

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE
HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS



“COMPORTAMIENTO GENÉRICO DE LA
ESTABILIDAD LOCAL EN CAMPOS VECTORIALES
DE CLASE C^r , $r \geq 1$ ”

*TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS, ESPECIALIDAD MATEMÁTICA*

PRESENTADA POR

Bach. CONDORI HUAMÁN, ALEXANDER PAUL

ASESOR: Msc. VALVERDE CUEVA, JUAN PABLO

LINEA DE INVESTIGACIÓN:

SISTEMAS DINÁMICOS

AYACUCHO - PERÚ

SETIEMBRE - 2019

Dedicado a mis padres:

Aydee y César.

Agradecimientos

A Dios, por darme la oportunidad de concluir esta etapa de mi vida.

A mis padres, Aydee y Cesar, por su amor, cariño y apoyo incondicional.

A toda mi familia, por la ayuda y el incentivo que siempre me han dado. Los llevo siempre en mi corazón.

A mis asesores Martha Nina Escalante y Juan Pablo Valverde Cueva, por la paciencia, la disposición y la confianza depositada en mí.

A los queridos maestros Enrique Aviles, Raúl Achallma, José Luis Condori, Daul Paiva, Guillermo Zela, Rocio, Willy, entre otros que compartieron sus conocimientos conmigo.

A los compañeros de mi querida Escuela de Ciencias Físico Matemáticas, por la amistad y compañerismo.

Resumen

El objetivo de este trabajo es demostrar que la estabilidad local en una singularidad hiperbólica es una propiedad genérica dentro del conjunto de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, haciendo uso de los Teoremas de Hartman-Grobman y transversalidad de Thom. Se concluye, de lo anterior, que los campos vectoriales de clase C^r , con únicamente singularidades hiperbólicas y con la propiedad de ser localmente estables son “típicos”. Esto significa que la presencia de sistemas dinámicos con “buen” comportamiento es representativo en un sentido topológico.

Índice general

Introducción	1
1. Variedades diferenciables y la topología en el espacio de aplicaciones de clase C^r	4
1.1. Cálculo en $\mathbb{R}^n$	4
1.2. Variedades diferenciables	10
1.3. Topología en el espacio de aplicaciones de clase C^r , $r \geq 1$	39
1.4. Transversalidad	44
2. Campos vectoriales y singularidades hiperbólicas	48
2.1. Campos vectoriales	48
2.2. Campos vectoriales lineales	59
2.3. Singularidades hiperbólicas	67
3. El Teorema de Hartman-Grobman y estabilidad local	73
3.1. Teorema de Hartman-Grobman para campos vectoriales de clase C^r sobre variedades diferenciables	73
3.2. La estabilidad local como propiedad genérica	90
3.3. Aplicación a un caso global	92
Conclusiones	97
A. Cálculo diferencial en espacios de Banach	98
B. Revisión de álgebra lineal: forma canónica de Jordan	102

Introducción

En el campo de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, encontrar soluciones de ecuaciones lineales no presenta gran dificultad; lo que no ocurre para ecuaciones diferenciales no lineales, donde no siempre es posible hallar soluciones explícitas, esto significa que la intención de resolver las ecuaciones diferenciales en sentido tradicional (por simple integración) es poco efectiva, en lugar de eso, uno se concentra en obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones.

Una herramienta muy útil que nos permite analizar ecuaciones diferenciales no lineales, permitiéndonos conocer propiedades como: la estabilidad, periodicidad, etc. y sin tener que encontrar expresiones analíticas para las soluciones, es la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, que surgió a mediados del siglo XIX y que inicialmente fue abordado por el francés Jules Henri Poincaré (1854-1912) y el ruso Alexander Mijailovich Lyapunov (1857-1918)(Lyapunov, 1907).

Poincaré estudió el retrato de fase de un sistema de ecuaciones diferenciales, en su trabajo en mecánica celeste, donde introdujo la topología al estudiar las propiedades de las trayectorias fusionando el análisis y la geometría, originando así la teoría de los sistemas dinámicos (Poincaré, 1890). Más adelante, una teoría más abstracta de los sistemas dinámicos fue desarrollada por George D. Birkhoff (1884-1944).

En 1937 Andronov y Pontryagin establecieron la noción de estabilidad estructural (Andronov y Pontryagin, 1937). Mauricio M. Peixoto probó la densidad de los campos vectoriales estables sobre superficies (Peixoto, 1962: 101-120). Luego, Stephen Smale enriqueció substancialmente la teoría general al bosquejar el estudio sistemático de sistemas hiperbólicos (Smale, 1967: 747-817). Su idea básica era la

búsqueda global de propiedades genéricas y estables. La definición formal de propiedad genérica es dada a seguir:

Dado un espacio topológico de Hausdorff X , se dice que una **propiedad** $\mathbb{P}$ **es genérica** en el espacio X si existe un subconjunto residual $\mathcal{R}$ de X tal que cada $x \in \mathcal{R}$ satisface la propiedad $\mathbb{P}$. Recuerde que un subconjunto $\mathcal{R}$ del espacio topológico X es llamada **residual** si contiene la intersección numerable de una familia de subconjuntos abiertos y densos del espacio X . El conjunto $\mathcal{R}$ es también denominado un **conjunto genérico**.

En esta misma época el estadounidense Philip Hartman y D. M. Grobman dan un resultado muy importante, respondiendo a una de las interrogantes propuestas por Mauricio Peixoto, y establecen que alrededor de una singularidad hiperbólica, la dinámica de un campo vectorial es indistinguible (topológicamente) de la dinámica de su aproximación lineal cerca del origen. Hoy este resultado es conocido como el Teorema de Hartman-Grobman, inicialmente demostrado por Hartman en 1960 (Grobman, 1959: 880-881); pero que ya se había anunciado por Grobman en 1959, quien publicó su demostración en 1962 (Hartman, 1960: 220-241).

El área de investigación matemática al cual pertenece el presente trabajo es el de Sistemas Dinámicos Hiperbólicos de clase C^r , $r \geq 1$. Específicamente, dentro de la Teoría Local Hiperbólica, con cierta aplicación en aspectos globales.

Dentro de la teoría de Sistemas Dinámicos Hiperbólicos de clase C^r , $r \geq 1$, se tiene la presencia de una gran variedad de sistemas no lineales con propiedades y comportamientos bastante exóticos, algunas de estas propiedades son más apreciables que otras, por lo que es necesario hacer una clasificación topológica de tales sistemas. Siendo más específicos, se pretende clasificar los campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, dentro de la teoría local de Sistemas Dinámicos Hiperbólicos.

La noción intuitiva de la estabilidad local es dada a seguir (vea la Definición 2.14 para una definición formal): dado un punto p en la variedad diferenciable M y un campo vectorial X de clase C^r , $r \geq 1$, se dice que el campo X es **localmente estable en p** si existe un campo vectorial Y próximo de X y un punto $q \in M$ próximo de p tal que la órbita de X por p es llevada en una órbita de Y mediante un homeomorfismo local h que preserva orientación y que cumple con $h(p) = q$.

En este trabajo se demostrará que la propiedad de **estabilidad local** se cumple sobre un subconjunto abierto y denso del conjunto de campos vectoriales de clase C^r , es decir, se cumple para un conjunto bastante “grande” en un sentido topológico (residual). Significando así, que la estabilidad local es una propiedad genérica dentro del conjunto de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$.

Esta propiedad genérica permitirá describir el comportamiento local de las trayectorias en una vecindad de cada singularidad hiperbólica de un campo vectorial. Además, nos indica que la estructura local de las órbitas no se altera por pequeñas perturbaciones del campo.

Una propiedad genérica es útil en el siguiente sentido: dado dos propiedades genéricas $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ en el espacio de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, entonces estas propiedades son simultáneamente genéricas en el espacio de campos vectoriales de clase C^r . Esto significa, que la intersección de los elementos que cumplen simultáneamente con estas dos propiedades es densa en el espacio de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$.

Si se tuviese simplemente dos conjuntos densos A y B en un dado espacio topológico T , se sabe que la intersección $A \cap B$ no es necesariamente densa en T (es decir, la densidad no es preservada por la intersección de dos conjuntos densos; sin embargo, la densidad es preservada por la intersección de conjuntos genéricos).

La tesis es organizada como sigue. En el Capítulo 1 se dará un resumen de resultados del cálculo en $\mathbb{R}^n$, variedades diferenciables, la topología del espacio de aplicaciones de clase C^r y transversalidad. El Capítulo 2 se concentra en la teoría de campos vectoriales (aquí se introduce la definición de estabilidad local). En el Capítulo 3 se demuestra el Teorema de Hartman-Grobman. También se demuestra la genericidad de la estabilidad local y se da una aplicación a un caso global particular. Finalmente, en el Apéndice A se da un breve repaso del cálculo diferencial en espacios de Banach y en el Apéndice B se da una revisión sobre la forma canónica de Jordan.

Capítulo 1

Variedades diferenciables y la topología en el espacio de aplicaciones de clase C^r

En este capítulo se recuerda algunos conceptos del análisis en $\mathbb{R}^n$ (diferenciabilidad y teoremas de formas locales), se presenta la teoría de variedades diferenciables, topología de las aplicaciones de clase C^r y la teoría de transversalidad (donde se presenta la idea central del teorema de transversalidad de Thom).

1.1. Cálculo en $\mathbb{R}^n$

En esta sección se dará un pequeño repaso del cálculo diferencial y algunas propiedades topológicas de $\mathbb{R}^n$. Se omitirán las demostraciones de los teoremas y propiedades, al ser parte de un curso de análisis en $\mathbb{R}^n$, sin embargo las demostraciones pueden ser encontradas en la bibliografía (Lima, 2000).

Definición 1.1. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación definida sobre el abierto U de $\mathbb{R}^m$. Se dice que f es **diferenciable** en el punto $p \in U$ si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que, para v pequeño,

$$f(p + v) = f(p) + Tv + r(v), \quad \text{donde} \quad \lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$

En caso de que f sea diferenciable en p , se dice que la transformación lineal T es la **derivada** de f en p y se denotará por $df(p)$ o $f'(p)$. La matriz asociada a $df(p)$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^k$ es $[(\partial f_i / \partial x_j)(p)]$, llamada matriz jacobiana.

Como resultado de la existencia de la derivada de f en p se obtiene la continuidad de f en p .

Se denotará por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ al espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$, dotado de la norma $\|T\| = \sup\{\|Tv\| \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}$.

Definición 1.2. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ diferenciable en cada punto de U , la aplicación $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ es llamada la **aplicación derivada de f** , la cual asocia a cada punto p de U la transformación lineal $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, la derivada de f en p .

Definición 1.3. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicación definida sobre el abierto U de $\mathbb{R}^n$. Se dice que f es de **clase C^1** si su correspondiente aplicación derivada es continua.

Una forma alternativa para afirmar que f es de clase C^1 es, si y sólo si, las derivadas parciales de las funciones coordenadas de f , $\partial f_i / \partial x_j : U \rightarrow \mathbb{R}$, existen y son continuas.

Definición 1.4. Análogamente a la definición de $df(p)$, se define $d^2f(p)$ como la derivada de df en p .

Así, $d^2f(p)$ es un elemento del espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k))$, el cual es isomorfo al espacio de las aplicaciones bilineales $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^k$. La norma inducida en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, por ese isomorfismo, es

$$\|B\| = \sup\{\|B(u, v)\| \mid u, v \in \mathbb{R}^n, \|u\| = \|v\| = 1\}.$$

Definición 1.5. Se dice que la aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, definida sobre el abierto U de $\mathbb{R}^n$, es de clase C^2 en U si $d^2f : U \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ es continua.

De manera inductiva, se puede definir $d^r f(p)$ como la derivada de $d^{r-1}f$ en p . Se tiene así que, $d^r f(p) \in \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, donde $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ es el espacio de las aplicaciones r -lineales dotado con la norma

$$\|A\| = \sup\{\|A(v_1, \dots, v_r)\| \mid v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n, \|v_1\| = \dots = \|v_r\| = 1\}.$$

Esto permite realizar las siguientes definiciones.

Definición 1.6. Una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida sobre el abierto U de $\mathbb{R}^m$, es de **clase** C^r en U si $d^r f : U \rightarrow \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$ es continua.

Definición 1.7. Una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida sobre el abierto U de $\mathbb{R}^m$, es de **clase** C^∞ en U si es de clase C^r para todo $r \geq 0$.

Se demuestra que f es de clase C^r , $r \geq 1$, si y sólo si, las derivadas parciales, hasta el orden r , de las funciones coordenadas de f , existen y son continuas.

Los siguientes conceptos son muy importantes para el desarrollo de la tesis.

Definición 1.8. Sean U, V abiertos de $\mathbb{R}^m$. La aplicación $f : U \rightarrow V$ es un **difeomorfismo**, si f es una biyección diferenciable cuya inversa, $f^{-1} : V \rightarrow U$, es también diferenciable. En tal caso, se dice que U y V son difeomorfos.

El hecho de que dos abiertos de $\mathbb{R}^m$ sean difeomorfos significa que hay una deformación suave de un abierto al otro.

Definición 1.9. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^m$. La aplicación diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es llamada un **difeomorfismo local**, si para cada $x \in U$, existen una vecindad abierta V_x de x y una vecindad abierta $W_{f(x)}$ de $f(x)$ tal que $f : V_x \rightarrow W_{f(x)}$ es un difeomorfismo. Si f es de clase C^r , decimos que f es un **difeomorfismo local de clase** C^r , $r \geq 1$.

Definición 1.10. Sean un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ y $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sucesión de funciones.

- 1) Dado $x \in U$, se dice que la sucesión de funciones converge puntualmente en x , si la sucesión de números reales $f_n(x)$ converge. La función $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ se llama función límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$.
- 2) Sea f la función límite puntual de $\{f_n\}$. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en U si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que dependerá sólo de ε) de manera que $\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in U$ y para todo $n \geq n_0$ (o también, equivalentemente, que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $\sup\{\|f(x) - f_n(x)\| : x \in U\} \leq \varepsilon$).

Proposición 1.1. Sean un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ y $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sucesión de aplicaciones de clase C^1 . Si la sucesión f_n converge puntualmente a $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y la sucesión df_n converge uniformemente a $g : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, entonces f es de clase C^1 y $df = g$.

Proposición 1.2 (Regla de la Cadena). Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $p \in U$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en $q = f(p)$, $f(U) \subset V$, entonces $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en p y $d(g \circ f) = dg(f(p)) \circ df(p)$.

Corolario 1.1. Si f y g son aplicaciones de clase C^r , $r \geq 1$, entonces $g \circ f$ es de clase C^r .

Corolario 1.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable en $p \in U$ y $\alpha : (-1, 1) \rightarrow U$ es una curva tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $f \circ \alpha$ es una curva diferenciable en $\mathbb{R}^n$ y $(f \circ \alpha)'(0) = df(p)v$.

Se enuncia ahora los teoremas fundamentales del cálculo diferencial.

El primero de estos es el teorema de la función inversa, el cual nos brinda una información bastante útil respecto al comportamiento de una aplicación de clase C^r definida en un abierto haciendo uso de la inversión de su aproximación lineal en un punto de su dominio, es decir, la derivada de la aplicación en el punto, con lo que se puede lograr una inversión local difeomórfica de clase C^r en dicho punto, esto significa, teóricamente existe la inversa de la aplicación restringida a una vecindad.

Teorema 1.1 (Función Inversa). Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$. Si en un punto $p \in U$, $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo (la matriz jacobiana de $df(p)$ es invertible), entonces f es un difeomorfismo local de clase C^r en p .

Teorema 1.2 (Función Implícita). Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$. Sean $z_0 = (x_0, y_0) \in U$ y $c = f(z_0)$. Si la derivada parcial, en relación a la segunda variable $\partial_2 f(z_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, entonces:

- a) Existen abiertos $V \subset \mathbb{R}^m$ conteniendo x_0 , y $W \subset U$ conteniendo z_0 , tales que, para cada $x \in V$ existe un único $\xi(x) \in \mathbb{R}^n$, con $(x, \xi(x)) \in W$ y $f(x, \xi(x)) = c$.

b) La aplicación $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, así definida, es de clase C^r y su derivada es dada por $d\xi(x) = [\partial_2 f(x, \xi(x))]^{-1} \circ \partial_1 f(x, \xi(x))$.

Definición 1.11. Sea $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ abierto. Una aplicación diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es llamada una **submersión** si, para cada $x \in U$, la derivada $df(x) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva.

Ejemplo 1.1. La proyección $\pi : \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\pi(x, y) = y$ es una submersión. En efecto: Como π es una aplicación lineal, se tiene $d\pi(z) = \pi$ para todo $z \in \mathbb{R}^{m+n}$, luego π es una submersión, ya que obviamente π es sobreyectiva.

Teorema 1.3 (Forma Local de las Submersiones). Sean $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$. Si en un punto $z_0 \in U$, la derivada $df(z_0) : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es sobreyectiva y escogida una descomposición en suma directa $E \oplus F = \mathbb{R}^{m+n}$, ($z_0 = (x_0, y_0)$), se tenga $\partial_2 f(z_0) = df(z_0)|_F$ es un isomorfismo, entonces f se comporta localmente como una proyección. Es decir, existen abiertos V, W, Z , con

$$\begin{aligned} x_0 &\in V, \quad V \subset E \\ z_0 &\in Z, \quad Z \subset U \\ f(z_0) &\in W, \quad W \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

y un difeomorfismo de clase C^r , $h : V \times W \rightarrow Z$, tal que $f \circ h(x, w) = w$.

Definición 1.12. Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Una aplicación diferenciable $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es llamada una **inmersión** si, para cada $x \in U$, la derivada $df(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es una transformación lineal inyectiva.

Ejemplo 1.2. La inclusión $i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ dada por $i(x) = (x, 0)$ es una inmersión. En efecto: Al ser i una aplicación lineal, se tiene $di(x) = i$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, luego i es una inmersión, pues i es inyectiva.

Teorema 1.4 (Forma Local de las Inmersiones). Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$. Si en un punto $x_0 \in U$, la derivada $df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ es inyectiva, entonces existen abiertos V, W, Z , con

$$f(x_0) \in Z, \quad Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$$

$$x_0 \in V, \quad V \subset U \subset \mathbb{R}^m$$

$$0 \in W, \quad W \subset \mathbb{R}^n,$$

y un difeomorfismo de clase C^r , $h : Z \rightarrow V \times W$ tal que $h \circ f(x) = (x, 0)$ para cada $x \in V$. Es decir, $h \circ f$ se comporta localmente como una inclusión.

Definición 1.13. Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$ y una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^r , $r \geq 1$.

- a) Se dice que un punto $x \in U$ es un **punto regular** si, $df(x)$ es sobreyectiva; caso contrario, x es un **punto crítico**.
- b) Un punto $c \in \mathbb{R}^n$ es un **valor regular** si, todo $x \in f^{-1}(c)$ es un punto regular; caso contrario, c es un **valor crítico**.

Definición 1.14. Un subconjunto M de $\mathbb{R}^n$ se llama **residual** en $\mathbb{R}^n$ si, existe una familia numerable de abiertos densos en $\mathbb{R}^n$, digamos $(G_n)_{n=1}^\infty$, tal que $\bigcap G_n \subset M$.

Ejemplo 1.3. Un ejemplo de conjunto residual es el conjunto de números irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, en $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5 (Teorema de Categoría de Baire en $\mathbb{R}^n$). *Todo subconjunto residual de $\mathbb{R}^k$ es denso.*

Teorema 1.6 (Sard). *Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^∞ . Entonces el conjunto de valores regulares de f es residual en $\mathbb{R}^n$.*

A continuación se darán resultados referidos a la topología relativa o inducida en un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.15. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ es abierto en X si existe un abierto $A' \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = A' \cap X$.

La definición anterior indica que el conjunto X está dotado con la topología inducida, por la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.16. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$ y $Y \subset \mathbb{R}^n$. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se llama un **homeomorfismo** si es una aplicación biyectiva y tanto f como su inversa f^{-1} son continuas.

Los siguientes resultados serán de mucha utilidad.

Proposición 1.3. Sean $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^n$, dotadas cada una con la topología inducida, por la topología usual de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación biyectiva. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- a) f es un homeomorfismo.
- b) f es continua y abierta.

(f es una aplicación abierta si, la imagen de cualquier conjunto abierto en X es un conjunto abierto en Y).

Proposición 1.4. Sean $Z \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $A \subset Z$. A es abierto en Z si y sólo si A es abierto en $\mathbb{R}^n$.

1.2. Variedades diferenciables

En esta sección se introducirá el concepto de variedad diferenciable. Se iniciará definiendo las variedades diferenciables como subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ (Palis y de Melo, 1978). La noción abstracta variedad diferenciable se desarrollará más adelante, el cual, debido al Teorema de Whitney, estará inmersa nuevamente en algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^s$ (Brickell y Clark, 1970; Lages Lima, 2011a y Lages Lima, 2011b).

Sea M un subconjunto del espacio euclidiano $\mathbb{R}^k$. Considere en M la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^k$, esto es, $A \subset M$ es abierto si existe un abierto $A' \subset \mathbb{R}^k$ tal que $A = A' \cap M$.

Definición 1.17. Se dice que $M \subset \mathbb{R}^k$ es una **variedad diferenciable** de dimensión m si, para cada punto $p \in M$ existen un abierto $U \subset M$ conteniendo p y una aplicación $x : U \rightarrow U_0$, donde U_0 es un abierto de $\mathbb{R}^m$, tales que

- a) $x : U \rightarrow U_0$ es un homeomorfismo,

- b) El homeomorfismo inverso, $x^{-1} : U_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$, es una aplicación de clase C^∞ y
- c) $x^{-1} : U_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ es una inmersión.

En este caso, se dice que (x, U) es una **carta local** alrededor de p y que U es una **vecindad coordinada** de p .

Observación 1.1. En la definición anterior se entiende por una **variedad diferenciable** al hecho de tener una variedad diferenciable de clase C^∞ , la cual está establecida por la clase de diferenciabilidad del homeomorfismo inverso $x^{-1} : U_0 \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$. Una variedad diferenciable es también denominada en algunos textos como **variedad suave**.

Observe además: afirmar que $x^{-1} : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ es una inmersión, sólo tiene sentido cuando $m \leq k$.

Observación 1.2. Se dice que $M \subset \mathbb{R}^k$ es una **variedad diferenciable de clase C^r** y dimensión m si los homeomorfismos x^{-1} , en la definición anterior, son de clase C^r .

Como para cada $p \in U$ se tiene $x(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$, los números $x_i = x_i(p)$, $i = 1, \dots, m$, son llamados **las coordenadas** del punto $p \in M$ en la carta local x .

Se usará la notación M^m para indicar la dimensión m de una variedad diferenciable M .

Ejemplo 1.4. A continuación se verán algunos ejemplos para entender mejor el concepto de variedad diferenciable.

- 1) $\mathbb{R}^k$ es una variedad diferenciable de dimensión k . *En efecto:* Sea $p \in \mathbb{R}^k$ cualquiera. Tome el conjunto abierto $\mathbb{R}^k$, que contiene a p , y considere el homeomorfismo $id : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, la función identidad en $\mathbb{R}^k$. Es claro que $(id)^{-1} = id$ es una inmersión y es de clase C^∞ . De este modo, para cualquier $p \in \mathbb{R}^k$ es posible hallar una carta local $(id, \mathbb{R}^k)$ alrededor de p .
- 2) Los abiertos de $\mathbb{R}^k$ son variedades diferenciables de dimensión k . *En efecto:* sean $U \subset \mathbb{R}^k$ un abierto y un punto $p \in U$ cualesquiera. Como U es un abierto

conteniendo a p , tome el homeomorfismo $id : U \rightarrow U$ para el cual $(id)^{-1} = id$ es una inmersión. De este modo para cada $p \in U$ se ha encontrado un abierto conteniendo p , que viene a ser el mismo U , tal que (id, U) es una carta local alrededor de p .

- 3) Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable de dimensión m . Si V es abierto en M , entonces V es una variedad diferenciable de dimensión m .

En efecto: Al ser $V \subset M$ un conjunto abierto en M , existe un conjunto abierto $B \subset \mathbb{R}^k$ tal que $V = B \cap M$. Sea $p \in V$ un punto cualquiera, dado que $V \subset M$ se tiene que $p \in M$ y como M es una variedad diferenciable existe un abierto $U \subset M$ conteniendo p y un homeomorfismo $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$, donde $x(U)$ es abierto, tal que el homeomorfismo inverso $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ es una inmersión. Al ser U un abierto en M , debe existir un abierto $W \subset \mathbb{R}^k$, tal que $U = W \cap M$.

Sea $U_1 = U \cap V = (B \cap M) \cap (W \cap M) = W \cap (B \cap M) = B \cap V$, es claro que U_1 es un abierto conteniendo p en V ; pero como también se tiene que $U_1 = U \cap V = (B \cap M) \cap (W \cap M) = (B \cap W) \cap M$, U_1 es un abierto conteniendo p en M . Restringiendo x a U_1 , $x|_{U_1} : U_1 \rightarrow x|_{U_1}(U_1)$, esta satisface las condiciones para ser el homeomorfismo en la definición de variedad diferenciable (observe que $x|_{U_1} = x$ en U_1). *En efecto:*

- Inyectiva. Si $x|_{U_1}(u) = x|_{U_1}(v)$ con $u, v \in U_1$ y $U_1 \subset U$, entonces se tiene $x|_{U_1}(u) = x(u)$ y $x|_{U_1}(v) = x(v)$. Por la inyectividad de x en U , se obtiene $u = v$.

- Sobreyectiva. Evidente, pues $x|_{U_1}$ es una aplicación de U_1 sobre su imagen directa $x|_{U_1}(U_1)$.

- Homeomorfa. $x|_{U_1}$ es continua al ser la restricción de la aplicación continua $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$. La aplicación $(x|_{U_1})^{-1} : x|_{U_1}(U_1) \rightarrow U_1$ es continua al ser restricción de la aplicación continua $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$, esto pues, $(x|_{U_1})^{-1} = x^{-1}$ en $x|_{U_1}(U_1)$, ya que $x|_{U_1} = x$ en U_1 y $x|_{U_1}$ es biyectiva..

- $x|_{U_1}(U_1)$ es un abierto de $\mathbb{R}^m$. En efecto: Al ser $x|_{U_1} = x$ en U_1 , U_1 abierto en M , y $x : U \rightarrow x(U)$ un homeomorfismo. Por la Proposición 1.3., $x(U_1)$

es abierto en $x(U)$. Debido a que $x(U)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$ se infiere, por la Proposición 1.4., que $x(U_1) = x|_{U_1}(U_1)$ es un abierto en $\mathbb{R}^m$.

- $(x|_{U_1})^{-1}$ es una inmersión. En efecto: se tiene que $(x|_{U_1})^{-1} = x^{-1}$ en $x(U_1)$ y la derivada $d((x|_{U_1})^{-1})(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es la restricción de la aplicación lineal derivada $dx^{-1}(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ para todo $u \in x(U_1)$. Como $x(U_1) \subset x(U)$ y $dx^{-1}(u)$ es inyectiva para todo $u \in x(U)$, entonces $d((x|_{U_1})^{-1})(u)$ es inyectiva para todo $u \in x(U_1)$.

Así, $(x|_{U_1}, U_1)$ es una carta local alrededor de p . Por tanto, al ser p arbitrario, se concluye que V es una variedad diferenciable.

- 4) La esfera de dimensión n , $\mathbb{S}^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\}$, es una variedad diferenciable de dimensión n . *En efecto:*

Sean los puntos $N = (0, \dots, 0, 1)$ y $S = (0, \dots, 0, -1)$ en la esfera $\mathbb{S}^n$ y consideremos $U = \mathbb{S}^n - \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^n - \{S\}$. Los conjuntos U y V son conjuntos abiertos en $\mathbb{S}^n$ y $\mathbb{S}^n = U \cup V$. Defina las aplicaciones $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$x(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{1}{1 - z_{n+1}}(z_1, \dots, z_n) \quad \text{y} \quad y(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{1}{1 + z_{n+1}}(z_1, \dots, z_n),$$

es decir, $x_i(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{z_i}{1 - z_{n+1}}$ y $y_i(z_1, \dots, z_{n+1}) = \frac{z_i}{1 + z_{n+1}}$ para $i = 1, \dots, n$.

