5	12.7	0.00	15.00	PVC	0.03	3501.99	3500.82	-1.17	-0.08	0.10	0.79
6	12.7	0.00	15.01	PVC	0.03	3504.29	3503.12	-1.17	-0.08	0.10	0.79
7	25.4	0.00	17.71	PVC	0.03	3502.94	3502.82	-0.12	-0.01	0.16	0.32
8	25.4	0.00	19.67	PVC	0.03	3502.76	3502.44	-0.32	-0.02	0.27	0.53
9	12.7	0.00	23.52	PVC	0.04	3502.50	3501.03	0.53	0.02	-0.05	-0.39
10	25.4	0.00	28.41	PVC	0.03	3502.57	3501.99	-0.58	-0.02	0.31	0.61
11	25.4	0.00	29.01	PVC	0.03	3501.39	3500.73	-0.66	-0.02	0.33	0.65
12	12.7	0.00	29.14	PVC	0.04	3498.83	3499.67	0.85	0.03	-0.06	-0.45
13	50.8	0.00	29.40	PVC	0.02	3503.25	3502.94	-0.32	-0.01	1.39	0.68
14	12.7	0.00	29.60	PVC	0.04	3501.80	3501.39	-0.40	-0.01	0.04	0.29
15	25.4	0.00	30.87	PVC	0.03	3504.18	3501.84	-0.34	-0.01	0.22	0.43
16	50.8	0.00	31.18	PVC	0.02	3503.27	3501.03	-0.24	-0.01	1.15	0.57
17	50.8	0.00	31.25	PVC	0.02	3504.18	3501.94	-0.24	-0.01	1.14	0.56
18	50.8	0.00	31.44	PVC	0.02	3502.94	3502.76	-0.17	-0.01	0.96	0.47
19	25.4	0.00	33.00	PVC	0.03	3500.73	3491.67	-1.06	-0.03	0.40	0.78
20	25.4	0.00	33.12	PVC	0.03	3503.03	3501.99	-1.04	-0.03	0.39	0.78
21	25.4	0.00	33.18	PVC	0.03	3503.79	3502.50	-1.29	-0.04	0.44	0.87
22	25.4	0.00	34.01	PVC	0.02	3503.03	3501.39	-1.64	-0.05	0.50	0.99
23	12.7	0.00	35.25	PVC	0.05	3503.53	3503.25	-0.28	-0.01	0.03	0.21
24	25.4	0.00	35.42	PVC	0.03	3501.99	3500.73	-1.25	-0.04	0.42	0.83
25	25.4	0.00	35.45	PVC	0.03	3503.94	3503.53	-0.41	-0.01	0.22	0.44
26	25.4	0.00	37.08	PVC	0.03	3503.79	3501.27	-0.51	-0.01	0.25	0.49
27	50.8	0.00	37.39	PVC	0.03	3503.94	3503.79	-0.16	-0.00	0.82	0.40
28	50.8	0.00	39.10	PVC	0.03	3503.84	3503.64	-0.20	-0.01	0.91	0.45
29	50.8	0.00	56.73	PVC	0.02	3504.67	3505.45	0.78	0.01	-1.60	-0.79
30	50.8	0.00	39.72	PVC	0.03	3503.64	3503.52	-0.12	0.00	0.67	0.33
31	25.4	0.00	40.10	PVC	0.03	3502.50	3501.80	-0.70	-0.02	0.28	0.55
32	12.7	0.00	41.98	PVC	0.03	3501.80	3498.83	-2.97	-0.07	0.09	0.75
33	25.4	0.00	45.65	PVC	0.03	3503.52	3502.68	-0.85	-0.02	0.29	0.57
34	50.8	0.00	50.93	PVC	0.02	3504.29	3501.64	-0.65	-0.01	1.53	0.75
35	50.8	0.00	69.01	PVC	0.02	3505.45	3504.29	-1.16	-0.02	1.79	0.88
36	50.8	0.00	69.51	PVC	0.02	3505.45	3503.84	-1.61	-0.02	2.14	1.05
37	50.8	0.00	41.12	PVC	0.02	3504.67	3504.18	-0.49	-0.01	1.47	0.72
38	101.6	0.00	112.73	PVC	0.02	3506.00	3505.45	-0.55	0.00	5.77	0.71
39	50.8	0.00	36.39	PVC	0.02	3503.84	3503.53	-0.31	-0.01	1.21	0.60
40	50.8	0.00	31.68	PVC	0.02	3503.64	3503.25	-0.39	-0.01	1.49	0.74
41	50.8	10.00	34.29	PVC	0.02	3503.53	3501.27	-0.26	-0.01	1.15	0.56
42	12.7	0.00	33.80	PVC	0.03	3501.39	3498.83	-2.57	-0.08	0.10	0.78



