

**UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE
HUAMANGA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS GEOLOGÍA Y CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



TESIS:

Bases espectrales en la Interpolación Cuántica

Para optar el título profesional de:

**LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

PRESENTADO POR:

Bach. Revelino VELARDE HUASACCA

ASESOR:

M.Sc. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO

AYACUCHO - PERÚ

2024

DEDICATORIA

Dedico esta tesis a:

Mis hermanos, hermanas y en especial a mis padres
Victoria y Víctor, quienes a lo largo de mi carrera han
sido el pilar fundamental para cumplir mi meta.

Revelino V.

AGRADECIMIENTOS

El autor desea expresar su más sincero agradecimiento:

- A Dios, por darme la fuerza de voluntad que me hizo seguir adelante y concluir con este trabajo.
- A mi Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga por mi formación profesional.
- A mis padres por su apoyo incondicional y por sus enseñanzas.
- A mis hermanos y hermanas por sus motivaciones y estar pendientes de mí.
- A mi asesor M.Sc. Daúl Andrés Paiva Yanayaco, por su orientación en este trabajo.
- A mis profesores por brindarme sus enseñanzas.
- A René, la persona importante en mi vida, por su apoyo en todo momento.
- A mis amigos, quienes estuvimos en la UNSCH, por los momentos vividos.

RESUMEN

El presente trabajo de investigación explora métodos novedosos de interpolación de funciones, diferenciándose de técnicas clásicas como la interpolación de Lagrange y de Hermite. En particular, se utilizan bases espectrales, las cuales permiten generalizar la interpolación considerando un número infinito de nodos, un enfoque denominado interpolación cuántica. Se realiza una comparación entre las bases espectrales y la interpolación de Lagrange en escenarios donde no se utiliza la información de la primera derivada de la función. Sin embargo, las bases espectrales demuestran ser más efectivas cuando es necesario incorporar derivadas de órdenes superiores.

Palabras Clave

Bases espectrales, interpolación de Lagrange, interpolación cuántica.

ABSTRACT

The present research work explores novel methods of function interpolation, differentiating itself from classical techniques such as Lagrange and Hermite interpolation. In particular, spectral bases are used, which allow the interpolation to be generalized considering an infinite number of nodes, an approach called quantum interpolation. A comparison is made between the spectral bases and Lagrange interpolation in scenarios where the information from the first derivative of the function is not used. However, spectral bases prove to be more effective when it is necessary to incorporate derivatives of higher orders.

Keywords

Spectral bases, Lagrange interpolation, quantum interpolation.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	vi
Abstract	vii
Índice general	viii
Índice de cuadros	x
Índice de figuras	xi
Introducción	xii
I. Planteamiento del problema	1
1.1. Descripción de la realidad problemática	1
1.2. Delimitación de la investigación	4
1.2.1. Espacial	4
1.2.2. Social	4
1.2.3. Temporal	4
1.3. Problema de investigación	5
1.3.1. Problema general	5
1.3.2. Problema específico	5
1.4. Objetivos	5
1.4.1. Objetivo general	5
1.4.2. Objetivos específicos	5
1.5. Hipótesis	5
1.5.1. Hipótesis general	5
1.5.2. Hipótesis específicas	5
1.6. Diseño	6
1.6.1. Tipo	6
1.6.2. Nivel	6
1.6.3. Método	7
1.7. Población	7

II. Marco Teórico	8
2.1. Antecedentes del Problema	8
2.1.1. Antecedentes internacionales	8
2.1.2. Antecedentes Nacionales	10
2.1.3. Antecedentes Locales	11
2.2. Bases teóricas	11
2.2.1. Norma de una matriz	11
2.2.2. Número de condición	15
2.2.3. Matriz de Vandermonde Generalizada	16
2.2.4. Interpolación Polinomial	19
2.3. Marco Conceptual	57
2.3.1. Anillos Modulares \mathbb{Z}_h	57
2.3.2. Bases espectrales en anillos modulares \mathbb{Z}_h	63
III. Materiales y Métodos	73
3.1. Base espectral para el Anillo Polinomial $\mathbb{K}[x]_h$	73
3.2. Base espectral $\mathcal{S}(x)$ en polinomios de Hermite	80
3.3. Interpolación cuántica en un número infinito de nodos	81
3.3.1. Polinomios de interpolación cuántica de Hermite	82
3.3.2. Polinomios de interpolación cuántica de Lagrange	84
IV. Resultados	85
4.1. Interpolación de Hermite completa	85
4.2. Interpolación Cuántica de Lagrange	89
4.3. Interpolación cuántica de Hermite	92
4.3.1. Interpolación cuántica de Hermite de 1er orden	92
4.3.2. Interpolación cuántica de Hermite de 2do orden	95
Conclusiones	99
Recomendaciones	101
Bibliografía	102
Anexos	104
6.1. Programa polinomio interpolante cuántico de Lagrange.	104
6.2. Programa polinomio interpolante cuántico de Hermite de 1er orden.	105
6.3. Programa polinomio interpolante cuántico de Hermite de 2do orden.	106
6.4. Programa polinomio interpolantes juntos.	107

ÍNDICE DE CUADROS

1.1. Bases de Lagrange.	2
2.1. Coeficientes de los $S_k(x)$ (splin cúbico natural).	45
2.2. Coeficientes de los $S_k(x)$ (splin cúbico de cota fija).	48
2.3. Errores de splin cúbico natural y de cota fija en $L^2[-1, 2]$	51
2.4. Coeficientes de los $S_k(x)$ (splin cúbico natural), para 13 nodos.	53
2.5. Coeficientes de los $\mathbf{S}_k^*(\mathbf{x})$ (splin cúbico de cota fija), para 13 nodos.	55
2.6. Tabla de multiplicación de los elementos de $b_{sc}(\mathbb{Z}_{24})$	71
2.7. Tabla de multiplicación de los elementos de $b_{sc}(\mathbb{Z}_{450})$	72

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Algunos Polinomios básicos de Lagrange, $L_{n,k}(x)$	3
2.1. Polinomios interpolantes de Lagrange para $f(x)$	23
2.2. Polinomio interpolante de Newton para $f(x)$	26
2.3. Polinomios interpolantes de Lagrange $\mathbf{P}_3(\mathbf{x})$ y de Hermite $\mathbf{H}_7(\mathbf{x})$ para $f(x)$	34
2.4. Gráfica que muestra $f(x)$ y el trazador cúbico natural.	47
2.5. Gráfica que muestra $f(x)$ y el trazador de cota fija.	50
2.6. Gráfica que muestra el error al aproximar $f(x)$ con ambos splines cúbicos.	52
2.7. $f(x)$ y el splin cúbico natural $\mathbf{S}(x)$, considerando 13 nodos.	54
2.8. $f(x)$ y el splin cúbico de cota fija $\mathbf{S}^*(x)$, considerando 13 nodos.	56
4.1. Polinomio interpolante de Hermite $\mathbf{F}(x)$ de $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $x \in [-1, 2]$	88
4.2. $\mathbf{F}'(x_i) = f'(x_i)$	89
4.3. $\mathbf{F}_L(x)$ y $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $k = 1, \dots, 8$	91
4.4. $\mathbf{F}_L(x)$ y $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $k = -1, 0, \dots, 3$	91
4.5. Polinomio interpolante cuántico de Lagrange para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$	93
4.6. Polinomio interpolante cuántico de Hermite de 1er orden para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$	94
4.7. Polinomio interpolante cuántico de Hermite de 2do orden para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$	96
4.8. Polinomios interpolantes para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$	98

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas que se presentan cuando se requiere representar a una función a través de otra función es la aproximación. Hay dos formas de realizar esa aproximación: acercándose a ella (convergencia uniforme) y la otra es que coincida con ella en algunos puntos y se comporten en forma similar en esos puntos, llamados nodos de interpolación. Entonces consideramos la interpolación desde un punto de vista espectral. Las bases que se necesitan en la interpolación tienen elementos que cumplen ciertas propiedades a nivel de anillos modulares, lo que hace que no sea tan complicado hallar dichas bases. Una vez establecida la base espectral generalizada se puede extender a hacer interpolación con muchos más nodos, esa interpolación es llamada interpolación cuántica. Se presenta ejemplos al respecto. Aquí se ha seguido las ideas de [\(Sobczyk, 2001\)](#).

(Sobczyk, 2001) analiza las bases espectrales desde el punto de vista de los anillos modulares. Conceptos como: anillos, campos, ideales de anillos, ideales principales, anillo de clases residuales, elementos idempotentes y nilpotentes, son cruciales para este trabajo.

La presente tesis está estructurada de la siguiente manera: En el Capítulo I se da el planteamiento del problema, la delimitación de la investigación, problema de investigación, objetivos, hipótesis, entre otros.

En el Capítulo II, se dan los antecedentes del problema, las bases teóricas, el marco conceptual, aquí se dan conceptos de álgebra, como anillos modulares y bases espectrales en anillos modulares.

En Capítulo III, se verán los conceptos y teoremas relacionados con anillos polinomiales y sus bases, asimismo se generan esas bases espectrales.

Y en el Capítulo IV, generamos la base espectral en polinomios de Hermite, ejemplos de interpolación, con número de nodos finito, se aplica las bases espectrales y se compara con los métodos de interpolación usuales, para culminar con la interpolación cuántica.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Descripción de la realidad problemática

Los métodos de interpolación que se conocen comunmente, como la interpolación de Lagrange, Hermite, y de Padé, entre otros, toman la idea general de aproximar una función a través de polinomios, los cuales deben cumplir ciertos requisitos, como el de coincidir con la función a aproximar en un conjunto de puntos, llamados nodos de interpolación; otras, como de Hermite, también se exige que sus derivadas coincidan con las derivadas de la función en dichos nodos de interpolación. Aquí, los polinomios osculadores son una familia de polinomios que sirven para generar los métodos indicados. Sin embargo, el número de nodos es finito. Se requiere entonces nuevas formas de interpolar cuando se tiene un número infinito contable de nodos. Como se recuerda, en todo lo anterior, se obtienen polinomios que están representados como una combinación lineal de polinomios, que al aumentar un nodo, se tienen que volver a recalcular dichos polinomios, estos polinomios son llamados base

del espacio de interpolación. En el caso de la interpolación de Lagrange, si solo se dispone de dos puntos: $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$, donde x_0 y x_1 son los nodos de interpolación, el polinomio interpolante de Lagrange de grado a lo más 1 es: (Burden, R. et. al, 2017)

$$P_1(x) = f(x_0) \cdot L_0(x) + f(x_1) \cdot L_1(x) = f(x_0) \cdot \underbrace{\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \right)}_{= L_0(x)} + f(x_1) \cdot \underbrace{\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)}_{= L_1(x)}.$$

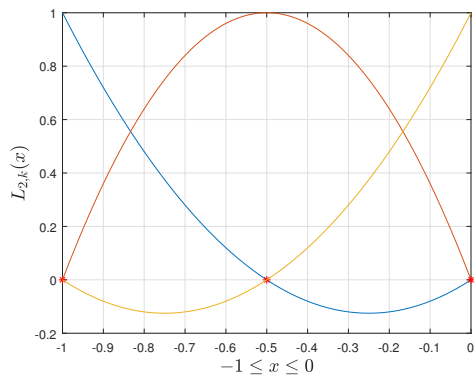
Una base sería $\{L_0(x), L_1(x)\}$. Sin embargo, si se requiere adicionar un nodo más, la base anterior quedaría de lado porque tendríamos que hallar los nuevos $L_i(x)$, $i = 0, 1, 2$. En el Cuadro (1.1) se observan esas bases.

Cuadro 1.1. Bases de Lagrange.

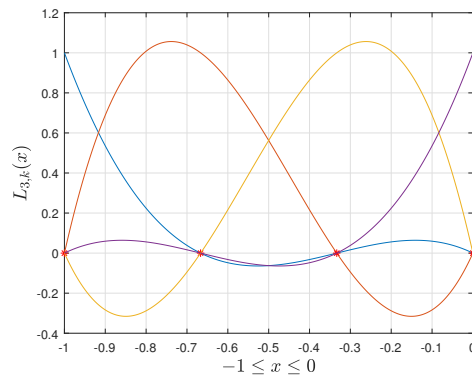
N° nodos (n)	Base de Lagrange
2	$\{L_{1,0}, L_{1,1}\} = \left\{ \frac{x-x_1}{x_0-x_1}, \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \right\}$
3	$\{L_{2,0}, L_{2,1}, L_{2,2}\} = \left\{ \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}, \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \right\}$
4	$\{L_{3,0}, L_{3,1}, L_{3,2}, L_{3,3}\} = \left\{ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \right\}$
⋮	⋮
n+1	$\{L_{n,k} : k = 0, 1, \dots, n\} = \left\{ L_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_0) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)} \right\}$

En la Figura (1.1) se visualizan los polinomios base de Lagrange, para diferentes grados n en el intervalo $[-1, 0]$. Se puede observar que mientras mayor es el grado n , hay mayor variabilidad.

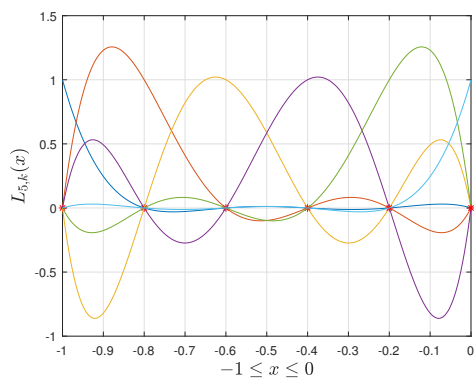
Figura 1.1. Algunos Polinomios básicos de Lagrange, $L_{n,k}(x)$.



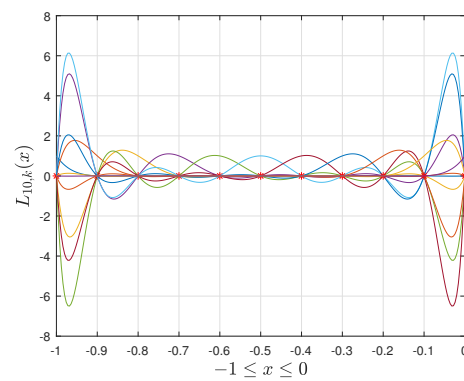
(a) Grado $n = 2$.



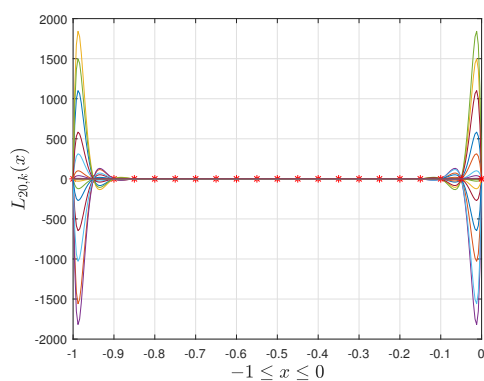
(b) Grado $n = 3$.



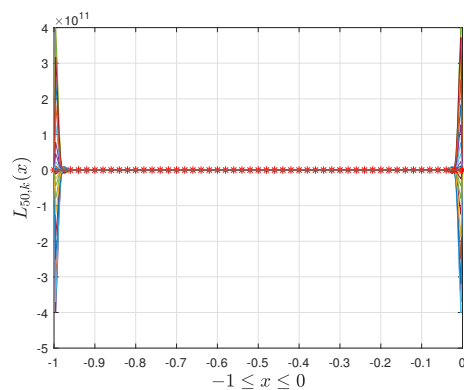
(c) Grado $n = 5$.



(d) Grado $n = 10$.



(e) Grado $n = 20$.



(f) Grado $n = 50$.

Una de las ventajas de definir otros tipos de interpolación sería justamente esto, de no hacer que se vuelva a generar otras bases y con ello aumentar la dispersión.

(Sobczyk, 2006), le da énfasis geométrico a los números y extiende a través de la aritmética geométrica a los números reales, con la dirección. La aritmética modular, con sus elementos idempotentes y nilpotentes, proporcionan el fundamento de las bases espectrales.

1.2. Delimitación de la investigación

1.2.1. Espacial

La investigación se sitúa en una rama de la matemática aplicada, como es el análisis numérico y álgebra modular.

1.2.2. Social

Se presenta un trabajo de aplicación para estudiantes de la Escuela Profesional de Ciencias Físico Matemáticas e Ingenierías.

1.2.3. Temporal

La revisión de la literatura empleada para esta tesis comprende desde 1980 y artículos actualizados.

1.3. Problema de investigación

1.3.1. Problema general

¿Las bases espectrales pueden usarse en la interpolación cuántica?

1.3.2. Problema específico

¿Se pueden generalizar los métodos de interpolación de Lagrange de Hermite, entre otros, con las bases espectrales?

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo general

Demostrar que las bases espectrales se pueden usar para la interpolación cuántica.

1.4.2. Objetivos específicos

Estudiar los métodos de interpolación de Lagrange y de Hermite generalizados.

1.5. Hipótesis

1.5.1. Hipótesis general

Las bases espectrales se pueden usar en la interpolación cuántica.

1.5.2. Hipótesis específicas

Los métodos de interpolación de Lagrange y de Hermite generalizados pueden obtenerse por medio de bases espectrales.

1.6. Diseño

Diseño experimental, pues, Kerlinger (2002), sostiene que *generalmente se llama diseño de investigación al plan y a la estructura de un estudio. “Es el plan y estructura de una investigación concebidas para obtener respuestas a las preguntas de un estudio”. En ese sentido, el diseño de investigación señala la forma de conceptualizar un problema de investigación y la manera de colocarlo dentro de una estructura que sea guía para la experimentación (en el caso de los diseños experimentales)*. En este trabajo, la variable (las bases espectrales) se emplea para aproximar una función (interpolación cuántica).

1.6.1. Tipo

Tipo aplicada, según Zorrilla (1993) “... La investigación aplicada busca el conocer para hacer, para actuar, para construir, para modificar.”. Aquí se busca la aplicación de los conceptos adquiridos a la vez que se aprenden otros.

1.6.2. Nivel

Nivel explicativo. Según Carrasco Díaz (2006), “... la investigación explicativa responde a la interrogante ¿por qué?, es decir con este estudio podemos conocer por qué un hecho o fenómeno de la realidad tiene tales y cuales características, cualidades, propiedades, etc., en síntesis, por qué la variable en estudio es como es”. En nuestro caso la finalidad es de explicar el comportamiento de una variable (interpolación cuántica) en función de otras (bases espectrales) con la relación de (causa–efecto).

1.6.3. Método

Inductivo y deductivo, pues en **Hernández Sampieri (2010) Metodología de la Investigación**, *“la investigación se basa en fuentes bibliográficas existentes en libros, tesis, artículos científicos e información por internet”*.

1.7. Población

No se considera por la naturaleza del trabajo de investigación.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del Problema

2.1.1. Antecedentes internacionales

- Childs, A. M, Liu J.P, (2019), en su artículo científico “Quantum spectral methods for differential equations”, desarrollan un algoritmo cuántico para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales basado en los llamados métodos espectrales, una alternativa a los métodos de diferencia finita que aproxima la solución globalmente. Usando ese enfoque, proporcionan un algoritmo cuántico para resolver problemas de valor límite e inicial dependientes del tiempo con complejidad $\text{poly}\left(\log d, \log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\right)$.
- Costa, P. C. S, Jordan, S. y Ostrander, A. (2019), en su artículo científico “Quantum Algorithm for Simulating the Wave Equation”, presentan un algoritmo cuántico para simular la ecuación de onda bajo las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann. El algoritmo utiliza simulación hamiltoniana y algoritmos de sistemas lineales cuánticos

como subrutinas. Se basa en factorizaciones de operadores laplacianos discretizados para permitir una escala mejorada en los errores de truncamiento y una escala mejorada para la preparación del estado en relación con los algoritmos de ecuaciones diferenciales lineales de propósito general. También consideran el uso de simulación Hamiltoniano para las ecuaciones de Klein–Gordon y la ecuación de Maxwell.

- Sobczyk G., (2006), en su artículo científico “Geometric Algebra, Spectral Basis and Interpolation”, emplea el Álgebra Geométrica de Clifford, que es una extensión del concepto de los números reales para incluir el concepto general de dirección e indica que la Base Espectral de polinomios es un concepto fundamental para hacer otros tipos de interpolación de Lagrange, de Hermite, de Padé; proporciona aplicaciones al respecto.
- Sobczyk G., (2006), en su artículo científico “The spectral basis and rational interpolation”, señala que El Algoritmo Euclidiano es la clave, aunque ignorada, para las técnicas de aproximación racional, incluyendo Taylor, Lagrange, Hermite, osculating, cubic spline, Chebyshev, Padé y otros esquemas de interpolación. Es por ello que unifica estas técnicas numéricas de interpolación en términos del concepto de *base espectral* de un anillo factorial de polinomios y afirma que cuando estos métodos se aplican al polinomio mínimo de una matriz, dan una familia de formas racionales de funciones de esa matriz.

- Bueno O., A., Pérez G., V. M y Fenton, F. H. (2004), en su artículo de investigación “Spectral Methods for Partial Differential Equations in Irregular Domains: The spectral smoothed boundary method”, proponen un método numérico para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales parciales en dominios irregulares con condiciones de frontera sin flujo por medio de métodos espectrales. Las características principales del método son su capacidad de adaptarse a dominios de formas arbitrarias, y su implementación fácil por medio de las rutinas de la Transformada rápida de Fourier. Discuten varios ejemplos de interés.
- Sobczyk G., (2003), en su artículo “Quantum Hermite Interpolation Polynomials”, señala que se pueden generalizar los conceptos de interpolación de Lagrange y de Hermite, por medio de bases espectrales de idempotentes y nilpotentes de un anillo factorial de polinomios, ya que ellas dan un poderoso marco para la expresión de la interpolación de Lagrange y Hermite en espacios de dimensiones 1, 2 y superiores. También proporciona las definiciones de los polinomios de interpolación cuántica de Lagrange y de Hermite que funcionan en un conjunto infinito contable de puntos.

2.1.2. Antecedentes Nacionales

En el proceso de la búsqueda de antecedentes nacionales, no se ha hallado investigaciones realizadas sobre el tema.

2.1.3. Antecedentes Locales

En el proceso de la búsqueda de antecedentes locales en la biblioteca de la UNSCH no se ha hallado investigaciones realizadas en el tema.

2.2. Bases teóricas

Presentamos algunos conceptos de interpolación, tipos de interpolación polinomial conocidos con sus ejemplos y damos algunos conceptos de álgebra abstracta que hace referencia a la teoría de anillos de polinomios.

2.2.1. Norma de una matriz

Norma de un vector

Consideremos el espacio lineal \mathbb{R}^n .