Definidas así, (x, U) y (y, V) son cartas locales alrededor de cada punto en $U \subset \mathbb{S}^n$ y alrededor de cada punto en $V \subset \mathbb{S}^n$, respectivamente.

Se demostrará que la aplicación $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es biyectiva, la demostración para $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es totalmente análoga.

La aplicación x es inyectiva, pues si $x(z_1, \dots, z_{n+1}) = x(w_1, \dots, w_{n+1})$, donde $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ y $w = (w_1, \dots, w_{n+1})$ pertenecen a U , se tiene que

$$\frac{z_i}{1 - z_{n+1}} = \frac{w_i}{1 - w_{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

de donde elevando al cuadrado y sumando tenemos

$$\frac{1}{(1 - z_{n+1})^2} \sum_{i=1}^n z_i^2 = \frac{1}{(1 - w_{n+1})^2} \sum_{i=1}^n w_i^2.$$

Como los puntos z y w se encuentran sobre la esfera $\mathbb{S}^n$, $\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1 - z_{n+1}^2$ y $\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1 - w_{n+1}^2$, por lo que

$$\frac{1 + z_{n+1}}{1 - z_{n+1}} = \frac{1 + z_{n+1}^2}{(1 - z_{n+1})^2} = \frac{1 + w_{n+1}^2}{(1 - w_{n+1})^2} = \frac{1 + w_{n+1}}{1 - w_{n+1}},$$

de donde se obtiene $z_{n+1} = w_{n+1}$ y luego $z_i = w_i$ para $i = 1, \dots, n$.

La aplicación x es sobreyectiva sobre $\mathbb{R}^n$, pues si $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces al tomar $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$, donde

$$z_{n+1} = \frac{\|t\|^2 - 1}{\|t\|^2 + 1}, \quad z_i = \frac{2t_i}{\|t\|^2 + 1}, \quad i = 1, \dots, n$$

es fácil ver que $x(z) = t$.

Es claro que x y y , definidas de ese modo, son continuas. Así, $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ son biyectivas y continuas.

Las aplicaciones inversas de x y y son dadas por $x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ y $y^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow V$, con reglas de correspondencia

$$x^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{2z_1}{1 + \|z\|^2}, \dots, \frac{2z_n}{1 + \|z\|^2}, \frac{\|z\|^2 - 1}{1 + \|z\|^2} \right)$$

y

$$y^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{2z_1}{1 + \|z\|^2}, \dots, \frac{2z_n}{1 + \|z\|^2}, \frac{1 - \|z\|^2}{1 + \|z\|^2} \right),$$

respectivamente, donde $\|z\|^2 = \langle z, z \rangle$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Definidas así, x^{-1} y y^{-1} son aplicaciones continuas de clase C^∞ . Además estas son inmersiones, pues la matriz jacobiana de ambas aplicaciones tienen rango n , como se puede comprobar fácilmente. Por lo tanto, al ser (x, U) y (y, V) cartas locales y $\mathbb{S}^n = U \cup V$, $\mathbb{S}^n$ es una variedad diferenciable.

Proposición 1.5. *Sea (x, U) una carta local de una variedad diferenciable M de dimensión m . Entonces $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la restricción de una aplicación de clase C^∞ de un abierto de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^m$.*

Demostración. Sea (x, U) una carta local alrededor de $p \in M$ con $x(p) = q$. Se sabe que $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ es una inmersión, esto es, para cada $u \in x(U)$, la derivada

$dx^{-1}(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva.

Análisis para el punto $q \in x(U)$. Se tiene que $dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva, por el teorema local de las inmersiones, existen abiertos A_1 conteniendo $x^{-1}(q) = p$ en $\mathbb{R}^k$, $V_1 \subset x(U)$ conteniendo $q = x(p)$, W conteniendo el origen de $\mathbb{R}^{k-m}$ y un difeomorfismo C^∞ , $h : A_1 \rightarrow V_1 \times W$, tal que $h \circ x^{-1}(z) = (z, 0)$, para cada $z \in V_1$. Considere un abierto $A \subset A_1 \cap U$ conteniendo p , de tal manera que sea posible obtener $x(A) \subset V_1$. Luego la discusión anterior se cumple nuevamente, es decir, existen abiertos $A \subset A_1$ conteniendo $x^{-1}(q) = p$ en $\mathbb{R}^k$, $V = x(A) \subset V_1 \subset x(U)$ conteniendo $q = x(p)$, W conteniendo el origen de $\mathbb{R}^{k-m}$ y un difeomorfismo C^∞ , $h|_A : A \rightarrow V \times W$, tal que $h|_A \circ x^{-1}(z) = (z, 0)$, para cada $z \in V$ (Figura 1.1).

Sea $w \in A \cap M$, fijo, entonces $x(w) = a \in V \subset x(U)$ con $x^{-1}(a) = w$ y $h \circ x^{-1}(a) = (a, 0)$, es decir, $h(w) = (x(w), 0)$. Luego $h(w) = (x(w), 0)$ para todo $w \in A \cap M$. Así, $x|_A$ es la restricción de una aplicación C^∞ , h , de un abierto A_1 de $\mathbb{R}^k$ en $\mathbb{R}^m$.

La discusión anterior se cumplirá para cualquier punto de $x(U)$, pues $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ es una inmersión. Es decir, x será siempre la restricción de alguna aplicaciones de clase C^∞ . $\square$

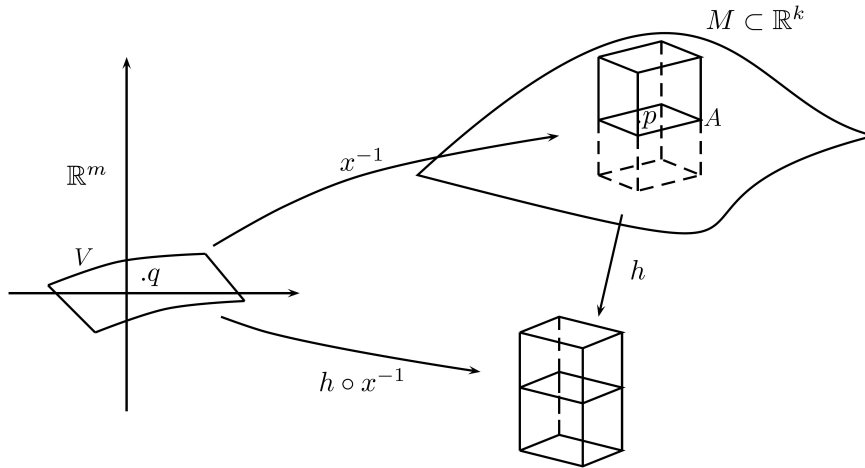


Figura 1.1: x es la restricción de una aplicación de clase C^∞

De la observación hecha arriba extraemos la siguiente proposición. Esta se refiere a la forma de pegado de las vecindades coordenadas, siendo en este caso de manera diferenciable o suave, esto significa, que si uno se moviera de una vecindad coordenada a otra no se percataría de este cambio.

Proposición 1.6. Sean $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ cartas locales en M . Si $U \cap V \neq \emptyset$, entonces el cambio de coordenadas $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ (Figura 1.2).

Demostración. En efecto: Al ser U y V abiertos en M , entonces $U \cap V$ es un abierto en M . Las aplicaciones $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ y $y^{-1} : y(V) \rightarrow V$ son aplicaciones de clase C^∞ , en particular lo serán en $x(U \cap V)$ y $y(U \cap V)$, que son abiertos de $\mathbb{R}^m$. Además por la Proposición 1.5. las aplicaciones $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ son restricciones de alguna aplicación de clase C^∞ , en particular lo serán en el abierto $U \cap V$. De estos dos razonamientos inferimos, por el Corolario 1.1., que $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ y $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$ son aplicaciones de clase C^∞ . Por lo tanto, el cambio de coordenadas $y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ . $\square$

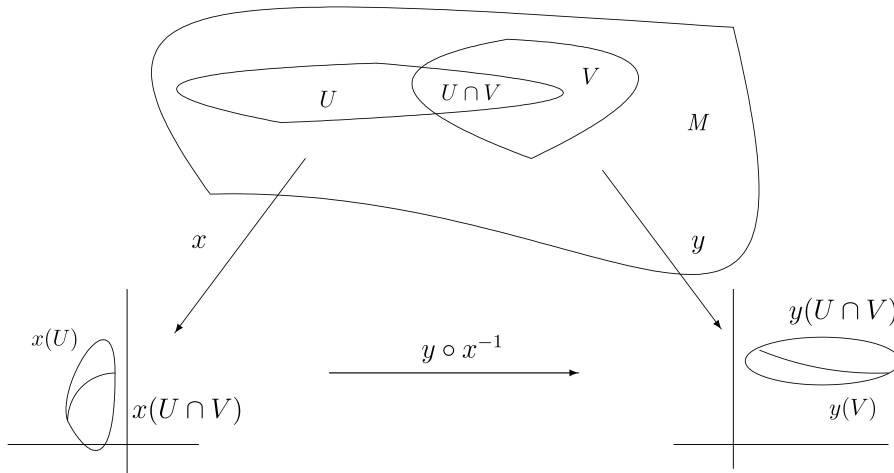


Figura 1.2: Cambio de coordenadas

Se definirá ahora aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables.

Definición 1.18. Sean M^m y N^n variedades y una aplicación $f : M^m \rightarrow N^n$.

- Se dice que la aplicación f es **diferenciable en un punto** $p \in M$, si existen cartas locales $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ alrededor de p , $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(U) \subset V$ tales que $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable en el punto $x(p) \in \mathbb{R}^m$ (Figura 1.3).
- Se dice que f es **diferenciable**, si es diferenciable en cada punto p de M^m .

- c) Decimos además que la aplicación f es **de clase C^r** , si f es diferenciable y $y \circ f \circ x^{-1}$ es una aplicación de clase C^r .

La aplicación $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$ es denominada la *expresión* de la aplicación f en las cartas locales x y y .

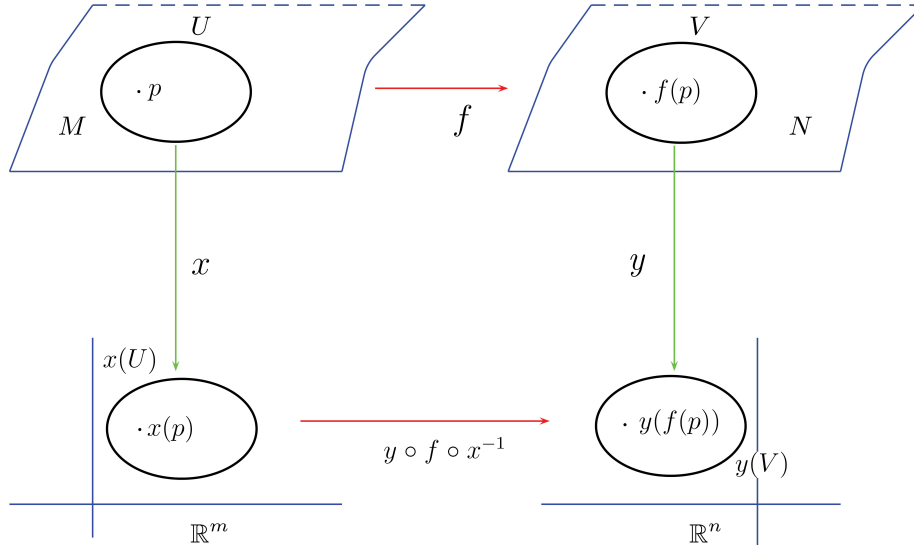


Figura 1.3: Diferenciabilidad

Observación 1.3. Esta definición, aunque no lo parezca, es la más natural que puede darse para la noción de diferenciabilidad de una aplicación $f: M \rightarrow N$, pues los subconjuntos M y N no son necesariamente abiertos, por lo tanto usando coordenadas locales trasparamos el problema a abiertos de $\mathbb{R}^m$, donde ya se tiene definida la noción de diferenciabilidad de aplicaciones. Este procedimiento es común cuando se trabaja con variedades diferenciables.

Proposición 1.7. *La definición de diferenciabilidad de una aplicación $f: M \rightarrow N$ en un punto $p \in M$ es independiente de la elección de las cartas locales (x, U) y (y, V) en M y N , respectivamente.*

Demostración. Sean $x_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $y_1: V_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ otras cartas locales en M y N respectivamente tales que, $p \in U_1$ y $f(U_1) \subset V_1$. Se demostrará que $f_{x_1 y_1}$ es también diferenciable en $x_1(p)$.

En efecto: Se tiene en $x_1(U \cap U_1)$ que,

$$\begin{aligned} f_{x_1 y_1} = y_1 \circ f \circ x_1^{-1} &= y_1 \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ (x^{-1} \circ x) \circ x_1^{-1} \\ &= (y_1 \circ y^{-1}) \circ (y \circ f \circ x^{-1}) \circ (x \circ x_1^{-1}) \\ &= (y_1 \circ y^{-1}) \circ f_{xy} \circ (x \circ x_1^{-1}). \end{aligned}$$

Como por hipótesis se tiene que f_{xy} es diferenciable en $x(p)$, en el sentido usual, y los cambios de coordenadas son de clase C^∞ , se tiene que $f_{x_1 y_1} = (y_1 \circ y^{-1}) \circ f_{xy} \circ (x \circ x_1^{-1})$ es diferenciable en el punto $x_1(p)$, esto por la regla de la cadena usual (Proposición 1.2.). $\square$

Definición 1.19. Se dice que una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables es un **difeomorfismo** si es una biyección diferenciable cuya inversa es también diferenciable. Si ambas f y f^{-1} son de clase C^r se dice que es un **difeomorfismo de clase C^r** .

Ejemplo 1.5. Ejemplos de aplicaciones diferenciables en el sentido de variedades.

- 1) Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces f es diferenciable en el sentido de las variedades si y sólo si, f es una aplicación diferenciable en el sentido común (o usual).

En efecto: Considere en primer lugar las aplicaciones $id_U : U \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$ e $id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, es claro que (id_U, U) e $(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)$ son cartas locales para las variedades diferenciables U y $\mathbb{R}^n$ respectivamente (Ejemplo 1.4 parte 1 y 2).

(Sólo si) Suponga que f es diferenciable en el punto $p \in U$ en el sentido de las variedades, entonces existen cartas locales $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ alrededor de p y $y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $f(U) \subset V$ tal que $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V)$ es diferenciable en el punto $x(p) \in \mathbb{R}^m$. Como la diferenciabilidad es independiente de la elección de las cartas locales, podemos considerar las cartas locales (id_U, U) y $(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)$ tal que $f(U) \subset \mathbb{R}^n$. De lo anterior se tiene que $f_{id_U id_{\mathbb{R}^n}} = id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ id_U^{-1} = f$, donde $id_U(U) = U$, $id_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ y $f_{id_U id_{\mathbb{R}^n}} = f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, es diferenciable en el punto $id_U(p) = p$. De este modo, al ser $f_{id_U id_{\mathbb{R}^n}} = f$, se concluye que f es diferenciable en $id_U(p) = p \in U$ en el sentido usual.

(Si) Suponga ahora que f es diferenciable en el punto $p \in U$ en el sentido común. Considere las cartas locales (id_U, U) e $(id_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R}^n)$ en U y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, con $f(U) \subset \mathbb{R}^n$. De este modo se tiene que

$$f_{id_U id_{\mathbb{R}^n}} = id_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ id_U^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

es diferenciable en el punto $id_U(p) = p \in \mathbb{R}^m$. Al existir cartas locales que satisfacen la definición 1.17., se concluye que f es diferenciable en el sentido de las variedades.

- 2) Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable de dimensión m y sea (x, U) una carta local alrededor de $p \in M$. Considere U como una variedad diferenciable (por el Ejemplo 1.4. parte 3). Entonces $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo en el sentido de las variedades (es más, es un difeomorfismo de clase C^∞).

En efecto: Se demuestra en primer lugar que $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$, donde $x(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^m$, es diferenciable en el sentido de las variedades. Para ello tome un punto $p \in U$ y las siguientes cartas locales: $x : U \rightarrow x(U)$ alrededor de $p \in U$ e $id : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, una carta local para la variedad abierta $x(U) \subset \mathbb{R}^m$. Se observa fácilmente que $x_{x id} = id \circ x \circ x^{-1} = id : x(U) \rightarrow x(U)$ es diferenciable en $x(p)$. Así, x es diferenciable en el sentido de las variedades. Es claro que $x^{-1} : x(U) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^k$ es diferenciable en el sentido de las variedades, ya que este es diferenciable en el sentido común. Por lo tanto, $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un difeomorfismo.

Definición 1.20. Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Una **curva parametrizada diferenciable** en M es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$, donde I es un intervalo abierto de la recta real.

Sean $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable de dimensión m y $x : U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^m$, W abierto, una carta local en torno de $p \in M$ con $x(p) = q$.

Considere una curva parametrizada diferenciable $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ en $\mathbb{R}^m$, tal que $c(0) = q \in W$. Entonces $\alpha = x^{-1} \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ es una curva parametrizada diferenciable en M con $\alpha(0) = (x^{-1} \circ c)(0) = p$, aquí la noción de vector tangente es clara. Se define el vector tangente a la curva $\alpha = x^{-1} \circ c$ en el punto $p \in M$ como

$\alpha'(0) = (x^{-1} \circ c)'(0)$, esto es, por la regla de la cadena,

$$\alpha'(0) = dx^{-1}(q) \cdot c'(0). \quad (1.1)$$

Definición 1.21. El conjunto de los vectores tangentes a todas las curvas parametrizadas diferenciables $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$, como en el caso anterior, es llamado el **espacio tangente a M en p** y es denotado por $T_p M$, es decir,

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^k : v = \alpha'(0), \text{ donde } \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ es alguna curva parametrizada diferenciable con } \alpha(0) = p\}.$$

Se observa, de la definición anterior, que $T_p M \subset \mathbb{R}^k$.

Ejemplo 1.6. Ejemplos de espacio tangente.

1) $T_p \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, para todo $p \in \mathbb{R}^m$. Se demostró anteriormente que $\mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable. *En efecto:* Sean $v \in \mathbb{R}^m$ y la curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\alpha(t) = tv + p$, obtenemos entonces que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, luego $v \in T_p \mathbb{R}^m$. Recíprocamente sea $u \in T_p \mathbb{R}^m$, entonces por definición existe una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = u$, pero $u = c'(0) \in \mathbb{R}^m$ por definición.

2) Sea W un abierto de $\mathbb{R}^m$, entonces su espacio tangente, en cualquier punto $p \in W$, es todo $\mathbb{R}^m$. *En efecto:* Sea v un vector en $\mathbb{R}^m$, la curva $c(t) = vt + p$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tiene a v como vector tangente en $t = 0$ (en todo punto de ella en realidad), es decir $v \in T_p W$. La otra inclusión, $T_p W \subset \mathbb{R}^m$, es clara por la definición.

3) Sea (x, U) una carta local alrededor de un punto p en una variedad diferenciable M de dimensión m . Entonces $T_p U = T_p M$.

En efecto: Al ser U un abierto de M , luego U es una variedad diferenciable, por el Ejemplo 1.4 parte 3. Sea $v \in T_p U$, por definición existirá una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Como $U \subset M$, luego $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. De donde $v \in T_p M$. Sea $w \in T_p M$, por definición existirá una curva parametrizada diferenciable

$\beta : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow U$, con $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = w$. Tómese $\varepsilon < \varepsilon_1$ lo suficientemente pequeño tal que, $\beta((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset U$. De este modo obtenemos una curva parametrizada diferenciable $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, con $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = w$, luego $w \in T_p U$.

Proposición 1.8. *Sea M^m una variedad diferenciable de dimensión m . Entonces para cada $p \in M$ el conjunto $T_p M$ admite una estructura de espacio vectorial real de dimensión m .*

Demostración. Por el Ejemplo 1.6 parte 2 y (1.1), se tiene que $c'(0) \in T_q W = \mathbb{R}^m$, al ser W un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Afirmación 1. El conjunto $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = \text{Im}(dx^{-1}(q))$, con $x(p) = q$, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^k$ de dimensión m . En efecto, como $dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es una transformación lineal y $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k$ son espacios vectoriales, entonces de la inyectividad de $dx^{-1}(q)$ se infiere que $\text{Nuc}(dx^{-1}(q)) = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$ y según el Teorema de la Dimensión del Núcleo y Rango (Teorema B.1):

$$\dim \mathbb{R}^m = \dim \text{Nuc}(dx^{-1}(q)) + \dim \text{Im}(dx^{-1}(q)),$$

pero como $\dim \text{Nuc}(dx^{-1}(q)) = 0$, se tiene que $\dim \text{Im}(dx^{-1}(q)) = \dim \mathbb{R}^m = m$.

Afirmación 2. Se tiene que $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = T_p M$.

Es efecto: Sea $u \in dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m)$, entonces existe $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $dx^{-1}(q)(w) = u$. Considere la curva parametrizada $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ definido por $\beta(t) = q + tw$ tal que $\beta(0) = q$ y $\beta'(0) = w$. Sea $\alpha = x^{-1} \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x^{-1}(W)$, una curva parametrizada diferenciable, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = dx^{-1} w = u$. El vector u satisface la definición de vector tangente a M , es decir $u \in T_p M$.

Recíprocamente sea $v \in T_p M$. Existirá por definición una curva parametrizada diferenciable $\alpha : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow M$, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Tome $\varepsilon < \varepsilon_1$ lo suficientemente pequeño, tal que $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U \subset M$. Sea $c = x \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow W$ una curva parametrizada con $c(0) = q$, como en (1.1). Entonces $x^{-1} \circ c = \alpha$ y $\alpha'(0) = (x^{-1} \circ c)'(0) = dx^{-1}(q) c'(0) = v$, pero como $c'(0) \in \mathbb{R}^m$, se tiene que $v \in dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m)$. $\square$

Proposición 1.9. *La definición de espacio tangente $T_p M$ en el punto $p \in M$ no*

depende de la elección de las cartas locales.

Demostración. Tómese otra carta local $y : U_1 \subset M \rightarrow W_1 \subset \mathbb{R}^m$, alrededor de p , con $p \in U_1$ y $y(p) = q_1$, se demostrará que la inversa local de y , $y^{-1} : W_1 \rightarrow U_1$, da lugar al mismo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^k$, o sea, $dy^{-1}(q_1)(\mathbb{R}^m) = dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m)$. *En efecto:* Como $p \in U$ y $p \in U_1$ se tiene que $U \cap U_1 \neq \emptyset$. El cambio de coordenadas

$$h = y \circ x^{-1} : x(U \cap U_1) \rightarrow y(U \cap U_1),$$

con $h(q) = q_1$, es un difeomorfismo entre abiertos de $\mathbb{R}^m$, lo que implica que $dh(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, entonces se tiene $dh(q)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$.

Ahora, haciendo $x^{-1} = y^{-1} \circ h$ y derivando en el punto q se tiene, en virtud de la regla de la cadena, que $dx^{-1}(q) = dy^{-1}(q_1) \circ dh(q)$. Luego, se obtiene que $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = dy^{-1}(q_1)(dh(q)(\mathbb{R}^m))$, pero como $dh(q)(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$ se logra que $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = dy^{-1}(q_1)(\mathbb{R}^m)$, como se deseaba. $\square$

Observación 1.4. Sean M una variedad diferenciable de dimensión m y una carta local $x : U \rightarrow x(U)$, con $x(U)$ abierto en $\mathbb{R}^m$, alrededor de p . Sea además $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Dado, por la Proposición 1.8, que $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = T_p M$ y al ser $dx^{-1}(q)$ inyectiva, con $x(p) = q$, se logra obtener un conjunto linealmente independiente $\{dx^{-1}(q)(e_1), \dots, dx^{-1}(q)(e_m)\}$, pero como la dimensión de $T_p M$ es m , este conjunto será una base para $T_p M$. Denote los elementos de esta base por $\frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dx^{-1}(q)(e_i)$, para cada $i = 1, \dots, m$, es decir, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p)\}$ es una base para $T_p M$. Esta base es denominada como la base asociada a la carta local x .

Sean $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable y $v \in T_p M$, $p \in M$. Considérese una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Se tiene entonces que $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ es una curva diferenciable con $f \circ \alpha(0) = f(p)$.

Definición 1.22. Se define la **derivada** de la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ en el punto $p \in M$ como la aplicación $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ que asocia a cada $v \in T_p M$ el elemento $df(p)v = (f \circ \alpha)'(0)$, el vector tangente a la curva diferenciable $f \circ \alpha$ en $f(p)$, donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$.

Proposición 1.10. *La definición de derivada de una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ en un punto $p \in M$, es independiente de la elección de las curvas parametrizadas diferenciables, tomadas por los vectores tangentes.*

Demostración. Suponga que se tiene $df(p)v = (f \circ \bar{\alpha})'(0)$ para alguna otra curva parametrizada $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\bar{\alpha}(0) = p$ y $\bar{\alpha}'(0) = v$. Se demostrará que $(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \bar{\alpha})'(0)$.

Considere las cartas locales $x : U \rightarrow x(U)$ en M , con $p \in U$ ($x(p) = q$) y $y : V \rightarrow y(V)$ en N , con $f(U) \subset V$.

Sean las curvas parametrizadas: $\beta = x \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ dado por $\beta(t) = (x \circ \alpha)(t) = (a_1(t), \dots, a_m(t))$ con $\beta(0) = q$ y $\beta'(t) = (a'_1(t), \dots, a'_m(t))$. Observe que $\beta = x \circ \alpha$ implica $x^{-1} \circ \beta = \alpha$, de donde

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &= (x^{-1} \circ \beta)'(0) = dx^{-1}(q) \cdot \beta'(0) = dx^{-1}(q) \cdot (a'_1(0)e_1 + \dots + a'_m(0)e_m) \\ &= a'_1(0)dx^{-1}(q) \cdot e_1 + \dots + a'_m(0)dx^{-1}(q) \cdot e_m \\ &= a'_1(0)\frac{\partial}{\partial x_1}(p) + \dots + a'_m(0)\frac{\partial}{\partial x_m}(p) \\ &= v, \end{aligned}$$

y $\bar{\beta} = x \circ \bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow x(U)$ dado por $\bar{\beta}(t) = (x \circ \bar{\alpha})(t) = (b_1(t), \dots, b_m(t))$, de donde por un proceso análogo al anterior, se obtiene

$$\bar{\alpha}'(0) = b'_1(0)\frac{\partial}{\partial x_1}(p) + \dots + b'_m(0)\frac{\partial}{\partial x_m}(p) = v.$$

Al ser $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p)\}$ la base de $T_p M$ asociada a x , se logra hacer

$$\beta'(0) = (a'_1(0), \dots, a'_m(0)) = (b'_1(0), \dots, b'_m(0)) = \bar{\beta}'(0).$$

Luego,

$$(f \circ \alpha)'(0) = (y^{-1} \circ f_{xy} \circ \beta)'(0) = (y^{-1} \circ f_{xy})'(q) \cdot (\beta'(0))$$

$$(f \circ \bar{\alpha})'(0) = (y^{-1} \circ f_{xy} \circ \bar{\beta})'(0) = (y^{-1} \circ f_{xy})'(q) \cdot (\bar{\beta}'(0)),$$

pero al tenerse que $\beta'(0) = \bar{\beta}'(0)$ se obtiene lo deseado, es decir,

$$(f \circ \alpha)'(0) = (f \circ \bar{\alpha})'(0).$$

□

Proposición 1.11. *La derivada de una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$, $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, es lineal.*

Observación 1.5. Sean $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación diferenciable y $v \in T_p M$, $p \in M$. Se definió la derivada de la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ en el punto $p \in M$, $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, como $df(p)v = (f \circ \alpha)'(0)$.