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA

DIAGRAMA DE CAUDALES HUACAPLOR

19-A-01

Escuela de Ingeniería Civil

Profesor: Ing. Juan L. Branda Ponce

Alumno: Juan Pablo Araya

Fecha: 14/12/2014

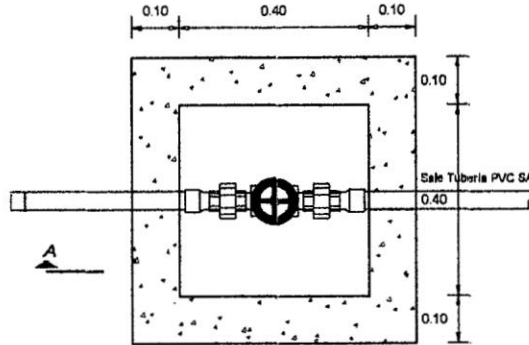
Programa: Ingeniería Civil

Asignatura: Hidráulica

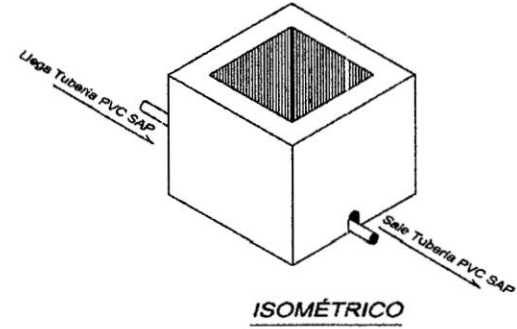
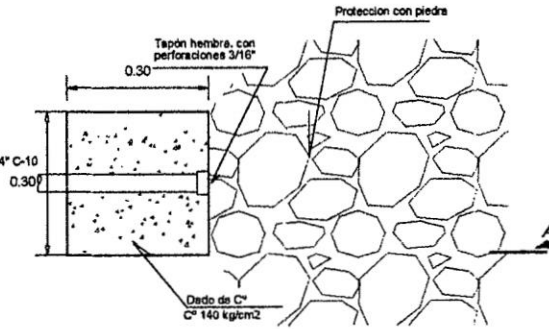
Título: "DISEÑO DE LA RED DE TUBERÍAS EN RÉGIMEN PERMANENTE EN UNO DE LOS ELEMENTOS DE LA RED"

Apéndice

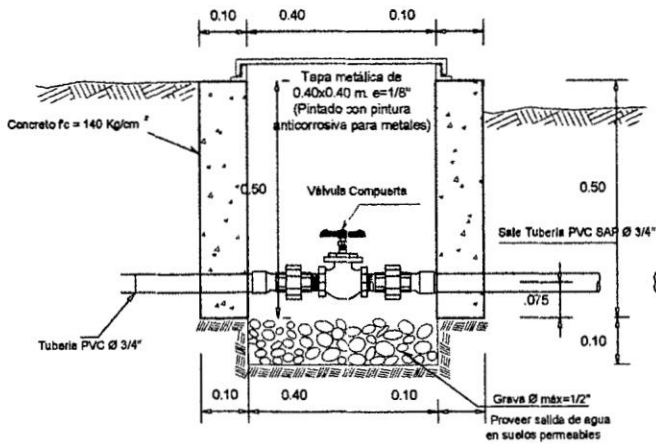
VALVULA DE PURGA EN LA RED DE DISTRIBUCION Ø 3/4"



PLANTA
ESC. 1:10

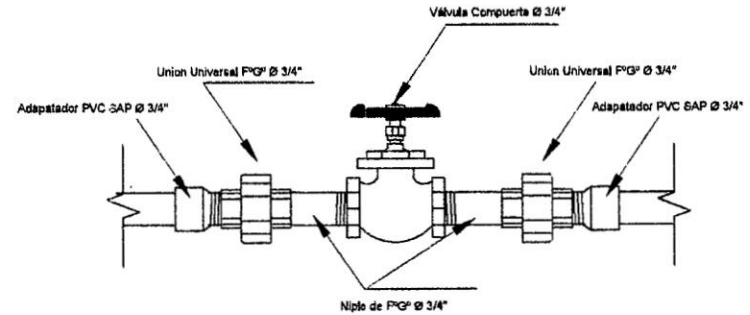
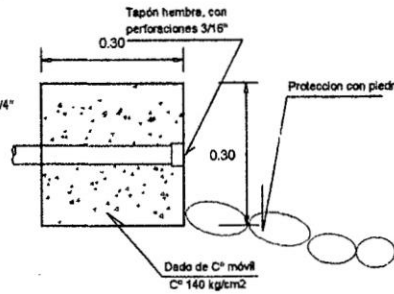


ISOMÉTRICO
SE



CORTE A-A
ESC. 1:10

ESPECIFICACIONES TÉCNICAS
CONCRETO
 C² SIMPLE f'c = 140 Kg/cm²
TUBERÍA Y ACCESORIOS
 Tubería y accesorios PVC deben cumplir Norma Técnica Peruana ISO 4422 para flujos a presión.
CARPINTERÍA METALICA
 e mín = 1/8\"/>



DETALLE DE VALVULA
ESC. 1:5

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTOBAL DE HUAMANGA			
	Título: ALVULA DE PURGA Ø 3/4\"/> 	Unidad: VP-01	
Autor: Ing. Juan L. Bander - Prado	Técnico: Diego Torres Falcón - Adán	Revisor: Dimitri Chelakova	
Proyecto de Tesis: "MODELACIÓN MATEMÁTICA COMPUTACIONAL DEL FLUJO NO PERMANENTE EN REDES DE TUBERÍAS CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS"			Ubicación: REG. : AYACUCHO DISTRITO : VILCAVILCA LUGAR : MULTICOMUNAL
Fecha: AGOSTO 2014	Estado: Indicada	Fecha: AGOSTO 2014	