2.2.1. Definición. *(Süli and Mayers, 2003)*

Sea el vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, la **1-norma** del vector \mathbf{v} se define como

$$\|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (2.1)$$

■

2.2.2. Definición. *(Süli and Mayers, 2003)*

Sea el vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, la **2-norma** del vector \mathbf{v} se define como

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2} \quad (2.2)$$

■

2.2.3. Definición. (Süli and Mayers, 2003)

Sea el vector $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \in \mathbb{R}^n$, la ∞ -norma del vector \mathbf{v} se define como

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i=1}^n |v_i| \quad (2.3)$$

■

2.2.1. Ejemplo. Sea $\mathbf{V} = \mathbb{R}^4$ y sea $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{1}{4}\right) \in \mathbf{V}$, entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\mathbf{v}\|_1 = \sum_{i=1}^4 |v_i| = \left|-\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{2}{5}\right| + \left|-\frac{3}{5}\right| + \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{7}{4} = 1.75 \\ \|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 |v_i|^2} = \sqrt{\left|-\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{2}{5}\right|^2 + \left|-\frac{3}{5}\right|^2 + \left|\frac{1}{4}\right|^2} = \frac{3\sqrt{37}}{20} \approx 0.912414 \\ \|\mathbf{v}\|_\infty = \max_{i=1}^4 |v_i| = \max \left\{ \left|-\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{2}{5}\right|, \left|-\frac{3}{5}\right|, \left|\frac{1}{4}\right| \right\} = \frac{3}{5} = 0.60 \end{array} \right.$$

■

Norma de una matriz

2.2.4. Definición. (Süli and Mayers, 2003)

Sea $\|\cdot\|$ una norma en el espacio n -dimensional de vectores \mathbb{R}^n ; la **norma matricial subordinada** a dicha norma sobre el espacio $\mathbb{R}^{n \times n}$, de matrices $n \times n$, se define como:

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\|\mathbf{A} \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (2.4)$$

donde $\mathbb{R}_*^n = \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$.

■

De (2.4) se tiene que

$$\frac{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \implies \boxed{\|\mathbf{A}\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{v}\|}. \quad (2.5)$$

De acuerdo a las normas definidas en (2.1), (2.2) y (2.3) tenemos los siguientes teoremas, cuyas demostraciones están en (Süli and Mayers, 2003).

2.2.1. Teorema. (Süli and Mayers, 2003)

La norma matricial subordinada a la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$, para $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.6)$$

■

2.2.2. Teorema. (Süli and Mayers, 2003)

Sea la matriz $n \times n$: $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. La norma matricial subordinada a la norma vectorial $\|\cdot\|_1$ para \mathbf{A} se puede expresar como

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|. \quad (2.7)$$

■

2.2.3. Teorema. (Süli and Mayers, 2003)

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y sean λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, los autovalores de la matriz $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, entonces

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}. \quad (2.8)$$

■

2.2.4. Teorema. *Sea la norma matricial $\|\cdot\|$, sobre $\mathbb{R}^{n \times n}$, entonces para cualquier par de matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} de $\mathbb{R}^{n \times n}$, se cumple:*

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|. \quad (2.9)$$

■

Demostración.-

De la Definición (2.2.4) se tiene que

$$\|\mathbf{AB}\| = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{ABv}\|}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (2.10)$$

Además, en vista de que \mathbf{Bv} es un vector en \mathbb{R}^n , de (2.5) se tiene que

$$\|\mathbf{ABv}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{Bv}\|$$

por tanto en (2.10)

$$\|\mathbf{AB}\| = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{ABv}\|}{\|\mathbf{v}\|} \leq \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{Bv}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{A}\| \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{Bv}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$$

y así se tiene demostrado que

$$\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|.$$

■

Al hablar de interpolación polinomial, uno de los conceptos importantes es la matriz de Vandermonde, y ésta se forma con los nodos de interpolación; si se modifican los nodos de interpolación, esta matriz cambiará, sus normas subordinadas también cambiarán. Entonces es necesario tener en cuenta qué

tan sensible es la matriz de Vandermonde. Esta sensibilidad es medida con lo que se denomina *número de condición*. Es por ello que definiremos lo que se llama *condición de una matriz*.

Supongamos que se tiene un mapeo $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{N}$, donde \mathbb{D} es un subconjunto del espacio vectorial lineal \mathcal{M} , con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, también \mathcal{N} es un espacio vectorial lineal con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$.

2.2.2. Número de condición

2.2.5. Definición. Sea f el mapeo indicado anteriormente, se define el **número condición absoluta de f** como

$$\text{Cond}(f) = \sup_{\substack{u, v \in \mathbb{D} \subset \mathcal{M} \\ u \neq v}} \frac{\|f(v) - f(u)\|_{\mathcal{N}}}{\|v - u\|_{\mathcal{M}}}. \quad (2.11)$$

■

Se dice que el mapeo f está *mal condicionado* cuando $\text{Cond}(f) = +\infty$ o el número condición es acotado pero es mucho mayor que 1, es decir cuando $1 \ll \text{Cond}(f) < +\infty$.

2.2.6. Definición. El **número condición de una matriz no singular \mathbf{A}** es definida por:

$$\kappa(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \quad (2.12)$$

■

Puesto que $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\|$, se cumple que

$$\kappa(\mathbf{A}) = \kappa(\mathbf{A}^{-1})$$

Además,

$$\|\mathbf{I}\| = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\|\mathbf{I}\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \max_{\mathbf{v} \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|} = 1$$

y del Teorema [\(2.2.4\)](#):

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| = \kappa(\mathbf{A})$$

es decir: $\kappa(\mathbf{A}) \geq 1$.

Si $\kappa(\mathbf{A}) \gg 1$, se dice que es \mathbf{A} es una matriz *mal condicionada*.

2.2.3. Matriz de Vandermonde Generalizada

Sea el conjunto de n puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, se define la matriz de Vandermonde de la siguiente manera:

2.2.7. Definición. Para el conjunto de puntos dados anteriormente, la matriz de Vandermonde es

$$\mathbf{V}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

cuyo determinante es

$$\det(\mathbf{V}(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i)^{\alpha_i \times \alpha_j} \quad (2.14)$$

■

Consideremos ahora el polinomio

$$P(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \cdots (x - x_s)^{\alpha_s} \quad (2.15)$$

cuyas raíces x_k son distintas y α_k son sus multiplicidades, $k = 1, 2, \dots, s$; con

$$\sum_{k=1}^s \alpha_k = n.$$

Sea $\boldsymbol{\nu}(x)$ el vector columna definido por

$$\boldsymbol{\nu}(x) = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})^T \quad (2.16)$$

y su r -ésima deriva denotada como $\boldsymbol{\nu}^{(r-1)}(x)$. Definimos la matriz $\mathbf{V}_i(\boldsymbol{\nu}) \in$

$\mathbb{C}^{n \times \alpha_i}$ como

$$\mathbf{V}_i(\boldsymbol{\nu}) = \left(\frac{1}{0!} \boldsymbol{\nu}^{(0)}(x_i), \frac{1}{1!} \boldsymbol{\nu}^{(1)}(x_i), \frac{1}{2!} \boldsymbol{\nu}^{(2)}(x_i), \dots, \frac{1}{r!} \boldsymbol{\nu}^{(r)}(x_i) \right) \quad (2.17)$$

donde $r = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$.

2.2.8. Definición. De (2.17), se define la matriz $\mathbf{V}(P) \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$$\mathbf{V}(P) = (\mathbf{V}_1(\boldsymbol{\nu}_P), \mathbf{V}_2(\boldsymbol{\nu}_P), \dots, \mathbf{V}_s(\boldsymbol{\nu}_P)) \quad (2.18)$$

■

A (2.18) se le denomina **Matriz generalizada de Vandermonde**, también se le llama *matriz confluyente de Vandermonde*.

2.2.2. Ejemplo. Sea $P(x) = (x - a)^4 (x - b)(x - c)^2$. Aquí tenemos que:

$x_1 = a$, $\alpha_1 = 4$, $x_2 = b$, $\alpha_2 = 1$, $x_3 = c$, $\alpha_3 = 2$ y $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7$.

La forma de la matriz de Vandermonde generalizada es

$$\mathbf{V}(P) = (\mathbf{V}_1(\boldsymbol{\nu}_P), \mathbf{V}_2(\boldsymbol{\nu}_P), \mathbf{V}_3(\boldsymbol{\nu}_P))$$

donde las matrices $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{C}^{7 \times 4}$, $\mathbf{V}_2 \in \mathbb{C}^{7 \times 1}$ y $\mathbf{V}_3 \in \mathbb{C}^{7 \times 2}$ son:

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 \\ a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a \\ a^5 & 5a^4 & 10a^3 & 10a^2 \\ a^6 & 6a^5 & 15a^4 & 20a^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \\ b^3 \\ b^4 \\ b^5 \\ b^6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \\ c^2 & 2c \\ c^3 & 3c^2 \\ c^4 & 4c^3 \\ c^5 & 5c^4 \\ c^6 & 6c^5 \end{pmatrix}.$$

La matriz generalizada de Vandermonde es entonces:

$$\mathbf{V}(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & b & c & 1 \\ a^2 & 2a & 1 & 0 & b^2 & c^2 & 2c \\ a^3 & 3a^2 & 3a & 1 & b^3 & c^3 & 3c^2 \\ a^4 & 4a^3 & 6a^2 & 4a & b^4 & c^4 & 4c^3 \\ a^5 & 5a^4 & 10a^3 & 10a^2 & b^5 & c^5 & 5c^4 \\ a^6 & 6a^5 & 15a^4 & 20a^3 & b^6 & c^6 & 6c^5 \end{pmatrix}$$

y su determinante es

$$\det(\mathbf{V}) = (a - b)^4 (a - c)^8 (b - c)^2.$$

■

2.2.4. Interpolación Polinomial

En esta parte veremos algunos métodos de interpolación de mayor uso, como los de Lagrange, Newton, Hermite, Spline cúbicos, para funciones continuas a trozos, todos ellos con soporte del teorema de interpolación polinomial. Igualmente, debido a otro teorema importante, de aproximación, que garantiza que cualquier función continua en un intervalo cerrado se puede aproximar uniformemente por un polinomio de grado alto, se verá los polinomios de Bernstein.

2.2.5. Teorema. *Existe un único polinomio $P(x) \in \mathcal{P}_n$ tal que*

$$P(x_i) = y_i \quad (2.19)$$

donde los x_k , $k = 0, \dots, n$, son distintos entre sí. ■

Demostración.-

Sea el polinomio de grado n , $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, donde los a_k son coeficientes indeterminados, tal que satisface (2.19). Aquí se forma un sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales en a_k ,

$$a_n x_k^n + \dots + a_1 x_k + a_0 = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

El determinante de ese sistema es el determinante de la matriz de Vandermonde, que de acuerdo a (2.14) es

$$|\mathbf{V}(x_0, x_1, \dots, x_n)| = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

y por ser los x_k distintos entre sí, entonces este determinante es no nulo, en consecuencia, el sistema tiene solución única, o en forma equivalente, existe un único polinomio (Phillip, 1975). ■

El Teorema (2.2.5) es el llamado Teorema de Interpolación lineal, que en palabras sencillas dice: por dos puntos pasa una recta, por tres una parábola, por cuatro una cúbica, etc.

*) Interpolación de Lagrange

Uno de los polinomios más empleados para la interpolación, que son sencillos de construir, aunque su manipulación es un poco tediosa al hallar sus derivadas, son los polinomios de Lagrange, este nombre es debido al matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736–1813).

Si existe $f \in C([a, b])$ tal que $f(x_k) = y_k$, donde los $x_k \in [a, b]$, $k = 0, 1, \dots, n$, el polinomio de Lagrange de grado n es el polinomio del Teorema (2.2.5) si resuelve

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.20)$$

Además, se dice que $P_n(x)$ es el polinomio que interpola a f en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n .

La forma requerida de dicho polinomio está dada como una combinación lineal

de la base del espacio vectorial \mathcal{P}_n :

$$\{L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)\}. \quad (2.21)$$

Los elementos de la base (2.21) satisfacen

$$L_k(x_j) = \delta_{k,j}, \quad 0 \leq j, k \leq n. \quad (2.22)$$

$P_n(x)$ se define entonces como

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x) \quad (2.23)$$

donde, si hacemos $\pi_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdots (x - x_n)$, entonces

$$L_k(x) = \frac{\pi_n(x)}{(x - x_k) \cdot \pi'_n(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (2.24)$$

2.2.3. Ejemplo. Consideremos $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $x \in [-1, 2]$. Vamos a hallar su polinomio de interpolación de Lagrange con diferente número de nodos.

(a) **2 Nodos:** $x_0 = -1$ y $x_2 = 2$.

De (2.24), los L_k de la base son

$$L_0(x) = -\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \quad L_1(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$

El polinomio (primer) interpolante de Lagrange para f es

$$P_1(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) = 1.26216597 - 0.58509805x \quad (2.25)$$

(b) **3 Nodos:** $x_0 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 2$.

De (2.24), los L_k de la base son

$$L_0(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{9}, \quad L_1(x) = \frac{-4x^2 + 4x + 8}{9}, \quad L_2(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{9}$$

El segundo polinomio interpolante de Lagrange es

$$P_2(x) = 0.60904270 - 0.91165969x + 0.32656163x^2 \quad (2.26)$$

(c) 7 Nodos: $x_0 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = 1$, $x_5 = \frac{3}{2}$ y $x_6 = 2$.

Igual que en los casos anteriores, los polinomios básicos de Lagrange son

$$L_0(x) = \frac{x}{15} - \frac{13x^2}{90} - \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{9} - \frac{2x^5}{5} + \frac{4x^6}{45}$$

$$L_1(x) = -\frac{4x}{5} + \frac{38x^2}{15} - \frac{4x^3}{3} - 2x^4 + \frac{32x^5}{15} - \frac{8x^6}{15}$$

$$L_2(x) = 1 - \frac{7x}{6} - \frac{14x^2}{3} + \frac{35x^3}{6} + \frac{7x^4}{3} - \frac{14x^5}{3} + \frac{4x^6}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{8x}{3} + \frac{20x^2}{9} - 8x^3 - \frac{4x^4}{9} + \frac{16x^5}{3} - \frac{16x^6}{9}$$

$$L_4(x) = -x + \frac{x^2}{6} + \frac{29x^3}{6} - x^4 - \frac{10x^5}{3} + \frac{4x^6}{3}$$

$$L_5(x) = \frac{4x}{15} - \frac{2x^2}{15} - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} + \frac{16x^5}{15} - \frac{8x^6}{15}$$

$$L_6(x) = -\frac{x}{30} + \frac{x^2}{45} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{9} - \frac{2x^5}{15} + \frac{4x^6}{45}$$

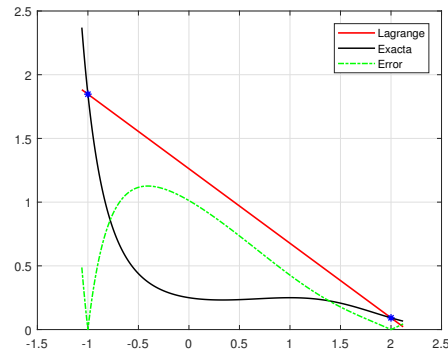
y el sexto polinomio interpolante de Lagrange es

$$P_6(x) = 0.25 - 0.0911x + 0.216x^2 - 0.3661x^3 + 0.5056x^4 - 0.3415x^5 + 0.077x^6 \quad (2.27)$$

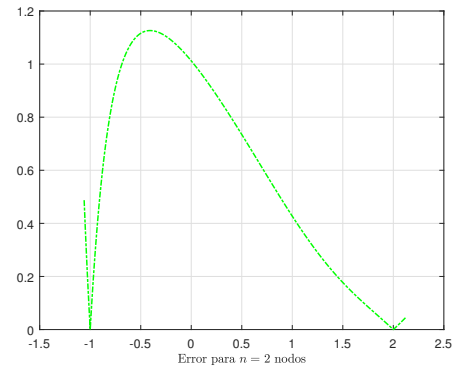
■

En la Figura [\(2.1\)](#) se visualizan la función $f(x)$ y los polinomios interpolantes encontrados en [\(2.25\)](#), [\(2.26\)](#) y [\(2.27\)](#), y sus errores respectivos.

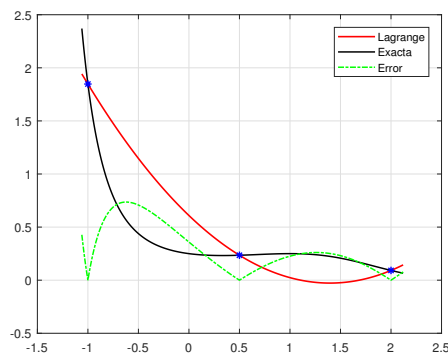
Figura 2.1. Polinomios interpolantes de Lagrange para $f(x)$.



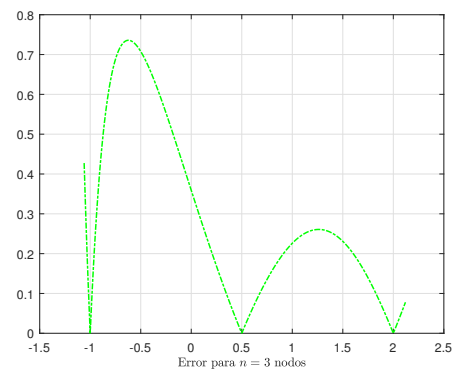
(a) $n = 1$



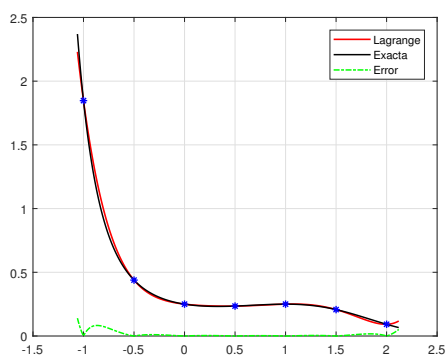
(b) Error cuando hay 2 nodos.



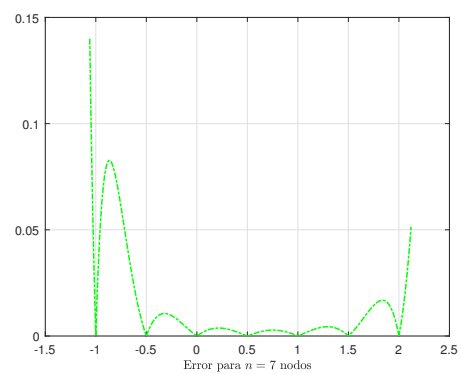
(c) $n = 2$



(d) Error cuando hay tres nodos.



(e) $n = 6$



(f) Error cuando hay 7 nodos.

*) Interpolación de Newton

Una desventaja de utilizar los polinomios de interpolación de Lagrange es que si se requiere mayor precisión se tiene que aumentar el número de nodos, lo cual hace que la base hallada hasta ese momento quede obsoleta (Phillip, 1975). Existe otra forma de hallar dichos polinomios de interpolación y por el Teorema (2.2.5) $P_n(x)$ existe y debe ser único. El método de interpolación de Newton es un método en el que este problema se resuelve, es decir que las bases halladas son aprovechadas si se aumenta el número de nodos.

Consideremos la base

$$\{\eta_0(x), \eta_1(x), \dots, \eta_n(x)\} \quad (2.28)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \eta_0(x) &= 1 \\ \eta_1(x) &= (x - x_0) \\ \eta_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\ &\vdots \\ \eta_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

El polinomio interpolante de Newton es

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \eta_k(x). \quad (2.30)$$

Para determinar los coeficientes a_k , tenemos la definición de diferencias divididas.

2.2.9. Definición. Se llaman **diferencias divididas de orden k-ésimo** de y_0, y_1, \dots, y_k con respecto a x_0, x_1, \dots, x_k y se denota por

$$[y_0, y_1, \dots, y_k]$$

a las constantes a_k de (2.30). Y comparando los coeficientes de x^k para a_k se definen como (Phillip, 1975)

$$a_k = [y_0, y_1, \dots, y_k] = \sum_{i=0}^k \frac{y_i}{\pi_k'(x_i)} \quad (2.31)$$

■

Es decir

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0}$$

$$a_2 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

⋮

2.2.4. Ejemplo. sea $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $x \in [-1, 2]$ y los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$.

Las funciones base son

$$\eta_0(x) = 1$$

$$\eta_1(x) = x + 1$$

$$\eta_2(x) = (x + 1)x$$

$$\eta_3(x) = (x + 1)x(x - 1)$$

■

El polinomio interpolante de Newton es

$$P_3(x) = a_0\eta_0(x) + a_1\eta_1(x) + a_2\eta_2(x) + a_3\eta_3(x)$$

Utilizando (2.31) tenemos que

$$a_0 = \frac{e^2}{4} \approx 1.8472640247$$

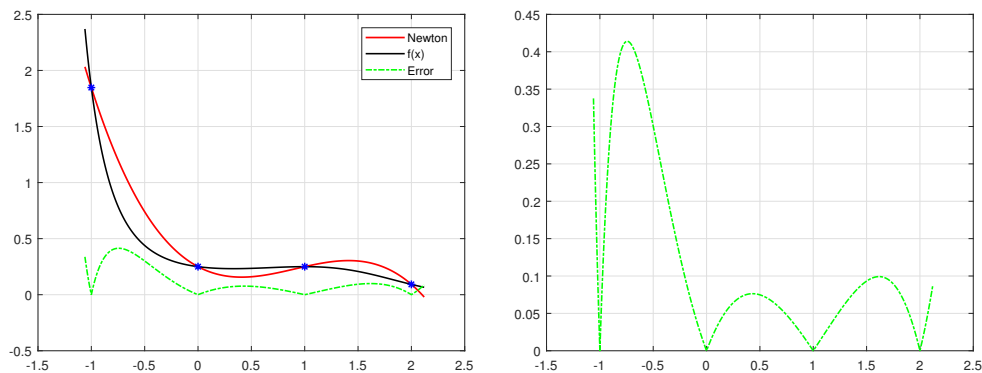
$$a_1 = \frac{1 - e^2}{4} \approx -1.5972640247$$

$$a_2 = \frac{e^2 - 1}{8} \approx 0.7986320124$$

$$a_3 = \frac{1 - e^3}{24e} \approx -0.2925490274$$

En la Figura (2.2) se visualiza el polinomio interpolante de Newton de grado 3 y el error respectivo.

Figura 2.2. Polinomio interpolante de Newton para $f(x)$.



(a) $P_3(x)$

(b) Error

*) Interpolación de Hermite

El problema (2.2.5) es un caso particular de un problema más general en el que se pide, además de coincidir con la función en algunos puntos, que sus derivadas coincidan en dichos puntos. El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad del problema general.