Considere las cartas locales $x : U \rightarrow x(U)$ en M , con $p \in U$ y $y : V \rightarrow y(V)$ en N , con $f(U) \subset V$. Al ser U , $x(U)$, V y $y(V)$ variedades diferenciables y las aplicaciones $x : U \rightarrow x(U)$ y $y : V \rightarrow y(V)$ son difeomorfismos, en el sentido de las variedades, estas poseen derivadas, a saber, $dx(p) : T_p U \rightarrow T_{x(p)}(x(U))$ en el punto $p \in U$ y $dy(f(p)) : T_{f(p)} V \rightarrow T_{y(f(p))} y(V)$ en el punto $f(p) \in V$ respectivamente. Al tenerse $T_p U = T_p M$, $T_{x(p)}(x(U)) = \mathbb{R}^m$, $T_{f(p)} V = T_{f(p)} N$ y $T_{y(f(p))} y(V) = \mathbb{R}^n$, estas derivadas son iguales a $dx(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $dy(f(p)) : T_{f(p)} N \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Recuerde que la expresión de f en las cartas locales x y y , f_{xy} , es definida como $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$. Derivando f_{xy} en el punto $x(p) = q$ se obtiene,

$$d(f_{xy})(q) = (y \circ f \circ x^{-1})'(q) = (y \circ f)'(p) \circ (x^{-1})'(q) = y'(f(p)) \circ f'(p) \circ (x^{-1})'(q),$$

es decir,

$$f'_{xy}(x(p)) = y'(f(p)) \circ f'(p) \circ (x^{-1})'(q).$$

La idea de las discusiones anteriores se observan en los siguientes diagramas.

De esta manera la derivada $f'(p)$, con $p \in U$, es “transformada” en la derivada $f'_{xy}(x(p)) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esto quiere decir que las propiedades que se tenga en $f'(p)$, influirán en el comportamiento de $f'_{xy}(x(p))$. La idea anterior es afianzada con la siguiente observación.

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f} & V \\
\downarrow x & & \downarrow y \\
x(U) & \xrightarrow{f_{xy}} & y(V)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
T_p M & \xrightarrow{df(p)} & T_{f(p)} N \\
\downarrow x'(p) & & \downarrow y'(f(p)) \\
\mathbb{R}^m & \xrightarrow{f'_{xy}(x(p))} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

Observación 1.6. Notemos, en la observación anterior, que al ser $x^{-1} : x(U) \rightarrow U$ una inmersión (esto es, $dx^{-1}(u) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva para todo $z \in x(U)$), será inyectiva en el punto $x(p) = q \in x(U)$, es decir, $dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ es inyectiva. Además, esta será sobreyectiva sobre su imagen $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = T_p M$ (ver Proposición 1.8). Así, $dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ es una biyección y por tanto un **isomorfismo**. De este modo queda claro que la inversa de $dx(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es $dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$, es decir, $(x'(p))^{-1} = (x^{-1})'(q)$.

Un análisis análogo al anterior establece que $dy^{-1}(r) : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{f(p)} N$, donde $r = y(f(p)) \in y(V)$, es también un **isomorfismo** con transformación inversa igual a $dy(f(p)) : T_{f(p)} N \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Como una variedad diferenciable es localmente difeomorfo a un abierto de un espacio euclidiano, entonces todos los teoremas del cálculo enunciados anteriormente se extienden para variedades diferenciables.

Proposición 1.12. Sean M, N, P variedades diferenciables, $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable en el punto $p \in M$ y $g : N \rightarrow P$ una aplicación diferenciable en el punto $f(p) \in N$. Entonces $g \circ f : M \rightarrow P$ es diferenciable en el punto $p \in M$ y $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$.

Demostración. Considere las cartas locales $x : U \rightarrow x(U)$ en M , $y : V \rightarrow y(V)$ en N y $z : W \rightarrow z(W)$ en P , tales que $p \in U$, $f(U) \subset V$ y $g(V) \subset W$.

Se tiene por hipótesis que $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable en $x(p)$ y $g_{yz} = z \circ g \circ y^{-1} : y(V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow z(W) \subset \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $y(f(p))$.

Por la regla de la cadena usual, resulta que

$$g_{yz} \circ f_{xy} = z \circ (g \circ f) \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow z(W)$$

es diferenciable en el punto $x(p)$. Luego $g \circ f : M \rightarrow P$ es diferenciable en el punto $p \in M$. Además dado $v \in T_p M$ existe, por definición, una curva diferenciable $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Así,

$$\begin{aligned} d(g \circ f)(p).v &= (g \circ f \circ \alpha)'(0) = (g \circ (f \circ \alpha))'(0) \\ &= g'((f \circ \alpha)(0)).(f \circ \alpha)'(0) \\ &= g'(f(p)).f'(\alpha(0)).\alpha'(0) \\ &= g'(f(p)).f'(p).v \\ &= dg(f(p)) \circ df(p).v. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$ □

Observación 1.7. Si una aplicación $f : M \rightarrow N$ entre variedades diferenciables es un **difeomorfismo** de clase C^r , entonces para cada $p \in M$, $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo cuyo inverso es $df^{-1}(f(p))$. En particular M y N tienen la misma dimensión.

Definición 1.23. Una aplicación $f : M \rightarrow N$ es un **difeomorfismo** si es una aplicación diferenciable con inversa, $f^{-1} : N \rightarrow M$, diferenciable. f es dicho ser un **difeomorfismo local** en $p \in M$, si existen vecindades $U(p) \subset M$ y $Vf(p) \subset N$ tal que la restricción de f a U es un difeomorfismo sobre V .

El Teorema de la función inversa establece un resultado recíproco a la Observación 1.7.

Teorema 1.7 (Función Inversa en Variedades Diferenciables). *Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$, y $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo para $p \in M$, entonces f es un difeomorfismo local de clase C^r en p .*

Demostración. Sea $x : U \rightarrow x(U)$ la carta local alrededor de $p \in M$ y la carta local $y : V \rightarrow y(V)$ en N , tal que $p \in U$, $f(U) \subset V$. La expresión de f en las cartas locales x y y es $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$. Al derivarlo se obtiene $f'_{xy}(x(p)) = y'(f(p)) \circ f'(p) \circ (x^{-1})'(q)$, donde $q = x(p)$. Como $dx^{-1}(q) : \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ es un isomorfismo (observación 1.6.), $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es un isomorfismo (por

hipótesis) y $dy(f(p)) : T_{f(p)}N \rightarrow \mathbb{R}^n$ es también un isomorfismo (observación 1.6.), se obtiene que $f'_{xy}(x(p)) = y'(f(p)) \circ f'(p) \circ (x^{-1})'(q)$ es un isomorfismo. Luego por el Teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^m$ se tiene que f_{xy} es un difeomorfismo local de clase C^r en p , es decir, existen vecindades $A \subset x(U)$ de q y $W \subset f(U)$ de $y(f(p))$ tal que $f_{xy} : A \rightarrow W$ es un difeomorfismo, en el sentido usual. Luego, lo será en el sentido de variedades (Ejemplo 1.4. parte 1).

Como $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1}$, entonces $f = y^{-1} \circ f_{xy} \circ x$ es un difeomorfismo local en p . En efecto: Tome $U_1 = x^{-1}(A)$ y observe que,

$$U_1 \xrightarrow{x} A \xrightarrow{f_{xy}} W \xrightarrow{y^{-1}} y^{-1}(W) \quad \text{con } y^{-1}(W) = f(U_1),$$

por lo cual $f = y^{-1} \circ f_{xy} \circ x : U_1 \rightarrow f(U_1)$. Además, al tenerse que $x : U_1 \rightarrow A$ y $f_{xy} : A \rightarrow W$ son difeomorfismos y $y^{-1} : W \rightarrow f(U_1)$ es también un difeomorfismo, se infiere que $f = y^{-1} \circ f_{xy} \circ x : U_1 \rightarrow f(U_1)$ es un difeomorfismo.

De lo anterior, ya que $U_1 = x^{-1}(A)$ es una vecindad de p y $y^{-1}(W) = f(U_1)$ es una vecindad de $f(p)$, se tiene que $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo local en p . $\square$

Definición 1.24. Sea S un subconjunto de una variedad diferenciable M^m de clase C^r . Se dice que S es una **subvariedad** de clase C^k , $k \leq r$, y dimensión s de M si, para cada $p \in S$, existen abiertos $U \subset M$ conteniendo p , $V \subset \mathbb{R}^s$ conteniendo 0, $W \subset \mathbb{R}^{m-s}$ conteniendo 0 y un difeomorfismo de clase C^k $\varphi : U \rightarrow V \times W$ tal que $\varphi(S \cap U) = V \times \{0\}$.

Observación 1.8. Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable. Al ser también $\mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable, se infiere que M es una subvariedad diferenciable de $\mathbb{R}^k$. Además, las subvariedades de M son las subvariedades de $\mathbb{R}^k$ contenidas en M .

Definición 1.25. Una aplicación de clase C^r , $f : M \rightarrow N$, es una **inmersión** si, $df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ es inyectiva para todo $p \in M$.

Definición 1.26. Se dice que la aplicación $f : M \rightarrow N$ es un **embebimiento** si, f es una inmersión y $f : M \rightarrow f(M) \subset N$ es un homeomorfismo de M sobre $f(M)$, donde $f(M)$ está dotado con la topología inducida de N .

Proposición 1.13. Sea M una variedad diferenciable de clase C^r y dimensión m . S es una **subvariedad** de clase C^k , $k \leq r$, y dimensión s de M si, y sólo si,

- a) S es una variedad diferenciable de clase C^k y dimensión s ,
- b) $S \subset M$ y la topología de M es la inducida por la de N y
- c) Para cada $p \in S$, existen cartas locales $y : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ en M y $x : U \rightarrow \mathbb{R}^s$ en S tales que $p \in U \subset V$ y $y \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un embebimiento de clase C^k .

Teorema 1.8 (Forma Local de Inmersiones en Variedades Diferenciables). Sean $f : M^m \rightarrow N^{m+n}$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$, y $p \in M$ tal que $df(p)$ es inyectiva. Entonces existe una carta local $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ alrededor de $p \in M$, y un difeomorfismo de clase C^r , $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, ($V \subset N$ abierto) tales que $f(U) \subset V$ y $\varphi \circ f \circ x^{-1} : U_1 \rightarrow U_1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, donde $U_1 \subset x(U)$ es un abierto conteniendo $x(p)$, es la aplicación de inclusión, es decir, $\varphi \circ f \circ x^{-1}(u) = (u, 0)$.

Demostración. Sea $x : U \rightarrow x(U)$ la carta local alrededor de $p \in M$ y la carta local $y : V \rightarrow y(V)$ en N , tal que $p \in U$, $f(U) \subset V$. Considere los siguientes diagramas:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{f} & V \\
 x \downarrow & & \downarrow y \\
 x(U) & \xrightarrow{f_{xy}} & y(V)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T_p M & \xrightarrow{df(p)} & T_{f(p)} N \\
 x'(p) \downarrow & & \downarrow y'(f(p)) \\
 \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f'_{xy}(x(p))} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Observe que $x(U) \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, $f_{xy} = y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^n$ es de clase C^r y $f'_{xy}(x(p)) = y'(f(p)) \circ f'(p) \circ (x^{-1})'(q)$ es inyectiva (lo último porque $y'(f(p))$, $(x^{-1})'(q)$ y $f'(p)$ son inyectivas, Observación 1.6.). Por el Teorema 1.4 (forma local de las inmersiones) existen abiertos $Z \subset \mathbb{R}^{m+n}$ conteniendo $f_{xy}(x(p))$, $U_1 \subset x(U)$ conteniendo $x(p)$, $W \subset \mathbb{R}^n$ conteniendo el origen y un difeomorfismo $\xi : Z \rightarrow U_1 \times W$, tal que $\xi \circ f_{xy}(u) = (u, 0)$, para cada $u \in U_1$.

Al tomar $\varphi = \xi \circ y$ se tiene $\xi = \varphi \circ y^{-1}$, reemplazándolo en $\xi \circ f_{xy}(u) = (u, 0)$, ya que $\varphi \circ y^{-1} \circ f_{xy} = \varphi \circ (y^{-1} \circ y) \circ f \circ x^{-1} = \varphi \circ f \circ x^{-1}$, se logra $\varphi \circ f \circ x^{-1}(u) = (u, 0)$, como se quería. $\square$

Proposición 1.14. Sean $r \geq 1$, M^m y N^n variedades diferenciables de clase C^r y $f : M \rightarrow N$ una aplicación de clase C^r . Si f es un embebimiento, entonces $f(M)$ es una subvariedad de dimensión m y de clase C^r de N .

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{f} & V \\
x \downarrow & & \downarrow y \\
U_1 \subset x(U) & \xrightarrow{f_{xy}} & y(V) \\
& \searrow \varphi \circ f \circ x^{-1} & \downarrow \xi \\
& & U_1 \times W
\end{array}$$

Demostración. Sea $p \in M$, luego existe $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ una carta local alrededor de $p \in U$, con $x(U)$ abierto. Al ser f un embebimiento es un homeomorfismo sobre $f(M)$, luego lo será también su restricción $f|_U : U \rightarrow f|_U(U)$, por lo que $V = f|_U(U)$ es un conjunto abierto en $f(M)$, ver Proposición 1.3. Tome ahora $f(p) \in f(M)$, la aplicación $x \circ (f|_U)^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una carta local alrededor de $f(p) \in f(M)$. La demostración se sigue del hecho de que x y $(f|_U)^{-1}$ son homeomorfismos, para ver que $x \circ (f|_U)^{-1}$ es un homeomorfismo, y del hecho de que x^{-1} y $f|_U$ son inmersiones, para ver que $(x \circ (f|_U)^{-1})^{-1} = f|_U \circ x^{-1}$ es una inmersión (observe que $(f|_U)^{-1}(V) = U$). Esto demuestra que $f(M)$ es una variedad diferenciable de dimensión m . Se demuestra fácilmente que para cada $f(p) \in f(M)$, existe una carta local $y : Z \rightarrow \mathbb{R}^n$ alrededor de $f(p)$ en N tal que, al considerar una carta, como la hallada $x \circ (f|_U)^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ en $f(M)$ con $V \subset Z$, se tiene que la composición $y \circ (f|_U \circ x^{-1}) : (x \circ (f|_U)^{-1})(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un embebimiento. $\square$

Teorema 1.9 (Forma Local de Submersiones en Variedades Diferenciables). *Sean $f : M^{m+n} \rightarrow N^n$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$, y $p \in M$ tal que $df(p)$ es sobreyectiva. Entonces existen vecindades $U(p)$, $V(f(p))$, $U_0(0)$ en $\mathbb{R}^m$, $V_0(0)$ en $\mathbb{R}^n$ y difeomorfismos $\varphi : U \rightarrow U_0$ y $\psi : V \rightarrow V_0$ tales que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v) = v$.*

Definición 1.27. Sean $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación de clase C^r , con $r \geq 1$. Se dice que un punto $q \in N$ es un **valor regular** si, para todo $p \in M$ con $f(p) = q$, se tiene que $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ es sobreyectiva.

Proposición 1.15. *Sean $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación de clase C^r y $q \in N$ un valor regular. Entonces, o bien $f^{-1}(q) = \emptyset$ o $f^{-1}(q)$ es una subvariedad de dimensión*

$m - n$. Además el espacio tangente a $f^{-1}(q)$ en cada punto p es el núcleo de la transformación lineal $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$.

Ejemplo 1.7. A continuación se verán algunos ejemplos.

1) Sea $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $f(u) = \langle u, u \rangle$, es claro que $f \in C^\infty$. Como $df(u)h = 2\langle u, h \rangle$, todo número real no nulo c es valor regular de f . Esto pues, si $c = 0$ entonces se tendría $f(u) = \langle u, u \rangle = 0$, lo que implica que $u = 0$; pero $df(0) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $df(0)h = 2\langle 0, h \rangle = 0$ no es sobreyectiva, luego $c = 0$ no es un valor regular de f . Si $c < 0$, entonces $f^{-1}(c) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = c\} = \emptyset$. Si $c > 0$, entonces se tiene que $f^{-1}(c) = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle u, u \rangle = \|u\|^2 = c\}$ es la esfera de dimensión n con centro en el origen $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ y radio c . Además el espacio tangente a esta esfera en el punto p es el núcleo de $df(p)$, a saber, el conjunto de todos los vectores $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que $\langle p, v \rangle = 0$.

2) Considere la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(r_1, r_2) = r_2^4 - r_2^2 + \frac{1}{4}r_1^2$. Se demostrará que 0 no es un valor regular de f , y sin embargo $f^{-1}(0)$ es la figura ocho estudiada en el Ejemplo 1.3. parte 4.

En efecto: Observe que $\frac{\partial f}{\partial r_1} = \frac{r_1}{2}$ y $\frac{\partial f}{\partial r_2} = 4r_2^3 - 2r_2$, entonces si $\frac{r_1}{2} = 0$ y $4r_2^3 - 2r_2 = 0$, estas se anularán simultáneamente en $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2^{1/2}})$ y en $(0, -\frac{1}{2^{1/2}})$. Al tenerse $f(0, 0) = 0$, entonces 0 no es un valor regular de f .

Veamos que $f^{-1}(0)$ es exactamente la figura ocho del Ejemplo 1.3. parte 4. Es fácil comprobar que $r_1 = \sin 2s$ y $r_2 = \sin s$ satisfacen $f(r_1, r_2) = 0$. Recíprocamente, sea (r_1, r_2) una pareja tal que $f(r_1, r_2) = 0$, es decir, se cumple $r_2^4 - r_2^2 + \frac{1}{4}r_1^2 = 0$, de donde se tiene $r_2^2(r_2^2 - 1) = -(r_1/2)^2 \leq 0$. Entonces se tiene que $r_2^2 \leq 1$ y por la continuidad de la aplicación seno, existirá $t \in \mathbb{R}$ tal que $r_2 = \sin t = \sin(\pi - t)$. En consecuencia

$$r_2^2(r_2^2 - 1) = -(\sin t \cos t)^2 = -(\sin 2t/2)^2 = -(r_1/2)^2.$$

Por lo anterior se tiene que $r_1 = \sin 2t$ ó $r_1 = -\sin 2t = \sin 2(\pi - t)$. En cualquiera de los casos se tiene que (r_1, r_2) es de la forma $(\sin 2s, \sin s)$ para algún $s \in \mathbb{R}$.

El ejemplo afirma que la no regularidad de un punto $q \in N$, en el teorema anterior, no dice nada acerca del conjunto $f^{-1}(q)$, es decir, $f^{-1}(q)$ puede o no ser una subvariedad diferenciable de M .

Teorema 1.10 (Sard en Variedades Diferenciables). *Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación de clase C^∞ . El conjunto de valores regulares de f es residual, en particular denso en N .*

El teorema de Sard será usado en la parte previa a la demostración del teorema de transversalidad de Thom. Este importante resultado posee una demostración grandiosa y extensa, demostrarlo no es uno de los objetivos en la tesis; sin embargo la demostración puede ser hallada, por ejemplo, en el libro “Topology from the Differentiable Viewpoint” por J. Milnor (Milnor, 1965; Guillemin y Pollack, 2010).

Proposición 1.16. *Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación de clase C^∞ . Si M es compacta, entonces el conjunto de valores regulares de f es abierto y denso en N .*

En la teoría de variedades diferenciables se establece un orden a la hora de construir un objeto, se considera primero el caso local, donde la variedad diferenciable es como $\mathbb{R}^n$ y las construcciones son relativamente sencillas, y luego se unen dichas construcciones para obtener un objeto global. Una herramienta bastante útil para construir objetos globales a partir de otros definidos localmente, y de forma correcta, es llamada partición de la unidad.

Definición 1.28. Considere un cubrimiento enumerable por abiertos $\{U_n\}$ de una variedad diferenciable M . Se dice que este cubrimiento es **localmente finito** si, para todo $p \in M$, existe un entorno (o vecindad) V de p que sólo intersecta un número finito de elementos del cubrimiento.

Definición 1.29. Sean X un espacio topológico y una aplicación $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se llama el **soporte** de la aplicación φ a la cerradura del conjunto $\{x \in X : \varphi(x) \neq 0\}$.

Definición 1.30. Sean M una variedad diferenciable y $\{U_n\}$ un cubrimiento numerable por abiertos de M . Una **partición de unidad subordinada** al cubrimiento $\{U_n\}$ es una colección numerable $\{\varphi_n\}$ de funciones reales, no negativas y de clase C^∞ tales que:

- a) Para cada índice n , el soporte de φ_n está contenido en U_n , en este caso el soporte de los φ_n es el cierre del conjunto $\{p \in M : \varphi_n(p) > 0\}$, y
- b) $\sum_n \varphi_n(p) = 1$, para todo $p \in M$.

Proposición 1.17. *Sea M una variedad diferenciable. Dado un cubrimiento numerable y localmente finito de M , existe una partición de unidad subordinada a este cubrimiento.*

Corolario 1.3. *Sea M una variedad diferenciable y $K \subset M$ cerrado. Entonces existe una aplicación $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ tal que $f^{-1}(0) = K$*

Corolario 1.4. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ una aplicación de clase C^r , donde $M \subset \mathbb{R}^k$ es una variedad diferenciable. Entonces existe una aplicación de clase C^r $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $f = \tilde{f}|_M$.*

Se denota con $B(r) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid \|u\| < r\}$ la bola abierta de centro en $0 \in \mathbb{R}^m$ y radio r .

Proposición 1.18. *Sea M^m una variedad diferenciable de clase C^r . Dados un punto $p \in M$ y un abierto $A \subset M$ con $p \in A$, existen siempre un abierto U , con $p \in U \subset A$, y un sistema de coordenadas $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $x(U) = B(3)$.*

Demostración. Tome una carta local cualesquiera $y : W \rightarrow y(W)$ en torno de p y suponga, por traslación, que $y(p) = 0$; esto pues se puede considerar inicialmente una carta local z alrededor de p tal que $z(p) = q$ y componerla con la traslación T de tal modo que se tenga $y = T(z(p)) = 0$. Existe así, un $r > 0$ tal que $y^{-1}(B(r)) \subset A$. Como $y : W \rightarrow y(W) \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo se tiene que $U = y^{-1}(B(r))$ es un abierto de M , ahora tomemos $x = h \circ y$ donde $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la homotecia $h(v) = 3v/r$. Por tanto es posible hallar una carta local (x, U) alrededor de p tal que $x(U) = B(3)$. $\square$

Cuando se tenga una carta local como en la proposición anterior, se usarán U , V , W para denotar los conjuntos $U = x^{-1}(B(3))$, $V = x^{-1}(B(2))$ y $W = x^{-1}(B(1))$.

Proposición 1.19. *Sea M^m una variedad diferenciable compacta. Entonces existe un cubrimiento finito por abiertos de M formado por dominios de cartas locales*

$x_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que $x_i(U_i) = B(3)$ para todo i . Además, si $V_i = x_i^{-1}(B(2))$ y $W = x_i^{-1}(B(1))$, entonces los W_i también forman un cubrimiento finito por abiertos de M .

Se definirá a continuación el fibrado tangente de una variedad diferenciable $M^m \subset \mathbb{R}^k$, donde a cada punto de la variedad le asociamos el espacio tangente de la variedad en ese punto.

Definición 1.31. Sea $M^m \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable. Se llama **fibrado tangente** de la variedad M al conjunto $TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \mid p \in M \text{ y } v \in T_p M\}$.

En otras palabras, el fibrado tangente de una variedad es la unión de todos los espacios tangentes en cada punto de la variedad, esto es, si M^m es una variedad diferenciable con $p \in M$ y $T_p M$ el espacio tangente en el punto p , entonces el fibrado tangente es,

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M.$$

Considerando TM con la topología inducida de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, se tiene que la proyección natural $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(p, v) = p$ es continua.

Proposición 1.20. Sea $M^m \subset \mathbb{R}^k$ una variedad diferenciable. El fibrado tangente TM es una variedad diferenciable de dimensión $2m$ y π es de clase C^∞ , en el sentido de las variedades (Figura 1.4).

Demostración. Sea $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta local en M . Al ser π continua y U un abierto en M , se obtiene que $\pi^{-1}(U)$ es un abierto en TM . Defina la aplicación $Tx : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ por $Tx(p, v) = (x(p), dx(p)v)$.

Se demostrará que $(Tx, \pi^{-1}(U))$ es una carta local de TM . En efecto:

- $Tx : \pi^{-1}(U) \rightarrow Tx(\pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ es biyectiva, pues $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo y $dx(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo (observación 1.6.).
- Tx es continua en $\pi^{-1}(U) \subset TM$, pues es composición del homeomorfismo x y la transformación lineal continua $dx(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

- $Tx(\pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto, pues se tiene claramente que $Tx(\pi^{-1}(U)) = x(U) \times dx(p)(T_p M) = x(U) \times \mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$.
- $(Tx)^{-1} : x(U) \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \pi^{-1}(U) \subset TM$ es la inversa de la aplicación Tx y esta definida por $(Tx)^{-1}(z, w) = (x^{-1}(z), dx^{-1}(z)w)$. Esta aplicación es de clase C^∞ , pues x^{-1} es de clase C^∞ y $dx^{-1}(z)$, una aplicación lineal, es de clase C^∞ .
- $(Tx)^{-1}$ es una inmersión.

En efecto: La derivada de $(Tx)^{-1}$ en $(z, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ es dado por

$$d(Tx)^{-1}(z, w) = (dx^{-1}(z), d(dx^{-1})(z, w)).$$

Se sabe que x^{-1} es una inmersión, luego $dx^{-1}(z)$ es un inyectiva para todo $z \in x(U) = U_0 \subset \mathbb{R}^m$. Note que, para cada $(z, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, $d(dx^{-1})(z, w)$ es una aplicación lineal. Aún más, al ser x un difeomorfismo (vea el Ejemplo 1.5-2) se tiene que la aplicación derivada $dx^{-1} : TU_0 = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ es un difeomorfismo (vea el Corolario 1.5). Así, $d(dx^{-1})(z, w)$ es un isomorfismo. Luego, de la discusión anterior, se tiene que $d(Tx)^{-1}(z, w)$ es inyectiva para todo $(z, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ y por tanto $(Tx)^{-1}$ es una inmersión.

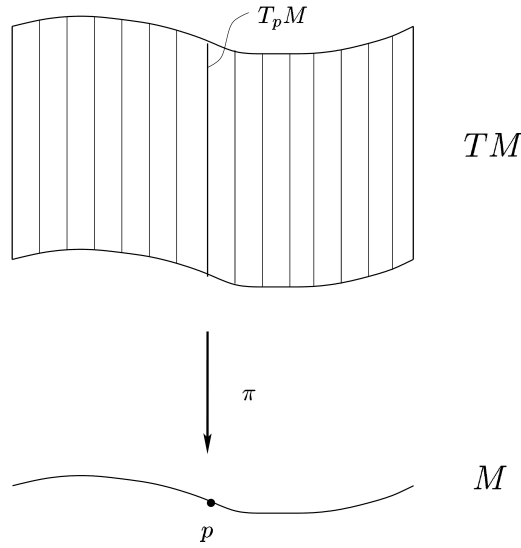
De este modo, al tenerse que $(Tx, \pi^{-1}(U))$ es una carta local de TM , se infiere que TM es una variedad diferenciable de dimensión $2m$.