2.2.6. Teorema. *Consideremos los $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n . Sean m_0, m_1, \dots, m_n , $n + 1$ enteros positivos, asociados a los x_k . Entonces $\exists! P(x) \in \mathcal{P}_N$, de grado a lo más $\sum_{i=0}^n m_i + n = N$ que satisface*

$$P^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (2.32)$$

donde $f(x)$ tiene m_i derivadas consecutivas en x_i , con $i = 0, 1, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m_i$. ■

Demostración.-

La ecuación (2.32) debe cumplirse para un polinomio de grado a lo más N :

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i,$$

por tanto tenemos $N + 1$ incógnitas por determinar. Para cada x_i , (2.32) se tendrán $m_i + 1$ ecuaciones lineales en los a_i , es decir, se tendrán

$$(m_0 + 1) + (m_1 + 1) + (m_2 + 1) + \dots + (m_n + 1) = \sum_{i=0}^n m_i + n + 1 = N + 1$$

ecuaciones lineales en las a_i . Las ecuaciones lineales que se generan son

$$\begin{array}{l}
 \text{Para } x_0 : \left\{ \begin{array}{l} P^{(0)}(x_0) = f^{(0)}(x_0) \\ P^{(1)}(x_0) = f^{(1)}(x_0) \\ \vdots \\ P^{(m_0)}(x_0) = f^{(m_0)}(x_0) \end{array} \right. ; \mathbf{m}_0 + \mathbf{1} \text{ ecuaciones,} \\
 \\
 \text{Para } x_1 : \left\{ \begin{array}{l} P^{(0)}(x_1) = f^{(0)}(x_1) \\ P^{(1)}(x_1) = f^{(1)}(x_1) \\ \vdots \\ P^{(m_1)}(x_1) = f^{(m_1)}(x_1) \end{array} \right. ; \mathbf{m}_1 + \mathbf{1} \text{ ecuaciones,} \\
 \\
 \dots \\
 \\
 \text{Para } x_n : \left\{ \begin{array}{l} P^{(0)}(x_n) = f^{(0)}(x_n) \\ P^{(1)}(x_n) = f^{(1)}(x_n) \\ \vdots \\ P^{(m_n)}(x_n) = f^{(m_n)}(x_n) \end{array} \right. ; \mathbf{m}_n + \mathbf{1} \text{ ecuaciones.}
 \end{array}$$

las cuales se pueden escribir como

$$AX = B$$

donde

$$X = (a_0, a_1, \dots, a_N)^T,$$

y

$$B = (f^{(0)}(x_0), \dots, f^{(m_0)}(x_0), f^{(0)}(x_1), \dots, f^{(m_1)}(x_1), \dots, f^{(0)}(x_n), \dots, f^{(m_n)}(x_n))^T$$

El sistema homogéneo asociado es

$$AX = \mathbf{0} \tag{2.33}$$

y si se verifica que éste tiene como única solución la trivial, es decir $X = (a_i) = (0, \dots, 0)^T$, entonces A es no singular y en consecuencia el teorema demostraría la existencia y unidad del problema (2.32).

Al considerar $AX = \mathbf{0}$, implica que $f^{(j)}(x_i) = 0$, sin embargo al considerar (2.32), $P(x)$ es de grado N y por el Teorema de la Factorización el polinomio es de la forma

$$P(x) = b(x) \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{m_i+1} = b(x)(x - x_0)^{m_0+1}(x - x_1)^{m_1+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1} \quad (2.34)$$

este es un polinomio de grado por lo menos $N + 1$, por lo que contradice el hecho de que debe ser de grado a lo más N , entonces $b(x) \equiv 0$, así $P(x) = 0$, es decir que los a_i son nulos, en consecuencia la solución de (2.33) es la trivial, y así A es un matriz no singular y el Teorema (2.2.6) se satisface (Paddy, 1989). ■

El polinomio del Teorema (2.2.6) se llama **polinomio osculante** que aproxima a $f \in C^m([a, b])$, con $m = \max_{0 \leq i \leq n} m_i$.

Algunos casos conocidos son:

- (•) $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, es decir que solo hay un nodo: \mathbf{x}_0 . Aquí se tiene el m_0 -ésimo polinomio de interpolación de Taylor para $f \in C^{m_0}([a, b])$ en $x = x_0$.
- (•) $\mathbf{m}_i = \mathbf{0}$, para cada $i = 0, 1, \dots, n$, es decir que hay $n + 1$ nodos, pero la derivada llega hasta el orden cero, en otras palabras, no hay derivadas.

Aquí se tiene el n -ésimo polinomio de interpolación de Lagrange para $f \in C([a, b])$ en los nodos $x = x_i$, definidos en (2.23).

- (•) $m_i = 1$, es decir $j = 0, 1$, que el polinomio y f coinciden en x_i y tienen la misma pendiente en x_i , aquí se tiene el polinomio de interpolación de Hermite para $f \in C^1([a, b])$.

Hallaremos la forma de $P(x)$ cuando $m_i = 1$, el Polinomio de Hermite, en x_0, x_1, \dots, x_n . El Teorema (2.2.6) garantiza su existencia, además nos dice que su grado es a lo más $2n + 1$. Este polinomio debe satisfacer, para cada x_i

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \wedge \quad P'(x_i) = f'(x_i) \quad (2.35)$$

lo cual nos da $2(n + 1)$ condiciones o ecuaciones lineales, es decir que el polinomio será de grado a lo más $2n + 1$. Asumiremos que $P(x)$ tiene la forma

$$P(x) = \sum_{i=0}^n H_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^n \bar{H}_i(x) f'(x_i). \quad (2.36)$$

Los polinomios $H_i(x)$ y $\bar{H}_i(x)$ tienen grado máximo $2n + 1$. Utilizando (2.36) y las condiciones (2.35) tenemos para $0 \leq i, j \leq n$

$$P(x_i) = f(x_i) \quad \implies \quad H_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad \bar{H}_j(x_i) = 0 \quad (2.37)$$

$$P'(x_i) = f'(x_i) \quad \implies \quad H_j'(x_i) = 0, \quad \bar{H}_j'(x_i) = \delta_{ji} \quad (2.38)$$

Sabemos de (2.24) que L_k es de grado n , $L_k(x) = \frac{\pi_n(x)}{(x - x_k) \cdot \pi_n'(x_k)}$, $k = 0, 1, \dots, n$. Por tanto

$$(L_k(x))^2 = \left(\frac{\pi_n(x)}{(x - x_k) \cdot \pi_n'(x_k)} \right)^2, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (2.39)$$

y (2.39) es un polinomio de grado $2n$. Además, para $0 \leq i, j \leq n$,

$$L_j(x_i) = \delta_{ji} \implies (L_j(x_i))^2 = \delta_{ji} \quad (2.40)$$

También

$$(L_j^2(x))' = 2L_j(x) L_j'(x) \implies \begin{cases} (L_j^2(x_j))' = 2L_j(x_j) L_j'(x_j) = 2L_j'(x_j) \\ (L_j^2(x_i))' = 2L_j(x_i) L_j'(x_i) = 0, j \neq i \end{cases}$$

Entonces los polinomios $H_i(x)$ y $\bar{H}_i(x)$, que son de grado $2n + 1$ los podemos expresar como

$$H_i(x) = \underbrace{(a_H x + b_H)}_{\text{lineal}} L_i^2(x), \quad (2.41)$$

$$\bar{H}_i(x) = \underbrace{(a_{\bar{H}} x + b_{\bar{H}})}_{\text{lineal}} L_i^2(x) \quad (2.42)$$

Aquí, a_H , b_H , $a_{\bar{H}}$ y $b_{\bar{H}}$ son constantes. Hallaremos esas constantes.

(•) De (2.37), (2.41) y (2.42), tenemos

$$\begin{aligned} 1 = \delta_{ii} = H_i(x_i) &= (a_H x_i + b_H) L_i^2(x_i) = a_H x_i + b_H \\ &\implies \mathbf{a_H x_i + b_H = 1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} 0 = \bar{H}_i(x_i) &= (a_{\bar{H}} x_i + b_{\bar{H}}) L_i^2(x_i) = a_{\bar{H}} x_i + b_{\bar{H}} \\ &\implies \mathbf{a_{\bar{H}} x_i + b_{\bar{H}} = 0} \end{aligned} \quad (2.44)$$

(•) De (2.38), (2.41) y (2.42), tenemos

$$H_i'(x) = a_H L_i^2(x) + 2(a_H x + b_H) L_i(x) L_i'(x) \quad (2.45)$$

$$0 = H_i'(x_i) = a_H L_i^2(x_i) + 2 \underbrace{(a_H x_i + b_H)}_{=1 \text{ por (2.43)}} L_i(x_i) L_i'(x_i)$$

$$\implies \mathbf{a}_H + 2\mathbf{L}'_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

$$\overline{H}'_i(x) = a_{\overline{H}} L_i^2(x) + 2(a_{\overline{H}}x + b_{\overline{H}})L_i(x) L'_i(x) \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1} = \overline{H}'_i(\mathbf{x}_i) &= a_{\overline{H}} L_i^2(x_i) + \underbrace{2(a_{\overline{H}}x_i + b_{\overline{H}})}_{=0 \text{ por (2.44)}} L_i(x_i) L'_i(x_i) \\ &\implies \mathbf{a}_{\overline{H}} = \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Reemplazando (2.46) en (2.43) y (2.48) en (2.44), se obtienen respectivamente:

$$b_H = 1 + 2x_i L'_i(x_i); \quad b_{\overline{H}} = -x_i \quad (2.49)$$

Por tanto, los polinomios $H_i(x)$ y $\overline{H}_i(x)$ serán

$$H_i(x) = (1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i))L_i^2(x) \quad (2.50)$$

$$\overline{H}_i(x) = (x - x_i)L_i^2(x) \quad (2.51)$$

Por último, reemplazamos (2.50) y (2.51) en (2.36) y tendremos el **Polinomio interpolante de Hermite** también llamada *Fórmula de interpolación osculatoria de Hermite*.

$$P(x) = \sum_{i=0}^n [1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)] L_i^2(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^n (x - x_i) L_i^2(x) f'(x_i). \quad (2.52)$$

Veamos un ejemplo considerando $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, dada anteriormente; usaremos una partición uniforme del intervalo $[-1, 2]$, con $n = 3$, es decir cuatro nodos.

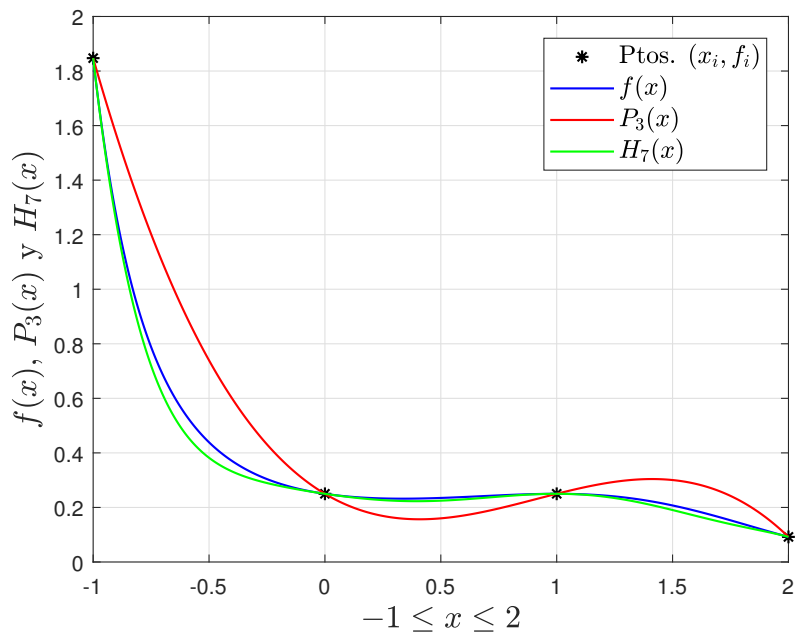
2.2.5. Ejemplo. Sea $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $x \in [-1, 2]$ y los nodos $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 2$. Los polinomios de interpolación $P_3(x)$ y $H_7(x)$ son:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 0.25 - 0.506083x + 0.798632x^2 - 0.292549x^3 \\ H_7(x) &= 0.25 - 0.125x + 0.108397x^2 + 0.036576x^3 + \\ &\quad 0.331837x^4 - 0.646099x^5 + 0.358397x^6 - 0.064108x^7 \end{aligned} \tag{2.53}$$

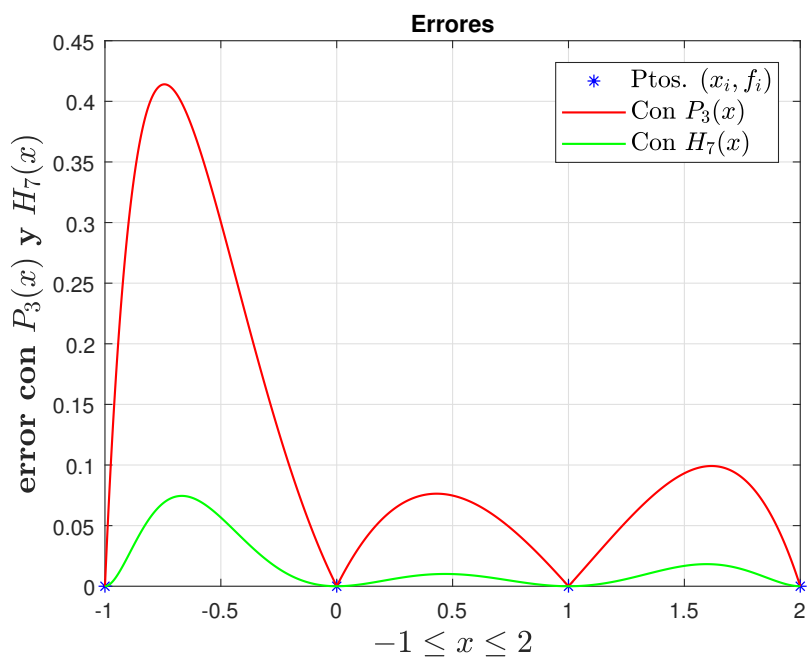
■

En la Figura [\(2.3\)](#) se observan los polinomios interpolantes de Lagrange $P_3(x)$, de grado 3 y el de Hermite $H_7(x)$, de grado 7. El polinomio de Hermite es una mejor aproximación para $f(x)$, se puede observar que $H_7(x)$ efectivamente coincide con $f(x)$ en los nodos dados, además de sus pendientes en dichos nodos.

Figura 2.3. Polinomios interpolantes de Lagrange $P_3(x)$ y de Hermite $H_7(x)$ para $f(x)$.



(a) $f(x)$, $P_3(x)$ y $H_7(x)$



(b) Errores

*) Interpolación mediante Splines Cúbicos

Hasta el momento sólo se ha usado un solo polinomio en un intervalo cerrado y generalmente no se tiene la información de la derivada de la función, además si el grado del polinomio interpolante aumenta, éste va a producir mayor variación u oscilaciones erradas entre los nodos. Es por ello que una alternativa es considerar polinomios por tramos, es decir polinomios en subintervalos. Aquí, el intervalo de trabajo se divide en subintervalos y es ahí donde se generan los polinomios.

Un teorema importante en la construcción de los splines cúbicos, cuya demostración se puede encontrar en (Burden, 1996) es el Teorema (2.2.7), que nos lleva a que el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tenga solución única, pero primero se da la definición de *matriz diagonalmente dominante estrictamente*.

2.2.10. Definición. La matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ se dice que es **diagonalmente dominante** si se cumple

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.54)$$

■

En (2.54) si el signo “ \geq ” se cambia a “ $>$ ”, se dice que la matriz es **diagonalmente dominante estrictamente**.

2.2.6. Ejemplo. De las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad y \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -3 & 7 & 1 \\ -3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

vemos, de la Definición (2.2.10), que \mathbf{A} es diagonalmente dominante estrictamente, \mathbf{B} es diagonalmente dominante, y \mathbf{C} no es diagonalmente dominante.

■

El Teorema (2.2.7) tiene su demostración en (Burden, 1996).

2.2.7. Teorema. Si la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ es diagonalmente dominante estrictamente, entonces \mathbf{A} es no singular. ■

2.2.11. Definición. Sea f definida en el intervalo $[a, b]$ y el soporte: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Un *interpolante de spline cúbico* S para f es una función que satisface las siguientes condiciones:

a) $S(x)|_{[x_k, x_{k+1}]} = S_k(x)$ es un polinomio cúbico para cada $k = 0, 1, \dots, n-1$.

b) $S(x_k) = f(x_k)$ para cada $k = 0, 1, \dots, n$.

c) $S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1})$ para cada $k = 0, 1, \dots, n-2$.

d) $S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1})$ para cada $k = 0, 1, \dots, n-2$.

e) $S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1})$ para cada $k = 0, 1, \dots, n-2$.

f) Además se cumple una de las condiciones de frontera:

$$i) S''(x_0) = S''(x_n) = 0, \quad (\text{cota libre o frontera libre o natural})$$

$$ii) S'(x_0) = f'(x_0) \text{ y } S'(x_n) = f'(x_n), \quad (\text{cota libre o frontera sujeta}).$$

■

Si se presenta la condición **f) i)** el spline cúbico (o trazador) se denomina *spline cúbico natural* o *trazador natural*, pero esta no es muy usada generalmente debido a que no siempre la segunda derivada de f tiene un valor cerca a 0.

La desventaja de **f) ii)**, que se denomina spline cúbico de cota fijo, es que a veces no se tiene la información de la primera derivada de f en los extremos, sin embargo este produce mejores resultados. Los teoremas siguientes muestran que efectivamente existen, y son únicos, los splines cúbicos, tanto natural como fijos, que interpolan a f .

2.2.8. Teorema. *Existe un único trazador natural que interpola a f en los nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y satisface **f) i)**.* ■

Demostración.-

En vista de que $S|_{[x_k, x_{k+1}]} = S_k$ es un polinomio cúbico, éste se puede representar como

$$S_k(x) = y_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3. \quad (2.55)$$

donde $y_k = f(x_k)$, para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Se puede verificar que

$$S_k(x_k) = y_k = f(x_k), \text{ para cada } k = 0, 1, \dots, n - 1; \quad (2.56)$$

y haciendo $S(x_n) = y_n = f(x_n)$, se satisface **b**).

Ahora, de la condición **c**)

$$\begin{aligned} y_{k+1} = S_{k+1}(x_{k+1}) &= S_k(x_{k+1}) = \\ &= y_k + b_k(x_{k+1} - x_k) + c_k(x_{k+1} - x_k)^2 + d_k(x_{k+1} - x_k)^3 \end{aligned}$$

para cada $k = 0, 1, \dots, n - 2$.

Haciendo $x_{k+1} - x_k = h_k$, con $k = 0, 1, \dots, n - 1$, la ecuación anterior queda

$$y_{k+1} = y_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + d_k h_k^3 \quad (2.57)$$

esto para $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Derivando (2.55) y evaluando en x_k tenemos

$$S'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2 \implies S'_k(x_k) = b_k$$

para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ y haciendo $S'(x_n) = b_n$ tenemos en la condición

d), para cada $k = 0, 1, \dots, n - 2$,

$$\begin{aligned} S'_{k+1}(x_{k+1}) &= S'_k(x_{k+1}) \\ b_{k+1} &= b_k + 2c_k(x_{k+1} - x_k) + 3d_k(x_{k+1} - x_k)^2 \end{aligned}$$

de donde

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.58)$$

Derivando por segunda vez (2.55) y evaluando en x_k tenemos

$$S''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k) \implies S''_k(x_k) = 2c_k$$

para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ y haciendo $S''(x_n) = 2c_n$ ó $c_n = \frac{S''(x_n)}{2}$ tenemos en la condición e), para cada $k = 0, 1, \dots, n - 2$,

$$\begin{aligned} S''_{k+1}(x_{k+1}) &= S''_k(x_{k+1}) \\ 2c_{k+1} &= 2c_k + 6d_k(x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

de donde

$$2c_{k+1} = 2c_k + 6d_k h_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$$

o en forma equivalente

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.59)$$

Ahora despejamos d_k en la ecuación (2.59), para $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$,

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \quad (2.60)$$

y reemplazando (2.60) en (2.58) y (2.57) tenemos

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= b_k + 2c_k h_k + 3 \left(\frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \right) h_k^2 \\ \mathbf{b}_{k+1} &= \mathbf{b}_k + \mathbf{h}_k (c_{k+1} + c_k) \end{aligned} \quad (2.61)$$

y

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + b_k h_k + c_k h_k^2 + \left(\frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k} \right) h_k^3 \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + \mathbf{b}_k \mathbf{h}_k + (c_{k+1} + 2c_k) \frac{\mathbf{h}_k^2}{3} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Despejamos b_k de la ecuación (2.62):

$$b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3} (c_{k+1} + 2c_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \quad (2.63)$$

Reducimos en 1 el índice de las ecuaciones (2.63) y (2.61)

$$b_{k-1} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{3} (c_k + 2c_{k-1}) \quad (2.64)$$

$$b_k = b_{k-1} + h_{k-1} (c_k + c_{k-1}) \quad (2.65)$$

Reemplazamos (2.63) y (2.64) en la ecuación (2.65)

$$\begin{aligned} \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3} (c_{k+1} + 2c_k) &= \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{h_{k-1}} - \frac{h_{k-1}}{3} (c_k + 2c_{k-1}) \right) \\ &\quad + h_{k-1} (c_k + c_{k-1}) \end{aligned}$$

Reduciendo se tiene un sistema de ecuaciones lineales en las variables c_{k-1} , c_k y c_{k+1} , con $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$h_{k-1} \mathbf{c}_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k) \mathbf{c}_k + h_k \mathbf{c}_{k+1} = \frac{3(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{3(y_k - y_{k-1})}{h_{k-1}} \quad (2.66)$$

Puesto que se debe satisfacer **f) i)**, se tiene que

$$c_n = \frac{S''(x_n)}{3} = 0, \quad \text{y} \quad 0 = S''(x_0) = 2c_0 + 6d_0(x_0 - x_0) \implies c_0 = 0$$

Teniendo en cuenta que $c_0 = 0$, (2.66) y que $c_n = 0$, y haciendo

$$\alpha_0 = 2(h_0 + h_1), \quad \alpha_1 = 2(h_1 + h_2), \quad \dots, \quad \alpha_{n-2} = 2(h_{n-2} + h_{n-1}) \quad (2.67)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = \frac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{3(y_1 - y_0)}{h_0}, \\ \beta_3 = \frac{3(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{3(y_2 - y_1)}{h_1}, \\ \vdots \\ \beta_n = \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} - \frac{3(y_{n-1} - y_{n-2})}{h_{n-2}} \end{array} \right. \quad (2.68)$$

tenemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{c}_0 \\ h_0 \mathbf{c}_0 + \alpha_0 \mathbf{c}_1 + h_1 \mathbf{c}_2 \\ h_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_1 \mathbf{c}_2 + h_2 \mathbf{c}_3 \\ \vdots \\ h_{n-2} \mathbf{c}_{n-2} + \alpha_{n-2} \mathbf{c}_{n-1} + h_{n-1} \mathbf{c}_n \\ \mathbf{c}_n \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = \beta_2 \\ = \beta_3 \\ \vdots \\ = \beta_n \\ = 0 \end{array} \quad (2.69)$$

El sistema de ecuaciones (2.69) en las variables c_k , escrito en forma matricial

es $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & \alpha_0 & h_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & h_1 & \alpha_1 & h_2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & h_{n-3} & \alpha_{n-3} & h_{n-2} & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & h_{n-2} & \alpha_{n-2} & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

esta matriz es de orden $(n+1) \times (n+1)$, y las matrices columna, o vectores

\mathbf{b} , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ son

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & c_n \end{pmatrix}^T. \quad (2.71)$$

De acuerdo a (2.67), la matrix \mathbf{A} es estrictamente dominante diagonalmente y por el Teorema (2.2.7) es no singular, por lo que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única para $\mathbf{x} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)^T$.