Observe que la expresión de π en relación a las cartas locales $(Tx, \pi^{-1}(U))$ y x es $\pi_{Tx, x} = x \circ \pi \circ (Tx)^{-1} : x(U) \times \mathbb{R}^m \rightarrow x(U) \subset M$ y es tal que,

$$\pi_{Tx, x}(z, w) = x \circ \pi \circ (Tx)^{-1}(z, w) = x \circ \pi(x^{-1}(z), dx^{-1}(z)w) = x(x^{-1}(z)) = z,$$

es decir, $\pi_{Tx, x}(z, w) = z$. Por tanto $\pi_{Tx, x}$ es simplemente la proyección natural de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ en el primer factor; luego π es de clase C^∞ . $\square$

Ejemplo 1.8. Recuerde que un vector $v \in \mathbb{R}^3$ es tangente a la esfera $\mathbb{S}^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\|^2 = 1\}$ en el punto p si $\langle p, v \rangle = 0$. El fibrado tangente a la esfera se observa

Figura 1.4: Fibrado tangente y la proyección π

como una subvariedad de $\mathbb{R}^6$,

$$T\mathbb{S}^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6 : \|u\|^2 = 1, \langle u, v \rangle = 0\}.$$

$T\mathbb{S}^2 = f^{-1}(0)$, donde $f(u, v) = (\|u\|^2 - 1, \langle u, v \rangle)$ y 0 es un valor regular de f .

Proposición 1.21. *Suponga que M^m y N^n son variedades diferenciables y $f : M \rightarrow N$ es una aplicación de clase C^{r+1} . Entonces $df : TM \rightarrow TN$ definido por $df(p, v) = (f(p), df(p)v)$ es de clase C^r .*

Se verá ahora, de manera concisa, el concepto abstracto de variedades diferenciables (Brickell y Clark, 1970; Lages Lima, 2011a y Lages Lima, 2011b). En general, la teoría abstracta de variedades diferenciables se desarrolla sobre un conjunto cualquiera M , el cual no necesita tener ninguna estructura topológica; pero para propósitos de la tesis, el conjunto M será un espacio topológico de Hausdorff con base numerable (separable).

Definición 1.32. Una **carta local** en M es un par (x, U) , donde $U \subset M$ es un abierto y $x : U \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo de U en el abierto $x(U)$ de $\mathbb{R}^m$. En este caso se dice que U es una vecindad parametrizada en M .

Definición 1.33. Un **atlas** de dimensión m sobre un espacio topológico de Hausdorff M es una colección $\mathfrak{A}$ de cartas locales $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ en M , cuyos dominios U

cubren M .

Un espacio topológico en el cual existe un atlas de dimensión m es llamada una **variedad topológica** de dimensión m . Es decir, cada punto de M tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^m$.

Si (x, U) y (y, V) son cartas locales en M , con $U \cap V \neq \emptyset$, el cambio de coordenadas $\varphi_{xy} = y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$ es un homeomorfismo.

Definición 1.34. Un atlas $\mathfrak{A}$ sobre un espacio topológico de Hausdorff M se dice **diferenciable de clase C^r** , $r \geq 1$, si todos los cambios de coordenadas φ_{xy} , con $x, y \in \mathfrak{A}$ son aplicaciones de clase C^r .

Sea $\mathfrak{A}$ un atlas diferenciable de dimensión m y clase C^r en un espacio topológico de Hausdorff M . Se dice que un sistema de coordenadas $z : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ es **admisibile** relativamente al atlas $\mathfrak{A}$ si, para todo sistema de coordenadas locales $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, perteneciente a $\mathfrak{A}$, con $U \cap W$, los cambios de coordenadas φ_{xz} y φ_{zx} son de clase C^r . Dicho de otro modo, $\mathfrak{A} \cup \{z\}$ es aún un atlas de clase C^r en M .

Definición 1.35. Un atlas $\mathfrak{A}$, de dimensión m y clase C^r , sobre M es llamado un **atlas máximo** si, este contiene todas las cartas locales que son admisibles en relación a $\mathfrak{A}$.

Definición 1.36. Una **variedad diferenciable** de dimensión m y clase C^r es un par $(M, \mathfrak{A})$ donde M es un espacio topológico de Hausdorff, con base numerable, y $\mathfrak{A}$ es un atlas máximo de dimensión m y clase C^r sobre M .

La exigencia de que el atlas $\mathfrak{A}$ sea una atlas maximal no es esencial, pues cualquier atlas de clase C^r en M puede ser ampliado, de manera única, hasta llegar a ser un atlas máximo de clase C^r . Esto se logra añadiendo al atlas $\mathfrak{A}$, todas las cartas locales que son admisibles.

Por lo anterior, el par $(M, \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión m y clase C^r si, M es un espacio topológico de Hausdorff y $\mathfrak{A}$ es un atlas diferenciable de dimensión m y clase C^r . Siendo más explícitos, para tener que $(M, \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión m y clase C^r , se debe verificar que

- i) M es un espacio topológico de Hausdorff,

- ii) $\mathfrak{A}$ es una colección de homeomorfismos $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de conjuntos abiertos $U \subset M$ sobre abiertos $x(U) \subset \mathbb{R}^m$,
- iii) Los dominios U de los homeomorfismos $x \in \mathfrak{A}$ cubren M y
- iv) Los cambios de coordenada φ_{xy} son difeomorfismos de clase C^r .

Ejemplo 1.9. Sea $M = M(n \times m, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes reales. Dote a $M(n \times m, \mathbb{R})$ con la topología inducida por la biyección $x : M(n \times m, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{nm}$ dada por $x(a_{ij}) = (a_{11}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm})$. Es claro que $(x, M(n \times m, \mathbb{R}))$ es una carta local en $M(n \times m, \mathbb{R})$, cuyo dominio cubre todo el conjunto $M(n \times m, \mathbb{R})$. Es más $\mathfrak{A} = \{(x, M(n \times m, \mathbb{R}))\}$ es un atlas de dimensión nm y de clase C^∞ . Por tanto, $(M, \mathfrak{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión nm y de clase C^∞ .

Usando cartas locales es posible definir la diferenciabilidad de aplicaciones entre variedades diferenciables, de manera análoga a la hecha anteriormente.

De este modo, se dice que una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ en M es diferenciable si, $x \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable, donde (x, U) es una carta local tal que $\alpha(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. El vector tangente a α en $p = \alpha(0)$ se define como el conjunto de todas las curvas diferenciables $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tales que se tenga $\beta(0) = p$ y $d(x \circ \beta)(0) = d(x \circ \alpha)(0)$. Como se vio en la definición anterior, la definición de vector tangente no depende de la elección de la carta local (x, U) . El espacio tangente a M en el punto p , $T_p M$, es el conjunto de los vectores tangentes a las curvas diferenciables pasando por p . De la misma manera se obtiene que $T_p M$ posee una estructura de espacio vectorial de dimensión m .

Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades con $f(p) = q$, se define $df(p) : T_p M \rightarrow T_q N$ como la aplicación que asocia al vector tangente a la curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, en el punto p , el vector tangente a la curva dada por $f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ en el punto q . Esta definición es independiente de la elección de las curvas diferenciables α y además $df(p)$ es lineal.

Se dice que $f : M \rightarrow N$ es una inmersión si $df(p)$ es inyectiva para todo $p \in M$. Un embebimiento es una inmersión inyectiva $f : M \rightarrow N$ que tenga una inversa continua $f^{-1} : f(M) \subset N \rightarrow M$. Además si $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es un embebimiento de clase

C^∞ , entonces $f(M) \subset \mathbb{R}^k$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^k$, como se definió anteriormente.

Al juntar las derivadas de la aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ en todos los puntos de M ; se obtiene una aplicación definida globalmente entre fibrados tangentes, denominado aplicación diferencial o **aplicación derivada**, denotada por $df : TM \rightarrow TN$. La aplicación derivada es solo la aplicación cuya restricción a cada espacio tangente $T_p M \subset TM$ es $df(p)$. Los siguientes resultados son bastante conocidos, para una demostración vea la Proposición 3.21 y el Corolario 3.22 en (Lee, 2013).

Proposición 1.22. *Si $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciables, entonces su derivada global $df : TM \rightarrow TN$ es diferenciable.*

Corolario 1.5 (Propiedades de la aplicación derivada). *Suponga que $f : M \rightarrow N$ y $g : N \rightarrow P$ con aplicaciones de clase C^r . Se tienen las siguientes propiedades:*

- a) $d(g \circ f) = dg \circ df$,
- b) $d(Id_M) = Id_{TM}$ y
- c) *si f es un difeomorfismo, entonces $df : TM \rightarrow TN$ es también un difeomorfismo, y $(df)^{-1} = d(f^{-1})$.*

Los teoremas siguientes se deben a las investigaciones hechas por Whitney, donde se relaciona el concepto de variedad abstracta con el de subvariedad de un espacio euclidiano. No se darán las demostraciones por ser amplias y por estar fuera de los objetivos de la tesis. Las demostraciones pueden ser encontradas dentro de la bibliografía (Guillemin y Pollack, 2010; Lages Lima, 2011a y Lages Lima, 2011b).

Teorema 1.11 (Whitney). *Si M es una variedad diferenciable de dimensión m , entonces existe un embebimiento propio $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$.*

Sea ahora, M una variedad diferenciable y $S \subset M$ una subvariedad. Una vecindad tubular de S es un par (V, π) , donde V es una vecindad de S en M y $\pi : V \rightarrow S$ es una submersión de clase C^∞ tal que $\pi(p) = p$ para $p \in S$.

Teorema 1.12. *Toda subvariedad $S \subset M$ posee una vecindad tubular.*

El teorema siguiente es también debido a Whitney, este nos asegura que toda variedad de clase C^r , $r \geq 1$, puede ser considerada de manera natural como una variedad de clase C^∞ .

Teorema 1.13 (Whitney). *Sea M una variedad de clase C^r , $r \geq 1$. Entonces existe un embebimiento de clase C^r , $r \geq 1$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ tal que $f(M)$ es una variedad de clase C^∞ de $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

1.3. Topología en el espacio de aplicaciones de clase C^r , $r \geq 1$

En esta sección se tratarán algunos aspectos topológicos del espacio de las aplicaciones de clase C^r , $C^r(M, \mathbb{R}^s)$, sobre variedades diferenciables. Se establecerá una topología en el espacio de aplicaciones C^r de una variedad M en otra N . Cuando M es compacta se verá que esta topología es inducida por una norma completa. Para esta sección se sigue de cerca a Palis y de Melo (Palis y de Melo, 1978).

Se inicia recordando un poco del cálculo diferencial en espacios de Banach. Los teoremas de función implícita e inversa nos serán de mucha utilidad en el Capítulo 2 (vea el Apéndice A).

Definición 1.37. Sea E un espacio vectorial real. Una **norma** en E es una aplicación $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo vector $x, y \in E$ y todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumplan las siguientes propiedades:

- (1) $\|x\| \geq 0$,
- (2) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
- (3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ y
- (4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

El espacio E junto a la norma definida en él es denominado espacio normado.

Definición 1.38 (Bola abierta y cerrada). Sea $(E, \| \cdot \|)$ un espacio normado. Dado un $x_0 \in E$ y un número real positivo r , se define

- (a) Bola abierta: $B(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - y\| < r\}$,
- (b) Bola cerrada: $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in E \mid \|x - y\| \leq r\}$,

Sea M una variedad compacta y considere el espacio de aplicaciones de clase C^r de M en $\mathbb{R}^s$, a saber $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Defina en este espacio las operaciones siguientes: $(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ y $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ para $f, g \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. De este modo el espacio $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ adquiere una estructura de espacio vectorial.

Ahora, gracias a las Proposiciones 1.18 y 1.19, tome un cubrimiento finito por abiertos $V_1, \dots, V_k$ para M tal que para cada $i : 1, \dots, k$ se tenga $V_i \subset U_i$, donde los (x_i, U_i) son cartas locales en M con $x_i(U_i) = B(2)$ y $x_i(V_i) = B(1)$. Denote por $B(1)$ y $B(2)$ a las bolas abiertas de radios 1 y 2 respectivamente, cuyos centros son el origen de $\mathbb{R}^m$.

Ahora, dado una carta local (x, U) denote, para $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$, la aplicación $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \rightarrow \mathbb{R}^s$. Defina también, la siguiente norma

$$\|f\|_r = \max_i \sup_{u \in B(1)} \{ \|f^i(u)\|, \|df^i(u)\|, \dots, \|d^r f^i(u)\| \},$$

donde $\|\cdot\|$ denota una norma cualquiera en $\mathbb{R}^s$, por ejemplo la norma del supremo, máximo, euclidiana, etc. Así definida, $\|\cdot\|_r$ es una norma en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ de modo que $(C^r(M, \mathbb{R}^s), \|\cdot\|_r)$ es un espacio normado.

Proposición 1.23. $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ es un espacio de Banach, es decir, un espacio completo en la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_r$.

Demostración. Claramente $\|\cdot\|_r$ define una norma en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Se demostrará que esta norma es una norma completa, es decir, que toda sucesión de Cauchy es convergente.

Sea $f_n : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ una sucesión de Cauchy en la norma $\|\cdot\|_r$, esto es, se tiene que $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$. Fijado $p \in M$ se tiene que cada una de las sucesiones $f_n(p), df_n(p), \dots, d^{(r)}f_n(p)$ son sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}^s$, y por tanto al ser $\mathbb{R}^s$ completo, son sucesiones convergentes. Defina $f : M \rightarrow \mathbb{R}^s$ por $f(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(p)$. En particular, $f_n^i(u) \rightarrow f^i(u)$ para $u \in B(1)$ e $i = 1, \dots, k$. Además, para cada $u \in B(1)$, $df_n^i(u)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$ y, por

tanto, converge a una transformación lineal $T^i(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} df_n^i(u)$. Se afirma que la convergencia $df_n^i \rightarrow$ es uniforme. De hecho,

$$\|df_n^i(u) - T^i(u)\| \leq \|df_n^i(u) - df_{n'}^i(u)\| + \|df_{n'}^i(u) - T^i(u)\|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, al ser df_n^i una sucesión de Cauchy, existe n_0 tal que si $n, n' \geq n_0$, entonces $\|df_n^i(u) - df_{n'}^i(u)\| < \varepsilon/2$ para todo $u \in B(1)$. Por otro lado, para cada $u \in B(1)$ existe $n' \geq n_0$, el cual puede depender de u , tal que $\|df_{n'}^i(u) - T^i(u)\| < \varepsilon/2$. De este modo, para $n \geq n_0$, se tiene $\|df_n^i(u) - T^i(u)\| < \varepsilon$ para todo $u \in B(1)$. Se tiene, por la Proposición 1.1, que f^i es de clase C^1 y $df^i = T^i$. Procediendo de manera similar, es posible mostrar por inducción que f es de clase C^r y $f_n \rightarrow f$ en la norma $\|\cdot\|_r$. $\square$

Es sencillo verificar que la topología inducida por la norma $\|\cdot\|_r$ en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ no depende del cubrimiento $V_1, V_2, \dots, V_k$ de M fijado inicialmente.

Ahora, se verán algunas propiedades importantes de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ con la topología C^r .

Definición 1.39. Un subconjunto M de un espacio topológico X se llama **residual** si, existe una familia numerable de abiertos densos en X , digamos $(G_n)_{n=1}^\infty$, tal que $\bigcap_{n=1}^\infty G_n \subset M$. Un espacio topológico es de **Baire** si todo subconjunto residual es denso.

Teorema 1.14 (Categoría de Baire). *Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces X es un espacio de Baire.*

Proposición 1.24. $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ es un espacio de Baire.

Demostración. Como $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ es un espacio métrico completo, el resultado se sigue de manera inmediata. $\square$

Proposición 1.25. $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ es un espacio separable, es decir, posee una base numerable de abiertos.

Demostración. Sea $E = B(2) \times \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s) \times \dots \times \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$, recuerde que $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s)$ denota el espacio de aplicaciones r -lineales simétricas de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^s$. El

conjunto E es un abierto del espacio euclidiano

$$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s) \times \cdots \times \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^s),$$

y por tanto E^k es un abierto de un espacio euclidiano, luego posee una base numerable de abiertos $E_1, E_2, \dots$. Sean $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots$ la colección de abiertos de E^k constituida por uniones finitas de los E_i .

Ahora, para cada $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ y $f^i = f \circ x_i^{-1} : B(2) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ se define la aplicación $j^r f^i : B(2) \rightarrow E$ dada por $j^r f^i(u) = (u, f^i(u), df^i(u), \dots, d^{(r)} f^i(u))$ (esta aplicación es llamada *Jet* en inglés: dos aplicaciones f y g están próximas si sus correspondientes *jets* $j^r f$ y $j^r g$ están próximas, o de manera más simple, cuando las derivadas parciales correspondientes de f y g están próximas). Esta aplicación es continua en la topología C^r , en efecto las funciones próximas tendrán sus derivadas hasta orden r próximas. Así, $J^r(f^i) = j^r f^i(\overline{B(1)})$ es un subconjunto compacto de E . Luego $J^r(f) = J^r(f_1) \times \cdots \times J^r(f_k)$ es un compacto de E^k . Observe que dos funciones f y g serán próximas en la topología C^r si, y sólo si, $J^r(f)$ y $J^r(g)$ son próximos.

Defina ahora, $\mathcal{E}_j = \{g \in C^r(M, \mathbb{R}^s) \mid J^r(g) \subset \tilde{E}_j\}$ para cada j . Es claro que cada $\mathcal{E}_j$ es abierto en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Sea $\mathcal{W}$ una vecindad de $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$, entonces existe una vecindad W de $J^r(f)$ en E^k tal que si $g \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ y $J^r(g) \subset W$ entonces $g \in \mathcal{W}$. Como $J^r(f)$ es compacto, existe un cubrimiento finito de $J^r(f)$ por abiertos E_i contenidos en W . Sea $\tilde{E}_j$ la unión de estos E_i ; es claro que $J^r(f) \subset \tilde{E}_j \subset W$. Por tanto $\mathcal{E}_j$ contiene f y está contenido en $\mathcal{W}$. Esto muestra que $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots\}$ es una base numerable de la topología C^r . $\square$

A continuación se mostrará que en la topología C^r toda aplicación en $C^r(M, N)$ puede ser aproximada por una de clase C^∞ . Primeramente se verá que esto es posible para compactos en espacios euclidianos. Luego usando la técnica de particiones de la unidad se establece el resultado en variedades.

Lema 1.1. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ una aplicación de clase C^r , U abierto. Sea $K \subset U$ compacto. Dado $\varepsilon > 0$, existe una aplicación C^∞ $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ tal que $\|f - g\|_r < \varepsilon$ en K .*

Demostración. Considere una función auxiliar $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ que vale 1 en K y 0 fuera de una vecindad de K en U . Tomando $h = \varphi \circ f$, se tiene que $h = f$ en K y $h = 0$ fuera de U . Como h es de clase C^r entonces para todo $u \in K$ existe $\delta(u) > 0$ tal que $\|d^j h(u+v) - d^j h(u)\| < \varepsilon$ si $\|v\| < \delta(u)$. Por la compacidad de K , es posible encontrar $\delta = \min\{\delta(u), u \in K\} > 0$ tal que $\|d^j h(u+v) - d^j h(u)\| < \varepsilon$ si $\|v\| < \delta$ para todo $u \in K$, con $j = 1, \dots, r$. Sea $\varphi_\delta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función auxiliar tal que $\varphi_\delta(v) = 0$ si $\|v\| > \delta$ y $\int \varphi_\delta(v) dv = 1$. Defina $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ por $g(u) = \int \varphi_\delta(v) h(u+v) dv = \int \varphi_\delta(z-u) h(z) dz$. Derivando ambas expresiones de g se obtiene

$$d^j g(u) = \int \varphi_\delta(v) d^j h(u+v) dv \quad y \quad d^j g(u) = (-1)^j \int d^j \varphi_\delta(z-u) h(z) dz.$$

De la segunda expresión es claro que las derivadas de todos los órdenes de g existen y por tanto $g \in C^\infty$. De la primera expresión se tiene que

$$\begin{aligned} \|d^j g(u) - d^j f(u)\| &= \|d^j g(u) - d^j h(u)\| \\ &= \left\| \int \varphi_\delta(v) d^j h(u+v) - \int \varphi_\delta d^j h(u) dv \right\| \\ &= \left\| \int \varphi_\delta(v) (d^j h(u+v) - d^j h(u)) dv \right\| \\ &\leq \int \varphi_\delta(v) \|d^j h(u+v) - d^j h(u)\| dv \\ &\leq \int \varphi_\delta \varepsilon dv = \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $u \in K$. Como $h = f$ en K , la función g así definida es la deseada. $\square$

Proposición 1.26. *El subconjunto de aplicaciones de clase C^∞ es denso en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$.*

Demostración. Sean (x_i, U_i) , $i = 1, \dots, k$, cartas locales con $x_i(U_i) = B(2)$ y $M = \cup_I V_i$, donde $V_i = x_i^{-1}(B(1))$. Tome $\{\varphi_i : M \rightarrow \mathbb{R}\}$ una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{V_i\}$. Sean $f \in C^r(M, \mathbb{R}^s)$ y $\varepsilon > 0$. Por el lema anterior, dado $\delta > 0$ existe $\tilde{g}^i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s$ de clase C^∞ tal que $\|f^i - \tilde{g}^i\|_r < \delta$ en $\overline{B(1)}$ donde $f^i = f \circ x_i^{-1}$. Como las funciones φ_i son limitadas, al tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $\|\varphi_i \circ f - \varphi_i \circ \tilde{g}^i \circ x_i\|_r < \varepsilon/k$. Luego, $g = \sum_{i=1}^k \varphi_i \circ \tilde{g}^i \circ x_i$ es de clase C^∞ y $\|f - g\|_r = \|\sum_{i=1}^k \varphi_i \circ f - \varphi_i \circ \tilde{g}^i \circ x_i\| < \varepsilon/k + \dots + \varepsilon/k = \varepsilon$. $\square$

Considere ahora una variedad compacta $N \subset \mathbb{R}^s$. Como N es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^s$, entonces $C^r(M, N) \subset C^r(M, \mathbb{R}^s)$ (por lo que es natural inducir la topología C^r al espacio $C^r(M, N)$); aún más es cerrado en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Luego $C^r(M, N)$ con la topología inducida de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$, con la cual es completa, es un espacio de Baire separable.

Si M y N fueran variedades abstractas, siendo M compacta. Es posible definir una topología de clase C^r en $C^r(M, N)$. Para esto, basta embeber N en un espacio euclidiano $\mathbb{R}^s$ (Teorema 1.11). Además la topología así definida es independiente del embebimiento.

Proposición 1.27. *El subconjunto de aplicaciones de clase C^∞ es denso en $C^r(M, N)$.*

Demostración. Sea $V \subset \mathbb{R}^s$ una vecindad tubular de N , esto es, una vecindad abierta en la cual es definida una submersión sobreyectiva $\pi : V \subset \mathbb{R}^s \rightarrow N$. Dada $f \in C^r(M, N)$, por la Proposición 1.26 es posible aproximar f por una aplicación de clase C^∞ , $g : M \rightarrow \mathbb{R}^s$. Luego $\pi \circ g : M \rightarrow N$ es de clase C^∞ . Ahora, como la aplicación $h \mapsto \pi \circ h$ es continua, entonces $\pi \circ g$ es próxima de f . $\square$

Un *difeomorfismo de clase C^r* sobre una variedad compacta M es una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow M$ con inversa diferenciable de la misma clase. Denote este conjunto por $\text{Dif}^r(M)$.

Proposición 1.28. *El conjunto $\text{Dif}^r(M)$ de difeomorfismos de clase C^r en M es abierto en $C^r(M, M)$. Además, es un espacio de Baire separable y el subconjunto de difeomorfismos de clase C^∞ es denso en $\text{Dif}^r(M)$.*

1.4. Transversalidad

En esta sección se introduce uno de los conceptos mas importantes en topología diferencial, se trata de la transversalidad. Se enuncia, sin prueba (al no ser un objetivo de la Tesis), el Teorema de transversalidad de Thom; el cual afirma que la transversalidad de funciones es una propiedad que no se pierde al hacer pequeñas perturbaciones y que está presente en casi todas las funciones. En topología diferencial, la transversalidad se puede ver como una generalización del concepto de

valor regular. Preguntas como: ¿en qué condiciones la imagen inversa de una función $f : M \rightarrow N$, $f^{-1}(S)$, es una subvariedad diferenciable de M ? fueron respondidas como consecuencia de esta teoría. Más generalmente, que la imagen inversa de una subvariedad es una subvariedad si la función es transversal a la subvariedad. Este resultado permite construir subvariedades a partir de funciones. Para esta sección puede verse (Thom, 1954; Guillemin y Pollack, 2010).

Se verá también el significado que el Teorema de transversalidad de Thom guarda, bajo ciertas condiciones, respecto al conjunto de aplicaciones transversales $f \in C^r(M, N)$ a una subvariedad cerrada $S \subset N$.

Sea así, $f : M^m \rightarrow N^n$ una aplicación de clase C^r y $S^s \subset N$ una subvariedad de clase C^r ($1 \leq r$).

Definición 1.40. Se dice que la aplicación $f : M^m \rightarrow N^n$ es **transversal** a S en el punto $p \in M$ si $f(p) \notin S$ o $df(p)(T_p M) + T_{f(p)} S = T_{f(p)} N$, es decir, si la imagen de $df(p)$ junto el espacio tangente a S en $f(p)$ generan $T_{f(p)} N$. Se dice que f es transversal a S si para todo $p \in M$, f es transversal a S en p .

Dada una subvariedad $S^s \subset N^n$, el número $(n - s)$ es llamado la *codimensión* de S en N .

Observación 1.9.

- 1) Si la dimensión de la variedad M fuera menor que la codimensión de S , entonces f es transversal a S si y sólo si $f(M) \cap S = \emptyset$.
- 2) Si f es una submersión entonces f es transversal a S , cualquiera que sea la subvariedad $S \subset N$.

Definición 1.41. Sean $S_1, S_2 \subset N$ subvariedades de N . Se dice que S_1 es transversal a S_2 si la aplicación inclusión $i : S_1 \rightarrow N$ es transversal a S_2 .

En el capítulo anterior se vio que toda subvariedad diferenciable es localmente la imagen inversa de un valor regular. Esto quiere decir, que si $q \in S \subset N$, existen una vecindad V_q de q en N y un difeomorfismo $\varphi : V_p \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ de clase C^r tal que $\varphi(S \cap V_q) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$, de donde $S \cap V_q = (\pi_2 \circ \varphi)^{-1}(0)$, siendo $\pi_2 : \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ la proyección natural. Sean $f : M \rightarrow N$ y $U_p \subset M$ una vecindad de p con $f(U_p) \subset V_q$, siendo $q = f(p)$. Considere ahora la aplicación $\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{U_p} : U_p \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$.

Proposición 1.29. *Una aplicación $f : M \rightarrow N$ es transversal a $S \subset N$ en el punto $p \in M$ si y sólo si 0 es valor regular de la aplicación $\pi_2 \circ \varphi \circ f|_{U_p} : U_p \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$ para alguna vecindad U_p , como en el comentario anterior.*

Corolario 1.6. *Sean $f \in C^k(M, N^n)$ y S^s una subvariedad de clase C^r de N con $k, r \geq 1$. Si f es transversal a S , entonces $f^{-1}(S)$ o es igual al vacío o es una subvariedad de clase C^ℓ y codimensión $n - s$, donde $\ell = \min\{k, r\}$.*

Proposición 1.30. *Sean M una variedad compacta, N una variedad diferenciable y $S \subset N$ un subconjunto cerrado. Entonces el subconjunto de aplicaciones en $C^r(M, N)$ transversales a S es abierto.*

Demostración. Sea $f \in Q = \{f \in C^r(M, N) \mid f \text{ es transversal a } S\}$. Se demostrará que existe una vecindad de $\mathcal{V}$ de f tal que $\mathcal{V} \subset Q$. En efecto: Para cada $q \in S$ tome una vecindad V_q en N y un difeomorfismo $\varphi_q : V_q \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s}$ tal que se tenga $\varphi_q(S \cap V_q) = \mathbb{R}^s \times \{0\}$, como en la discusión hecha arriba. Ahora para cada $p \in f^{-1}(q)$ considere una vecindad U_p tal que $f(\overline{U_p}) \subset V_q$ y que la derivada de $\pi_2 \circ \varphi_q \circ f$ sea sobreyectiva en todos los puntos de $\overline{U_p}$. Existe una vecindad $\mathcal{V}_p(f) \subset C^r(M, N)$ tal que ocurre lo mismo para $\pi_2 \circ \varphi_q \circ g$ en $\overline{U_p}$ para todo $g \in \mathcal{V}_p$. Como $f \in C^r(M, N)$, f es continua y al ser M compacta se tiene que $f^{-1}(S)$ es compacta. ahora, tome un cubrimiento finito $U_{p_1}, \dots, U_{p_l}$ del compacto $f^{-1}(S)$, $U = \bigcup_{i=1}^l U_{p_i}$ y $\mathcal{V}(f) = \bigcap_{i=1}^l \mathcal{V}_{p_i}$. Es claro que, si $g \in \mathcal{V}$, entonces g es transversal a S en los puntos de U . Como $M - U$ es compacto y $f(M - U) \cap S = \emptyset$, se tiene que, disminuyendo $\mathcal{V}$ si es necesario, $g(M - U) \cap S = \emptyset$ para todo $g \in \mathcal{V}$. Luego, todo $g \in \mathcal{V}$ es transversal a S . Por tanto $\mathcal{V}(f) \subset Q$, lo que prueba la proposición. $\square$

A continuación se enuncia, sin demostración, el Teorema de Thom, aquí M y N denotan variedades diferenciables.