Esto implica que los d_k dados en la ecuación (2.60) y los b_k dados en la ecuación (2.63) son únicos, en consecuencia el polinomio cúbico dado en (2.55) existe y es único, lo que demuestra el Teorema (2.2.8). ■

2.2.9. Teorema. *Existe un único spline cúbico de cota fija que interpola a f en los puntos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.* ■

Demostración.-

Usando las condiciones f) ii), tenemos las ecuaciones (para $k = 0$ y $k = n$ respectivamente)

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3(y_1 - y_0)}{h_0} - 3f'(a) \quad (2.72)$$

y

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} \quad (2.73)$$

Para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ tenemos la ecuación (2.66):

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_kc_{k+1} = \frac{3(y_{k+1} - y_k)}{h_k} - \frac{3(y_k - y_{k-1})}{h_{k-1}}$$

Con lo cual formamos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3(y_1-y_0)}{h_0} - 3f'(a) \\ \vdots \\ h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_kc_{k+1} = \frac{3(y_{k+1}-y_k)}{h_k} - \frac{3(y_k-y_{k-1})}{h_{k-1}} \\ \vdots \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3(y_n-y_{n-1})}{h_{n-1}} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

De (2.67) y (2.68), se forma un sistema matricial, igual que en el teorema anterior, $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}^*$, sin embargo las matrices son

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & \alpha_0 & h_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & h_1 & \alpha_1 & h_2 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & h_{n-3} & \alpha_{n-3} & h_{n-2} & 0 \\ 0 & & & 0 & 0 & h_{n-2} & \alpha_{n-2} & h_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.75)$$

esta matriz es de orden $(n+1) \times (n+1)$, y las matrices columna, o vectores

\mathbf{b}^* , $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ son

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}^* = \left(\frac{3(y_1-y_0)}{h_0} - 3f'(a), \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n, 3f'(b) - \frac{3(y_n-y_{n-1})}{h_{n-1}} \right)^T, \\ \mathbf{x} = \left(c_0 \ c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{n-1} \ c_n \right)^T \end{array} \right. \quad (2.76)$$

De acuerdo a (2.67), la matrix \mathbf{A}^* es estrictamente dominante diagonalmente y por el Teorema (2.2.7) es no singular, por lo que $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{b}^*$ tiene solución única para $\mathbf{x} = (c_0, c_1, c_2, \dots, c_n)^T$.

Esto demuestra el Teorema (2.2.9). ■

2.2.7. Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$ y los nodos $a = x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ y $x_3 = 2$. Hallaremos el splin cúbico natural y el splin cúbico de cota fija. ■

*) Trazador cúbico natural

De acuerdo a los dato tenemos: ($n = 3$)

$$y_0 = \frac{e^2}{4}, \quad y_1 = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{1}{4}, \quad y_3 = \frac{1}{4e}$$

Además $h_0 = h_1 = h_2 = 1$. La matriz \mathbf{A} , de orden $(n+1) \times (n+1) = 4 \times 4$,

dada en (2.70) es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$, dado en (2.71) es

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3(y_2 - y_1)}{h_1} - \frac{3(y_1 - y_0)}{h_0} \\ \frac{3(y_3 - y_2)}{h_2} - \frac{3(y_2 - y_1)}{h_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4} \right) \\ 3 \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4e} \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ 3\left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4e}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual nos da

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4e}\right) - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4e}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.309417247727558 \\ -0.44587691671224405 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Recordando (2.63): $b_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k)$.

Y de (2.60): $d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}$.

Los coeficientes para los polinomios $S_k(x)$, $k = 0, 1, 2$, se muestran en el siguiente arreglo

Cuadro 2.1. Coeficientes de los $S_k(x)$ (splin cúbico natural).

k	y_k	b_k	c_k	d_k
0	1.84726402	-2.03373644	0.00000000	0.43647242
1	0.25000000	-0.72431919	1.30941725	-0.58509805
2	0.25000000	0.13922114	-0.44587692	0.14862564

Por tanto los $S_k(x)$ para cada $k = 0, 1, 2$, son

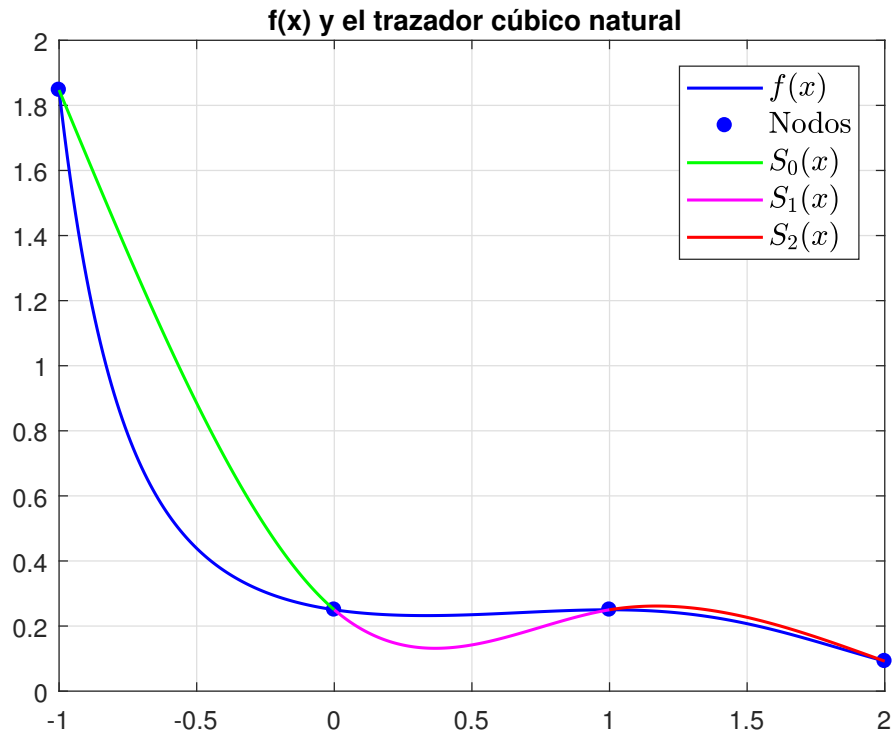
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet) \text{ para } -1 \leq x \leq 0 \\ S_0(x) = 1.847264 - 2.033736(x + 1) + 0.436472(x + 1)^3, \\ \\ \bullet) \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \\ S_1(x) = 0.25 - 0.724319x + 1.309417x^2 - 0.58509x^3, \\ \\ \bullet) \text{ para } 1 \leq x \leq 2 \\ S_2(x) = 0.25 + 0.139221(x - 1) - 0.445876(x - 1)^2 + 0.148625(x - 1)^3. \end{array} \right.$$

y el **trazador cúbico natural** es:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & -1 \leq x \leq 0 \\ S_1(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ S_2(x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (2.78)$$

La Figura (2.4) muestra a la función $f(x)$ y a los S_k , $k = 0, 1, 2$, que forman el trazador cúbico natural.

Figura 2.4. Gráfica que muestra $f(x)$ y el trazador cúbico natural.



***) Trazador cúbico de cota fija**

En forma similar, hallaremos el trazador cúbico de cota fija ($n = 3$).

De acuerdo a [\(2.75\)](#) la matriz \mathbf{A}^* , de orden $(n + 1) \times (n + 1) = 4 \times 4$, es

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & 0h_2 & 2h_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

El vector $\mathbf{b}^* \in \mathbb{R}^4$ es

$$\mathbf{b}^* = \begin{pmatrix} \frac{3(y_1-y_0)}{h_0} - 3f'(a) \\ \frac{3(y_2-y_1)}{h_1} - \frac{3(y_1-y_0)}{h_0} \\ \frac{3(y_3-y_2)}{h_2} - \frac{3(y_2-y_1)}{h_1} \\ 3f'(b) - \frac{3(y_3-y_2)}{h_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^2 + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ -3\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ 3\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4e}\right) \\ -3\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4e}\right) - \frac{15}{8e} \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema matricial $\mathbf{A}^*x = \mathbf{b}^*$, con $x = (c_0, c_1, c_2, c_3)^T$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^2 + 3\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ -3\left(\frac{1}{4} - \frac{e^2}{4}\right) \\ 3\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4e}\right) \\ -3\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4e}\right) - \frac{15}{8e} \end{pmatrix}$$

lo que nos resulta

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{120} \left(60 + \frac{11}{e} + 142e^2\right) \\ -\left(\frac{11+15e+7e^3}{60e}\right) \\ \frac{1}{120} \left(-30 + \frac{77}{e} + 4e^2\right) \\ -\left(\frac{98-30e+e^3}{60e}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.277438665841984 \\ -1.1795011090900072 \\ 0.2323578447160305 \\ -0.22402068889553337 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de los $S_k(x)$, $k = 0, 1, 2$ se muestran en la siguiente tabla.

Cuadro 2.2. Coeficientes de los $S_k(x)$ (splin cúbico de cota fija).

k	y_k	b_k	c_k	d_k
0	1.84726402	-7.38905610	9.27743867	-3.48564659
1	0.25000000	0.70888146	-1.17950111	0.47061965
2	0.25000000	-0.23826181	0.23235784	-0.15212618

Los polinomios $S_k(x)$ para cada $k = 0, 1, 2$, son

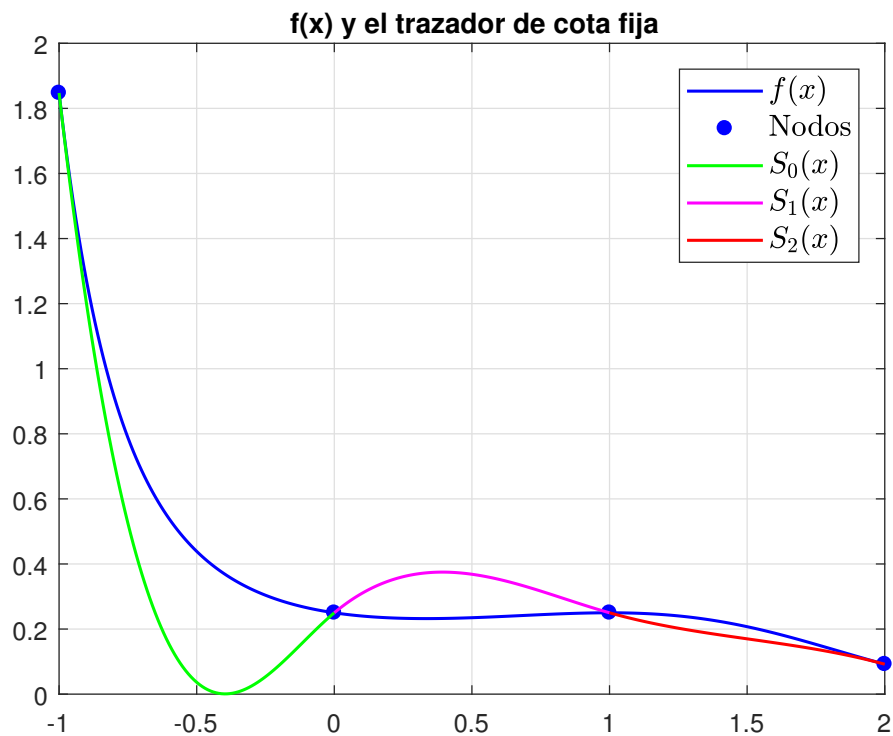
$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet) \text{ para } -1 \leq x \leq 0 \\ S_0^*(x) = 1.847264 - 7.389056(x + 1) + 9.277438(x + 1)^2 - 3.485647(x + 1)^3, \\ \\ \bullet) \text{ para } 0 \leq x \leq 1 \\ S_1^*(x) = 0.25 + 0.708881x - 1.179501x^2 + 0.47062x^3, \\ \\ \bullet) \text{ para } 1 \leq x \leq 2 \\ S_2^*(x) = 0.25 - 0.238262(x - 1) + 0.232358(x - 1)^2 - 0.152126(x - 1)^3. \end{array} \right.$$

y el trazador cúbico cota fija es:

$$S^*(x) = \begin{cases} S_0^*(x), & -1 \leq x \leq 0 \\ S_1^*(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ S_2^*(x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (2.79)$$

La Figura (2.5) muestra a la función $f(x)$ y a los S_k , $k = 0, 1, 2$, que forman el trazador cúbico natural.

Figura 2.5. Gráfica que muestra $f(x)$ y el trazador de cota fija.



En la Figura (2.6) se observa los errores que se cometen al aproximar la función $f(x)$ on los trazadores cúbicos natural y de cota fija.

Se puede concluir para este caso particular que con el trazador cúbico de cota fija, de color rojo, se obtiene una mejor aproximación de $f(x)$.

Mediremos este error en $L^2[-1, 2]$.

En (2.78) tenemos el splin cúbico natural $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ y en (2.79) el splin cúbico de cota fija $\mathbf{S}^*(\mathbf{x})$, entonces tenemos los errores con

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Splin natural } &= \|f(x) - \mathbf{S}(x)\|_2 = \sqrt{\int_{[-1,2]} |f(x) - \mathbf{S}(x)|^2 dx} \\
 &= \mathbf{0.3844120360432866}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \text{ Splin cota fija } &= \|f(x) - \mathbf{S}^*(x)\|_2 = \sqrt{\int_{[-1,2]} |f(x) - \mathbf{S}^*(x)|^2 dx} \\
 &= \mathbf{0.2892094723701268}
 \end{aligned}$$

En resumen, con el splin cúbico de cota fija se obtuvo un error menor para esta función $f(x)$.

Cuadro 2.3. Errores de splin cúbico natural y de cota fija en $L^2[-1, 2]$.

Error con splin cúbico natural	Error con splin cúbico de cota fija
0.3844120360432866	0.2892094723701268

Figura 2.6. Gráfica que muestra el error al aproximar $f(x)$ con ambos splines cúbicos.



2.2.8. Ejemplo. *Aumentemos el número de nodos:*

$$a = x_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{4}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = 0, x_5 = \frac{1}{4},$$

$$x_6 = \frac{1}{2}, x_7 = \frac{3}{4}, x_8 = 1, x_9 = \frac{5}{4}, x_{10} = \frac{3}{2}, x_{11} = \frac{7}{4}, x_{12} = 2 = b.$$

■

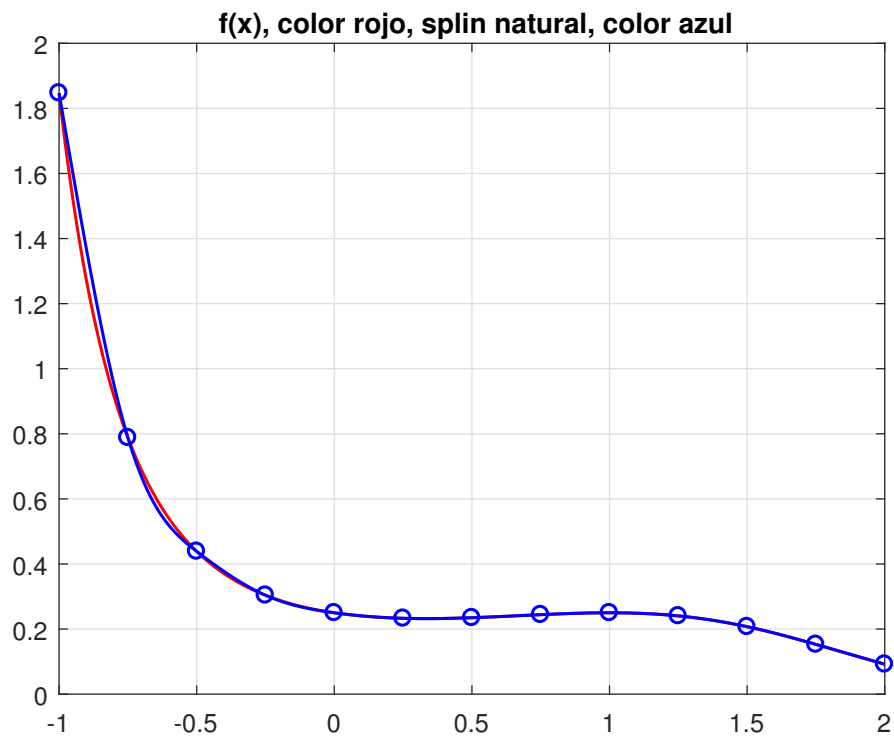
Aquí $n = 12$ y los coeficientes de los polinomios $\mathbf{S}_k(\mathbf{x})$, $k = 0, 1, \dots, 11$, que conforman el trazador cúbico natural son

Cuadro 2.4. Coeficientes de los $S_k(x)$ (splin cúbico natural), para 13 nodos.

k	y_k	b_k	c_k	d_k
0	1.84726402	-4.94001822	0.00000000	11.26758739
1	0.78831552	-2.82734559	8.45069054	-10.93655162
2	0.43876366	-0.65260375	0.24827683	0.81873141
3	0.30392271	-0.37495319	0.86232539	-0.90110375
4	0.25000000	-0.11274745	0.18649758	-0.02839119
5	0.23302562	-0.02482201	0.16520418	-0.14669539
6	0.23485327	0.03027469	0.05518264	-0.10637421
7	0.24420876	0.03792084	-0.02459802	-0.13770181
8	0.25000000	-0.00019726	-0.12787438	-0.09829671
9	0.24042265	-0.08256508	-0.20159692	0.00484529
10	0.20725728	-0.18245505	-0.19796295	0.22727059
11	0.15282193	-0.23882329	-0.02751002	0.03668002

La Figura (2.7) nos muestra a la función $f(x)$ y al trazador natural $\mathcal{S}(x)$, donde se han considerado 13 nodos, x_k , $k = 0, 1, \dots, 12$.

Figura 2.7. $f(x)$ y el splin cúbico natural $S(x)$, considerando 13 nodos.



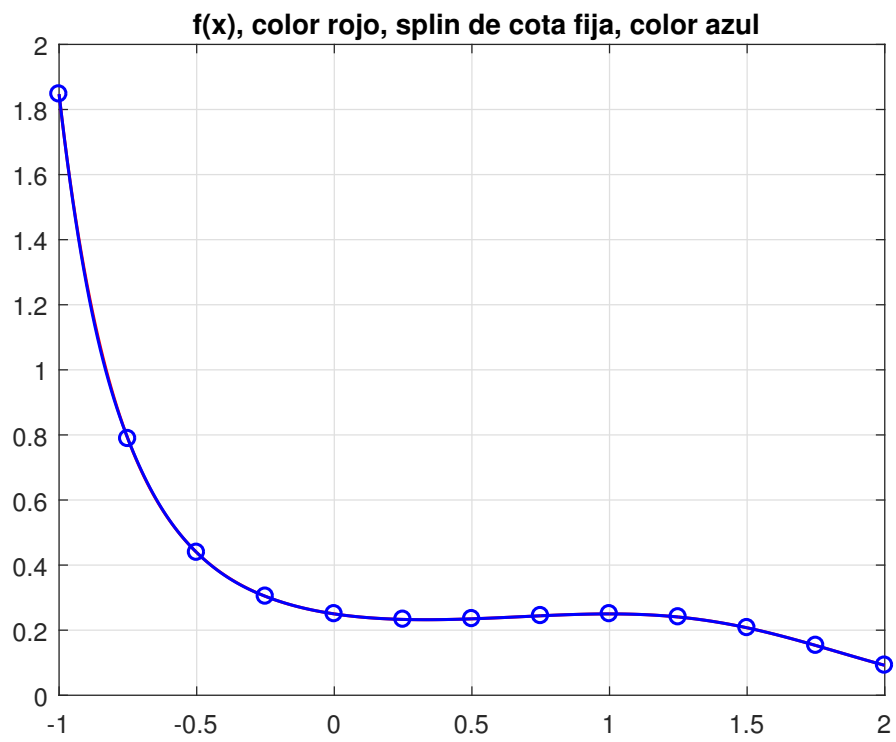
Para el trazador cúbico de cota fija $S^*(x)$, los coeficientes de los polinomios $S_k^*(x)$, para $k = 0, 1, 2, \dots, 11$, se dan en la Cuadro (2.5).

Cuadro 2.5. Coeficientes de los $\mathbf{S}_k^*(\mathbf{x})$ (splin cúbico de cota fija), para 13 nodos.

k	y_k	b_k	c_k	d_k
0	1.84726402	-7.38905610	16.96743214	-17.41753519
1	0.78831552	-2.17112788	3.90428075	-3.25039586
2	0.43876366	-0.82843672	1.46648385	-1.24076904
3	0.30392271	-0.32783899	0.53590708	-0.34925771
4	0.25000000	-0.12537127	0.27396380	-0.17627490
5	0.23302562	-0.02144092	0.14175762	-0.10700659
6	0.23485327	0.02937415	0.06150267	-0.11724570
7	0.24420876	0.03814192	-0.02643160	-0.13390466
8	0.25000000	-0.00018101	-0.12686010	-0.10261384
9	0.24042265	-0.08285115	-0.20382048	0.01831663
10	0.20725728	-0.18132702	-0.19008301	0.17770233
11	0.15282193	-0.24304934	-0.05680625	0.22148168

Y en la Figura [\(2.8\)](#) nos muestra a la función $f(x)$ y al trazador de cota fija $\mathbf{S}^*(\mathbf{x})$, donde se han considerado 13 nodos, x_k , $k = 0, 1, \dots, 12$, son prácticamente iguales.

Figura 2.8. $f(x)$ y el splin cúbico de cota fija $S^*(x)$, considerando 13 nodos.



2.3. Marco Conceptual

2.3.1. Anillos Modulares \mathbb{Z}_h

Aquí, recordaremos algo del álgebra, como anillos, campos, ideales, anillos cocientes o anillo de clases residuales, anillos modulares, entre otros conceptos.

2.3.1. Definición. *Anillo*

Sea R un conjunto: Sean las operaciones binarias definidas en R : adición y multiplicación. La terna $(R, +, *)$ es un anillo si se cumple: (Lee, 2010)

1. R es un grupo abelino bajo la adición.
2. Si $a, b \in R$, entonces $ab \in R$ (es cerrada bajo la multiplicación);
3. Si $a, b, c \in R$ entonces $(ab)c = a(bc)$ (la multiplicación es asociativa);
4. Si $a, b, c \in R$ entonces, $a(b + c) = ab + ac$ (ley distributiva); y
5. Si $a, b, c \in R$, entonces $(a + b)c = ac + bc$ (ley distributiva).

■

Aquí hay que recordar que si en un anillo R , la multiplicación es conmutativa, el anillo es llamado *anillo conmutativo*. Además si R tiene identidad multiplicativa $\mathbf{1}$, con $\mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} = x, \forall x \in R$, se dice que R es un *anillo con unitario*. (Si $\mathbf{1} \in R$ entonces $\mathbf{1}$ es un *elemento unitario* y es único). (Fraleigh, 1998)

Para que el tema de las bases espectrales quede bien dado necesitamos el concepto de CAMPO.

Si $u \in R$, con R : anillo con unitario, se dice que u es una *unidad* si tiene inverso multiplicativo y ese inverso está en R .

Si $u \neq 0 \in R$ es una unidad, entonces el anillo R es un *semi campo* o **anillo con división**.

Entonces, si R es un anillo conmutativo con división, ese anillo R es un *Campo*.

Los anillos $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son campos, sin embargo el anillo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un campo puesto que si $u = 5$ su inverso no está en \mathbb{Z} , es decir que no tiene inverso multiplicativo y así, $u = 5$ no es un unidad.