Como se mencionó en la introducción de esta sección, el Teorema de transversalidad de Thom afirma que la transversalidad de funciones es una propiedad que no se pierde al hacer pequeñas perturbaciones y que está presente en casi todas las funciones. En topología diferencial, la transversalidad se puede ver como una generalización del concepto de valor regular. Además, el teorema implica que la imagen

inversa de una subvariedad es una subvariedad si la función es transversal a la subvariedad. Este resultado permite construir subvariedades a partir de funciones, vea (Thom, 1954; Guillemin y Pollack, 2010).

Teorema 1.15 (El Teorema de Transversalidad de Thom). *Sean M una variedad compacta y $S \subset N$ una subvariedad cerrada. El conjunto de las aplicaciones $f \in C^r(M, N)$ transversales a S es abierto y denso.*

El Teorema 1.15 será usada en la demostración de la Proposición 2.28, proposición que afirma la densidad del conjunto de campos vectoriales cuyas singularidades son todas simples (vea la Definición 2.19) dentro del conjunto de campos vectoriales de clases C^r , $r \geq 1$.

Capítulo 2

Campos vectoriales y singularidades hiperbólicas

En este capítulo se verán algunas propiedades importantes de los campos vectoriales sobre variedades diferenciables. Se recuerdan, por ejemplo, en la Sección 2.1 la existencia y unicidad de curvas integrales para campos vectoriales, el Teorema del Flujo Tubular (Teorema 2.4), se dan las definiciones de estabilidad local para campos vectoriales y en el Corolario 2.4 se demuestra la estabilidad local en puntos regulares. En la Sección 2.2, se obtienen resultados genéricos para campos vectoriales lineales. Además, en la Sección 2.3 se demuestran que el conjunto de los campos vectoriales es un espacio de Baire Separable en $C^r(M, \mathbb{R}^s)$ y el teorema central de este Capítulo, a saber, que el conjunto de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, cuyas singularidades son todas hiperbólicas, es un conjunto genérico dentro del conjunto de campos vectoriales de clase C^r (Teorema 2.6).

Para este capítulo se sigue de cerca a Palis y de Melo, a Irwin, a Katok y Hasselblatt, a M. Peixoto y a Johannesen (Palis y de Melo, 1978; Irwin, 2001; Katok y Hasselblatt 1996; Peixoto, 1969 y Johannesen, 2017).

2.1. Campos vectoriales

En esta sección se inicia el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales sobre variedades diferenciables. Se inicia definiendo el concepto de campo vectorial

para luego ver su relación con los flujos y sistemas dinámicos.

Para iniciar esta sección, se recuerda un resultado básico, pero importante, sobre ecuaciones diferenciales sobre $\mathbb{R}^m$. Un campo vectorial de clase C^r , $r \geq 1$, en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ es una aplicación de clase C^r $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Una **curva integral** de X , por un punto $p \in U$, es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow U$, donde I es un intervalo abierto conteniendo el origen, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$ para todo $t \in I$. Se dice que α es una solución de la ecuación diferencial $dx/dt = X(t)$, con condición inicial $X(0) = p$.

Teorema 2.1 (Existencia). *Sean X un campo vectorial de clase C^r , $r \geq 1$, en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$, y $p \in U$. Existe una curva integral de X , $\alpha : I \rightarrow U$, con $\alpha(0) = p$.*

Ahora, se da inicio a la teoría de campos vectoriales sobre variedades diferenciales, los cuales son definidas de manera natural de modo que generalicen el caso euclidiano.

Definición 2.1. Sea M^m una variedad diferenciable. Un **campo vectorial de clase C^r** , X , en M es una aplicación de clase C^r que asocia a cada punto $p \in M$ un vector $X(p) \in T_p M$, tangente a M en el punto p .

La definición anterior corresponde a una aplicación de clase C^r (en el sentido de variedades) $X : M \rightarrow TM$ tal que $\pi \circ X = id_M : M \rightarrow M$, donde π es la proyección natural de TM en M . Denote por $\mathfrak{X}^r(M)$ el conjunto de campos vectoriales de clase C^r en M .

Dado un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Es posible asociarle a este una **ecuación diferencial autónoma de clase C^r** , $1 \leq r \leq \infty$, sobre una variedad diferenciable M , como una expresión del tipo

$$y' = X(y). \quad (2.1)$$

Definición 2.2. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Una **curva integral** que pasa por un punto $p \in M$ es una aplicación $\alpha : I \rightarrow M$ de clase C^{r+1} , definida en un intervalo I de la recta conteniendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$ (llamada también **curva integral de X con condición inicial p**).

Se dirá así, que α es una **solución** para la ecuación (2.1) con condición inicial $y(0) = p$. La imagen de una curva integral es llamada **órbita o trayectoria**.

Definición 2.3 (pushforward (avance o impulso) del campo vectorial X por un difeomorfismo f). Sea $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo de clase C^{r+1} y $X \in \mathfrak{X}(M)$, el **pushforward del campo X por el difeomorfismo f** , denotado por $Y = f_*X$, es definido por $Y(q) = df(p)X(p)$ con $q = f(p)$. El campo $Y = f_*X$ es un campo vectorial de clase C^r en N , esto pues $f_*X = df \circ X \circ f^{-1} : N \rightarrow TN$. Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva integral de X , entonces $f \circ \alpha : I \rightarrow N$ es una curva integral de Y . *En particular, f lleva trayectorias de X en trayectorias de Y .* De este modo, si $x : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ es una carta local, $Y = x_*X$ es un campo de clase C^r en U_0 . Se dice que Y es la **expresión de X en la carta local (x, U)** .

Definición 2.4. Sea $f : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se dice que dos campos vectoriales, X definida en M y Y en definida en N , son f -relacionados si $df \circ X = Y \circ f$. Es decir, si $Y(f(p)) = df(p) \cdot X(p)$, para todo $p \in M$.

El siguiente resultado establece que si dos campos vectoriales son f -relacionados por un difeomorfismo, entonces las órbitas de X son llevadas en órbitas de Y y viceversa. Vea la Proposición 3.49 en (Johannesen, 2017) para una demostración.

Proposición 2.1. *Sea $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, y sean X y Y campos vectoriales sobre M y N , respectivamente, los cuales son f -relacionados. Entonces $c : I \rightarrow M$ es una curva integral por X con condición inicial q si, y solo si, $f \circ c$ es una curva integral para Y con condición inicial $f(q)$.*

Observación 2.1. La expresión del campo vectorial X en la carta local (x, U) , a saber, el campo $Y(q) = dx(p) \cdot X(p)$, definido en la Definición 2.3, esta x -relacionada al campo X . Así, se reduce el problema, inicialmente sobre variedades diferenciables, a una situación euclidiana, donde la teoría cualitativa de campos vectoriales es bastante conocida.

Demostración. En efecto, sea $x : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ una carta local alrededor del punto $p \in U$ con $x(p) = q$ y $Y = x_*X$ la expresión de X en esta carta, el cual es un campo de clase C^r en U_0 . Note que $Y = x_*X = dx \circ X \circ x^{-1} : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ es

definido por $Y(q) = dx(p) \cdot X(p)$, luego X y Y son x -relacionados. Así, el resultado se sigue de la Proposición 2.1. Observe además, que el campo Y tiene la forma $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ en el lenguaje de variedades, siendo simplemente $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ para el lenguaje usual en espacios euclidianos. $\square$

Con estas consideraciones, los teoremas locales conocidos sobre existencia, unicidad y diferenciabilidad de soluciones se extienden a campos vectoriales sobre variedades. Esto se traduce en la proposición siguiente.

Proposición 2.2 (Existencia). *Sean E un espacio de Banach y $F : E \times M \rightarrow TM$ una aplicación C^r , $r \geq 1$, tal que $\pi(F(\lambda, p)) = p$, donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección natural. Para todo $\lambda_0 \in E$ y $p_0 \in M$, existen vecindades W de λ_0 en E , V de p_0 en M , un número real $\varepsilon > 0$ y una función de clase C^r $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \times V \rightarrow M$ tales que $\varphi(0, p, \lambda) = p$ y $(\partial/\partial t)\varphi(t, p, \lambda) = F(\lambda, \varphi(t, p, \lambda))$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $p \in V$ y $\lambda \in W$. Además, si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es una curva integral del campo $F_\lambda = F(\lambda, \cdot)$ con $\alpha(0) = p$, entonces $\alpha = \varphi_{p, \lambda} = \varphi(\cdot, p, \lambda)$.*

Proposición 2.3. *Dado cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y cualquier $p \in M$, existe un intervalo del origen J en $\mathbb{R}$ y una curva integral $\alpha : J \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$.*

Demostración. El resultado es sólo la declaración de existencia del Teorema 2.1 aplicada a la expresión local del campo vectorial X sobre cartas locales de M . $\square$

Proposición 2.4. *Sean $\alpha : I \rightarrow M$ y $\beta : J \rightarrow M$ curvas integrales de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Si $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, para algún $t_0 \in I \cap J$, entonces $\alpha(t) = \beta(t)$ en $I \cap J$. Además, existe una curva integral $\gamma : I \cup J \rightarrow M$ que coincide con α en I y con β en J .*

Usando resultados básicos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, se puede ver que para cada $p \in M$ existe una única curva integral $\alpha_p : J_p \rightarrow M$ con $\alpha_p(0) = p$ maximalmente definida, esto es, que no se puede extender más allá del intervalo J_p . El intervalo J_p es denominado el **intervalo maximal** y la curva α_p es denominada **curva integral maximal** (solución maximal). El resultado se resume en la siguiente proposición.

Proposición 2.5 (Curva integral maximal). *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $r \geq 1$. Entonces, para cada $p \in M$ existe una única curva integral maximal $\alpha_p : J_p \rightarrow M$ con $\alpha_p(0) = p$.*

Demostración. Se tiene, por la Proposición 2.3, que existe una curva integral iniciando en el punto $p \in M$. Suponga que $\gamma, \tilde{\gamma} : J \rightarrow M$ son dos curvas integrales de X definidas sobre el mismo intervalo abierto J tal que $\gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)$ para algún $t_0 \in J$. Sea $\mathcal{S} = \{t \in J \mid \gamma(t) = \tilde{\gamma}(t)\}$. Claramente, $\mathcal{S} \neq \emptyset$, ya que $t_0 \in \mathcal{S}$ por hipótesis, y $\mathcal{S}$ es un conjunto cerrado en J por continuidad. Por otro lado, suponga $t_1 \in \mathcal{S}$. Entonces, en una vecindad coordenada alrededor del punto $p = \gamma(t_1)$, se tiene que γ y $\tilde{\gamma}$ son ambas soluciones de la misma ecuación diferencial con la misma condición inicial $\gamma(t_1) = \tilde{\gamma}(t_1) = p$. Por la unicidad de la Proposición 2.2, $\gamma \equiv \tilde{\gamma}$ sobre un intervalo conteniendo t_1 , lo cual implica que $\mathcal{S}$ es abierto en J . Así, $\mathcal{S}$ es un conjunto abierto y cerrado en J . Desde que J es conexo, $\mathcal{S} = J$, lo cual implica que $\gamma = \tilde{\gamma}$ sobre todo J . Así, dos curvas integrales cualesquiera que coinciden en un punto coinciden sobre su dominio común.

Sea $p \in M$. Sea J_p la unión de todos los intervalos abiertos $J \subset \mathbb{R}$ conteniendo 0 sobre el cual una curva integral iniciando en p es definida. Ahora, defina la curva $\alpha_p : J_p \rightarrow M$ por $\alpha_p(t) = \alpha(t)$, donde α es cualquier curva integral iniciando en p (esto significa, $\alpha(0) = p$) y definida sobre un intervalo abierto conteniendo 0 y t . Desde que todas estas curvas integrales coinciden en t , por un argumento similar al usado anteriormente, α_p está bien definida, y es obviamente la única curva integral maximal iniciando en p . $\square$

Definición 2.5. Un **flujo local** sobre una variedad M es una aplicación continua $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ que satisface las siguientes propiedades:

- 1) Ω es abierto en $\mathbb{R} \times M$; además, para cada $x \in M$ el conjunto de números t para los que $\varphi(t, p)$ está definido es un intervalo abierto maximal I_p que contiene al 0,
- 2) $\varphi(0, p) = p$ para todo $p \in M$ y
- 3) Si $\varphi(t, x) = y$ entonces $I_y = \{s - t : s \in I_x\}$. Además, se tiene la igualdad $\varphi(r, y) = \varphi(r, \varphi(t, x)) = \varphi(r + t, x)$ para todo $r \in I_y$.

Cuando se tiene que $\Omega = \mathbb{R} \times M$, se dice que la aplicación φ , es un **flujo global (flujo integral o sistema dinámico continuo)**. Además, si la aplicación φ es de clase C^r , se dice que φ es un flujo local (flujo global) de clase C^r .

A la variedad M se le suele llamar **espacio de fases**.

Dado un flujo local $\varphi : I \times M \rightarrow M$, se definen las aplicaciones parciales siguientes:

- Dado un $t \in I$ fijo, se define la aplicación parcial $\varphi_t : M \rightarrow M$ por la ley $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$. Esta aplicación nos proporciona la posición de cada punto de M en el instante t . Por esta razón, a φ_t se le denomina el estado t del flujo φ .
- Análogamente, dado un $p \in M$ fijo, se define la aplicación parcial $\varphi_p : I \rightarrow M$ por $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$. Esta aplicación no es más que una curva integral de X que sale de p y, por tanto, describe la trayectoria del punto p a lo largo del tiempo t .

Note que si φ es de clase C^r , lo son también φ_t y φ_p .

Proposición 2.6. *Para todo $t \in I$, φ_t es un homeomorfismo. Si φ es de clase C^r , entonces φ_t es un difeomorfismo de clase C^r .*

Sea X un campo vectorial definida sobre M . Para cada $p \in M$ denote por $\alpha_p : I(p) \rightarrow M$ la curva integral máxima por X con punto inicial p (es decir, $\alpha(0) = p$). El conjunto

$$\mathcal{D}(X) = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I(p)\} \subset \mathbb{R} \times M$$

es llamado el dominio del flujo por X , y el flujo (maximal) por X es la aplicación $\varphi : \mathcal{D}(X) \rightarrow M$ definido por $\varphi(t, p) = \alpha_p(t)$ para $p \in M$ y $t \in I(p)$.

Los resultados siguientes pueden ser encontrados en (Johannesen, 2017).

Teorema 2.2. *Sea X un campo vectorial sobre M . Entonces $\mathcal{D}(X)$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times M$ conteniendo $\{0\} \times M$, y el flujo $\varphi : \mathcal{D}(X) \rightarrow M$ para X es diferenciable.*

Proposición 2.7. Sea X un campo vectorial sobre M , y sea φ su flujo. Si p es un punto en M y $t \in I(p)$, entonces $I(\varphi(t, p)) = I(p) - t$ y se tiene que

$$\varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(s + t, p)$$

para todo $s \in I(p) - t$.

Definición 2.6. Sea X un campo vectorial definida sobre M con flujo maximal $\varphi : \mathcal{D}(X) \rightarrow M$, si $t \in \mathbb{R}$, defina

$$\mathcal{D}_t(X) = \{p \in M \mid (t, p) \in \mathcal{D}(X)\}$$

y $\varphi_t : \mathcal{D}_t(X) \rightarrow M$ la aplicación definida por $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$.

Proposición 2.8. Para cada $s, t \in \mathbb{R}$ se tiene que

- 1) $\mathcal{D}_t(X)$ es abierto en M ,
- 2) si $p \in \mathcal{D}_t(X)$ y $\varphi_t(p) \in \mathcal{D}_s(X)$, entonces $p \in \mathcal{D}_{s+t}(X)$ y $\varphi_s(\varphi_t(p)) = \varphi_{s+t}(p)$.
En particular el dominio de $\varphi_s \circ \varphi_t$ está contenido en $\mathcal{D}_{s+t}(X)$, y es igual a $\mathcal{D}_{s+t}(X)$ si s y t tienen el mismo signo.
- 3) $\varphi_t(\mathcal{D}_t(X)) = \mathcal{D}_{-t}(X)$, y φ_t es un difeomorfismo sobre su imagen con inversa φ_{-t} .

Definición 2.7. Un campo vectorial X es llamado **completo** si $\mathcal{D}(X) = \mathbb{R} \times M$, donde $\mathcal{D}(X)$ es el dominio del flujo para X , definido arriba. Esto significa que la curva integral máxima α_p por X , con punto inicial p , es definida sobre $\mathbb{R}$ para cada $p \in M$.

Corolario 2.1. Sea X un campo vectorial definida sobre M . Si M es compacto, entonces el campo vectorial X es completo.

Sea $\varphi : I \times M \rightarrow M$ una aplicación tal que $\varphi_t : M \rightarrow M$ es un homeomorfismo para todo $t \in I$. Dado $p \in M$ y $t \in I$, sea $q = (\varphi_t)^{-1}(p)$. Entonces se tiene que $\varphi_q(t) = \varphi(t, q) = p$. Suponga ahora que la aplicación φ_p es diferenciable en t . Entonces el vector velocidad $\varphi'_p(t) \in T_p M$ es llamado el **vector velocidad de φ**

en el punto x y el tiempo t . Si φ fuera un flujo global sobre M , entonces su vector velocidad en p es el mismo para todo t . Así, en este caso φ genera un campo vectorial X , llamado el **campo vectorial de velocidad de φ** , donde $X(p)$ es el vector velocidad de φ en p y en el tiempo t . Desde que $\varphi(0, p) = p$, la fórmula simple para X es

$$X(p) = X(\varphi(0, p)) = \varphi'_p(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, p).$$

El siguiente resultado resume la discusión anterior.

Proposición 2.9. *Sea φ un flujo global de clase C^r , $r \geq 1$, sobre M . Entonces el vector velocidad de φ en cualquier punto es independiente del tiempo. Así, φ tiene asociado un campo vectorial de velocidades de clase C^{r-1} que está bien definido.*

Si φ es un flujo global sobre M y X es el campo vectorial de velocidades de φ , entonces la órbita de φ por $p \in M$ es la imagen de una curva integral $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$ de X en p , $\alpha_p(t) = \varphi(t, p)$. Además, el campo vectorial de velocidades X es completo.

El siguiente Teorema establece la existencia y unicidad de flujos maximales (esto es, un flujo que no admite una extensión a un flujo de dominio mayor).

Teorema 2.3 (Teorema fundamental sobre flujos (Lee, 2013)). *Sea $X \in \mathfrak{X}^\infty(M)$. Existe un único flujo maximal $\varphi : \mathcal{D}(X) \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ cuyo campo vectorial de velocidades es X . Este flujo cumple con las siguientes propiedades:*

- a) *Para cada $p \in M$, la curva $\alpha_p = \varphi_p : I(p) \rightarrow M$ es la única curva integral maximal de X con $\alpha_p(0) = p$, donde $I(p) = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}(X)\}$ es un intervalo abierto que contiene 0;*
- b) *Si $s \in I(p)$, entonces $I(\varphi(s, p))$ es el intervalo $I(p) - s = \{t - s \mid t \in I(p)\}$;*
- c) *Para cada $t \in \mathbb{R}$, el conjunto $\mathcal{D}_t(X)$ es abierto en M , y $\varphi_t : \mathcal{D}_t(X) \rightarrow \mathcal{D}_{-t}(X)$ es un difeomorfismo con inversa φ_{-t} .*

Definición 2.8. Si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ es un campo vectorial completo sobre M . Se define el flujo global, asociado a este campo, como la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ de clase C^{r+1} dado por $\varphi(t, p) = \alpha_p(t) = \varphi_t(p)$, donde α_p es la curva integral del campo X que pasa por p , y φ_t es el difeomorfismo correspondiente a $t \in \mathbb{R}$. Algunas veces, este flujo se denotará también por $X_t(p) = \varphi(t, p)$.

Inversamente, si X es un campo vectorial dado sobre M , se llamará a cualquier flujo global φ sobre M un **flujo integral** de X si X es el campo vectorial de velocidades de φ , y se dirá que X es **integrable** si tal flujo existe.

Proposición 2.10. *Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Existe en M un flujo global de clase C^r para X . Es decir, existe una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ y $(\partial/\partial t) \varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$.*

Corolario 2.2. *Sean $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ el flujo de X . Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\varphi_t : M \rightarrow M$, $\varphi_t(p) = \varphi(t, p)$, es un difeomorfismo de clase C^r . Además, $\varphi_0 = \text{identidad}$ y $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Además, si M es una variedad compacta, entonces cada campo vectorial en M es completa. Por lo cual, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todos los flujos globales (o sistemas dinámicos continuos) de clase C^r en M y el conjunto $\mathfrak{X}^{r-1}(M)$. Por tanto, en adelante, dará lo mismo trabajar con sistemas dinámicos (flujos globales) o con campos vectoriales sobre una variedad compacta.

El siguiente resultado establece que si dos campos vectoriales son f -relacionados por un difeomorfismo, entonces los flujos asociados son bien comportados. Vea la Proposición 3.49 en (Johannesen, 2017) para una demostración.

Proposición 2.11. *Sea $f : M \rightarrow N$ un difeomorfismo, y sean X y Y campos vectoriales sobre M y N , respectivamente, los cuales son f -relacionados. Si $\gamma : \mathcal{D}(X) \rightarrow M$ es el flujo por X , entonces el flujo por Y es dado por $\beta : \mathcal{D}(Y) \rightarrow N$ donde*

$$\mathcal{D}(Y) = (id \times f)(\mathcal{D}(X)) \quad \text{and} \quad \beta = f \circ \gamma \circ (id \times f^{-1}),$$

y se tiene que

$$\mathcal{D}_t(Y) = f(\mathcal{D}_t(X)) \quad \text{and} \quad \beta_t = f \circ \gamma_t \circ f^{-1}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Ahora, considere un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y φ_t , $t \in \mathbb{R}$, el flujo de X . Sería adecuado redefinir una órbita (trayectoria) en términos de flujos.

Definición 2.9. La órbita (o trayectoria) de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ por $p \in M$ es el conjunto $o(p) = \{\varphi_p(t) : t \in \mathbb{R}\}$.

Definición 2.10. Un punto $p \in M$ se llama una singularidad del campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ (o un punto singular de $X \in \mathfrak{X}^r(M)$) cuando $X(p) = 0$. Los puntos $q \in M$ para los cuales $X(q) \neq 0$ son llamados puntos regulares del campo vectorial X .

Si $p \in M$ es una singularidad del campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$, $X(p) = 0$, entonces la órbita de p , $o(p) = \{\varphi_t(p) : t \in \mathbb{R}\}$, se reduce a p , es decir, $\varphi_t(p) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Considere ahora, el espacio $\mathfrak{X}^r(M)$ de los campos vectoriales de clase C^r en una variedad compacta M y suponga que $M \subset \mathbb{R}^s$. De esto, se obtiene que $\mathfrak{X}^r(M)$ es un subespacio cerrado de $C^r(M, \mathbb{R}^s)$. Luego, $\mathfrak{X}^r(M)$ es un espacio de Baire separable (la proposición siguiente resume lo anterior, para una demostración ver a Palis y de Melo (Palis y de Melo, 1978), en la demostración es usada la Proposición 1.28).

Proposición 2.12. $\mathfrak{X}^r(M)$ es un espacio de Baire separable y el conjunto de campos vectoriales de clase C^∞ es denso en $\mathfrak{X}^r(M)$.

Se define ahora, la equivalencia topológica, conjugación y la estabilidad local para campos vectoriales.

Definición 2.11. Sea $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$. Se dice que X y Y son **topológicamente equivalentes**, si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación de las órbitas, es decir, dados $p \in M$ y $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $0 < t < \delta$, se tiene $h \circ X_t(p) = Y_{\tilde{t}} \circ h(p)$ para algún $0 < \tilde{t} < \varepsilon$.

La definición anterior establece una relación de equivalencia en $\mathfrak{X}^r(M)$. Una relación mas fuerte que la anterior es la conjugación entre flujos de campos de vectores.

Definición 2.12. Dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ son **conjugados** si existe una equivalencia topológica h que preserva el parámetro t , es decir, $h \circ X_t(p) = Y_t \circ h(p)$ para todo $p \in M$ y $t \in \mathbb{R}$.

Las definiciones anteriores son referidas a aspectos globales. Se definen ahora, los aspectos locales.

Definición 2.13. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p, q \in M$. Se dice que X y Y son **topológicamente equivalentes en p y q** respectivamente, si existen vecindades V_p y W_q

en M y un homeomorfismo $h : V_p \rightarrow W_q$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y , preservando la orientación de las órbitas y $h(p) = q$.

Definición 2.14. Sean $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$. Se dice que X es **localmente estable en p** si existen vecindades $\mathcal{N}(X)$ de X en $\mathfrak{X}^r(M)$ y $U(p) \subset M$ tales que, para cada $Y \in \mathcal{N}(X)$, X en p es topológicamente equivalente a Y en q , para algún $q \in U(p)$.

El teorema siguiente describe el comportamiento local de las órbitas en la vecindad de un punto regular. La demostración puede ser hallada en Palis y de Melo (Palis y de Melo, 1978).

Teorema 2.4 (Flujo tubular). *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ un punto regular de X . Sean $C = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid |x_i| < 1, i = 1, \dots, m\}$ y X_C un campo en C definido por $X_C(\tilde{p}) = (1, 0, \dots, 0)$. Entonces existe un difeomorfismo de clase C^r , $h : V_p \rightarrow C$, donde V_p es una vecindad de p en M , llevando trayectorias de X en trayectorias de X_C .*

Demostración. Sea $x : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ una carta local alrededor del punto p con $x(p) = 0$. Sea x_*X el campo vectorial de clase C^r inducido por X sobre U_0 . Como $X(p) \neq 0$, se tiene que $x_*X(0) \neq 0$. Sea $\varphi : [-\tau, \tau] \times V_0 \rightarrow U_0$ el flujo local de x_*X y sea $H = \{\omega \in \mathbb{R}^m \mid \langle \omega, x_*X(0) \rangle = 0\}$, que es un subespacio isomorfo a $\mathbb{R}^{m-1}$. Sea $\psi : [-\tau, \tau] \times S \rightarrow U_0$ la restricción de φ to $[-\tau, \tau] \times S$ donde $S = H \cap V_0$. Ahora, tome una base $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R} \times H \approx \mathbb{R}^m$, donde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ and $e_2, \dots, e_m \in \{0\} \times H$. Se sigue de esto que

$$\begin{aligned} d\psi(0, 0)e_1 &= x_*X(0) \quad (\text{por la definición de flujo local}) \\ d\psi(0, 0)e_j &= e_j, \quad j = 2, \dots, m, \end{aligned}$$

una vez que $\psi(0, y) = y$ para todo $y \in S$.