2.3.2. Definición. *Suma Directa*

Sean R y S dos anillos. La suma directa de R y S , denotada por $R \oplus S$, es el Producto Cartesiano $R \times S$, bajo las operaciones:

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2) \quad (2.80)$$

$$(r_1, s_1) * (r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2), \quad (2.81)$$

para todo $r_i \in R$ y $s_i \in S$. ■

2.3.1. Teorema. Sean R y S dos anillos. Entonces $R \oplus S$ es un anillo. Además, si R y S son conmutativos, entonces $R \oplus S$ es conmutativo. Y si R y S son anillos con identidad, $R \oplus S$ también es un anillo con identidad. ■

Demostración.-

Ver (Lee, 2010) ■

2.3.1. Ejemplo. Sean los anillos módulos 7 y 11.

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}; \quad \mathbb{Z}_9 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Sean $(4, 8)$ y $(3, 6)$ elementos de $\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_9$. De la Definición (2.3.2), tenemos

$$(4, 8) + (3, 6) = (4 + 3, 8 + 6) = (0, 5)$$

$$(4, 8) \cdot (3, 6) = (4 \cdot 3, 8 \cdot 6) = (5, 3)$$

■

2.3.3. Definición. *Divisores de cero en un anillo*

Si en un anillo R se cumple $a \cdot b = 0$, con $a, b \in R$, (ambos $\neq 0$), se dice que a y b son *divisores de 0*. (a : divisor izquierdo de 0, y b : divisor derecho de 0). ■

El siguiente teorema relaciona los divisores de cero con los primos relativos.

2.3.2. Teorema. En el anillo $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, los divisores de 0 son los elementos que no son primos relativos con n . (Fraleigh, 1998) ■

Del Teorema (2.3.2) se desprende que si p es primo entonces \mathbb{Z}_p no tiene divisores de $\mathbf{0}$.

Otro concepto importante es el de Dominio entero o dominio integrado.

2.3.4. Definición. *Dominio Entero*

El anillo D es un *dominio entero*, si es conmutativo, unitario y que no contiene divisores de $\mathbf{0}$. ■

2.3.5. Definición. *Ideal de una anillo*

Un subgrupo $(I_R, +)$ de un anillo R es un *ideal* (o *ideal bilateral*) de R , si $\forall r \in R$ se cumple

$$r \cdot I_R \subseteq I_R \text{ y } I_R \cdot r \subseteq I_R \quad (2.82)$$

Si solo se cumple $r \cdot I_R \subseteq I_R, \forall r \in R$, se llama *ideal izquierdo de R* .

En forma similar, si sólo se cumple $I_R \cdot r \subseteq I_R, \forall r \in R$, se dice que I_R es un *ideal derecho de R* ■

2.3.6. Definición. *Anillo de Clases Residuales*

Si I_R es un ideal en un anillo R , el anillo

$$R/I_R = \{r + I_r, \text{ clases laterales}\} \quad (2.83)$$

es llamado el *anillo cociente*, o *anillo factor*, o *anillo de las clases residuales*.

Las clases indicadas son las clases residuales módulo I_R . ■

2.3.2. Ejemplo. Sea $R = \mathbb{Z}_8$, el conjunto $I_R = \{0, 2, 4, 6\} \subset R$, es un ideal de $R = \mathbb{Z}_8$. Verificamos (la conmutatividad se cumple):

- (●) $r = 0 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{0} \cdot I_R = \{\mathbf{0} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{0} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 0, 0, 0\} = \{0\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 1 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{1} \cdot I_R = \{\mathbf{1} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{1} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 2, 4, 6\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 2 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{2} \cdot I_R = \{\mathbf{2} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{2} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{2} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{2} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 4, 0, 4\} = \{0, 4\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 3 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{3} \cdot I_R = \{\mathbf{3} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{3} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{3} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{3} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 6, 4, 2\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 4 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{4} \cdot I_R = \{\mathbf{4} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{4} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{4} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{4} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 0, 0, 0\} = \{0\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 5 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{5} \cdot I_R = \{\mathbf{5} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{5} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{5} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{5} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 2, 4, 6\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 6 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{6} \cdot I_R = \{\mathbf{6} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{6} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{6} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{6} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 4, 0, 4\} = \{0, 4\} \subset \mathbb{Z}_8$
- (●) $r = 7 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{7} \cdot I_R = \{\mathbf{7} \cdot \mathbf{0}, \mathbf{7} \cdot \mathbf{2}, \mathbf{7} \cdot \mathbf{4}, \mathbf{7} \cdot \mathbf{6}\} = \{0, 6, 4, 2\} \subset \mathbb{Z}_8$

Es decir que efectivamente $I_R = \{0, 2, 4, 6\}$ es un ideal de R .

Las clases laterales o clases residuales módulo I_R del anillo cociente $R/I_R = \mathbb{Z}_8/\{0, 2, 4, 6\}$, son:

- (●) $r = 0 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{0} + I_R = \{\mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{0} + \mathbf{2}, \mathbf{0} + \mathbf{4}, \mathbf{0} + \mathbf{6}\} = \{0, 2, 4, 6\} = I_R$
- (●) $r = 1 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{1} + I_R = \{\mathbf{1} + \mathbf{0}, \mathbf{1} + \mathbf{2}, \mathbf{1} + \mathbf{4}, \mathbf{1} + \mathbf{6}\} = \{1, 3, 5, 7\}$
- (●) $r = 2 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{2} + I_R = \{\mathbf{2} + \mathbf{0}, \mathbf{2} + \mathbf{2}, \mathbf{2} + \mathbf{4}, \mathbf{2} + \mathbf{6}\} = \{2, 4, 6, 0\} = I_R$
- (●) $r = 3 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{3} + I_R = \{\mathbf{3} + \mathbf{0}, \mathbf{3} + \mathbf{2}, \mathbf{3} + \mathbf{4}, \mathbf{3} + \mathbf{6}\} = \{3, 5, 7, 1\}$
- (●) $r = 4 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{4} + I_R = \{\mathbf{4} + \mathbf{0}, \mathbf{4} + \mathbf{2}, \mathbf{4} + \mathbf{4}, \mathbf{4} + \mathbf{6}\} = \{4, 6, 0, 2\} = I_R$
- (●) $r = 5 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{5} + I_R = \{\mathbf{5} + \mathbf{0}, \mathbf{5} + \mathbf{2}, \mathbf{5} + \mathbf{4}, \mathbf{5} + \mathbf{6}\} = \{5, 7, 1, 3\}$
- (●) $r = 6 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{6} + I_R = \{\mathbf{6} + \mathbf{0}, \mathbf{6} + \mathbf{2}, \mathbf{6} + \mathbf{4}, \mathbf{6} + \mathbf{6}\} = \{6, 0, 2, 4\} = I_R$
- (●) $r = 7 \in \mathbb{Z}_8$: $\mathbf{7} + I_R = \{\mathbf{7} + \mathbf{0}, \mathbf{7} + \mathbf{2}, \mathbf{7} + \mathbf{4}, \mathbf{7} + \mathbf{6}\} = \{7, 1, 3, 5\}$

Observamos que:

$$\mathbf{0} + I_R = \mathbf{2} + I_R = \mathbf{4} + I_R = \mathbf{6} + I_R$$

$$\mathbf{1} + I_R = \mathbf{3} + I_R = \mathbf{5} + I_R = \mathbf{7} + I_R$$

Esto indica que el anillo cociente $R/I_R = \mathbb{Z}_8/\{0, 2, 4, 6\}$ tiene 2 clases residuales, en otras palabras es isomorfo a \mathbb{Z}_2 ,

$$\mathbb{Z}_8/\{0, 2, 4, 6\} \approx \mathbb{Z}_2.$$

■

2.3.7. Definición. *Ideal Principal*

Sea R un anillo conmutativo con unitario y sea $a \in R$, entonces el ideal $\{r \cdot a : r \in R\}$, de todos los múltiplos de a , es el *ideal principal generado por a* y se denota por $\langle \mathbf{a} \rangle$:

$$\langle \mathbf{a} \rangle = \{r \cdot a : r \in R\} \tag{2.84}$$

Además, si I_R es un ideal de R , este ideal será principal si existe algún $a \in R$ tal que

$$I_R = \langle \mathbf{a} \rangle.$$

■

Igualmente si I_R es un ideal de R tal que R/I_R es un campo, entonces I_R es un *ideal maximal*.

Un caso de ideal principal es $\langle \mathbf{x} \rangle = \{x \cdot p(x) : p(x) \in \mathbb{K}[x]\}$, éste está formado por todos los polinomios con término independiente 0. Además si \mathbb{K} es un campo, todo ideal de $\mathbb{K}[x]$ es principal.

Una relación crucial de ideal maximal con los polinomios irreducibles, es decir que no puedan expresarse como producto de dos polinomios no constantes, de grados menores al polinomio inicial, es el siguiente teorema.

2.3.3. Teorema. *Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$, entonces: el ideal principal $\langle \mathbf{p}(\mathbf{x}) \rangle \neq 0$ de $\mathbb{K}[x]$ es maximal si y sólo si, $p(x)$ es irreducible sobre K .* ■

2.3.2. Bases espectrales en anillos modulares \mathbb{Z}_h

Con el objetivo de tratar las bases espectrales en anillos modulares, estudiaremos los números modulares, su base espectral en \mathbb{Z}_h , y luego los polinomios modulares en $\mathbb{K}[x]_h$. El Algoritmo de Euclides juega un rol importante en la relación entre los números primos relativos. Esta relación se da en el siguiente teorema (la demostración en [\(Sobczyk, 2001\)](#)).

2.3.4. Teorema. *Dados los números $h_1, h_2, \dots, h_k \in \mathbb{Z}^+$, tal que su máximo común divisor es $\mathbf{1}$, existen k números enteros: b_1, b_2, \dots, b_k tal que se cumple*

$$b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + \dots + b_k \cdot h_k = \sum_{\ell=1}^k b_\ell \cdot h_\ell = 1 \quad (2.85)$$

■

Extendiendo las ideas del algoritmo de Euclides, dada en (2.85), si \mathbb{K} es un campo, el conjunto de polinomios con coeficientes en \mathbb{K} , es un anillo de polinomios, específicamente un *dominio integral* sobre \mathbb{K} .

Sean los polinomios $h_1(x), h_2(x), \dots, h_k(x) \in \mathbb{K}[x]$, tal que su máximo común divisor es $\mathbf{1} \in \mathbb{K}$ (sin ceros comunes en \mathbb{K}), entonces existen polinomios $b_1(x), b_2(x), \dots, b_k(x) \in \mathbb{K}$ tal que se cumple

$$b_1(x) \cdot h_1(x) + b_2(x) \cdot h_2(x) + \dots + b_k(x) \cdot h_k(x) = \sum_{\ell=1}^k b_\ell(x) \cdot h_\ell(x) = \mathbf{1} \quad (2.86)$$

Números modulares

Para relacionar (2.85) con (2.86), en el conjunto \mathbb{Z}_n cambiaremos n por h , es decir que $\mathbb{Z}_h = \{0, 1, 2, \dots, h-1\}$, con $h \in \mathbb{N}$, es un sistema de números módulo h . Aquí, todo $a \in \mathbb{Z}_h$ es una clase de equivalencia módulo h y la adición, multiplicación y la igualdad en \mathbb{Z}_h son definidas módulo h .

El *anillo factor* $\mathbb{Z}/\langle h \rangle$ es isomorfo a \mathbb{Z}_h para el ideal principal $\langle h \rangle$.

Por el teorema de la factorización única, se puede expresar h como producto de potencias de primos, así:

$$h = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k} \quad (2.87)$$

donde los p_i son factores primos distintos entre sí de h y los m_i ($i = 1, 2, \dots, k$)

los hemos ordenado de tal manera que:

$$1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$$

Para $h \in \mathbb{N}$, hacemos

$$h_i := \frac{h}{p_i^{m_i}}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.88)$$

Los h_i tienen máximo común divisor a $\mathbf{1}$. Además de (2.85) se tiene

$$b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 + \dots + b_k \cdot h_k = 1, \quad b_i \in \mathbb{Z}.$$

2.3.8. Definición. *Números Modulares*

Los números s_i , $i = 1, 2, \dots, k$, definidos como

$$s_i := b_i \cdot h_i \in \mathbb{Z}_h \quad (2.89)$$

se llaman *números modulares*. ■

Y teniendo en cuenta que

$$h_i = \frac{h}{p_i^{m_i}} = p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_k^{m_k}$$

$$h_j = \frac{h}{p_j^{m_j}} = p_1^{m_1} \dots p_{j-1}^{m_{j-1}} \cdot p_{j+1}^{m_{j+1}} \dots p_k^{m_k}$$

para $i \neq j$ tenemos

$$\begin{aligned} h_i \cdot h_j &= (p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_k^{m_k}) \cdot (p_1^{m_1} \dots p_{j-1}^{m_{j-1}} \cdot p_{j+1}^{m_{j+1}} \dots p_k^{m_k}) \\ &= (p_1^{m_1} \dots p_{i-1}^{m_{i-1}} \cdot p_{i+1}^{m_{i+1}} \dots p_{j-1}^{m_{j-1}} \cdot p_{j+1}^{m_{j+1}} \dots p_k^{m_k}) \cdot h \equiv \mathbf{0} \in \mathbb{Z}_h \end{aligned}$$

Es decir que,

$$s_i \cdot s_j = (b_i \cdot h_i) \cdot (b_j \cdot h_j) = b_i \cdot b_j \cdot h_i \cdot h_j = 0, \quad i \neq j \quad (2.90)$$

2.3.9. Definición. *Base Espectral de \mathbb{Z}_h*

Los s_i de (2.89) forman la llamada *base espectral de \mathbb{Z}_h* y se denota por

$$b_s(\mathbb{Z}_h) := \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \quad (2.91)$$

■

De (2.85) se tiene otra propiedad de esta base:

$$s_1 + s_2 + \dots + s_k = 1, \text{ en } \mathbb{Z}_h \quad (2.92)$$

Además

$$\begin{aligned} s_i \cdot (s_1 + s_2 + \dots + s_k) = s_i \cdot 1 &\implies s_i \cdot s_1 + s_i \cdot s_2 + \dots + s_i^2 + \dots + s_i \cdot s_k = s_i \\ &\implies s_i^2 = s_i \end{aligned} \quad (2.93)$$

Los s_i se dice que son idempotentes y mutuamente aniquiladores que particionan a la unidad. Para un $z \in \mathbb{Z}_h$ tenemos

$$z = z \cdot s_1 + z \cdot s_2 + \dots + z \cdot s_k = \sum_{\ell=1}^k z_\ell \cdot s_\ell \quad (2.94)$$

Recordando que

$$s_i = b_i \cdot h_i \implies p_i^{m_i} \cdot s_i = p_i^{m_i} \cdot b_i \cdot \frac{h}{p_i^{m_i}} = 0 \text{ en } \mathbb{Z}_h$$

entonces

$$\begin{aligned} z \cdot s_i = \mathbf{0} + z \cdot s_i &= q_i \cdot p_i^{m_i} \cdot s_i + z \cdot s_i \\ &= \underbrace{(q_i \cdot p_i^{m_i} + z)}_{\equiv z_i := z \pmod{p_i^{m_i}}} \cdot s_i \end{aligned} \quad (2.95)$$

$$= z_i \cdot s_i \quad (2.96)$$

De esto

$$z = \sum_{\ell=1}^k z_{\ell} \cdot s_{\ell}, \quad \text{donde } z_{\ell} = z \bmod(p_{\ell}^{m_{\ell}}). \quad (2.97)$$

Observamos que los s_{ℓ} actúan como proyecciones sobre el conjunto de números modulares $\mathbb{Z}_{p_{\ell}^{m_{\ell}}}$.

Si multiplicamos por h_i a la ecuación $\sum_{\ell=1}^k s_{\ell} = 1$, tenemos

$$h_i \cdot (s_1 + s_2 + \cdots + s_k) = h_i \implies h_i \cdot s_i = h_i, \quad \text{en } \mathbb{Z}_h$$

De donde

$$(h_i \cdot s_i) \bmod(p_i^{m_i}) = h_i \implies s_i = (h_i^{-1} \bmod(p_i^{m_i})) \cdot h_i \quad (2.98)$$

A [\(2.94\)](#) se le conoce el [Teorema Chino del resto](#) (Gaillan, 2010).

Veamos un ejemplo para entender las últimas relaciones matemáticas con respecto a números modulares.

2.3.3. Ejemplo. Sea $h = 24$, entonces $\mathbb{Z}_{24} = \{0, 1, 2, \dots, 23\}$ y

$$h = 3^1 \cdot 2^3 = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \implies p_1 = 3, m_1 = 1; \text{ y } p_2 = 2, m_2 = 3.$$

Los h_i son: $h_1 = \frac{h}{p_1^{m_1}} = \frac{3^1 \cdot 2^3}{3^1} = 8$, $h_2 = \frac{h}{p_2^{m_2}} = \frac{3^1 \cdot 2^3}{2^3} = 3$. Entonces, existen $b_i \in \mathbb{Z}_{24}$, tales que $b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 = 1$; efectivamente, estos valores son: $b_1 = 23$ y $b_2 = 3$, pues

$$b_1 \cdot h_1 + b_2 \cdot h_2 = 23 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = 193 = 8 \times 24 + 1 = 1, \quad \text{en } \mathbb{Z}_{24}$$

Los s_i son:

$$s_1 = b_1 \cdot h_1 = \mathbf{23} \cdot 8 = 184 = 7 \times 24 + 16 = 16, \quad \text{en } \mathbb{Z}_{24}$$

$$s_2 = b_2 \cdot h_2 = \mathbf{3} \cdot 3 = 9, \quad \text{en } \mathbb{Z}_{24}$$

Por tanto la base espectral de \mathbb{Z}_{24} es:

$$b_s(\mathbb{Z}_{24}) = \{s_1, s_2\} = \{16, 9\}. \quad (2.99)$$

Otra forma de hallar los s_i , es utilizando (2.98). Veamos:

$$h = 3^1 \cdot 2^3 = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2}, \implies h_1 = 8, h_2 = 3$$

$$s_1 = (h_1^{-1} \bmod(3^1)) \cdot h_1 = (8^{-1} \bmod(3^1)) \cdot 8 = 2 \cdot 8 = \mathbf{16}$$

$$s_2 = (h_2^{-1} \bmod(2^3)) \cdot h_2 = (3^{-1} \bmod(2^3)) \cdot 8 = 3 \cdot 3 = \mathbf{9}$$

O también, habiendo hallado $s_1 = 16$, tenemos: $s_1 + s_2 = 1$, es decir $16 + s_2 = 1$,

entonces $s_2 = 9$ en \mathbb{Z}_{24} . ■

Del Ejemplo (2.3.3), para un $z \in \mathbb{Z}_{24}$,

$$z = z \cdot s_1 + z \cdot s_2$$

Y por (2.95)

$$z \cdot s_1 = z \cdot 16 = (q_1 \cdot p_1^{m_1} + z) \cdot 16 = z_1 \cdot 16, \quad \text{con } z_1 = z \bmod(3^1)$$

$$z \cdot s_2 = z \cdot 8 = (q_2 \cdot p_2^{m_2} + z) \cdot 8 = z_2 \cdot 8, \quad \text{con } z_2 = z \bmod(2^3)$$

Los números q_i , $i = 1, 2, \dots, k$, definidos mediante

$$q_i := p_i \cdot s_i, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.100)$$

son tales que $q_i \in \mathbb{Z}_h$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Se define entonces una base espectral completa de \mathbb{Z}_h .

2.3.10. Definición. Base espectral completa

Sean los s_i , dados en (2.89), y los q_i , dados en (2.100), se define la base espectral completa de \mathbb{Z}_h , al conjunto:

$$b_{sc}(\mathbb{Z}_h) = \{s_1, q_1, \dots, q_1^{m_1-1}, s_2, q_2, \dots, q_2^{m_2-1}, s_k, q_k, \dots, q_k^{m_k-1}\} \quad (2.101)$$

■

El teorema siguiente da propiedades de los s_i y los q_i .

2.3.5. Teorema. En \mathbb{Z}_h , se cumple:

1. $\sum_{\ell=1}^k s_\ell = 1$.
2. $s_i \cdot s_j = 0$, para $i \neq j$.
3. $s_i^2 = s_i$, $i = 1, 2, \dots, k$.
4. $q_i^{m_i} = 0$, $q_i^{m_i-1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.
5. $q_i \cdot s_i = q_i$, $i = 1, 2, \dots, k$

■

Demostración.-

La relación (1), está en (2.92) y ésta se obtiene de (2.85). Es decir que los s_i conforman una partición de la unidad.

La relación (2), se obtuvo en (2.90). Es decir que, los s_i se anulan dos a dos.

La relación (3), ya fue probada en (2.93) (Los s_i son idempotentes).

Veamos la relación (4), que nos indica que los q_i son nilpotentes,

$$q_i^{m_i} = p_i^{m_i} \cdot s_i^{m_i} = p_i^{m_i} \cdot \underbrace{s_i}_{\text{por (3)}} = p_i^{m_i} \cdot b_i \cdot h_i = b_i \cdot h = 0$$

Ahora, multiplicando la relación (1) por $q_i^{m_i-1}$, tenemos:

$$q_i^{m_i-1} \cdot (s_1 + s_2 + \cdots + s_k) = q_i^{m_i-1} \implies \sum_{\ell=1}^k q_i^{m_i-1} \cdot s_\ell = q_i^{m_i-1}$$

Para $\ell \neq i$ se tiene $q_i^{m_i-1} \cdot s_\ell = 0$, pero para $\ell = i$

$$0 \neq q_i^{m_i-1} \cdot s_i = p_i^{m_i-1} \cdot s_i^{m_i-1} \cdot s_i = p_i^{m_i-1} \cdot s_i^{m_i-1} = q_i^{m_i-1}$$

Para la relación (5), se sigue igual que (4). ■

2.3.4. Ejemplo. *Hallemos la base espectral completa para \mathbb{Z}_{24} , del Ejemplo*

2.3.3.

De 2.100, tenemos

$$q_1 = p_1 \cdot s_1 = 3 \cdot 16 \equiv 0, \quad \text{en } \mathbb{Z}_{24}$$

$$q_2 = p_2 \cdot s_2 = 2 \cdot 9 \equiv 18, \quad \text{en } \mathbb{Z}_{24}$$

Por tanto, recordando que $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$, la base espectral completa de \mathbb{Z}_{24} es

$$b_{sc}(\mathbb{Z}_{24}) = \{s_1, s_2, q_2, q_2^2\} = \{16, 9, 18, 18^2\} = \{\mathbf{16, 9, 18, 12}\}$$

La tabla de multiplicación de los elementos de $b_{sc}(\mathbb{Z}_{24})$ está dada en el Cuadro

2.6: ■

Cuadro 2.6. Tabla de multiplicación de los elementos de $b_{sc}(\mathbb{Z}_{24})$.

\cdot	s_1	s_2	q_2	q_2^2		\cdot	16	9	18	12
s_1	s_1	0	0	0		16	16	0	0	0
s_2	0	s_2	q_2	q_2^2	=	9	0	9	18	12
q_2	0	q_2	q_2^2	0		18	0	18	12	0
q_2^2	0	q_2^2	0	0		12	0	12	0	0

2.3.5. Ejemplo. Hallemos la base espectral completa para \mathbb{Z}_{450} .

En este caso $h = 450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Además

$$p_1 = 2, m_1 = 1; \quad p_2 = 3, m_2 = 2; \quad p_3 = 5, m_3 = 2.$$

Los s_i y los q_i son:

$$s_1 = 225, q_1 = 0; \quad s_2 = 100, q_2 = 300; \quad s_3 = 126, q_3 = 180$$

Por tanto la base espectral completa de \mathbb{Z}_{450} es

$$b_{sc}(\mathbb{Z}_{450}) = \{s_1, s_2, q_2, s_3, q_3\} = \{225, 100, 300, 126, 180\}$$

La tabla de multiplicación de los elementos de $b_{sc}(\mathbb{Z}_{24})$ está dada en el Cuadro

2.7.

■

\cdot	s_1	s_2	q_2	s_3	q_3
s_1	s_1	0	0	0	0
s_2	0	s_2	q_2	0	0
q_2	0	q_2	0	0	0
s_3	0	0	0	s_3	q_3
q_3	0	0	0	q_3	0

Cuadro 2.7. Tabla de multiplicación de los elementos de $b_{sc}(\mathbb{Z}_{450})$.

Las ideas de base espectral vista hasta el momento es con respecto a los anillos modulares \mathbb{Z}_h . Sin embargo, podemos extender estos conceptos y teoremas a anillos de polinomios.

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

Ahora extendemos el Teorema [\(2.3.4\)](#). Aquí, el h que era un entero, ahora va a ser un polinomio con coeficientes en un campo \mathbb{K} , igualmente los b_i .

Se tendrá un anillo polinomial modular y hallaremos los s_i como polinomios.

Cabe resaltar que esto nos lleva a trabajar con algunos casos conocidos como polinomio de Taylor, de Lagrange y de Hermite.

3.1. Base espectral para el Anillo Polinomial

$$\mathbb{K}[x]_h$$

Consideramos el polinomio

$$h \equiv h(x)$$

de grado m con coeficientes en el campo \mathbb{K} , es decir que $h(x) \in \mathbb{K}[x]$.

El anillo cociente o anillo factor o anillo de clases residuales $\mathbb{K}[x]/\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle$ es el [anillo polinomial modular](#), de módulo $h(x)$, y se denotará como

$$\mathbb{K}[x]_h := \mathbb{K}[x]/\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle \tag{3.1}$$

Por ejemplo podemos decir:

$$h(x) = 5x^3 - x + \sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}[x] \implies \mathbb{R}[x]_h = \mathbb{R}[x]/\langle 5x^3 - x + \sqrt[3]{5} \rangle$$

$$h(x) = 2ix^2 - x + 37 \in \mathbb{C}[x] \implies \mathbb{C}[x]_h = \mathbb{C}[x]/\langle 2ix^2 - x + 37 \rangle$$

Enunciamos el algoritmo de la división de polinomios.

3.1.1. Teorema. Sean los polinomios $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]_h$. Entonces

$$f(x) \cdot g(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x), \quad (3.2)$$

donde $r(x)$ es el polinomio $\mathbf{0}$ o es un polinomio de grado menor que $h(x)$. ■

De acuerdo al Teorema (3.1.1), se tiene

$$f(x) \cdot g(x) = r(x) \bmod(h(x)). \quad (3.3)$$

Este anillo polinomial modular, bajo las operaciones de adición y multiplicación módulo $h(x)$ es un espacio vectorial de dimensión m . Y una base estándar para el anillo polinomial modular dado en (3.1) es

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\} \quad (3.4)$$

Esto implica que cualquier elemento polinomial en $\mathbb{K}[x]_h$ se puede representar como una combinación lineal de la base estándar dada en (3.4).

Sin embargo lo que se busca es otra base con el mismo propósito y ésta sería una base llamada base espectral, al igual que en \mathbb{Z}_h .

Entonces, sea el polinomio $h(x)$ de grado m , el cual por el Teorema de la factorización de polinomios, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} h(x) &= (x - x_1)^{m_1} \cdot (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k} \\ &= \prod_{\ell=1}^k (x - x_\ell)^{m_\ell} \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Para ir relacionando con lo que se hizo en \mathbb{Z}_h , hagamos

$$p_i^{m_i}(x) = (x - x_i)^{m_i}$$

Entonces $h(x)$ queda

$$h(x) = p_1^{m_1}(x) \cdot p_2^{m_2}(x) \cdots p_k^{m_k}(x). \quad (3.6)$$

Los $p_i^{m_i}(x)$ son factores primos de $h(x)$ para cada $x_i \in \mathbb{K}$. La representación de $h(x)$, dada en (3.6), es tal que $1 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_k$ y el grado de $h(x)$ es

$$m = \sum_{\ell=1}^k m_\ell$$

Definimos los polinomios $h_i(x)$, análogo a (2.88),

$$h_i(x) = \frac{h(x)}{p_i^{m_i}(x)} \quad (3.7)$$

Los polinomios dados en (3.7) tienen como máximo común divisor a 1, entonces de acuerdo al Teorema (2.3.4) van a existir polinomios $b_i(x) \in \mathbb{K}[x]$ tal que:

$$\sum_{\ell=1}^k b_\ell(x) \cdot h_\ell(x) = 1, \quad \text{en } \mathbb{K}[x] \quad (3.8)$$

Procediendo como en los anillos modulares \mathbb{Z}_h , se definen los polinomios $s_i(x)$ y $q_i(x)$, en forma análoga a los s_i y los q_i , dados en (2.89) y en (2.100), respectivamente,

$$s_i(x) = b_i(x) \cdot h_i(x) \in \mathbb{K}[x]_h \quad (3.9)$$

$$q_i(x) = p_i(x) \cdot s_i(x) = (x - x_i) \cdot s_i \in \mathbb{K}[x]_h \quad (3.10)$$

para $i = 1, 2, \dots, k$.

3.1.1. Definición. *Base espectral completa de $\mathbb{K}[x]_h$*

Sean los polinomios $s_i(x)$ y $q_i(x)$, definidos en (3.9) y (3.10). Se define la *Base Espectral Completa de $\mathbb{K}[x]_h$* , denotada por $b_{sc}(\mathbb{K}[x]_h)$, como el conjunto

$$b_{sc}(\mathbb{K}[x]_h) = \bigcup_{\ell=1}^k \{s_\ell(x), q_\ell(x), q_\ell^2(x), \dots, q_\ell^{m_\ell-1}(x)\} \quad (3.11)$$

■

Las propiedades de los $s_i(x)$ y de los $q_i(x)$, se sustentan en el Teorema (2.3.5). Recordemos que el anillo polinomial modular $\mathbb{K}[x]_h$ contiene a todos los polinomios de grado a lo más m . De acuerdo a ese teorema, entonces, los $s_i(x)$ son idempotentes, se anulan dos a dos (diferentes entre sí) y particionan a la unidad, en cambio los $q_i(x)$ son nilpotentes, con índice de nulidad m_i , es decir $q_i^{m_i}(x) = 0 \bmod(h(x))$.

Empleemos lo obtenido en (2.94) y en (2.97), es decir que para un polinomio $g(x) \in \mathbb{K}[x]_h$, tendremos

$$g(x) = \sum_{\ell=1}^k g_\ell(x) \cdot s_\ell(x) \quad (3.12)$$

donde

$$g_\ell(x) = g(x) \bmod(p_\ell^{m_\ell}(x)) = g(x) \bmod((x - x_\ell)^{m_\ell}) \quad (3.13)$$

En (3.12) se está representando $g(x)$ como una combinación lineal de los elementos de la base espectral del anillo polinomial modular $\mathbb{K}[x]_h$ pero esto es expandir $g(x)$ en serie de Taylor alrededor de las raíces x_ℓ de $h(x)$, puesto que los $g_\ell(x)$ son módulo $(x - x_\ell)^{m_\ell}$, éstos son los primeros m_ℓ términos de la expansión de Taylor de la función $g(x)$ alrededor de x_ℓ y los términos siguientes se anularán pues serán **cero** módulo $(x - x_\ell)^{m_\ell}$.

Recordamos que la expansión en series de Taylor para $g(x)$ alrededor de $x = a$, es

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n \quad (3.14)$$

3.1.2. Definición. Sea $g(x) = x \in \mathbb{K}[x]_h$, y teniendo en cuenta (3.12), (3.13) y (3.10), se define la *descomposición espectral generalizada* para x :

$$x = \sum_{\ell=1}^k x \cdot s_\ell(x) = \sum_{\ell=1}^k (x_\ell + q_\ell(x)) \cdot s_\ell(x), \quad \text{en } \mathbb{K}[x]_h. \quad (3.15)$$

donde $x_\ell = x \bmod (x - x_\ell)^{m_\ell}$. ■

3.1.1. Ejemplo. Hallemos la base espectral para el anillo polinomial modular $\mathbb{R}[x]_h$, donde $h(x) = (x - 1)(x - 2)$.

Identificamos:

$$p_1(x) = x - 1, m_1 = 1; \quad p_2(x) = x - 2, m_2 = 1.$$

Los $h_i(x)$ son

$$h_1(x) = \frac{h(x)}{p_1(x)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \mathbf{x-2}$$

$$h_2(x) = \frac{h(x)}{p_2(x)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)} = \mathbf{x-1}.$$

Hallamos los $s_i(x)$ multiplicando la ecuación $s_1(x) + s_2(x) = 1$ por $h_i(x)$:

$$(\bullet) \quad h_1(x) \cdot s_1(x) \mathbf{mod}(x-1) = h_1(x)$$

$$\implies (x-2) \cdot s_1(x) \mathbf{mod}(x-1) = x-2$$

$$\implies ((\mathbf{x-1}) - 1) \cdot s_1(x) \mathbf{mod}(x-1) = x-2$$

$$\implies (-1) \cdot s_1(x) \mathbf{mod}(x-1) = x-2$$

$$\implies \mathbf{s_1(x) = 2 - x} \text{ en } \mathbb{R}[x]_{(x-1)(x-2)}$$

$$(\bullet) \quad h_2(x) \cdot s_2(x) \mathbf{mod}(x-2) = h_2(x)$$

$$\implies (x-1) \cdot s_2(x) \mathbf{mod}(x-2) = x-1$$

$$\implies ((\mathbf{x-2}) + 1) \cdot s_2(x) \mathbf{mod}(x-2) = x-1$$

$$\implies (+1) \cdot s_2(x) \mathbf{mod}(x-2) = x-1$$

$$\implies \mathbf{s_2(x) = x - 1} \text{ en } \mathbb{R}[x]_{(x-1)(x-2)}$$

La base espectral es:

$$\mathbf{b_{sc}}(\mathbb{R}[x]_{(x-1)(x-2)}) = \{s_1(x), s_2(x)\} = \{2-x, x-1\}$$

Los ceros de $h(x)$ son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, entonces por 3.15

$$x = x_1 \cdot s_1(x) + x_2 \cdot s_2(x) = 1 \cdot (\mathbf{2-x}) + 2 \cdot (\mathbf{x-1}) = s_1(x) + 2s_2(x).$$

■

Recordando la interpolación de Lagrange observamos que la base espectral es la misma que la base de Lagrange, (2.24)

$$L_1(x) = 2 - x; \quad L_2(x) = x - 1$$

Ahora, la base estándar de $\mathbb{K}[x]_h$, dada en (3.4), se puede expresar como el vector columna dado en (2.16) y su r -ésima derivada evaluada en x_i , dada en (2.17).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}(x) &= (1, x, x^2, \dots, x^{m-1})^T \\ \mathbf{V}_i(\boldsymbol{\nu}) &= \left(\frac{1}{0!} \boldsymbol{\nu}^{(0)}(x_i), \frac{1}{1!} \boldsymbol{\nu}^{(1)}(x_i), \frac{1}{2!} \boldsymbol{\nu}^{(2)}(x_i), \dots, \frac{1}{r!} \boldsymbol{\nu}^{(r)}(x_i) \right) \end{aligned}$$

También podemos denotar como un vector columna a la base espectral completa de $\mathbb{K}[x]_h$:

$$\mathcal{S}(x) = (s_1, q_1, \dots, q_1^{m_1-1}; s_2, q_2, \dots, q_2^{m_2-1}; \dots, s_k, q_k, \dots, q_k^{m_k-1})^T \quad (3.16)$$

En (3.16) se ha omitido el argumento x , por espacio.

La relación entre las bases estándar y la base espectral requiere de una derivada normalizada. Si el polinomio $h(x)$ tiene grado m y tiene k ceros distintos: x_1, x_2, \dots, x_k ; con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_k , respectivamente, entonces la derivada normalizada del vector columna de la base estándar $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ está dada por

$$\boldsymbol{\nu}^{[r]}(x) = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r\text{-ceros}}, 1, \binom{r+1}{r} x, \binom{r+2}{r} x^2, \dots, \binom{m-1}{r} x^{m-1-r} \right)^T \quad (3.17)$$

donde $r = 0, 1, \dots, m_i - 1$, $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces la matriz de Vandermonde generalizada V , de orden $m \times m$, equivalente a (2.18), está dada por:

$$\mathbf{V} = \left(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_1^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\nu}_1^{[m_1-1]}; \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_2^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\nu}_2^{[m_2-1]}; \dots; \boldsymbol{\nu}_k, \boldsymbol{\nu}_k^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\nu}_k^{[m_k-1]} \right) \quad (3.18)$$

donde $\boldsymbol{\nu}_i = \boldsymbol{\nu}(x_i)$, $\boldsymbol{\nu}_i^{[r]} = \boldsymbol{\nu}^{[r]}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$.

3.1.2. Teorema. La matriz \mathbf{V} dada en (3.18) es la matriz de cambio de base entre el vector columna de la base espectral $\mathcal{S}(x)$ y el vector columna de la base estándar $\boldsymbol{\nu}(x)$:

$$\mathcal{S}(x) = \mathbf{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{\nu}(x) \quad (3.19)$$

■

3.1.3. Teorema. La matriz

$$\left(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_1^{[1]}, \dots, \mathcal{S}_1^{[m_1-1]}; \dots; \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_2^{[1]}, \dots, \mathcal{S}_2^{[m_2-1]}; \dots; \mathcal{S}_k, \mathcal{S}_k^{[1]}, \dots, \mathcal{S}_k^{[m_k-1]} \right) \quad (3.20)$$

con $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}(x_i)$, $\mathcal{S}_i^{[r]} = \mathcal{S}^{[r]}(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, es la matriz identidad $\mathbf{I}_{m \times m}$. ■

3.2. Base espectral $\mathcal{S}(x)$ en polinomios de Hermite

Recordando la descomposición espectral de x , dada en (3.15), y teniendo en cuenta las propiedades de los elementos de $\mathcal{S}(x)$, entonces la forma de hallar el polinomio interpolante $\mathbf{F}(x)$ de $f(x)$, luego de usar las propiedades de los

$s_i(x)$ y de los $q_i(x)$, es hacer la expansión de Taylor para $f(x)$ alrededor de los ceros de $h(x)$, los x_i , $i = 1, 2, \dots, k$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(x) &= f\left(\sum_{\ell=1}^k (x_\ell + q_\ell) \cdot s_\ell(x)\right) = \sum_{\ell=1}^k f(x_\ell + q_\ell) \cdot s_\ell(x) \\
&= \sum_{\ell=1}^k \left[f(x_\ell) + \frac{f'(x_\ell)}{1!} q_\ell + \dots + \frac{f^{(m_\ell-1)}(x_\ell)}{(m_\ell-1)!} q_\ell^{m_\ell-1} \right] \cdot s_\ell(x) \\
&= \sum_{\ell=1}^k \left[\sum_{r=0}^{m_\ell-1} \frac{f^{(r)}(x_\ell)}{r!} q_\ell^r \right] \cdot s_\ell(x) \\
&= \sum_{\ell=1}^k \left[\sum_{r=0}^{m_\ell-1} \frac{f^{(r)}(x_\ell)}{r!} (x - x_\ell)^r \right] \cdot s_\ell(x) \tag{3.21}
\end{aligned}$$

El polinomio de interpolación $\mathbf{F}(x)$, dada en (3.21), se denomina **polinomio de interpolación de Hermite** de $f(x)$ en el anillo modular polinomial $\mathbb{K}[x]_h$.

3.3. Interpolación cuántica en un número infinito de nodos

Los métodos de interpolación conocidos como el de Lagrange, Hermite, Newton, Splines cúbicos y otros, consideran un número finito de nodos. Sin embargo si consideramos un número infinitos nodos, de tal manera que la función original concida con la nueva interpolación en ese número de nodos (infinito), lo que se estaría teniendo es prácticamente a la función original. Este proceso es lo que nos lleva a lo *cuántico*. Según (Sobczyk, G., 2002), la idea de cuántico se refiere a que la función de interpolación cuántica es definida sólo en un número contable de puntos, pero de manera local.

Consideremos el conjunto

$$K_\sigma = \{x_\sigma^{m_\sigma} : \sigma \in \mathbf{I}\} \quad (3.22)$$

completo, posiblemente un conjunto infinito de ceros reales x_σ , con respecto a su multiplicidad algebraica m_σ , de la función real $h(x)$. Aquí, el conjunto \mathbf{I} es un conjunto de *índices*.

3.3.1. Polinomios de interpolación cuántica de Hermite

Los polinomios de interpolación cuántica de Hermite para la función $h(x)$ se definen en el conjunto infinito contable de polinomios

$$Q_h = \{s_\sigma, \dots, q_\sigma^{m_\sigma-1} : \sigma \in \mathbf{I}\} \quad (3.23)$$

Aquí las propiedades de los s_σ y $q_\sigma : (x - x_\sigma)s_\sigma$ se cumplen al igual que cuando se tenía un número finito de nodos:

$$(*) \sum_{k=1}^r s_k = 1, \quad s_i s_j = \delta_{ij} s_i, \quad s_i \cdot q_i = q_i$$

$$(*) q_i^{m_i-1} \neq 0, \quad q_i^{m_i} = 0.$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, r$.

En el caso de un número finito de nodos se tenía lo siguiente:

Queríamos interpolar una función $f(x)$ de la cual se tenía información, por ejemplo $r = 3$, de los puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ y $(x_3, f(x_3))$, entonces el polinomio para hallar la base espectral era

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

que tiene tres ceros o nodos simples y la base espectral era

$$\{s_1, s_2, s_3\}$$

Si se tenía información de los valores $f'(x_2)$ y $f'(x_3)$, el polinomio a considerar era

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)^2$$

y la base espectral que se obtenía era

$$\{s_1, s_2, q_2, s_3, q_3\}$$

Adicionalmente, si teníamos la información de la curvatura, por ejemplo en x_3 , $f''(x_3)$, el polinomio a considerar era

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2)^2(x - x_3)^3$$

y la base espectral es

$$\{s_1, s_2, q_2, s_3, q_3, q_3^2\}$$

Ahora, si consideramos un número infinito de nodos, una función con infinitos ceros puede ser

$$h(x) = \sin x$$

En el caso general, sea $h(x)$ una función de valores reales, con un número infinito de ceros $x_\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbf{I}$, con sus respectivas multiplicidades m_σ , entonces

$$h_\sigma(x) = \frac{h(x)}{(x - x_\sigma)^{m_\sigma}}, \quad \sigma \in \mathbf{I}$$

cumpléndose

$$\sum_{\sigma \in \mathbf{I}} s_\sigma(x) = 1$$

Puesto que $h(x)$, en general ya no es un polinomio, se expande en serie de Taylor a los $h_\sigma(x)$ alrededor de los x_σ , esto para reducir el producto $h_\sigma(x) \cdot s_\sigma(x)$ módulo $(x - x_\sigma)^{m_\sigma}$.

Al igual que en el número finito de nodos, la descomposición espectral de x es

$$x = \sum_{\sigma \in \mathbf{I}} ((x - x_\sigma) + x_\sigma) \cdot s_\sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathbf{I}} (x_\sigma + q_\sigma(x)) \cdot s_\sigma(x)$$

Por tanto, de (3.21), el *Polinomio de interpolación cuántica de Hermite* $\mathbf{F}_H(x)$

para una función $f(x)$ es:

$$\mathbf{F}_H(x) = \sum_{\sigma \in \mathbf{I}} \left[f(x_\sigma) + \frac{f'(x_\sigma)}{1!} q_\sigma(x) + \cdots + \frac{f^{(m_\sigma-1)}(x_\sigma)}{(m_\sigma - 1)!} q_\sigma^{m_\sigma-1}(x) \right] \cdot s_\sigma(x) \quad (3.24)$$

3.3.2. Polinomios de interpolación cuántica de Lagrange

De (3.24), si los $q_\sigma(x)$ son nulos (nilpotentes), entonces

$$\mathbf{F}_L(x) = \sum_{\sigma \in \mathbf{I}} (f(x_\sigma)) \cdot s_\sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathbf{I}} f(x_\sigma) \cdot s_\sigma(x) \quad (3.25)$$

A (3.25) se le llama *Polinomio de interpolación cuántica de Lagrange* $\mathbf{F}_L(x)$

para una función $f(x)$.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1. Interpolación de Hermite completa

Consideremos la función dada en el Ejemplo (2.2.3), $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $x \in [-1, 2]$, cuyo polinomio de interpolación de Lagrange con **3 nodos**: $\mathbf{x}_1 = -1$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}$ y $\mathbf{x}_3 = 2$ se obtuvo en (2.26):

$$P_2(x) = 0.60904270 - 0.91165969x + 0.32656163x^2$$

Para hallar el polinomio de interpolación de Hermite de $f(x)$ consideramos el polinomio

$$h(x) = (x + 1)^2 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x - 2)^2 \quad (4.1)$$

En (4.1) lo que estamos pidiendo es que el polinomio interpolante coincida con $f(x)$ en los nodos $\mathbf{x}_1 = -1$, $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}$ y $\mathbf{x}_3 = 2$ y tengan las mismas tangentes en esos nodos.