Así, $d\psi(0, 0) : \mathbb{R} \times H \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Por el Teorema de la función inversa, ψ es un difeomorfismo de una vecindad de $(0, 0)$ en $[-\tau, \tau] \times S$ sobre una vecindad de 0 en $\mathbb{R}^m$. Por tanto, si $\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño, entonces $C_\varepsilon = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times H \mid |t| < \varepsilon \text{ y } \|x\| < \varepsilon\}$ y $\tilde{\psi} : C_\varepsilon \rightarrow U_0$ es la restricción de ψ a C_ε , entonces $\tilde{\psi}$ es un difeomorfismo C^r sobre su imagen que es un abierto de U_0 . Además de eso, $\tilde{\psi}$ lleva órbitas del campo paralelo X_{C_ε} en C_ε en órbitas de

x_*X . Considere ahora, el difeomorfismo C^∞ , $f : C \rightarrow C_\varepsilon$, $f(y) = \varepsilon y$, y defina $h^{-1} = x^{-1} \circ \tilde{\psi} \circ f : C \rightarrow M$. Entonces, $h : x^{-1} \circ \tilde{\psi}(C_\varepsilon) \rightarrow C$ es un difeomorfismo de clase C^r que satisface las condiciones del teorema. $\square$

Observación 2.2. El difeomorfismo $\tilde{h}^{-1} : C_\varepsilon \rightarrow M$ definido por $\tilde{h}^{-1} = x^{-1}\tilde{\psi}$, existente en el Teorema 2.4, lleva órbitas del campo unitario paralelo X_{C_ε} en órbitas del campo X preservando el parámetro t .

El teorema anterior implica que cualquier campo vectorial en $\mathfrak{X}^r(M)$ es localmente estable en puntos regulares. El resultado es enunciado a seguir.

Corolario 2.3. *Si $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p, q \in M$ son puntos regulares de X y Y respectivamente, entonces X es equivalente a Y en p y q .*

Corolario 2.4 (Estabilidad local en puntos regulares). *Si $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ es un punto regular de X , entonces X es localmente estable en p .*

2.2. Campos vectoriales lineales

En esta sección se lidiará con campos vectoriales lineales. Estos serán de mucha utilidad para definir los puntos (fijos y singulares) hiperbólicos para campos vectoriales (no lineales) y difeomorfismos de clase C^r , $r \geq 1$, sobre variedades diferenciales compactas.

Se inicia esta sección recordando algunos resultados del álgebra lineal. Denote por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ dotado de la norma del supremo (o norma uniforme), esto es,

$$\|L\| = \sup\{\|Lv\| \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\| = 1\}$$

donde $\|v\|$, con $v \in \mathbb{R}^n$, es una norma cualquiera en $\mathbb{R}^n$. Así definido, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, es un espacio de Banach.

Denote, también, por $GL(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todos los isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Más adelante se obtendrán resultados genéricos de campos lineales hiperbólicos e isomorfismos lineales hiperbólicos dentro de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $GL(\mathbb{R}^n)$ respectivamente.

Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y k un entero positivo, denotemos por L^k a la aplicación $L \circ \dots \circ L$. Es sencillo ver que $\|L^k\| \leq \|L\|^k$. Considere la sucesión de aplicaciones lineales $E_m = \sum_{k=0}^m L^k/k!$, donde L^0 es la aplicación identidad.

Lema 2.1. *La sucesión $\{E_m\}$ es convergente.*

Demostración. La sucesión de números reales $S_m = \sum_{k=0}^m \|L^k\|/k!$ es de Cauchy y converge a $e^{\|L\|}$. Además,

$$\|E_{m+m'} - E_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{m+m'} L^k/k! \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{m+m'} \|L\|^k/k! = \|S_{m+m'} - S_m\|.$$

De esto se obtiene que $\{E_m\}$ es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, al ser $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un espacio de Banach, se concluye que la sucesión $\{E_m\}$ es convergente. $\square$

Definición 2.15. Dado una aplicación lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Se define la exponencial de L al elemento $e^L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$e^L := \sum_{k=0}^{\infty} L^k/k!.$$

Lema 2.2. *Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definido por $\alpha(t) = e^{tL}$. Entonces α es diferenciable y $\alpha'(t) = Le^{tL}$.*

Demostración. Sea $\alpha_m(t) = I + tL + (t^2/2!)L^2 + \dots + (t^m/m!)L^m$, esta es diferenciable y

$$\alpha'_m(t) = L + tL^2 + \dots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}L^{m-1} = L\alpha_{m-1}(t).$$

Como $\alpha_{m-1}(t)$ converge uniformemente para e^{tL} se tiene que $\alpha'_m(t) \rightarrow Le^{tL}$, uniformemente. Por lo tanto α es diferenciable y $\alpha'(t) = Le^{tL}$. $\square$

Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ una aplicación lineal. Visto de este modo, considérese L como un campo vectorial lineal sobre $\mathbb{R}^n$. La correspondiente ecuación diferencial, asociada a este campo, es

$$x' = Lx,$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.13. *Sea L un campo lineal de $\mathbb{R}^n$. La aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(t, x) = e^{tL}x$ es el flujo del campo L .*

Demostración. En efecto, al ser la aplicación $T : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dado por $T(L, x) = Lx$ una aplicación bilineal y la aplicación $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dado por $\alpha(t) = e^{tL}$ diferenciable, se obtiene por la regla de la cadena que $\varphi = T \circ \alpha$ es diferenciable. Además, por el Lema 2.2 se tiene que $\partial/\partial t \varphi(t, x) = L\varphi(t, x)$. Como $\varphi(0, x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, la proposición está demostrada. $\square$

Considere ahora, al espacio vectorial $\mathbb{C}^n$ de las n -uplas de números complejos, con la estructura de espacio vectorial usual. Un elemento de $\mathbb{C}^n$ es escrito de la forma $u + iv$ con $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $a + ib \in \mathbb{C}$, entonces el producto es dado por $(a + ib)(u + iv) = (au - bv) + i(av + bu)$. Denote por $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ al espacio vectorial complejo de las aplicaciones lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ con la norma usual

$$\|L\| = \sup\{\|Lv\| : v \in \mathbb{C}^n, \|v\| = 1\}.$$

Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, se define el complexificado de L por la aplicación $L_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ dado por $L_{\mathbb{C}}(u + iv) = L(u) + iL(v)$ (vea la Definición B.4). La aplicación $L_{\mathbb{C}}$ es $\mathbb{C}$ -lineal, es decir, $L_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Sea $\mathcal{C} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ la aplicación que asocia a cada operador L , real, su complexificado $L_{\mathbb{C}}$.

Proposición 2.14. *La aplicación $\mathcal{C} : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ cumple las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{C}(L + T) = \mathcal{C}(L) + \mathcal{C}(T), \quad \mathcal{C}(\alpha L) = \alpha \mathcal{C}(L),$
2. $\mathcal{C}(LT) = \mathcal{C}(L)\mathcal{C}(T),$
3. $\mathcal{C}(e^L) = e^{\mathcal{C}(L)} \quad y$
4. $\|\mathcal{C}(L)\| = \|L\|$

para cualesquiera $L, T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.5 (Forma Canónica de Jordan Real). *Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ una aplicación lineal. Entonces existe una base de $\mathbb{R}^n$ en la cual la matriz asociada a L tiene la forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \circ \\ & \ddots & & & \\ & & A_r & & \\ & & & B_1 & \\ & \circ & & & \ddots & \\ & & & & & B_s \end{pmatrix}$$

donde,

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \circ \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \circ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \quad \text{para } i=1, \dots, r \quad \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R}$$

y

$$B_j = \begin{pmatrix} C_j & & & \circ \\ I & C_j & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \circ & & I & C_j \end{pmatrix} \quad C_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

Las submatrices $A_1, \dots, A_r$ y $B_1, \dots, B_s$ son determinadas de manera única; salvo el orden de ellas.

Corolario 2.5. Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Dado un $\varepsilon > 0$ existe una base de $\mathbb{R}^n$ en la cual la matriz asociada a L , como en el teorema anterior, tiene a los elementos I iguales a

$$I = I_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Lema 2.3. Si $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ son tales que $AB = BA$, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.

Demostración. Sea $S_m(t) = I + tA + \dots + (t^m/m!)A^m$. Al tenerse que $AB = BA$, se obtiene $A^k B = B A^k$ y, por tanto, $S_m(t)B = B S_m(t)$. Como $S_m(t) \rightarrow e^{tA}$ se infiere que $e^{tA}B = B e^{tA}$. Tome ahora $x \in \mathbb{R}^n$ y considere las curvas $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dados por $\alpha(t) = e^{t(A+B)}x$ y $\beta(t) = e^{tA}e^{tB}x$. Por el Lema 2.2 y como se tiene $e^{tA}B = B e^{tA}$ se infiere que la derivada $\alpha'(t) = (A+B)e^{t(A+B)}x = (A+B)\alpha(t)$ y $\beta'(t) = A e^{tA}e^{tB}x + e^{tA}B e^{tB}x = A e^{tA}e^{tB}x + B e^{tA}e^{tB}x = (A+B)\beta(t)$. De este modo se tiene que α y β son curvas integrales del campo lineal $A+B$, las cuales satisfacen las mismas condiciones iniciales $\alpha(0) = \beta(0) = x$. Luego, por la Proposición 2.5 (existencia y unicidad), se tiene que $\alpha(t) = \beta(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular,

$e^{A+B}x = e^A e^B x$. Como la igualdad anterior se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se obtiene que $e^{A+B} = e^A e^B$. $\square$

Se define ahora el espectro de una aplicación lineal relacionándolo con su complexificado.

Definición 2.16. Sea $L \in \mathcal{L}(K)$, donde K es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El espectro de L se define como el conjunto $sp(L) := \{\lambda \in K \mid (A - \lambda I) \text{ no sea invertible}\}$. Es decir, $sp(L)$ es el conjunto de autovalores de L .

De acuerdo a la definición anterior, si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ considérese el espectro de L como el espectro de su complexificado $L_{\mathbb{C}}$ (ver Definición B.4). Donde los autovalores de $L_{\mathbb{C}}$ coinciden con el conjunto de raíces del polinomio característico de L . Además, la forma canónica de $L_{\mathbb{C}}$ es representada por

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & A_r \end{pmatrix}, \text{ donde } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \bigcirc \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \bigcirc & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

y los λ_i son autovalores de $L_{\mathbb{C}}$.

Es claro que los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal con multiplicidad igual al número de veces que aparecen.

Proposición 2.15. Sean $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y λ un autovalor de $L_{\mathbb{C}}$, entonces e^{λ} es un autovalor de e^L de la misma multiplicidad.

Definición 2.17. Un campo lineal $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es llamado **hiperbólico** si ninguno de sus autovalores tiene parte real nula. El número de autovalores de L con parte real negativa es denominado el índice de L . Denote por $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todos campos lineales hiperbólicos.

Observe que la única singularidad de un campo lineal hiperbólico es el origen.

El siguiente resultado es de mucha importancia, ya que se obtiene una descomposición de subespacios en suma directa en $\mathbb{R}^n$, donde el comportamiento de L es muy marcada.

Proposición 2.16. *Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un campo lineal hiperbólico, entonces existe una descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, donde E^s y E^u son subespacios invariantes por L y por el flujo asociado a L tales que los autovalores de $L^s = L|_{E^s}$ tienen parte real negativa y los autovalores de $L^u = L|_{E^u}$ tienen parte real positiva.*

Demostración. En efecto: Tome una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ en la cual la matriz asociada a L está en la forma canónica de Jordan. Ordenando de manera conveniente los elementos de esta base, la matriz asociada a L tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & A_{s'} & & & & & & \\ & & & B_1 & & & & & \bigcirc \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & B_{s''} & & & \\ & & & & & & C_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & C_{u'} \\ & & & & & & & & & D_1 \\ & \bigcirc & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & D_{u''} \end{pmatrix}$$

donde

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \bigcirc \\ 1 & & \lambda_i & \\ & \ddots & & \ddots \\ \bigcirc & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_i < 0,$$

$$B_j = \begin{pmatrix} M_j & & \bigcirc \\ I & & M_j & \\ & \ddots & & \ddots \\ \bigcirc & & I & M_j \end{pmatrix}, \text{ con } M_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\alpha_j < 0$

$$C_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & \bigcirc \\ 1 & & \lambda_k & \\ & \ddots & & \ddots \\ \bigcirc & & 1 & \lambda_k \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_k > 0,$$

$$D_l = \begin{pmatrix} M_l & & \bigcirc \\ I & & M_l & \\ & \ddots & & \ddots \\ \bigcirc & & I & M_l \end{pmatrix}, \text{ con } M_l = \begin{pmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y $\alpha_l < 0$

Sea E^s el espacio generado por $\{e_1, \dots, e_s\}$ donde $\{e_1, \dots, e_s\}$ corresponden a los subespacios invariantes asociados a $A_1, \dots, A_{s'}, B_1, \dots, B_{s''}$. Sea ahora E^u el subespacio generado por $e_{s+1}, \dots, e_n$. Es fácil ver que E^s y E^u son invariantes por L y que

la matriz asociada de L^s , en la base $e_1, \dots, e_s$, es

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & \\ & & A_{s'} & & \\ & & & B_1 & \ddots \\ \bigcirc & & & & B_{s''} \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada de L^u , en la base $e_{s+1}, \dots, e_n$, es

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & & \bigcirc \\ & \ddots & & & \\ & & C_{u'} & & \\ & & & D_1 & \ddots \\ \bigcirc & & & & D_{u''} \end{pmatrix}$$

con lo que se concluye la demostración. $\square$

Sea $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un campo hiperbólico lineal. Si se denota por L_t al flujo de L entonces $L_1 = e^L$ y, al tenerse que L no posee autovalor con parte real nula, se tiene por la Proposición 2.15 que L_1 no posee autovalores en el círculo unitario complejo S^1 . Esto motiva la siguiente definición, donde $GL(\mathbb{R}^n)$ denota al conjunto de todos los isomorfismos lineales de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$.

Definición 2.18. Un isomorfismo lineal $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ es llamado hiperbólico si la parte real de los autovalores de A no intersecta al círculo unitario $S^1 \subset \mathbb{C}$. En particular, el difeomorfismo inducido en el tiempo 1 por el flujo de un campo lineal hiperbólico es un isomorfismo hiperbólico. Denote por $H(\mathbb{R}^n)$ el conjunto de todos los isomorfismos hiperbólicos.

Proposición 2.17. Sea $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ un isomorfismo hiperbólico, entonces existe una descomposición en suma directa $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$, tal que E^s y E^u son subespacios invariantes por A y los autovalores de $A^s = A|_{E^s}$ y $A^u = A|_{E^u}$ son los autovalores de A de norma menor que 1 y mayor que 1 respectivamente.

La demostración de la proposición anterior es semejante a la demostración de la Proposición 2.16.

Los resultados que se dan a continuación son en su mayoría desarrollados en un curso básico de sistemas dinámicos (por ejemplo en (Palis y de Melo, 1978)), por lo que se omitirán algunas demostraciones.

Proposición 2.18. Sea $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ un isomorfismo hiperbólico, entonces existe una norma $\|\cdot\|_1$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\|A^s\|_1 < 1$ y $\|(A^u)^{-1}\|_1 < 1$, esto es, A^s es una contracción y A^u es una expansión.

Proposición 2.19. Sea L un campo lineal hiperbólico y $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ una descomposición como en la Proposición 2.16, entonces $L_t(x)$ converge para el origen si $x \in E^s$ y $t \rightarrow +\infty$, y $L_t(x)$ converge para el origen si $x \in E^u$ y $t \rightarrow -\infty$.

Proposición 2.20. Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y λ es un autovalor de $A_{\mathbb{C}}$ (Definición B.4), entonces e^λ es un autovalor de e^A de la misma multiplicidad.

Proposición 2.21. $H(\mathbb{R}^n)$ es abierto y denso en $GL(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. i) Se demostrará que $H(\mathbb{R}^n)$ es abierto. Sea $A \in H(\mathbb{R}^n)$ cualquiera. Para probar esto se debe demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B(\delta, A) = \{L \in H(\mathbb{R}^n) \mid \|A - L\| < \delta\}$ esté contenida en $H(\mathbb{R}^n)$. En efecto: sea $\lambda \in S^1$, es claro que λ no es autovalor del complexificado $\tilde{A}$, luego $\det(\tilde{A} - \lambda I) \neq 0$ donde I es la identidad de $\mathcal{L}(\mathbb{C})$. Al ser $\det : \mathcal{L}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua, existen $\delta_\lambda > 0$ y una vecindad V_λ de λ en $\mathbb{C}$ tal que, si $\|B - A\| < \delta_\lambda$ y $\mu \in V_\lambda$, entonces $\det(\tilde{B} - \mu I) \neq 0$. Considere ahora un cubrimiento por conjuntos abiertos $\{V_\lambda, \lambda \in S^1\}$ de S^1 y sea $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_n}$ un subcubrimiento finito. Tome $\delta = \min\{\delta_{\lambda_1}, \dots, \delta_{\lambda_n}\}$. Si $B \in B(\delta, A)$, es decir $\|B - A\| < \delta$, y $\mu \in S^1$ entonces $\mu \in V_\lambda$, para algún j y por tanto $\det(\tilde{B} - \mu I) \neq 0$. Luego, $B \in H(\mathbb{R}^n)$, como se quería.

ii) Densidad. Se demostrará que $GL(\mathbb{R}^n) \subset \overline{H(\mathbb{R}^n)}$, es decir, dado $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ se debe demostrar que $A \in \overline{H(\mathbb{R}^n)}$ o, lo que equivale a demostrar, que para cada $\varepsilon > 0$ se tenga $B(\varepsilon, A) \cap H(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$. Sean así, $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores. Es sencillo probar que, si $\mu \in \mathbb{R}$ los autovalores de $A + \mu I$ son $\lambda_1 + \mu, \dots, \lambda_n + \mu$. Sean $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ los autovalores de A que no pertenecen a S^1 y considere los siguientes números: $\delta_1 = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$; $\delta_2 = \min\{|1 - |\lambda_{i_1}||, \dots, |1 - |\lambda_{i_r}||\}$; $\delta_3 = \min\{|\alpha|; \alpha + i\beta \text{ es autovalor de } A \text{ con } \alpha^2 + \beta^2 = 1 \text{ y } \alpha \neq 0\}$.

Es claro que $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ y $\delta_3 > 0$. Si $\mu = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ y λ es autovalor de A , entonces $\lambda + \mu \notin S^1$ y por tanto $B = A + \mu I$ es hiperbólico. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, tome $\mu < \varepsilon$ y $\mu < \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces B es hiperbólico y $\|B - A\| = \|\mu I\| < \varepsilon$. Esto muestra que $B(\varepsilon, A) \cap H(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 2.22. $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es abierto y denso en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. i) *Abertura.* Considere la aplicación exponencial continua dada por $\exp : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$. Es posible mostrar que si λ es un autovalor de $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ entonces e^λ es un autovalor de $e^A \in GL(\mathbb{R}^n)$ (Proposición 2.20). De esto se tiene que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \exp^{-1}(H(\mathbb{R}^n))$ y por la Proposición 2.21 se obtiene que $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ es abierto.

ii) *Densidad.* Considere $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Sea

$$\delta_1 = \min\{|\alpha| : \text{donde } \lambda = \alpha + i\beta \text{ es autovalor de } A \text{ con } \alpha \neq 0\}.$$

Tome $\delta = \min\{\varepsilon, \delta_1\}$ y $B = A + \delta I$. Es claro que B es hiperbólico y $\|B - A\| < \varepsilon$. $\square$

Lema 2.4. Sea $L \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ de índice n . Existe una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ tal que, si $S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n; \|v\| = 1\}$, entonces $L(x)$ es transversal a S^{n-1} para todo $x \in S^{n-1}$.

Proposición 2.23. Si L y T son campos lineales de $\mathbb{R}^n$ de índice n , entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h \circ L_t = T_t \circ h$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.24. Si L y T son campos lineales hiperbólicos. Entonces L y T son topológicamente equivalentes si y sólo si tienen el mismo índice.

Proposición 2.25. Los autovalores de un operador $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dependen continuamente de L .

Corolario 2.6. Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es un campo hiperbólico, entonces existe una vecindad $V \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de L tal que todo $t \in V$ tiene el mismo índice que L .

2.3. Singularidades hiperbólicas

En esta sección se estudiarán las singularidades hiperbólicas y las propiedades de los campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, respecto a estas. Se definirá un subconjunto $\mathcal{G} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo $X \in \mathcal{G}$ tenga una estructura local de órbitas estables y simples.

Se sabe que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ definido sobre una variedad diferenciable $M^m \subset \mathbb{R}^k$ tiene la forma siguiente $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, el cual asocia a cada $p \in M$

el vector $X(p) \in T_p M$, donde $T_p M \subset \mathbb{R}^k$ es un espacio vectorial de dimensión m . Si nuestra variedad diferenciable M fuera abstracta tendríamos, debido al teorema de Whitney, que ésta es embebida en un espacio euclidiano.

Observación 2.3. Aquí se verá cual es el aspecto y naturaleza de la derivada del campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ en una singularidad $p \in M$. Se tiene que el campo $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ es tal que $X(q) \in T_q M$ para cada $q \in M$. Al derivar X en la singularidad p se obtiene lo siguiente $dX(p) : T_p M \rightarrow dX(p)(T_p M) \subset \mathbb{R}^k$. Se mostrará que $dX(p)(T_p M) \subset T_p M$. En efecto: Sea $w \in dX(p)(T_p M)$, entonces existe $v \in T_p M$ tal que $dX(p)v = w$. Ahora, como $v \in T_p M$ existe una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Componiendo X y α se tiene $X \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^k$ con $X(\alpha(0)) = X(p) = 0$ y $(X \circ \alpha)'(0) = dX(p)v = w$. De esto, w tiene la siguiente forma,

$$\begin{aligned} w &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(X \circ \alpha)(t) - (X \circ \alpha)(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(X \circ \alpha)(t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(\alpha(t))}{t}, \end{aligned}$$

se observa que $X(\alpha(t)) \in T_{\alpha(t)} M$ y como $T_{\alpha(t)} M$ es un espacio vectorial, es más es un conjunto cerrado, se tiene que $\frac{X(\alpha(t))}{t} \in T_{\alpha(t)} M$. Además, se observa que $T_{\alpha(t)} M$ tiende a $T_p M$ cuando $t \rightarrow 0$, por lo que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(\alpha(t))}{t} \in T_p M$. De este modo $w \in T_p M$ y por tanto,

$$dX(p) : T_p M \rightarrow T_p M.$$

Recuerde además que $dX(p)$ es una aplicación lineal.

Definición 2.19. Un punto $p \in M$ es llamado una singularidad simple de un campo $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ si $dX(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ no posee autovalor nulo.

Proposición 2.26. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad simple de X . Entonces existen vecindades $\mathcal{N}(X) \subset \mathfrak{X}^r(M)$, $U_p \subset M$ de X y p respectivamente y una aplicación continua $\sigma : \mathcal{N}(X) \rightarrow U_p$ que asigna a cada campo $Y \in \mathcal{N}(X)$ la única singularidad de Y en U_p . En particular, una singularidad simple es aislada.

Demostración. Aquí se hará uso del Teorema A.1 (el Teorema de la funciones implícitas en espacios de Banach). Al ser este un resultado local, es posible, usan-

do una carta local, suponer que $M = D^m \subset \mathbb{R}^m$, $p = 0$ y , por tanto, X es un campo vectorial en $\mathfrak{X}^r(D^m)$, donde $D^m = \{x \in \mathbb{R}^m; \|x\| \leq 1\}$. Como D^m es un espacio de Banach tenemos que $\mathfrak{X}^r = \mathfrak{X}^r(D^m)$ es un espacio de Banach. Sea $\varphi : D^m \times \mathfrak{X}^r \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $\varphi(x, Y) = Y(x)$, así definida la función φ es de clase C^r . Además, $\varphi(0, X) = 0$ y $\partial_1 \varphi(0, X) = dX(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo, por hipótesis. Ahora, por el teorema de la función implícita en espacios de Banach (Teorema A.1), existen vecindades U de 0, $\mathcal{N}$ de X y una única aplicación $\sigma : \mathcal{N}(X) \rightarrow U$ de clase C^r tal que $\varphi(\sigma(Y), Y) = 0$. Por tanto, si $x \in U$, entonces $Y(x) = 0$ si y sólo si $x = \sigma(Y)$. Además, al ser $dX(0)$ un isomorfismo y el conjunto de los isomorfismos es abierto, Proposición 2.13, podemos, disminuyendo $\mathcal{N}$ y U si fuera necesario, suponer que $dY(\sigma(Y))$ es un isomorfismo. De lo anterior se tiene que $\sigma(Y)$ es una singularidad simple de Y . $\square$

Ahora, se caracterizará una singularidad simple de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ en términos de transversalidad . Para ello, recuerde que el fibrado tangente tiene la forma $TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_p M\}$ y que la sección nula es definida por $M_0 = \{(p, 0) \mid p \in M\}$. Así definida, M_0 es una subvariedad de TM difeomorfa a la variedad M .

Una sección local de TM es un subconjunto $\mathcal{S} \subset TM$, tal que a todo $p \in M$ se le asocia un único $v_p \in T_p M$, es decir, $\mathcal{S} = \{(p, v_p) \in TM \mid p \in M \text{ y } v_p \in T_p M\}$. Una sección local es también, por su definición, una aplicación $Y : M \rightarrow TM$ dada por $Y(p) = (p, v_p)$. Además, es posible asociarle un campo vectorial $X : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, definida por $X(p) = v_p$. De este modo la sección local Y puede ser definida por $Y(p) = (p, X(p))$.

Proposición 2.27. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p_0 \in M$ una singularidad de X . El punto p_0 es una singularidad simple de X si y sólo si la aplicación $p \rightarrow (p, X(p))$, la sección local, de M en TM es transversal a la sección nula M_0 en p_0 .*

Demostración. Sea $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una carta local de M en p_0 con $x(p_0) = 0$. Sea $TU = \{(p, v) \in TM \mid p \in U\}$. La aplicación $Tx : TU \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ definida por $Tx(p, v) = (x(p), D_x(p) v)$ es, como se vio en la Proposición 1.20, una carta local de TM . Observe el diagrama siguiente: donde π_2 es la proyección $\pi_2(x, y) = y$.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{X} & TU \\
 & & \downarrow Tx \\
 & & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Considere la aplicación $h = \pi_2 \circ Tx \circ X$. Entonces X es transversal a M_0 en p_0 si y sólo si p_0 es un punto regular de h , es decir, si $dh(p_0) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Por otro lado $dh(p_0) = dx(p_0) dX(p_0)$. Así, $dh(p_0)$ es un isomorfismo si y sólo si $dX(p_0)$ es un isomorfismo, lo cual es verdad y prueba la proposición. (Recuerde que la carta x es un difeomorfismo en el sentido de variedades y por tanto $dx(p_0)$ es un isomorfismo). $\square$

A continuación se denotará por $\mathcal{G}_0 \subset \mathfrak{X}^r(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales cuyas singularidades son todas simples, es decir,

$$\mathcal{G}_0 = \{X \in \mathfrak{X}^r(M) \mid \text{la sección local } X : M \rightarrow TM \text{ es transversal a } M_0\}.$$

Al ser una singularidad simple aislada y dado que M es compacta; se observa que si $X \in \mathcal{G}_0$, entonces X tiene un número finito de singularidades.

Proposición 2.28. $\mathcal{G}_0$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$.