Entonces, identificamos:

$$p_1(x) = (x + 1), m_1 = 2; p_2(x) = (x - 1/2), m_2 = 2; p_3(x) = (x - 2), m_3 = 2.$$

Los polinomios $h_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, son:

$$h_1(x) = (x - 1/2)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$h_2(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$h_3(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 1/2)^2$$

Hallamos los $s_i(x)$, multiplicando la ecuación $s_1(x) + s_2(x) + s_3(x) = 1$ por

$h_i(x)$:

$$(\bullet) \quad h_1(x) \cdot s_1(x) \bmod (x + 1)^2 = h_1(x), \text{ omitiremos los argumentos}$$

$$\implies (x - 1/2)^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot s_1 \bmod (x + 1)^2 = (x - 1/2)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$\implies ((x + 1) - 3/2)^2 \cdot ((x + 1) - 3)^2 \cdot s_1 \bmod (x + 1)^2 = h_1$$

$$\implies (-3(x + 1) + 9/4) \cdot (-6(x + 1) + 9) \cdot s_1 \bmod (x + 1)^2 = h_1$$

$$\implies \frac{81}{4}(1 - 2(x + 1)) \cdot s_1 \bmod (x + 1)^2 = (x - 1/2)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$\implies \frac{81}{4}(1 - 2(x + 1)) \cdot (1 + 2(x + 1)) \cdot s_1 \bmod (x + 1)^2 = h_1 \cdot (1 + 2(x + 1))$$

$$\implies \frac{81}{4}(1 - \mathbf{0}) \cdot s_1 \bmod (x + 1)^2 = h_1 \cdot (1 + 2(x + 1))$$

$$\implies s_1(x) = \frac{4(x - 1/2)^2(x - 2)^2(2x + 3)}{81} \text{ en } \mathbb{R}[x]_{(x+1)^2(x-1/2)^2(x-2)^2}$$

Hacemos el mismo procedimiento para los polinomios $h_2(x)$ y $h_3(x)$:

$$(\bullet) \quad h_2(x) \cdot s_2(x) \bmod (x - 1/2)^2 = h_2(x)$$

$$\implies (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \cdot s_2(x) \bmod (x - 1/2)^2 = (x + 1)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$\implies s_2(x) = \frac{16(x + 1)^2(x - 2)^2}{81} \text{ en } \mathbb{R}[x]_{(x+1)^2(x-1/2)^2(x-2)^2}$$

$$(\bullet) \quad h_3(x) \cdot s_3(x) \bmod (x-2)^2 = h_3(x)$$

$$\implies (x+1)^2 \cdot (x-1/2)^2 \cdot s_3(x) \bmod (x-2)^2 = (x+1)^2 \cdot (x-1/2)^2$$

$$\implies s_3(x) = -\frac{4(x+1)^2(x-1/2)^2(2x-5)}{81} \text{ en } \mathbb{R}[x]_{(x+1)^2(x-1/2)^2(x-2)^2}$$

Hallamos los polinomios $q_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, teniendo en cuenta (3.10):

$$\begin{aligned} q_1(x) = (x+1) \cdot s_1(x) &= (x+1) \cdot \frac{4(x-1/2)^2(x-2)^2(2x+3)}{81} \\ &= \frac{4(x+1)(x-1/2)^2(x-2)^2}{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(x) = (x-1/2) \cdot s_2(x) &= (x-1/2) \cdot \frac{16(x+1)^2(x-2)^2}{81} \\ &= \frac{16(x-1/2)(x+1)^2(x-2)^2}{81} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_3(x) = (x-2) \cdot s_3(x) &= -(x-2) \cdot \frac{4(x+1)^2(x-1/2)^2(2x-5)}{81} \\ &= \frac{4(x-2)(x+1)^2(x-1/2)^2}{81} \end{aligned}$$

La base espectral es: $\mathbf{b}_{sc} \left(\mathbb{R}[x]_{(x+1)^2(x-1/2)^2(x-2)^2} \right) = \{s_1, q_1, s_2, q_2, s_3, q_3\}$.

Los ceros de $h(x)$ son $x_1 = -1$, $x_2 = 1/2$ y $x_3 = 2$, entonces por (3.15)

$$x = (-\mathbf{1} + q_1(x)) \cdot s_1(x) + \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + q_2(x) \right) \cdot s_2(x) + (\mathbf{2} + q_3(x)) \cdot s_3(x)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= (f(-1) + f'(-1)q_1(x)) \cdot s_1(x) + \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)q_2(x) \right) \cdot s_2(x) + \\ &\quad (f(2) + f'(2)q_3(x)) \cdot s_3(x). \end{aligned}$$

Usando (3.21), tenemos

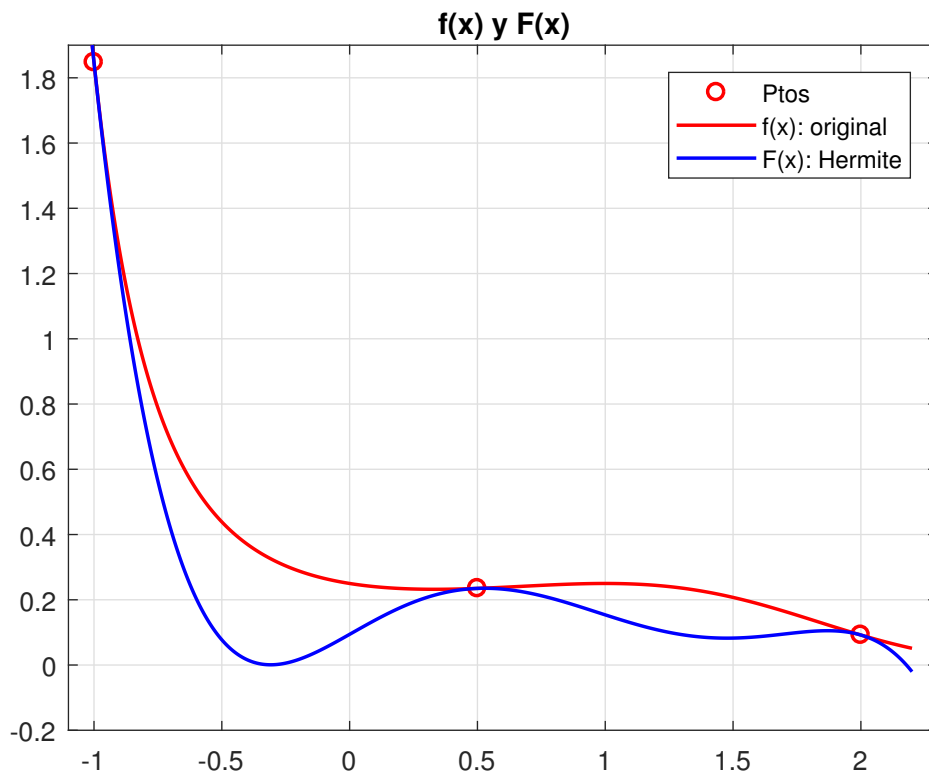
$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= (f(-1) + f'(-1)(x+1)) \cdot s_1(x) + \left(f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)(x-\frac{1}{2}) \right) \cdot s_2(x) + \\ &\quad (f(2) + f'(2)(x-2)) \cdot s_3(x) \end{aligned} \tag{4.2}$$

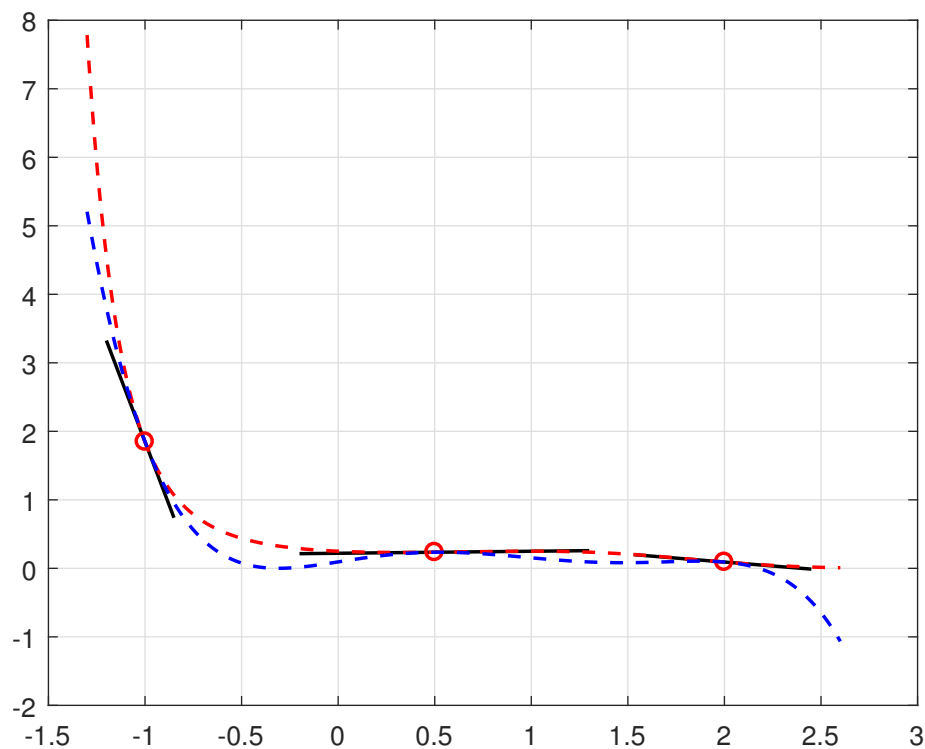
Finalmente el polinomio interpolante de Hermite es:

$$\mathbf{F}(x) = -165.746 - 780.341x - 50.2319x^2 + 1924.73x^3 - 1546.34x^4 + 347.154x^5 \quad (4.3)$$

En la Figura (4.1) se observa a la función $f(x)$ junto con el polinomio de interpolación de Hermite, obtenido con bases espectrales. En la Figura (4.2) se muestra que las pendientes de ambas coinciden, $f'(x_i) = \mathbf{F}'(x_i)$.

Figura 4.1. Polinomio interpolante de Hermite $\mathbf{F}(x)$ de $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $x \in [-1, 2]$.





4.2. Interpolación Cuántica de Lagrange

En este caso, los $q_i(x)$ serán nulos. Consideremos la función

$$h(x) = \sin 4x$$

cuyos ceros simples son

$$K = \left\{ x_k = \frac{k\pi}{4} : k \in I = \mathbb{Z} \right\}$$

Los $h_k(x)$ son

$$h_k(x) = \frac{h(x)}{\left(x - \frac{k\pi}{4}\right)} = \frac{\sin 4x}{\left(x - \frac{k\pi}{4}\right)}$$

Y puesto que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k(x) = 1$, entonces

$$h_k(x) \cdot s_k(x) = h_k(x)$$

Expandemos en serie de Taylor alrededor del nodo $x_k = \frac{k\pi}{4}$,

$$h_k(x) = h_k\left(\frac{k\pi}{4}\right) + h'_k\left(\frac{k\pi}{4}\right)\left(x - \frac{k\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}h''_k\left(\frac{k\pi}{4}\right)\left(x - \frac{k\pi}{4}\right)^2 + \dots$$

Pero estamos en módulo $(x - \frac{k\pi}{4})$, entonces $h_k(x) = 4 \cdot (-1)^k$, o

$$h_k(x) = 4 \cdot (-1)^k \cdot s_k(x) \implies s_k(x) = \frac{(-1)^k}{4} h_k(x)$$

Así, los $s_k(x)$ son de la forma:

$$s_k(x) = (-1)^k \frac{\sin 4x}{(4x - k\pi)}$$

Los $q_k(x)$ son

$$\begin{aligned} q_k(x) &= \left(x - \frac{k\pi}{4}\right) \cdot s_k(x) = \left(x - \frac{k\pi}{4}\right) \cdot \frac{(-1)^k}{4} \frac{\sin 4x}{\left(x - \frac{k\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{(-1)^k}{4} \cdot \sin 4x = 0 \pmod{\mathbf{h}(x)} \end{aligned}$$

asegurando que la interpolación es de Lagrange.

Por tanto el polinomio interpolante cuántico de Lagrange para $f(x)$ es

$$\mathbf{F}_L(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\pi) \cdot s_k(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k f(k\pi) \frac{\sin 4x}{(4x - k\pi)}$$

En la Figura [\(4.3\)](#) y en la Figura [\(4.4\)](#) se visualizan $f(x)$ y su polinomio interpolante cuántico de Lagrange, $\mathbf{F}_L(x)$, para diferentes sumas, $k = 1, \dots, 8$ y $k = -1, 0, 1, 2, 3$ respectivamente.

Figura 4.3. $F_L(x)$ y $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $k = 1, \dots, 8$.

f(x) y polinomio interpolante cuántico de Lagrange $F_L(x)$

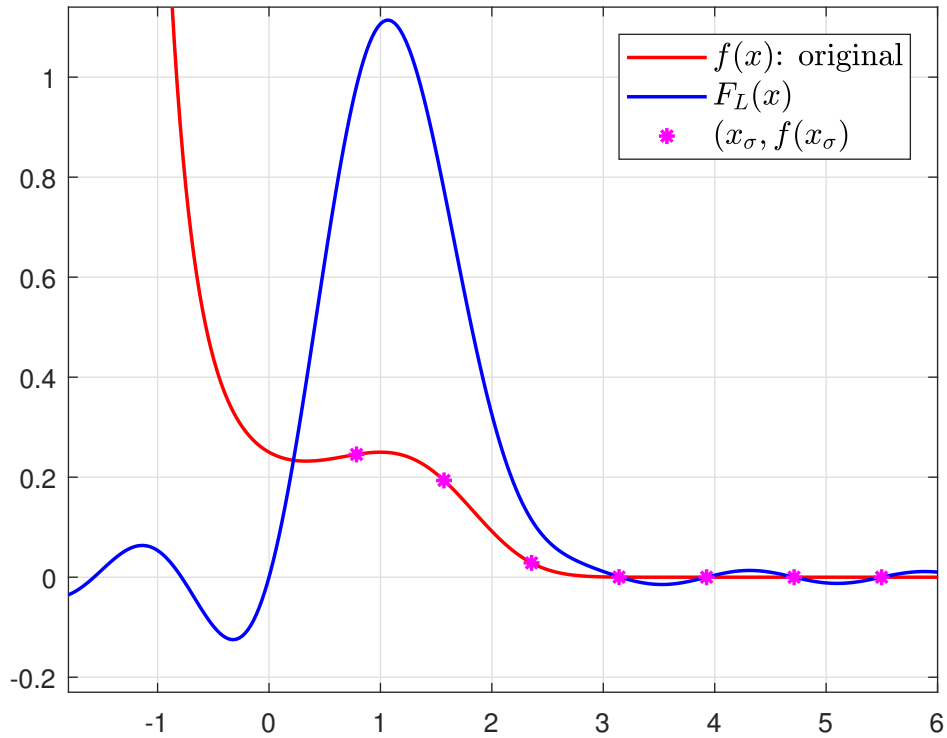
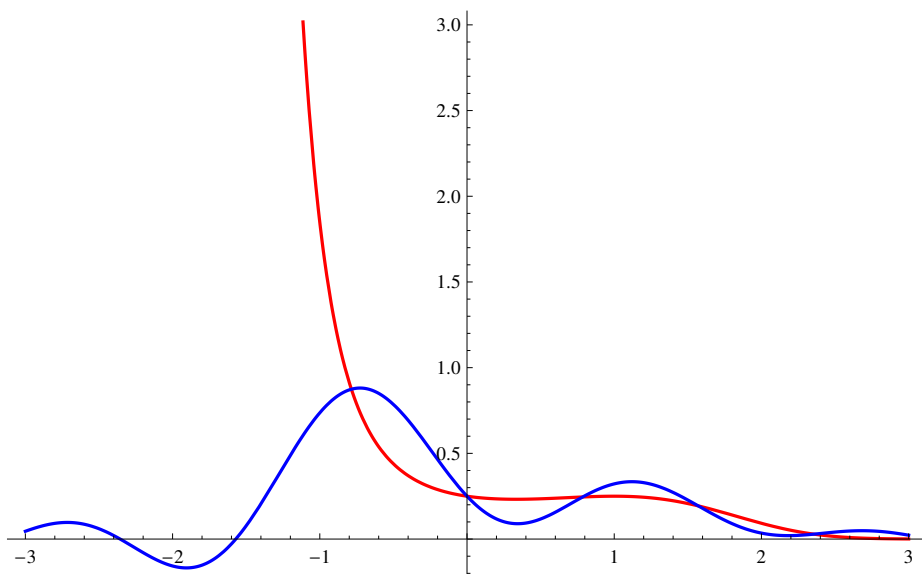


Figura 4.4. $F_L(x)$ y $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x(x-1)^2}{2}}$, $k = -1, 0, \dots, 3$.



4.3. Interpolación cuántica de Hermite

Se ha visto que la función $h(x) = \sin x$ tiene infinito número de ceros simples, lo que nos lleva a generar polinomios interpolantes cuánticos de Lagrange, sin embargo, podemos pedir que el polinomio interpolante coincida en inclinación e incluso en curvatura. Así que podemos tomar como funciones $h(x)$ a las siguientes funciones que tienen los mismos ceros de $\sin x$:

$$h_*(x) = \sin^2(x) : f(x) \text{ coincide en tangentes} \quad (4.4)$$

$$h_{**}(x) = \sin^3(x) : f(x) \text{ coincide en curvatura} \quad (4.5)$$

Las función dada en (4.4) tiene ceros de multiplicidad 2, esto nos lleva a que el polinomio ineterpolante cuántico de Hermite sea de orden 1, en otra palabras hay coincidencia hasta en la primera derivada. Sin embargo, la función dada en (4.5) sus ceros son de multiplicidad 3 y el polinomio interpolante cuántico de Hermite es de segundo orden, hay coincidencia en curvatura.

4.3.1. Interpolación cuántica de Hermite de 1er orden

Consideramos la función dada en (4.4): $h_*(x) = \sin^2 x$, los elementos de su base espectral son:

$$s_{k*}(x) = \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)^2}, \quad q_{k*}(x) = \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)} \quad (4.6)$$

El polinomio interpolante de Hermite de primer orden es:

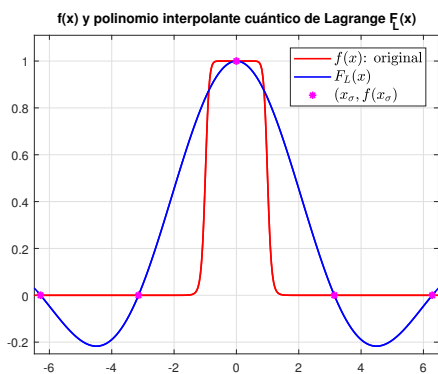
$$\begin{aligned} F_{H_*} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(f(k\pi) \cdot s_{k*}(x) + f'(k\pi) \cdot q_{k*}(x) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[f(k\pi) \cdot \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)^2} + f'(k\pi) \cdot \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomemos la función a interpolar

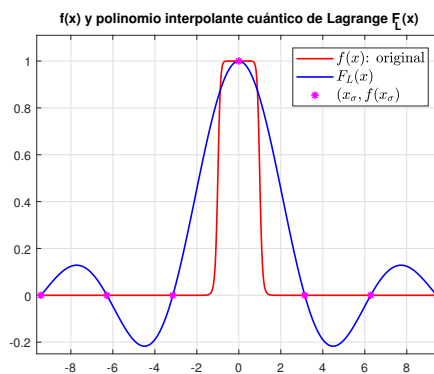
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^{16}}$$

Se muestran en la Figura (4.5) el polinomio interpolante cuántico de Lagrange para la función $f(x) = \frac{1}{1 + x^{16}}$, tomando diferentes valores de k en la suma dada en (3.25). Se observa la coincidencia de $f(x)$ y el polinomio interpolante cuántico de Lagrange en los nodos.

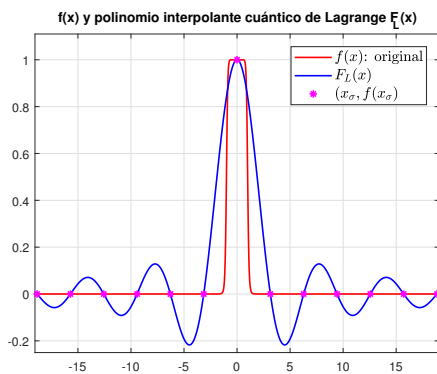
Figura 4.5. Polinomio interpolante cuántico de Lagrange para $f(x) = \frac{1}{1 + x^{16}}$.



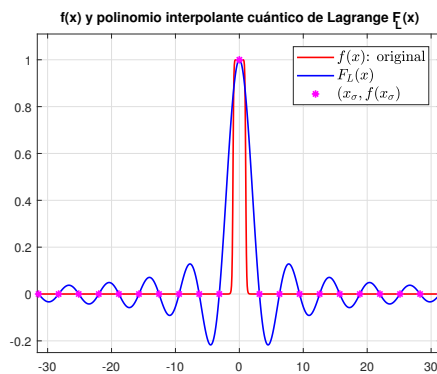
(a) $k = \pm 2, \pm 1, 0$



(b) $k = \pm 3, \pm 2, \dots, 0$



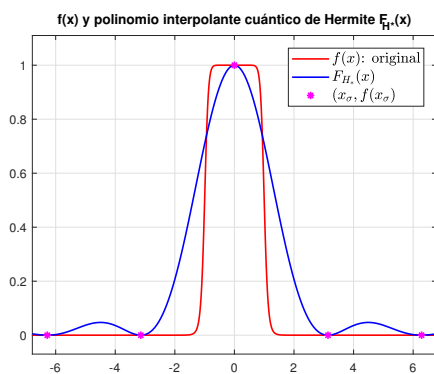
(c) $k = \pm 6, \pm 5, \dots, 0$



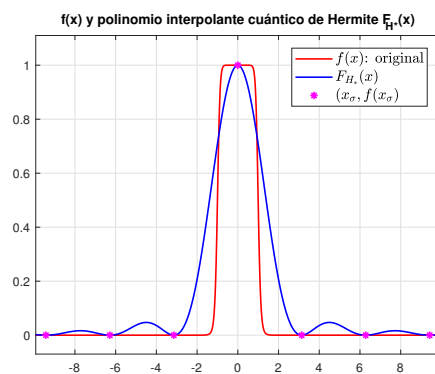
(d) $k = \pm 10, \pm 9, \dots, 0$

En la Figura (4.6) se muestra el polinomio interpolante cuántico de Hermite de primer orden para la función $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$, tomando diferentes valores de k en la suma dada en (4.7). Se observa la coincidencia de $f(x)$ y el interpolante cuántico de Hermite de primer orden, $F_{H^*}(x)$, hasta en la primera derivada en los nodos.

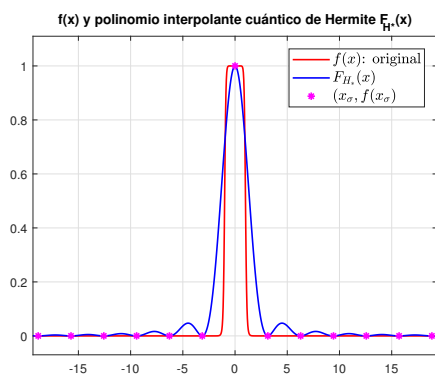
Figura 4.6. Polinomio interpolante cuántico de Hermite de 1er orden para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$.