Demostración. i) Abertura. Recuerde, por la Proposición 1.26, que el conjunto de las aplicaciones de clase C^r de M en TM transversales a M_0 (no necesariamente campos vectoriales), es abierto en $C^r(M, TM)$. Es claro que $M_0 = \{(p, 0) \mid p \in M\}$ es cerrado en la topología producto. Luego, por lo anterior, $\mathcal{G}_0$ es abierto.

ii) Densidad. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Se demostrará que es posible hallar un campo vectorial Y transversal a M_0 arbitrariamente próximo de X . En efecto: Por el Teorema 1.15 (Teorema de transversalidad de Thom), existen aplicaciones $Y : M \rightarrow TM$ transversales a M_0 arbitrariamente próximos de X . La aplicación Y , en principio, podría no ser un campo vectorial, pues si se denota por $\pi : TM \rightarrow M$ la aplicación $\pi(p, v) = p$, podría ocurrir que $\pi(Y(p)) \neq p$ para algún $p \in M$. Se sabe que $\pi \circ X = id_M$, si Y es suficientemente próximo de X , entonces $\varphi = \pi \circ Y$ estará próximo de id_M y, por tanto, será un difeomorfismo una vez que el conjunto

de difeomorfismos de M es abierto en $C^r(M, M)$ (por la Proposición 1.28). Sea así, $Z = Y \circ \varphi^{-1}$. Se tiene que $\pi \circ Z = \pi \circ Y \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1} = id_M$ y, por tanto, Z es un campo de vectores en M . Ahora, como Y es transversal a M_0 y φ^{-1} es un difeomorfismo, se sigue que Z es transversal a M_0 . Tomando Y próximo a X , Z estará próximo a X . $\square$

Observación 2.4. Note que por la Proposición 2.26, se tiene que toda singularidad simple es aislada y por tanto toda singularidad hiperbólica de un campo vectorial es aislado.

Demostración. En efecto, el resultado es consecuencia del Teorema 1.7 y del hecho de que la intersección de M y $X(M)$ consiste de puntos aislados, por ser transversales. $\square$

Definición 2.20. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad. El punto p es llamado una singularidad hiperbólica del campo X si $dX(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ es un campo lineal hiperbólico, es decir, $dX(p)$ no posee autovalor con parte real nula (equivalentemente, que los elementos del espectro $Sp(DX(p))$ tienen parte real no nula).

Denote por $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales cuyas singularidades son todas hiperbólicas. Es claro, por definición, que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0$.

Teorema 2.6. $\mathcal{G}_1$ es abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$.

Demostración. Recuerde que $\mathcal{G}_0$ abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$ y $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_0$. Así, es suficiente mostrar que $\mathcal{G}_1$ es abierto y denso en $\mathcal{G}_0$, y a partir de ello, por resultados topológicos, $\mathcal{G}_1$ será abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$. En efecto:

Sea $X \in \mathcal{G}_0$. Se tiene, por la Proposición 2.26, que las singularidades de X son aisladas, y de la compacidad de M , se tiene que X posee un número finito de singularidades $p_1, p_2, \dots, p_k \in M$. Además, existen vecindades U_j de p_j y aplicaciones continuas $\rho_j : \mathcal{N}(X) \rightarrow U_j$ tales que $\rho_j(Y)$ es la única singularidad de Y en U_j , $j = 1, \dots, k$. Es posible también suponer, reduciéndose las vecindades U_j si fuera necesario, que las vecindades U_j son dos a dos disjuntas.

Note que si $p \in M \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j$ entonces $X(p) \neq 0$, y por la compacidad del conjunto $M \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j$ existe $\delta > 0$ tal que $\|X(p)\| > \delta$ para todo $p \in M \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j$. Por lo que,

disminuyendo $\mathcal{N}$ si fuera necesario, es posible suponer que si $Y \in \mathcal{N}$ entonces Y no tiene singularidades en $M \setminus \bigcup_{j=1}^k U_j$.

i) Abertura. Sea $X \in \mathcal{G}_1$. Como $A_j = dX(p_j)$ es un campo lineal hiperbólico y el conjunto de los campos hiperbólicos es abierto (ver Proposición 2.22) se tiene que existe una vecindad $\mathcal{V}(A_j) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ (es claro que A_j depende continuamente de X y p_j). Además, de la continuidad de las funciones ρ_i , disminuyendo $\mathcal{N}$ si fuera necesario, se tiene que $dY\rho_j(Y) \in \mathcal{V}(A_j)$. Es decir, $dY\rho_j(Y)$ es un campo lineal hiperbólico para todo $Y \in \mathcal{N}$. Luego, $\mathcal{N} \subset \mathcal{G}_1$, lo que prueba la apertura de $\mathcal{G}_1$.

ii) Densidad. Sea $X \in \mathcal{G}_0$. Se demostrará que $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$ para toda vecindad $\mathcal{N}$ de X . Sea así, $\mathcal{N}$ una vecindad de X cualquiera. Observe que si $\varepsilon > 0$ es muy pequeño, entonces $dX(p_j) + \varepsilon I$ es un campo lineal hiperbólico de $T_{p_j}M$ con una única singularidad hiperbólica en el origen, $j = 1, \dots, k$ (esto por la Proposición 2.22). Así, basta demostrar que dada una vecindad $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ de X , exista $Y \in \mathcal{N}_1$ tal que $Y(p) = 0$ y $dY(p_j) = dX(p_j) + \varepsilon I$.

Sea $V_j \subset U_j$ un vecindad de p_j y $x^j : V_j \rightarrow B(3) \subset \mathbb{R}^m$ una carta local con $x^j(p_j) = 0$ donde $B(3)$ es la bola de radio 3 y centro en el origen, como en la Proposición 1.18. Sea ahora $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación positiva de clase C^∞ tal que $\varphi(x) = 1$ si $x \in B(1)$ y $\varphi(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^m \setminus B(3)$. Recuerde que la expresión del campo X en la carta local x^j es $x_*^j X$ dada por $x_*^j X(q) = dx_{((x^j)^{-1}(q))}^j X((x^j)^{-1}(q))$. Defina el campo Y en M siendo

$$Y(p) = \begin{cases} X(p) & , \text{ si } p \in M - \bigcup_j V_j \\ d(x^j)_{(x^j(p))}^{-1} (x_*^j X(x^j(p)) + \varepsilon \varphi(x^j(p)) x^j(p)) & , \text{ si } p \in V_j. \end{cases}$$

Es sencillo ver que Y es un campo de clase C^∞ , $Y(p_j) = 0$ y $dY(p_j) = dX(p_j) + \varepsilon I$. Además, tomando ε suficientemente pequeño se tiene que $Y \in \mathcal{N}_1$, lo que prueba la proposición. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Hartman-Grobman y estabilidad local

En este Capítulo se encuentran los resultados centrales de la tesis, a saber, el Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 3.1), el Teorema 3.2 que garantiza la estabilidad local de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, en singularidades hiperbólicas, y el Teorema 3.3 (el teorema central de la tesis), donde se muestra que la estabilidad local en cada punto de la variedad diferenciable M es una propiedad genérica dentro del conjunto de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$. Además, en la Sección 3.3 se dará una aplicación de la estabilidad local a un caso global (estabilidad estructural) dentro de la teoría de sistemas dinámicos hiperbólicos de clase C^r , $r \geq 1$.

3.1. Teorema de Hartman-Grobman para campos vectoriales de clase C^r sobre variedades diferenciables

El Teorema de Hartman-Grobman establece que un campo vectorial X de clase C^r es localmente conjugado a su parte lineal en una singularidad hiperbólica. Para la demostración de este teorema se seguirá de cerca el libro “Introdução aos Sistemas Dinâmicos” por Palis y De Melo (Palis y de Melo, 1978), el libro de Irwin (Irwin, 2001), el de M. Peixoto (Peixoto, 1969) y el de Castro Jr. (Castro, 2009). El teorema

es enunciado como sigue.

Teorema 3.1 (Teorema de Hartman-Grobman para campos vectoriales). *Sean $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Sea $Y = dX(0) : T_p M \rightarrow T_p M$ un campo vectorial lineal sobre $T_p M$. Entonces existen vecindades U de p en M , V de 0 en $T_p M$ y un homeomorfismo $h : U \rightarrow V$ que lleva trayectorias de X en trayectorias de Y , esto es, $X|_U$ es topológicamente equivalente a $Y|_V$.*

Antes de demostrar el Teorema 3.1, es necesario demostrar algunos lemas previos. La demostración del Teorema 3.1 se presentará al final de esta sección. A partir de aquí la aplicación lineal identidad entre espacios vectoriales será representada por I .

Observación 3.1. Como el problema es local, es posible, usando una carta local, suponer que el campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ puede ser vista como un campo vectorial en espacios euclidianos, $\tilde{Y} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, con 0 como singularidad hiperbólica.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Sea $x : U \subset M \rightarrow x(U) = U_0 \subset \mathbb{R}^m$ una carta local alrededor de p con $x(p) = u$. Ahora, por la Observación 2.1, la expresión del campo vectorial X en la carta local tiene la forma $Y = dx \circ X \circ x^{-1} : U_0 \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ y es definido como $Y(z) = dx(x^{-1}(z)) \cdot (X \circ x^{-1})(z)$ (vea la Definición 2.3 y observe que $Y(u) = dx(x^{-1}(u)) \cdot X(x^{-1}(u)) = dx(p) \cdot X(p)$). Observe además, que el campo Y tiene la forma $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, en el lenguaje de variedades, reduciéndose simplemente a la forma $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ en el lenguaje usual sobre espacios euclidianos. Luego, al tenerse que p es una singularidad del campo X , se tiene que $Y(u) = dx(p)X(p) = 0$ y así el punto u es una singularidad del campo Y . Además, por la Observación 2.1, las órbitas de X son llevadas en órbitas de Y y viceversa.

Considere ahora, la traslación $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dada por $L(v) = u - v$. Es claro que $L(u) = 0$ y al definir $\tilde{Y} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\tilde{Y} = Y \circ L$ se tiene que el origen, $0_{\mathbb{R}^m}$, es una singularidad para el campo trasladado $\tilde{Y}$, es decir $\tilde{Y}(0) = Y(L(0)) = Y(u) = 0$.

La derivada del campo $\tilde{Y}$ en el origen es dada por

$$\begin{aligned} d\tilde{Y}(0) &= dY(u) \circ dL(0) = dY(u) \\ &= d(dx(p))(X(p)) \circ dX(p) \circ dx^{-1}(u) \\ &= dx(p) \circ dX(p) \circ dx^{-1}(u) \end{aligned}$$

(es claro que la derivada de una traslación es la identidad $id_{\mathbb{R}^m}$ y que por la Observación 2.3 se tiene que $dX(p) : T_p M \rightarrow T_p M$).

Ahora, recuerde que al ser x un difeomorfismo (vea el Ejemplo 1.5-2 y la Observación 1.6), se tiene que la aplicación $dx(p) : T_p M \rightarrow T_{x(p)} U_0 = \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo. Esto significa que las transformaciones lineales $dX(p)$ y $dY(u)$ son linealmente conjugadas e implica que tienen los mismos autovalores; por tanto, las propiedades del campo X se transfieren hacia el campo Y y viceversa. Así, como $d\tilde{Y}(0) = dY(u)$, se obtiene que 0 es una singularidad hiperbólica para $\tilde{Y}$. $\square$

Lema 3.1. *Sea E un espacio de Banach, $L \in \mathcal{L}(E, E)$ satisfaciendo $\|L\| \leq a < 1$ y $G \in \mathcal{L}(E, E)$ un isomorfismo con $\|G^{-1}\| \leq a < 1$. Entonces:*

- i) $(I + L)$ es un isomorfismo y $\|(I + L)^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$,
- ii) $(I + G)$ es un isomorfismo y $\|(I + G)^{-1}\| \leq a/(1 - a)$.

Demostración. i) Sea $y \in E$ fijo arbitrario. Defina $u : E \rightarrow E$ por $u(x) := y - L(x)$. Se tiene que

$$\|u(x_1) - u(x_2)\| = \|L(x_2 - x_1)\| \leq a \|x_2 - x_1\|,$$

lo que implica que $u : E \rightarrow E$ es una contracción. Ahora, por el Teorema de punto fijo para contracciones (Teorema A.3), existe un único $z \in E$ tal que $u(z) = z$. Es decir, existe un único $z \in E$ tal que $z = y - L(z)$; o lo mismo que exista un único $z \in E$ tal que $y = z + L(z) = (I + L)(z)$, lo que implica que $(I + L)$ es un isomorfismo. Sea ahora, $y \in E$ con $\|y\| = 1$ y sea $x \in E$ tal que $(I + L)^{-1}y = x$. Como $x + L(x) = y$ tenemos que $\|x\| - a\|x\| \leq 1$ y así $\|x\| \leq 1/(1 - a)$, de donde se concluye que $\|(I + L)^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$.

ii) $(I + G) = G(I + G^{-1})$. Como $\|G^{-1}\| \leq a < 1$, tenemos por i) que $I + G^{-1}$ es invertible. Luego, $(I + G)^{-1} = (I + G^{-1})^{-1} G^{-1}$ y así

$$\|(I + G)^{-1}\| \leq \|(I + G^{-1})^{-1}\| \|G^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - a} \cdot a = \frac{a}{1 - a},$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Si $A = df(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo lineal hiperbólico de $\mathbb{R}^m$ en si mismo, existe una descomposición invariante por A , $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ y una norma $\|\cdot\|$ en

$\mathbb{R}^m$, de modo que

$$\begin{aligned} \|A^s\| &\leq a < 1, & \text{donde} & \quad A^s = A|_{E^s} : E^s \rightarrow E^s, \\ \|(A^u)^{-1}\| &\leq a < 1, & \text{donde} & \quad A^u = A|_{E^u} : E^u \rightarrow E^u. \end{aligned}$$

Sea $C_b^0(\mathbb{R}^m)$ el espacio de Banach de aplicaciones continuas y limitadas de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^m$ con la norma uniforme: $\|u\| = \sup\{\|u(x)\|, x \in \mathbb{R}^m\}$. Como $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$, tenemos una descomposición en suma directa

$$C_b^0(\mathbb{R}^m) = C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s) \oplus C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u), \quad \text{con } v = v_s \oplus v_u, \quad \forall v \in C_b^0(\mathbb{R}^m),$$

donde $v_s = \pi_s \circ v$ y $v_u = \pi_u \circ v$ ($\pi_s : E^s \oplus E^u \rightarrow E^s$ y $\pi_u : E^s \oplus E^u \rightarrow E^u$ son las proyecciones naturales).

El Teorema de Hartman-Grobman (para campos vectoriales) vendrá como consecuencia del siguiente lema, el cual puede ser considerado como un prototipo del Teorema de Hartman-Grobman (inicialmente desarrollado para el caso discreto (difeomorfismos, que no será tratado en este capítulo), pero que también influye mucho en la demostración del caso continuo (campos vectoriales)).

Lema 3.2. *Si $A = df(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un isomorfismo hiperbólico, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si ϕ_1 y $\phi_2 \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ tienen constante de Lipschitz menor o igual a ε , entonces $(A + \phi_1)$ y $(A + \phi_2)$ son conjugados.*

Demostración. Se desea encontrar un homeomorfismo $h : E \rightarrow E$ tal que

$$h \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ h.$$

Se buscará una solución de esta ecuación funcional de la forma $h = I + w$, con $w \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ (esto es, h está una distancia finita de la identidad).

Manipulando la ecuación, se obtiene:

$$\begin{aligned} (I + w) \circ (A + \phi_1) &= (A + \phi_2) \circ (I + w) \Leftrightarrow \\ A + \phi_1 + w \circ (A + \phi_1) &= A + A \circ w + \phi_2 \circ (I + w) \Leftrightarrow \\ A \circ w - w \circ (A + \phi_2) &= \phi_1 - \phi_2 \circ (I + w). \end{aligned} \tag{3.1}$$

ahora, se mostrará que existe una única función $w \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ satisfaciendo (3.1). Para este fin, considere el operador lineal

$$\mathcal{L} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m) \quad \text{dado por} \quad \mathcal{L}(u) := A \circ u - u(A + \phi_1).$$

Afirmación. El operador $\mathcal{L}$ es invertible y $\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|/(1-a)$. En efecto, se tiene $\mathcal{L} = \bar{A} \circ \bar{\mathcal{L}}$, donde $\bar{\mathcal{L}} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$ es dado por $\bar{\mathcal{L}}(u) := u - A^{-1} \circ u \circ (A + \phi_1)$ y $\bar{A} : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$ es simplemente dado por $\bar{A}(u) = A \circ u$. Por tanto, como $\bar{A}$ es invertible, basta mostrar que $\bar{\mathcal{L}}$ también lo es, implicando que $\mathcal{L}$ sea invertible, y así obtener que $\mathcal{L}^{-1} = \bar{\mathcal{L}}^{-1} \circ \bar{A}^{-1}$.

Observe que $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ y $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$ son invariantes por $\bar{\mathcal{L}}$, pues E^s y E^u son invariantes por A^{-1} . De hecho, sea $y_s \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ (respectivamente, $y_u \in C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$), claramente $\bar{\mathcal{L}}(y_s) = y_s - A^{-1} \circ y_s \circ (A + \phi_1)$ es una aplicación con imagen contenida en E^s (respectivamente en E^u), luego pertenece a $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)$ (resp. a $C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)$).

De esto se puede escribir $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\mathcal{L}}^s + \bar{\mathcal{L}}^u$, donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}^s &:= \bar{\mathcal{L}}|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s)}, & \bar{\mathcal{L}}^s &: C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m, E^s), \\ \bar{\mathcal{L}}^u &:= \bar{\mathcal{L}}|_{C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u)}, & \bar{\mathcal{L}}^u &: C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m, E^u). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño de modo que $\varepsilon < \|A^{-1}\|^{-1}$ se tiene, del Lema de perturbación de isomorfismo (Lema A.2), que $A + \phi_1$ es un homeomorfismo y, por tanto, el operador $u_s \rightarrow A^{-1} \circ u_s \circ (A + \phi_1)$ es invertible y su inversa (que corresponde a componer a la izquierda con A^s y a la derecha con $(A + \phi_1)^{-1}$)

$$u_s \rightarrow A^s \circ u_s \circ (A + \phi_1)^{-1}$$

es una contracción con norma limitada por $a < 1$. Por la parte ii) del Lema 3.1 se tiene que $\bar{\mathcal{L}}^s$ es invertible y $\|(\bar{\mathcal{L}}^s)^{-1}\| \leq a/(1-a)$. Aplicando la parte i) del Lema 3.1 se concluye también que $\bar{\mathcal{L}}^u$ es invertible con $\|(\bar{\mathcal{L}}^u)^{-1}\| \leq 1/(1-a)$. Por tanto, $\mathcal{L}$ es

invertible, con norma

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| = \|\bar{\mathcal{L}}^{-1} \cdot \bar{A}^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a},$$

lo que demuestra la afirmación.

Se tiene así que la ecuación (3.1) es equivalente a

$$w = \mathcal{L}^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + w)). \quad (3.2)$$

La aplicación w satisface la ecuación (3.2) si, y sólo si, w es un punto fijo del operador $T : C_b^0(\mathbb{R}^m) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^m)$, cuya fórmula es dada por

$$T(u) := \mathcal{L}^{-1}(\phi_1 - \phi_2 \circ (I + u)).$$

Ahora, dados u_1 y u_2 pertenecientes a $C_b^0(\mathbb{R}^m)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(u_1) - T(u_2)\| &= \|\mathcal{L}^{-1}(\phi_1) - \mathcal{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + u_1)) - \mathcal{L}^{-1}(\phi_1) + \mathcal{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + u_2))\| \\ &= \|\mathcal{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + u_2)) - \mathcal{L}^{-1}(\phi_2 \circ (I + u_1))\| \\ &\leq \|\mathcal{L}^{-1}\| \cdot |\phi_2 \circ (I + u_1) - \phi_2 \circ (I + u_2)| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-a} \cdot \varepsilon \cdot |u_1 - u_2|. \end{aligned}$$

Nuevamente, si ε es suficientemente pequeño de modo que $\frac{\|A^{-1}\|}{1-a} \cdot \varepsilon < 1$, se obtiene que T es una contracción y, por tanto, posee un único punto fijo $u \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ que satisface la ecuación (3.2) y luego

$$(I + u) \circ (A + \phi_1) = (A + \phi_2) \circ (I + u).$$

Se concluye así, que (3.1) tiene una única solución en $C_b^0(\mathbb{R}^m)$.

Resta mostrar que $I + u$ es un homeomorfismo. Para esto, observe que con el mismo razonamiento utilizado anteriormente (permutando los papeles de ϕ_1 y ϕ_2) se puede concluir que la ecuación $(A + \phi_1) \circ (I + v) = (I + v) \circ (A + \phi_2)$ también tiene una única solución $v \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$.

Se afirma que $(I + u) \circ (I + v) = (I + v) \circ (I + u) = I$. De hecho,
 $(I + u) \circ (I + v) \circ (A + \phi_2) = (I + u) \circ (A + \phi_1) \circ (I + v) = (A + \phi_2) \circ (I + u) \circ (I + v).$

Por otro lado, como $(I + u) \circ (I + v) = I + v + u \circ (I + v)$, $v + u \circ (I + v) \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ e $I \circ (A + \phi_2) = (A + \phi_2) \circ I$, se tiene, por la unicidad de la solución de la ecuación $(I + w) \circ (A + \phi_2) = (A + \phi_2) \circ (I + w)$, que

$$(I + u) \circ (I + v) = I.$$

Análogamente, se tiene que $(I + v) \circ (I + u) = I$. Esto muestra que $I + u$ es un homeomorfismo que conjugua $A + \phi_1$ y $A + \phi_2$, lo que demuestra el lema. $\square$

Lema 3.3. *Sea $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación C^r , $r \geq 1$ de un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ conteniendo 0, con $f(0) = 0$ y sea $A = df_0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe una vecindad $U = U(0)$ y existe una extensión de $f|_U$ de la forma $A + \phi$, donde $\phi \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ es lipschitziana con constante de Lipschitz limitada por ε .*

Demostración. Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una función C^∞ con las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= 0 & \text{si} & & t \geq 1, \\ \alpha(t) &= 1 & \text{si} & & t \leq 1/2, \\ |\alpha'(t)| &\leq K, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad K > 2. \end{aligned}$$

Sea $f = A + \varphi$ con $\varphi(0) = 0$ y $d\varphi(0) = 0$. Considere $B(0, r)$ una bola de centro en el origen y radio $r > 0$ tal que $\|d\varphi(x)\| < \varepsilon/2K$, para todo $x \in B(0, r)$ (para la existencia de tal bola, usamos la continuidad de $d\varphi$, que viene del hecho de que f sea de clase C^1).

Tome $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, definido por $\phi(x) = \alpha(\|x\|/r) \cdot \varphi(x)$. De esto, se infiere que $\phi(x) = 0$ si $\|x\| \geq r$, lo que implica que ϕ es acotada en $\mathbb{R}^m$, como $\|\phi\| \leq \|\varphi\|$ se tiene, por la desigualdad del valor medio, que la constante de Lipschitz de $\varphi|_{B_r}$ es menor que $\varepsilon/2K$. Así,

$$\|\phi(x)\| \leq \|\varphi(x)\| = \|\varphi(x) - \phi(0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \|x - 0\| \leq \frac{\varepsilon}{2K} \cdot r, \quad \text{para todo } x \in B(0, r).$$

Aún más, se tiene que $\phi(x) = \varphi(x)$ si $\|x\| \leq r/2$, de donde se concluye que $A + \phi$ es extensión de $f|_{B(0, r/2)}$.

Ahora, se mostrará que ϕ es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o

igual a ε . De hecho, si $x_1, x_2 \in B(0, r)$, como $0 \leq \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \leq 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \left\| \alpha \left(\frac{\|x_1\|}{r} \right) \cdot \varphi(x_1) - \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \cdot \varphi(x_2) \right\| \\
&= \left\| \left(\alpha \left(\frac{\|x_1\|}{r} \right) - \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \right) \cdot \varphi(x_1) - \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right\| \\
&\leq \left\| \left(\alpha \left(\frac{\|x_1\|}{r} \right) - \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \right) \cdot \varphi(x_1) \right\| + \\
&\quad \left\| \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right\| \\
&\leq K \cdot \left| \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \|x_1\| + \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \|x_1 - x_2\| \\
&\leq \frac{\|x_1 - x_2\|}{r} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot r + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \|x_1 - x_2\| = \varepsilon \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Si $x_1 \in B(0, r)$ y $x_2 \notin B(0, r)$, como $\alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) = 0$ pues $\|x_2\| \geq r$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \left\| \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \cdot \varphi(x_1) - \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \cdot \varphi(x_2) \right\| \\
&\leq \left\| \left(\alpha \left(\frac{\|x_1\|}{r} \right) - \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \right) \cdot \varphi(x_1) \right\| + \\
&\quad \left\| \alpha \left(\frac{\|x_2\|}{r} \right) \cdot (\varphi(x_2) - \varphi(x_1)) \right\| \\
&\leq K \cdot \left| \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \right| \cdot \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \|x_1\| \\
&\leq \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot r \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.
\end{aligned}$$

Por último, si $x_1 \notin B(0, r)$ y $x_2 \notin B(0, r)$, se obtiene que

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = 0 \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

□

Lema 3.4 (Desigualdad de Gronwall). Sean $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y no negativas tal que para $\alpha \geq 0$ satisfacen $u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds$ para todo $t \in [a, b]$. Entonces,

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}.$$

Demostración. Se verá primero el caso $\alpha > 0$. Defina $\varphi(t) = \alpha + \int_a^t u(s)v(s)ds$. Al tenerse $\varphi(a) = \alpha$ y como $\alpha > 0$ y u, v son mayores iguales a cero, se tiene que $\varphi(t)$ es estrictamente mayor que cero, $\varphi(t) \geq \alpha > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Por el teorema fundamental del cálculo, se tiene que $\varphi'(t) = u(t) \cdot v(t)$. Pero por hipótesis, $u(t) \leq \varphi(t)$, luego $\varphi'(t) = u(t) \cdot v(t) \leq \varphi(t)v(t)$. Así, $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq v(t)$ implica que $\frac{d(\log \varphi(t))}{dt} \leq v(t)$, de esto se tiene que $\int_a^t \frac{d(\log \varphi(s))}{ds} ds \leq \int_a^t v(s)ds$. Esto implica, nuevamente por el teorema fundamental del cálculo, que

$$\log(\varphi(t)) - \log(\varphi(a)) \leq \int_a^t v(s)ds \Rightarrow \log\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(a)}\right) \leq \int_a^t v(s)ds$$

y que $\varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$. Luego, $u(t) \leq \varphi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s)ds}$.

Para el caso $\alpha = 0$, basta considerar $\alpha = \varepsilon > 0$ en el caso anterior y tomar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Luego, $u(t) = 0$ y la desigualdad permanece válida. $\square$

Lema 3.5. Sea $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de vectores de clase C^r tal que $Y(0) = 0$ y que satisface una condición de Lipschitz con constante K . Entonces el flujo de Y está definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ y $\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|}\|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$.