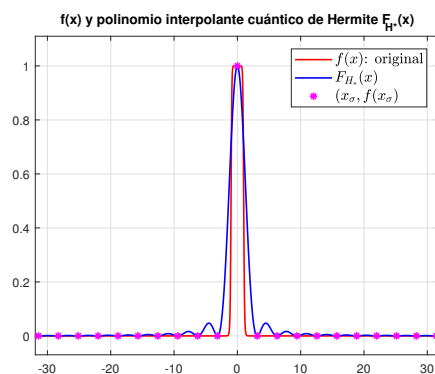
(a) $k = \pm 2, \pm 1, 0$



(b) $k = \pm 3, \pm 2, \dots, 0$



(c) $k = \pm 6, \pm 5, \dots, 0$



(d) $k = \pm 10, \pm 9, \dots, 0$

4.3.2. Interpolación cuántica de Hermite de 2do orden

En este caso consideramos la función dada en (4.5): $h_{**}(x) = \sin^3 x$, su base espectral está formada por:

$$s_{k**}(x) = \frac{(-1)^k}{(x - k\pi)^3} \left(1 + \frac{(x - k\pi)^2}{2} \right) \cdot \sin^3 x \quad (4.8)$$

$$q_{k**}(x) = \frac{(-1)^k}{(x - k\pi)^2} \cdot \sin^3 x \quad (4.9)$$

$$q_{k**}^2(x) = \frac{(-1)^k}{(x - k\pi)} \cdot \sin^3 x \quad (4.10)$$

El polinomio interpolante de Hermite de segundo orden es:

$$F_{H**} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(f(k\pi) \cdot s_{k**}(x) + f'(k\pi) \cdot q_{k**}(x) + f''(k\pi) \cdot q_{k**}^2(x) \right)$$

$$F_{H**} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left[\frac{f(k\pi)}{(x - k\pi)^3} \cdot r_{k**}(x) + \frac{f'(k\pi)}{(x - k\pi)^2} + \frac{f''(k\pi)}{2(x - k\pi)} \right] \cdot \sin^3 x \quad (4.11)$$

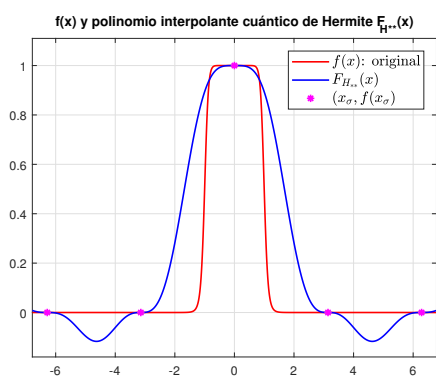
$$\text{donde } r_{k**}(x) = \left(1 + \frac{(x - k\pi)^2}{2} \right).$$

Interpolemos la función

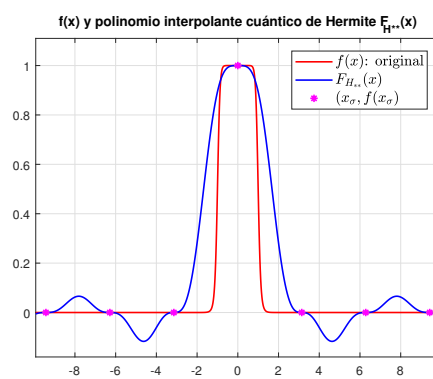
$$f(x) = \frac{1}{1 + x^{16}} \quad (4.12)$$

Observamos en la Figura (4.7) el interpolante cuántico de Hermite de segundo orden, $F_{H**}(x)$, para diferentes valores de k en la suma dada en (4.11), vemos que la coincidencia con $f(x)$ se da hasta en la curvatura (segunda derivada) en los nodos.

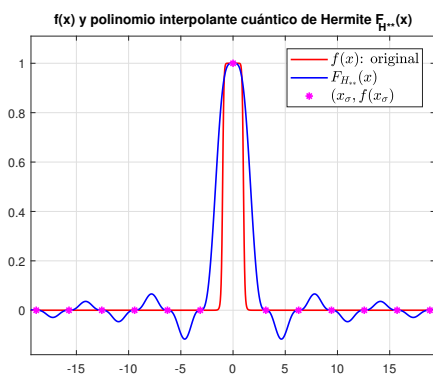
Figura 4.7. Polinomio interpolante cuántico de Hermite de 2do orden para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$.



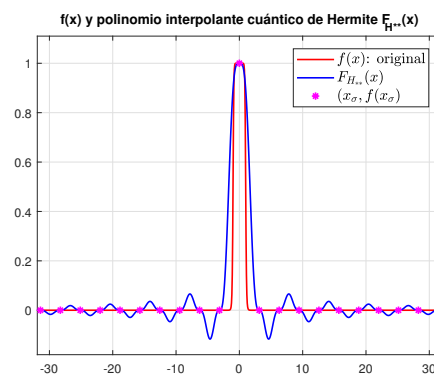
(a) $k = \pm 2, \pm 1, 0$



(b) $k = \pm 3, \pm 2, \dots, 0$



(c) $k = \pm 6, \pm 5, \dots, 0$



(d) $k = \pm 10, \pm 9, \dots, 0$.

En la Figura (4.8) se muestran la función $f(x)$, junto con sus polinomios interpolantes, el cuántico de Hermite de orden 2, $\mathbf{F}_{H^{**}}(x)$, el de Hermite con 7 nodos: $\pm 3\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm \pi$ y $\mathbf{0}$, representado por $H_{13}(x)$, además está el polinomio interpolante de Lagrange en los mismos nodos, representado por $L_6(x)$.

Analizamos los errores respectivos en el espacio $L^2(\mathbf{I})$. De acuerdo a la Figura (4.8), se han tomado 7 nodos, desde -3π hasta 3π , es por ello que el intervalo de integración será $\mathbf{I} = [-3\pi, 3\pi]$.

Recordando que la norma en L^2 está dada por

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbf{I}} |f - g|^2 dx}$$

entonces tenemos los errores con el polinomio interpolante:

- de Lagrange $L_6(x)$:

$$\|f - L_6\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbf{I}} |f(x) - L_6(x)|^2 dx} = 2.161219071861879$$

- de Hermite $H_{13}(x)$:

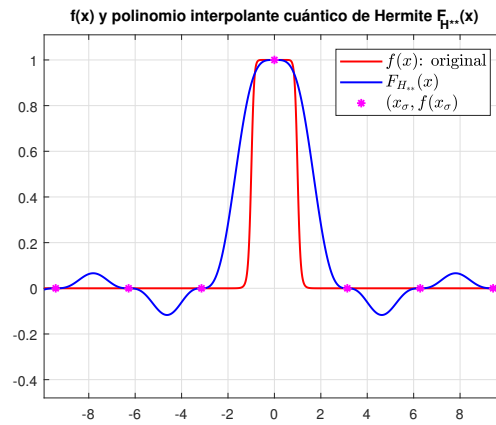
$$\|f - H_{13}\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbf{I}} |f(x) - H_{13}(x)|^2 dx} = 1.6788711674751073$$

- cuántico de Hermite 2do orden $\mathbf{F}_{H^{**}}(x)$:

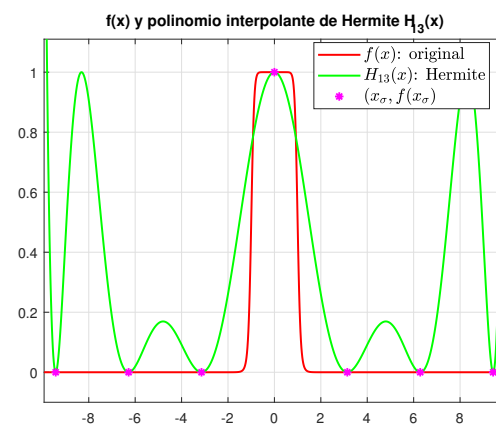
$$\|f - \mathbf{F}_{H^{**}}\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbf{I}} |f(x) - \mathbf{F}_{H^{**}}(x)|^2 dx} = 0.8705167782274978$$

Se observa que con la interpolación cuántica se logra una mayor precisión, además que su evaluación es mucho más ventajosa que la de interpolación de Lagrange y de Hermite, pues se tendría que realizar otros cálculos para generar esos polinomios si deseamos aumentar el número de nodos.

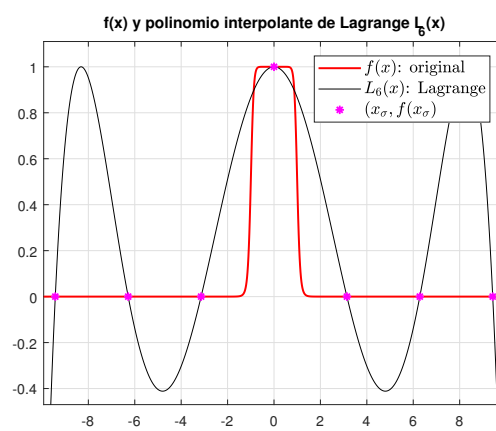
Figura 4.8. Polinomios interpolantes para $f(x) = \frac{1}{1+x^{16}}$.



(a) Cuántico de Hermite de orden 2.



(b) Hermite $H_{13}(x)$.



(c) Lagrange $L_6(x)$.

CONCLUSIONES

El proceso de interpolación que conocemos comunmente, interpolación de Lagrange, interpolación de Hermite, entre otros, considera un número finito de nodos, es decir que se tiene en cuenta una base elegida. Como se pudo observar, en los polinomios de interpolación de Lagrange o de Hermite, cuando se añade un nodo más, los polinomios que nos sirvieron de base no ayudan en la construcción de los nuevos polinomios base, en otras palabras, no es de ayuda para hallar otro polinomio interpolante. En cambio al trabajar con las bases espectrales, solo con una inversión numérica se puede hallar la nueva base. Aquí hay que considerar que si no se considera información de la primera derivada de la función $f(x)$, la interpolación con bases espectrales y la interpolación con el método de Lagrange coinciden, como se vio en un ejemplo. Sin embargo cuando requerimos tomar en cuenta las derivadas de mayor orden, el método de Hermite usual se vuelve complicado, lo que no ocurre con las bases espectrales. Además, si requerimos considerar más y más nodos es conveniente utilizar la interpolación cuántica, la cual proporciona una mejor precisión, como se muestra en el ejemplo dado en [\(4.12\)](#).

Con los ejemplos vistos en la Sección (4.1), Sección (4.2) y Sección (4.3) se ha comprobado que efectivamente sí se pueden generalizar los métodos de interpolación de Lagrange, de Hermite, entre otros, con las bases espectrales o la interpolación cuántica, pues mejoran la precisión.

RECOMENDACIONES

En la interpolación cuántica, tener en cuenta la función, $h(x)$, ha considerar, la cual debe tener infinitos ceros. Esto dependerá de las exigencias que se debe tener en la función a interpolar: si sólo se requiere un polinomio interpolante cuántico que coincida con $f(x)$, bastará con una función $h(x)$ de ceros simples, pero si se pide que coincida con su primera o segunda derivada, la función $h(x)$ debe tener infinitos ceros de multiplicidad dos o de multiplicidad tres respectivamente.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Boyd, J.P. (2007). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Dover Publications, Inc., Second Edition, New York.
- [2] Brezis, H. (1984). *Análisis Funcional Teoría y Aplicaciones*. Alianza Editorial, S. A., Madrid.
- [3] Bueno O., A., Pérez G., V. M y Fenton, F. H. (2004). *Spectral Methods for Partial Differential Equations in Irregular Domains: The spectral smoothed boundary method*. art arXiv:math/0406327v1.
- [4] Burden, R. L., Faires, J. D., y Burden, A.M (2017). *Análisis Numérico*. Décima edición, Youngstown State University.
- [5] Costa, P.C.S, Jordan, S. y Ostrander, A. (2019). *Quantum Algorithm for Simulating the Wave Equation*. art. arXiv :1711.05394 v4.
- [6] Childs, A. M, Liu J.P, (2019). *Quantum spectral methods for differential equations*. art arXiv:1901.00961v1.
- [7] Fournier, A.R.J., (2003). *Sobolev Space*. Elsevier. Second Edition.
- [8] Gaillan, J.A, (2010). *Contemporary abstract algebra*. Séptima edición. Brooks/Cole, Cengage Learning. Canadá.
- [9] Gottlieb, D. y Orszag, S.A. (1977). *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania.

- [10] Lee, Gregory T., (2010). *Abstract Algebra, An Introductory course*. Springer Undergraduate Mathematics Series.
- [11] Paddy M. Prenter (1989). *Splines and Variational Methods*. Jhon Wiley & Sons.
- [12] Sobczyk, G. (2006). *The spectral basis and rational interpolation*. art. arXiv:math/0602405v1.
- [13] Sobczyk, G. (2006). *Geometric Algebra, Spectral Basis and Interpolation*. Talk, Universidad de Las Américas – Puebla.
- [14] Sobczyk, G. (2003). *Quantum Hermite Interpolation Polynomials*. Proceedings of 7th International Conference on Parametric Optimization and Related Topics.
- [15] Sobczyk, G. (2001). *The Missing Spectral Basis in Algebra*. THE MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMERICA.
- [16] Süli, E.; Mayers D. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. Cambridge. University Press.

ANEXOS

6.1. Programa polinomio interpolante cuántico de Lagrange.

6.1.0.1. Programa. 1

```
%Programa para el polinomio interpolante cuántico de Lagrange
clc
syms 'x'
n=10;%n=2;
t=linspace(-n*pi-.1,n*pi+.1,1000);
%y=exp(-x*(x-1)^2/2)/4;
y=1/(x^(16)+1);
S=0;
yy=subs(y,t);
Nod=zeros(1,2*n+1);
fNod=zeros(1,2*n+1);
for k=-n:n
    Nod(1,k+n+1)=k*pi;
    fNod(1,k+n+1)=subs(y,k*pi);
    S=(S+(-1)^k*subs(y,k*pi)*sin(x)/(x-k*pi));
end
plot(t,yy,'-r',t,subs(S,t),'-b','linewidth',1.3);
hold on
grid on
plot(Nod,fNod,'*m','linewidth',1.3);
hold on
grid on
%hold off;
title('f(x) y polinomio interpolante cuántico de Lagrange F_L(x)');
legend({'f(x): original', '$F_L(x)$', '$(x_{\sigma},f(x_{\sigma}))$'}, 'Location','northeast', 'interpreter','latex', 'FontSize',12);
axis([-n*pi-.2 n*pi+.2 -.25 1.1])
```

6.2. Programa polinomio interpolante cuántico de Hermite de 1er orden.

6.2.0.1. Programa. 2

```

%Programa de interpolación cuántico de Hermite de 1er orden
clc
syms 'x'
n=10;
t=linspace(-n*pi-.5,n*pi+.5,1000);
%y=exp(-x*(x-1)^2/2)/4;
y=1/(x^(16)+1);
dy=-16*x^(15)/(1+x^(16))^2;
S=0;
yy=subs(y,t);
dyy=subs(dy,t);
Nod=zeros(1,2*n+1);
fNod=zeros(1,2*n+1);
for k=-n:n
    Nod(1,k+n+1)=k*pi;
    fNod(1,k+n+1)=subs(y,k*pi);
    S=S+(subs(y,k*pi)/(x-k*pi)^2+subs(dy,k*pi)/(x-k*pi))*(sin(x))^2;
end
plot(t,yy,'-r',t,subs(S,t),'-b','linewidth',1.3);
hold on
grid on
plot(Nod,fNod,'*m','linewidth',1.3);
hold on
grid on
title('f(x) y polinomio interpolante cuántico de Hermite F_H_*(x)');
legend({'f(x): original', '$F_{H_*}(x)$', '$(x_{\sigma}, f(x_{\sigma}))$'}, 'Location', 'northeast', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);
axis([-n*pi-.5 n*pi+.5 -.07 1.11])

```

6.3. Programa polinomio interpolante cuántico de Hermite de 2do orden.

6.3.0.1. Programa. 3

```

%Programa de interpolación cuántico de Hermite de 2do orden
clc
syms 'x'
n=10;
t=linspace(-n*pi-.5,n*pi+.5,1000);
%y=exp(-x*(x-1)^2/2)/4;
y=1/(x^(16)+1);
dy=-16*x^(15)/(1+x^(16))^2;
d2y=16*x^14*(-15+17*x^16)/((1+x^16)^3);
S=0;
yy=subs(y,t);
dyy=subs(dy,t);
d2yy=subs(d2y,t);
Nod=zeros(1,2*n+1);
fNod=zeros(1,2*n+1);
for k=-n:n
    Nod(1,k+n+1)=k*pi;
    fNod(1,k+n+1)=subs(y,k*pi);
    sk=(-1)^k*(1+(x-k*pi)^2/2)/((x-k*pi)^3);
    qk=(-1)^k/((x-k*pi)^2);
    q2k=(-1)^k/(x-k*pi);
    S=S+(subs(y,k*pi)*sk+subs(dy,k*pi)*qk+subs(d2y,k*pi)*q2k/2)*(sin(x))^3;
end
plot(t,yy,'-r',t,subs(S,t),'-b','linewidth',1.3);
hold on
plot(Nod,fNod,'*m','linewidth',1.3);
hold on
grid on
title('f(x) y polinomio interpolante cuántico de Hermite F_H_{**}(x)');
legend({'$f(x)$: original', '$F_H_{**}(x)$', '$x_{\sigma}$, f(x_{\sigma})$'}, 'Location', 'northeast', 'interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);
axis([-n*pi-.5 n*pi+.5 -.18 1.11])

```

6.4. Programa polinomio interpolantes juntos.

6.4.0.1. Programa. 4

```

%Programa interpolación de los tres casos
clc
syms 'x'
n=3;
t=linspace(-n*pi-.5,n*pi+.5,1000);
%y=exp(-x*(x-1)^2/2)/4;
y=1/(x^(16)+1);
dy=-16*x^(15)/(1+x^(16))^2;
d2y=16*x^14*(-15+17*x^16)/((1+x^16)^3);
S=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Polinomio interpolante de Hermite con 7 nodos: +-3pi, +-2pi,..., 0pi,
hh=1.0000000000000002-2.7755575615628914*10^(-17)*x-0.2758187611912304*x^2-...
    2.180428410867602*10^(-9)*x^3+0.027003649702539833*x^4+3.5779483850026433*10^(-10)*x^5-...
    0.001158945204953046*x^6-1.8668913157433607*10^(-11)*x^7+0.000023908002331495113*x^8+...
    4.239437998580453*10^(-13)*x^9-2.3070353117788144*10^(-7)*x^10-4.314049827131537*10^(-15)*x^11+...
    8.348269551278148*10^(-10)*x^12+1.6120737860183825*10^(-17)*x^13;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Polinomio interpolante de Lagrange con 7 nodos: +-3pi, +-2pi,..., 0pi,
Lag=1-8.838777791234788*10^(-10)*x-0.1379093874397829*x^2+3.233949453419215*10^(-11)*x^3+...
    0.003992326380907622*x^4-2.5205201662520997*10^(-13)*x^5-0.00002889337385706782*x^6;
yy=subs(y,t);
dyy=subs(dy,t);
d2yy=subs(d2y,t);
dhh=subs(hh,t);dLag=subs(Lag,t);
Nod=zeros(1,2*n+1);
fNod=zeros(1,2*n+1);
for k=-n:n
    Nod(1,k+n+1)=k*pi;
    fNod(1,k+n+1)=subs(y,k*pi);
    sk=(-1)^k*(1+(x-k*pi)^2/2)/((x-k*pi)^3);
    qk=(-1)^k/((x-k*pi)^2);
    q2k=(-1)^k/(x-k*pi);
    S=S+(subs(y,k*pi)*sk+subs(dy,k*pi)*qk+subs(d2y,k*pi)*q2k/2)*(sin(x))^3;
end
%plot(t,yy,'-r',t,subs(S,t),'-b',t,dhh,'-w',t,dLag,'--b','linewidth',1.3);
plot(t,yy,'-r','linewidth',1.4);hold on
%plot(t,subs(S,t),'-b','linewidth',1.4);hold on
%plot(t,dhh,'-g','linewidth',1);hold on
plot(t,dLag,'-k','linewidth',.7);
hold on

```

```

grid on
plot(Nod,fNod,'*m','linewidth',1.3);
hold on
grid on
%hold off;
title('f(x) y polinomio interpolante de Lagrange L_{6}(x)');
%legend({'f(x): original','F_{H_{**}}(x)', 'H_{13}(x)', 'L_{6}(x)', '$(x_{\sigma},f(x_{\sigma}))$'}, 'Location','northeast','interpreter','latex','Fo
legend({'f(x): original','L_{6}(x): Lagrange', '$(x_{\sigma},f(x_{\sigma}))$'}, 'Location','northeast','interpreter','latex','FontSize',12);
%axis([-n*pi-.3 n*pi+.2 -.23 1.14])
%axis([-3*pi-.5 3*pi+.5 -.07 1.11])
axis([-n*pi-.5 n*pi+.5 -.47 1.11])

```

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS N° 061-2024-FIMGC****PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

En la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga de la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **Resolución Decanal N° 594-2024-FIMGC-D**, a los doce días del mes de setiembre de 2024, siendo las 04:00 p.m, reunidos en el Auditorio de la Escuela Profesional de Ingeniería de Minas, bajo la presidencia del MSc. Ing. José Ernesto ESTRADA CARDENAS y los miembros; Mg. Víctor Alcides COAQUIRA CÁRDENAS, Mg. José Carlos JUARÉZ PULACHE y Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO, actuando como secretario docente el MSc. Ing. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO, para proceder a la sustentación de tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática, del bachiller en Ciencias Físico Matemáticas:

Revelino VELARDE HUASACCA

Quien presentó la tesis denominada:

Bases espectrales en la Interpolación Cuántica

Los señores miembros del jurado luego de expuesto la tesis y absueltas las preguntas, delibera y lo declaran:

APROBADO CON NOTA DIECISIETE (17)

Siendo las 05:40 p.m. del día 12 de setiembre de 2024, culmina el acto de sustentación de tesis, y en conformidad a lo actuado los miembros del jurado firmamos al pie del presente.

MSc. Ing. José Ernesto ESTRADA CARDENAS
Presidente

Mg. Víctor Alcides COAQUIRA CÁRDENAS
Miembro

Mg. José Carlos JUARÉZ PULACHE
Miembro

Mg. Daúl Andrés PAIVA YANAYACO
Miembro

MSc. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO
Secretario docente de la FIMGC

cc:
Archivo



UNSCH

FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL



CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 001-2025-JAHQ-FIMGC/UNSCH

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales de la Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 697-2024-FIMGC -D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

Nombres y Apellidos : REVELINO VELARDE HUASACCA.
Escuela Profesional : CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
Título de la Tesis : Bases espectrales en la Interpolación Cuántica
Evaluación de la Originalidad : 8% Índice de Similitud.
Identificador de la entrega : 2500268372.

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 24 de febrero del 2025

Dr. JUAN ALFREDO HUAMANCHAQUI QUISPE
DNI N°: 41764585

Bases espectrales en la Interpolación Cuántica

por REVELINO VELARDE HUASACCA

Fecha de entrega: 24-feb-2025 12:28p.m. (UTC-0500)

Identificador de la entrega: 2500268372

Nombre del archivo: Tesis_Revelino_Final_15_feb_2025.pdf (2.19M)

Total de palabras: 19978

Total de caracteres: 80243

Bases espectrales en la Interpolación Cuántica

INFORME DE ORIGINALIDAD

8%

INDICE DE SIMILITUD

8%

FUENTES DE INTERNET

2%

PUBLICACIONES

5%

TRABAJOS DEL ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	2%
2	hdl.handle.net Fuente de Internet	2%
3	repositorio.unsch.edu.pe Fuente de Internet	1%
4	www.slideshare.net Fuente de Internet	1%
5	repositorio.unfv.edu.pe Fuente de Internet	<1%
6	www.thuvientailieu.vn Fuente de Internet	<1%
7	issuu.com Fuente de Internet	<1%
8	pdfslide.net Fuente de Internet	<1%
9	qdoc.tips Fuente de Internet	<1%
10	Submitted to University of Strathclyde Trabajo del estudiante	<1%
11	uri.gbv.de Fuente de Internet	<1%

Submitted to Woodstock School

12

Trabajo del estudiante

<1 %

13

livros01.livrosgratis.com.br

Fuente de Internet

<1 %

14

edoc.pub

Fuente de Internet

<1 %

15

math.bd.psu.edu

Fuente de Internet

<1 %

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias

< 30 words

Excluir bibliografía

Activo