Demostración. Se dará una prueba por reducción al absurdo. Sea $x \in \mathbb{R}^m$ y suponga que el intervalo maximal de la curva integral de por el punto x sea (a, b) con $b < \infty$. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^m$ la curva integral por el punto x . Se tiene, integrando (2.1), que

$$\alpha(t) = x + \int_0^t Y(\alpha(s))ds.$$

Por tanto, si $t \geq 0$

$$\|\alpha(t)\| \leq \|x\| + \int_0^t \|Y(\alpha(s)) - Y(0)\|ds \leq \|x\| + \int_0^t K \|\alpha(s)\|ds.$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall (Lema 3.4) se obtiene

$$\|\alpha(t)\| \leq e^{K|t|}\|x\| \leq e^{Kb}\|x\|, \quad \text{si } t \geq 0.$$

Sea $t_n \rightarrow b$. Considere la sucesión $\{\alpha(t_n)\}$ cuyos elementos están contenidos en la

bola cerrada de centro 0 y radio $M = e^{Kb}\|x\|$. Desde que

$$\alpha(t_n) - \alpha(t_m) = \int_{t_m}^{t_n} Y(\alpha(s))ds = \int_{t_m}^{t_n} \alpha'(s)ds$$

se tiene, como antes, que $\|\alpha(t_n) - \alpha(t_m)\| \leq K M |t_n - t_m|$. Así, $\alpha(t_n)$ es una sucesión de Cauchy y entonces converge a un punto $y \in \mathbb{R}^m$. El flujo local de Y alrededor de y permite extender la curva integral α por la derecha de b contrario a la hipótesis inicial. Así, el flujo de Y es definido sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Como

$$Y_t(x) - Y_t(y) = x - y + \int_0^t [Y(Y_s(x)) - Y(Y_s(y))]ds,$$

se concluye que para $t \geq 0$

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t K \|Y_s(x) - Y_s(y)\|ds.$$

Aplicando, nuevamente la desigualdad de Gronwall (Lema 3.4), tenemos

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|}\|x - y\|, \quad \text{si } t \geq 0.$$

Para $t \leq 0$, se obtiene la misma expresión usando el argumento anterior al campo $-Y$. □

Lema 3.6. *Sea $X : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de vectores de clase C^k , ($k \geq 1$) con $X(0) = 0$. Sea $L = dX(0)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un campo de clase C^r $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con la siguientes propiedades:*

- (1) *El campo Y tiene constante de Lipschitz limitada por K y, por tanto, el flujo inducido por Y está definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$,*
- (2) *$Y = L$ fuera de una bola $B(0, r)$,*
- (3) *Existe un abierto $U \subset V$ conteniendo el origen tal que $Y = X$ en U ,*
- (4) *Escribiendo $Y_t = L_t + \varphi_t$, existe $M > 0$ tal que $|\varphi_t| \leq M$ para todo $t \in [-2, 2]$ y φ_1 tiene constante de Lipschitz menor o igual a ε . Aún más, $d(\varphi_1)(0) = 0$ o, equivalentemente, $d(Y_1)(0) = e^L = L_1$.*

Demostración. Como $L = dX(0)$, se tiene que $X = L + \psi$, donde $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ es de clase C^r tal que $\psi(0) = 0$ y $d\psi(0) = 0$. Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ tal que $\beta(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $\beta(t) = 1$ si $t \leq r/2$ y $\beta(t) = 0$ si $t \geq r$. Sea $\Psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \beta(\|x\|) \psi(x) & , \text{ si } x \in V, \\ 0 & , \text{ si } x \in \mathbb{R}^m \setminus V. \end{cases}$$

Dado $\delta > 0$, por el Lema 3.3 se puede escoger $r > 0$ de tal forma que Ψ sea de clase C^k y sea δ -Lipschitz. De esto, por la definición de Ψ , se tiene que $\Psi = \psi$ en $B(0, r/2)$ y $\Psi = 0$ fuera de $B(0, r)$. Sea $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ el campo de vectores definido por $Y = L + \Psi$. De esto se obtiene que $Y = X$ en $B(0, r/2)$, $Y = L$ fuera de $B(0, r)$ y Y satisface (1).

Resta verificar (4). De hecho, como consecuencia de la desigualdad de Gronwall (Lema 3.5), se tiene que :

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{K|t|} \cdot \|x - y\| \leq e^{2K} \cdot \|x - y\|, \text{ pues } |t| \leq 2.$$

Sea $\varphi_t(\cdot) := Y_t(\cdot) - L_t(\cdot)$, como $\Psi = Y - L$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi_t(x) - \varphi_t(y) &= [Y_t(x) - Y_t(y)] + [L_t(y) - L_t(x)] \\ &= [Y_t(x) - x - Y_t(y) + y] + [-L_t(x) + x + L_t(y) - y] \\ &= [Y_t(x) - Y_0(x) - Y_t(y) + Y_0(y)] + [-L_t(x) + L_0(x) + L_t(y) - L_0(y)] \\ &= \int_0^t Y'_s(x) ds - \int_0^t L(Y_s(x)) ds - \int_0^t Y'_s(y) ds + \int_0^t L(Y_s(y)) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^t L(Y_s(x)) - \int_0^t L'_s(x) ds - \int_0^t L(Y_s(y)) ds + \int_0^t L'_s(y) ds \\
&= \int_0^t Y(Y_s(x)) ds - \int_0^t L(Y_s(x)) ds - \int_0^t Y(Y_s(y)) ds + \int_0^t L(Y_s(y)) ds + \\
& \quad \int_0^t L(Y_s(x)) - \int_0^t L(L_s(x)) ds - \int_0^t L(Y_s(y)) ds + \int_0^t L(L_s(y)) ds \\
&= \int_0^t [Y(Y_s(x)) - L(Y_s(x)) - (Y(Y_s(y)) + L(Y_s(y)))] ds + \\
& \quad \int_0^t [L(Y_s(x) - L_s(x)) - L(Y_s(y) + L_s(y))] ds \\
&= \int_0^t [\Psi(Y_s(x)) - \Psi(Y_s(y))] ds + \int_0^t L(\varphi_s(x) - \varphi_s(y)) ds. \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| &\leq \delta \cdot e^{2K} \cdot \|x - y\| \cdot 2 + \left| \int_0^t L(\varphi_s(x) - \varphi_s(y)) ds \right| \\
&\leq \delta \cdot e^{2K} \cdot \|x - y\| \cdot 2 + \int_0^t \|L\| \cdot \|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)\| ds.
\end{aligned}$$

Usando la desigualdad de Gronwall (Lema 3.4, con $\alpha = \delta \cdot e^{2K} \cdot \|x - y\| \cdot 2$, $v(s) = \|L\|$ y $u(s) = \|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)\|$), se obtiene

$$\|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| \leq \delta \cdot e^{2K} \cdot \|x - y\| \cdot 2 \cdot e^{\|L\| \cdot \int_0^t ds} \leq \delta \cdot \|x - y\| \cdot 2e^{2K} \cdot e^{2\|L\|}. \tag{3.4}$$

Ahora, por el Lema 3.3, es posible tomar Ψ de modo que su constante de Lipschitz $\delta > 0$ sea tal que $\delta \leq \varepsilon / (2e^{2K} \cdot e^{2\|L\|}) < \varepsilon$. Esto implica, en particular, que φ_1 tiene constante de Lipschitz $\leq \varepsilon$.

Se demostrará, ahora, que existe $M > 0$ tal que $\|\varphi_t\| \leq M$, para todo $t \in [-2, 2]$. En efecto, si $x \in B(0, r)$, se tiene por (3.4) que

$$\|\varphi_t(x)\| = \|\varphi_t(x) - \varphi_t(0)\| \leq \delta \cdot \|x\| \cdot 2e^{2K} \cdot e^{4\|L\|} \leq r\varepsilon. \tag{3.5}$$

Si $x \notin B(0, r)$ (al notar que $\Psi(Y_s(x)) = 0$, si $Y_s(x) \notin B(0, r)$), entonces

$$\|\varphi_t(x)\| = \|\varphi_t(x) - \varphi_t(0)\| = \left| \int_0^t [\Psi(Y_s(x)) - \Psi(Y_s(0))] ds + \int_0^t L(\varphi_s(x) - \varphi_s(0)) ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \delta \|Y_s(x)\| ds + \left| \int_0^t L(\varphi_s(x) - \varphi_s(0)) ds \right| \\
&\leq \int_0^t r \varepsilon ds + \left| \int_0^t L(\varphi_s(x) - \varphi_s(0)) ds \right| \\
&\leq 2\varepsilon r + \int_0^t \|L\| \|\varphi_s(x)\| ds,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

(note que $\varphi_s(0) = Y_s(0) - L_s(0) = 0$) lo que implica, nuevamente por el Lema de Gronwall (Lema 3.4), que existe $M = 2\varepsilon r e^{4\|L\|} > 0$ tal que $\|\varphi_t(x)\| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y para todo $t \in [-2, 2]$.

Finalmente, se demostrará que $d(\varphi_1)_0 = 0$. Se desea mostrar que dado $\rho > 0$ existe $l > 0$ tal que $\|\varphi_1(x)\| \leq \rho\|x\|$ para $\|x\| \leq l$. Desde que $d\Psi(0) = 0$, se puede escoger $l > 0$ de modo que $\|\Psi(z)\| \leq \eta\|z\|$ para $\|z\| < l$ con $\eta < \rho e^{-K} e^{-\|L\|}$. Procediendo como en (3.3) se tiene

$$\varphi_1(x) = \int_0^1 \Psi(Y_s(x)) ds + \int_0^1 L(\varphi_s(x)) ds.$$

Usando el hecho de que $\|Y_s(x)\| \leq e^{K|s|}\|x\| \leq e^K\|x\|$ para $0 \leq s \leq 1$ (por el Lema 3.5), se obtiene, una vez más, por el Lema de Gronwall (Lema 3.4) que

$$\|\varphi_1(x)\| \leq \eta e^K \|x\| e^{\|L\|(1-0)} \leq \rho \|x\|.$$

Esto completa la prueba del lema. $\square$

Antes de demostrar el Teorema de Hartman-Grobman, es conveniente recordar algunas definiciones y resultados que relacionan un campo vectorial y un difeomorfismo. Un difeomorfismo de clase C^r sobre una variedad compacta M es una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow M$ con inversa diferenciable de la misma clase.

Definición 3.1. Sea $p \in M$ un punto fijo del difeomorfismo $f \in \text{Dif}^r(M)$. Se dirá que p es un punto fijo elemental si 1 no es un autovalor de $df(p) : T_p M \rightarrow T_p M$. Además, se dirá que un punto fijo $p \in M$ es un **punto fijo hiperbólico** si la aplicación lineal $df(p) : T_p M \rightarrow T_p M$ no posee autovalores de norma 1.

Proposición 3.1. Sea $f \in \text{Dif}^r(M)$ y $p \in M$ un punto fijo elemental de f . Existen vecindades $\mathcal{N}(f) \subset \text{Dif}^r(M)$ y U de p y una función continua $\rho : \mathcal{N} \rightarrow U$ que, a

cada $g \in \mathcal{N}$, le asocia un único punto fijo de g en U y este punto fijo es elemental. En particular, un punto fijo elemental es aislado.

De la proposición anterior se concluye que todo punto fijo hiperbólico es un punto aislado.

El resultado siguiente establece la relación entre singularidades hiperbólicas de un campo vectorial X de clase C^r , $r \geq 1$, y puntos fijos hiperbólicos asociados al difeomorfismo en tiempo 1, X_1 , del campo X .

Proposición 3.2. *Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial, y $\phi_t = X_t$ su flujo. Entonces $p \in U$ es una singularidad hiperbólica de X sí, y sólo si, p es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo en tiempo 1, $f = \phi_1$, del campo X .*

Demostración. Suponga, en primer lugar, que p sea un punto fijo hiperbólico de tiempo 1 del campo vectorial X (es decir, de $f = X_1 = \phi_1 = \phi(1, q)$). En particular, por la Proposición 3.1, este punto fijo es aislado. Note que p no puede pertenecer a una órbita periódica de periodo 1, pues en tal situación, los otros puntos de la órbita periódica serían puntos fijos para $f = \phi_1$, y p no sería un punto fijo aislado. Luego, como $\phi(n, p) = p$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\phi(\cdot, p)$ no es periódica regular, se sigue de la clasificación de las trayectorias de un campo que $\phi(t, p) = p \forall t \in \mathbb{R}$, entonces p será una singularidad (aislada) de X .

Se demostrará, ahora, que p es una singularidad hiperbólica; es decir, que los elementos de $Sp(dX(p))$ tengan parte real no nula (o lo mismo que los autovalores de $dX(p)$ tengan parte real no nula). De la dependencia diferenciable en relación a las condiciones iniciales, tenemos que $\partial_x \phi$ es solución de $\dot{Z} = dX(p) \cdot Z$; $Z_0 = I$. Por tanto, $\partial_x \phi(t, p) = e^{t \cdot dX(p)}$, lo que nos da

$$df(p) = \partial_x \phi(1, p) = e^{dX(p)},$$

y por tanto los autovalores λ de $df(p)$ cumplen con $\lambda = e^\delta$, donde δ es un autovalor de $dX(p)$ (o lo mismo que se tenga la igualdad de espectros $Sp(df(p)) = e^{Sp(dX(p))}$), implicando que $|\lambda| \neq 1$, $\forall \lambda \in Sp(df(p))$ (vea una definición de espectro de un operador en la Definición A.9).

Recíprocamente, si p es una singularidad hiperbólica del campo X , es inmediato que p sea un punto fijo de $f = \phi_1$. Por la dependencia diferenciable en relación a las condiciones iniciales, como se vio en el párrafo anterior, se tiene que $\partial_x \phi$ es solución de $\dot{Z} = dX(p) \cdot Z$; $Z_0 = I$.

Por tanto $\partial_x \phi(t, p) = e^{t \cdot dX(p)}$, lo que implica que

$$df_p = \partial_x \phi(1, p) = e^{dX(p)},$$

y por tanto el espectro $Sp(df(p)) = e^{Sp(dX(p))}$, implicando que $|\lambda| \neq 1, \forall \lambda \in Sp(df(p))$; esto es, p es un punto fijo hiperbólico de f . $\square$

Sea V una vecindad del origen, 0 , en $\mathbb{R}^m$ y sea $X : V \rightarrow \mathbb{R}$ un campo vectorial C^r , $r \geq 1$. Recuerde que 0 es una singularidad hiperbólica de X si $L = dX(0)$ es un campo lineal hiperbólico. Se mostrará que, si 0 es una singularidad hiperbólica de X , entonces las órbitas de X en una vecindad de 0 tienen el mismo comportamiento topológico que las órbitas del campo lineal L . La demostración dada a continuación viene a ser la demostración del teorema central de este capítulo, el Teorema de Hartman-Grobman (Teorema 3.1), llevado a un caso Euclidiano por la Observación 3.1.

Demostración (Teorema 3.1). Como el problema es local, es posible, usando una carta local, suponer que $X : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un campo vectorial en espacios euclidianos con 0 como singularidad hiperbólica (vea la Observación 3.1).

Sea $\varepsilon > 0$ y $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de clase C^k como en el Lema 3.6. Como $Y = X$ en U , una vecindad del origen, se tiene que la aplicación identidad en U lleva órbitas de X en órbitas de Y . Por tanto Y es localmente equivalente a X . Como la equivalencia local (conjugación local) es una relación de equivalencia sólo resta mostrar que Y es localmente equivalente a L . Es decir, se demostrará que los flujos Y_t y L_t son conjugados, para todo $t \in \mathbb{R}$.

En efecto, por el Lema 3.6, $Y_t = L_t + \varphi_t$ y como $dY(0) = L$, de la dependencia diferenciable en relación a las condiciones iniciales, se tiene que la derivada $d(Y_1)(0)$ del difeomorfismo en tiempo 1 (asociado al flujo $\phi(t, x)$) Y_1 en el origen es dado por $d(Y_1)(0) = e^L = L_1$. De hecho, escribiendo el flujo $\phi(t, x) = Y_t(x)$, se tiene que

$d(Y_t)(x) = \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}$ es solución de la siguiente ecuación diferencial ordinaria matricial lineal

$$\begin{cases} \dot{\xi} = dY(\phi(t, x)) \cdot \xi, \\ \xi(0) = I_m, \quad I_m \text{ es la matriz identidad } m \times m. \end{cases}$$

Como $x = 0$ es una singularidad, se obtiene $\phi(t, 0) = 0$, y la ecuación anterior tiene la forma:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = dY(0) \cdot \xi = L \cdot \xi, \\ \xi(0) = I_m, \quad I_m \text{ es la matriz identidad } m \times m, \end{cases}$$

lo que implica que $d(Y_t)(0) = e^{tL}$ y para la aplicación en tiempo 1 se tiene $d(Y_1)(0) = e^L = L_1$.

Luego, el difeomorfismo $Y_1 = L_1 + \varphi_1$ tiene al origen como punto fijo hiperbólico y φ_1 como el resto de su derivada (L_1) en el origen. Además, φ_1 tiene constante de Lipschitz limitada por ε . Por el Lema 3.2 existe un único homeomorfismo $h = I + \omega : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $\omega \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$, a una distancia finita de la identidad que satisface $h \circ Y_1 = L_1 \circ h$. Se mostrará ahora, que este mismo h también conjuga todos los otros tiempos de Y_1 y L_1 , esto es, que $h \circ Y_t(x) = L_t \circ h(x), \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^m$, lo que significa, por definición, que Y es topológicamente conjugado a L .

Defina ahora la aplicación $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por

$$H(x) = \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t(x) dt.$$

Claramente H es continua y por la condición (4) del Lema 3.6 se tiene que H está a distancia finita de la identidad.

Afirmación. Para toda $s \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$H \circ Y_s = L_s \circ H.$$

Basta mostrar que la expresión es válida para todo $s \in [0, 1]$, pues si $q \in \mathbb{R}^+$ se puede escribir $q = n + s$, con $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0, 1]$ y así

$$H \circ Y_q = H \circ \underbrace{Y_1 \circ \cdots \circ Y_1}_{n\text{-veces}} \circ Y_s = L_1 \circ H \circ \underbrace{Y_1 \circ \cdots \circ Y_1}_{(n-1)\text{-veces}} \circ Y_s = L_{n+s} \circ H = L_q \circ H.$$

Si $q < 1$ (y H invertible), entonces

$$H \circ Y_q = (Y_{-q} \circ H^{-1})^{-1} = (H^{-1} \circ L_{-q})^{-1} = L_q \circ H.$$

Prueba de la afirmación. En efecto, sea por lo anterior $s \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} L_{-s} \circ H \circ Y_s &= L_{-s} \circ \left(\int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t dt \right) \circ Y_s = L_{-s} \left(\int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t \circ Y_s dt \right) \\ &= \int_0^1 L_{-s} \circ L_{-t} \circ h \circ Y_t \circ Y_s dt \\ &= \int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ Y_{t+s} dt. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Note que para obtener la penúltima igualdad, es necesario usar la linealidad de L_{-s} (s fijo, al expresar la integral como limite de sumas de Riemann), y que si se compone Y_s por la derecha y no por izquierda, no sería posible pasarlo para dentro de la integral. Aún más, la continuidad de L_{-s} y Y_s son usadas. En la última igualdad se usa sólo la propiedad de grupo de los flujos L y Y .

Al tomar $u = t + s - 1$ en (3.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_{-(s+t)} \circ h \circ Y_{t+s} dt &= \int_{-1+s}^s L_{-(u+1)} \circ h \circ Y_{u+1} du = \\ &= \int_{-1+s}^0 L_{-(u+1)} \circ h \circ Y_{u+1} du + \int_0^s L_{-(u+1)} \circ h \circ Y_{u+1} du. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Haciendo $v = u + 1$ en el primer término y $v = u$ en el segundo término de (3.8) y al recordar que $L_{-1} \circ h \circ Y_1 = h$ se tiene en (3.7) que

$$\begin{aligned} L_{-s} \circ H \circ Y_s &= \int_s^1 L_{-v} \circ h \circ Y_v dv + \int_0^s L_{-u} \circ (L_{-1} \circ h \circ Y_1) \circ Y_u du \\ &= \int_s^1 L_{-v} \circ h \circ Y_v dv + \int_0^s L_{-u} \circ h \circ Y_u du \\ &= \int_0^1 L_{-u} \circ h \circ Y_u du = H. \end{aligned}$$

Lo que da por finalizada la demostración de la afirmación.

Así, se tiene que H es una función continua y conjugada los flujos L_t y Y_t . Ahora, se demostrará que H está a una distancia finita de la identidad. De hecho, dado

$t \in [0, 1]$ se tiene que

$$L_{-t} \circ h \circ Y_t = L_{-t} \circ (I + \omega) \circ (L_t + \varphi_t) = I + L_{-t} \circ \varphi_t + L_{-t} \circ \omega \circ L_t + L_{-t} \circ \omega \circ \varphi_t,$$

donde $\omega \in C_b^0(\mathbb{R}^m)$ (por el Lema 3.2).

Haciendo $\bar{\omega}_t := (L_{-t} \circ \varphi_t) + (L_{-t} \circ \omega \circ L_t) + (L_{-t} \circ \omega \circ \varphi_t)$ se obtiene; por (o de forma análoga a) (3.5) y (3.6) en el Lema 3.6, el Lema 3.2, y al ser L una transformación lineal acotada; que existe $\bar{M} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\bar{\omega}(x)\| &\leq \|L_{-t}\| \|\varphi_t(x)\| + \|L_{-t}\| \|\omega\| \|L_t(x)\| + \|L_{-t}\| \|\omega\| \|\varphi_t(x)\| \\ &\leq \|L_{-t}\| (2\varepsilon r e^{4\|L\|} (1 + \|\omega\|) + \|\omega\| \|L_t\|) = \bar{M}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, 1]$ y todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Esto implica que

$$H(x) = \int_0^1 L_{-t} \circ h \circ Y_t(x) dt = \int_0^1 I + \bar{\omega}_t dt = I + \int_0^1 \bar{\omega}_t dt,$$

con $|\int_0^1 \bar{\omega}_t(x) dt| \leq \int_0^1 \bar{M} dt = \bar{M}$, es decir, H está a una distancia finita de la identidad.

De la unicidad en el Lema 3.2 se tiene que $H = h$, lo cual muestra que H es un homeomorfismo. Como se vio anteriormente $H = h$ conjuga los flujos Y_s y L_s para todo $s \in \mathbb{R}$. $\square$

3.2. La estabilidad local como propiedad genérica

En esta sección se demostrará que la estabilidad local en singularidades hiperbólicas (vea la definición 2.14), es una propiedad genérica dentro del conjunto de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, $\mathfrak{X}^r(M)$. Para ello, se hará uso del Teorema de Hartman-Grobman demostrado en la sección anterior.

Teorema 3.2. *Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ y $p \in M$ una singularidad hiperbólica de X . Entonces X es localmente estable en p .*

Demostración. Se obtuvo, por la Proposición 2.26, que existen vecindades $\mathcal{N}(X)$ en

$\mathfrak{X}^r(M)$ y U de p en M tales que todo campo $Y \in \mathcal{N}(X)$ tiene una única singularidad hiperbólica p_Y en U . Además, al tomar $\mathcal{N}$ suficientemente pequeño se tiene que p_Y tiene el mismo índice que p . Luego, los campos lineales dX_p y dY_{p_Y} son topológicamente equivalentes (consecuencia de la Proposición 2.23 y Proposición 2.24). Como, por el Teorema 3.1 (Teorema de Hartman-Grobman), X es topológicamente equivalente a dX_p y Y es topológicamente equivalente a dY_{p_Y} , el teorema se sigue por la transitividad de la equivalencia topológica. $\square$

A continuación se enuncia y demuestra el Teorema central de la tesis. El teorema garantiza que la estabilidad local es una propiedad genérica en el conjunto $\mathfrak{X}^r(M)$ de campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$. Aún más, esta propiedad se cumple para un conjunto $\mathcal{G}_1$ abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$, que consiste de campos vectoriales con únicamente singularidades hiperbólicas y tal que la propiedad de estabilidad local (propiedad que se cumple puntualmente) se cumple en cada punto de la variedad diferenciable M sobre el cual los campos están definidos.

Teorema 3.3 (Teorema Central). *Sea M una variedad diferenciable. La estabilidad local en cada punto $x \in M$ es una propiedad genérica dentro del conjunto de campos vectoriales $\mathfrak{X}^r(M)$ de clase C^r , $r \geq 1$.*

Demostración. El teorema es consecuencia directa del Teorema 2.6 (donde se afirma que el conjunto de campos vectoriales de clase C^r que poseen sólo singularidades hiperbólicas, a saber $\mathcal{G}_1$, es un conjunto abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(M)$, es decir es un conjunto genérico en $\mathfrak{X}^r(M)$) y el Teorema 3.2. En efecto, se tiene del Teorema 2.6 que cada campo vectorial $X \in \mathcal{G}_1$ es localmente estable en cada singularidad hiperbólica (debido al Teorema 3.2) y como se sabe por el Corolario 2.4 (el cual es consecuencia del Teorema 2.4, del flujo tubular) cada campo $X \in \mathcal{G}_1$ es además localmente estable en los demás puntos no singulares (puntos regulares de X). En conclusión, cada campo $X \in \mathcal{G}_1$ es localmente estable en cada punto de la variedad M . $\square$

3.3. Aplicación a un caso global

En esta sección se dará una aplicación de la genericidad de la estabilidad local a un caso global en específico, al considerar $M = \mathbb{S}^1$. Para esta sección seguiremos de cerca a M. Peixoto y a J. Palis (Palis y de Melo, 1978 y Peixoto, 1971).

Considere un sistema dinámico en el círculo $\mathbb{S}^1$, al cual todas las curvas unidimensionales suaves y cerradas son equivalentes. Es posible representar $\mathbb{S}^1$ como el intervalo unitario en la recta real con los puntos finales identificados:

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \quad (3.9)$$

donde $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ denota los números reales mod 1; quiere decir, para $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \sim y \Leftrightarrow x \equiv y \pmod{1} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Ahora, sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua, entonces se define el sistema dinámico siguiente

$$\dot{x} = f(x), \quad f(x+1) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Es decir, f es una función periódica de periodo uno. Esto se puede simplificar restringiendo a un periodo, a saber, el intervalo unitario $0 \leq x \leq 1$ de modo que $f(0) = f(1)$. Entonces (3.10) se convierte en

$$\dot{x} = f(x), \quad f(1) = f(0). \quad (3.11)$$

En este contexto, la función f es llamada campo vectorial. Un campo vectorial sobre $\mathbb{S}^1$ de la clase C^k es una función que tiene k derivadas continuas donde cada derivada se identifica en los puntos finales; es decir, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{(m)}(0) = f^{(m)}(1)$, $\forall 0 \leq m \leq k$.

Lo visto dentro de la teoría local sugiere inmediatamente que hacer dentro de la teoría global. Lo primero es hallar una relación de equivalencia análoga a la relación de equivalencia local.

Una generalización que se impone a primera vista es la Definición 2.11, que volvemos a escribir aquí para un mejor entendimiento.

Definición 3.2. Sea $X, Y \in \mathfrak{X}^r(M)$. Se dice que X y Y son **topológicamente equivalentes**, $X \sim Y$, si existe un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ que lleva órbitas de X en órbitas de Y preservando la orientación de las trayectorias, esto es, si $p \in M$ y $\delta > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $0 < t < \delta$, $hX_t(p) = Y_{\tilde{t}}(h(p))$ para algún $0 < \tilde{t} < \varepsilon$.

Adoptada la definición de equivalencia topológica, el problema fundamental consiste entonces en descubrir un conjunto abierto y denso $\mathcal{D} \subset \mathfrak{X}^r(M)$ cuyas clases de equivalencia módulo $\sim$ puedan ser clasificadas. Este es un problema aún más complicado que el problema de clasificación local, resuelto en la sección anterior.

Un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}^r(M)$ es dicho ser estructuralmente estable si el comportamiento topológico de sus órbitas no se altera mediante pequeñas perturbaciones del campo X . Formalmente:

Definición 3.3. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(M)$. Se dice que X es **estructuralmente estable** si existe una vecindad $\mathcal{N}(X)$ de X en $\mathfrak{X}^r(M)$ tal que todo $Y \in \mathcal{N}(X)$ es topológicamente equivalente a X .

Volviendo a $\mathbb{S}^1$, sea $x : U \subset \mathbb{S}^1 \rightarrow x(U) \subset \mathbb{R}$ una carta local con $x(U)$ abierto en $\mathbb{R}$, alrededor del punto $p \in \mathbb{S}^1$. Sea además $\{e_1\}$ la base canónica de $\mathbb{R}$. Por la Proposición 1.8, se tiene que $dx^{-1}(q)(\mathbb{R}^m) = T_p\mathbb{S}^1$ y así $dx^{-1}(q)$ es inyectiva, con $x(p) = q$. De esto, se logra obtener un conjunto linealmente independiente $\{dx^{-1}(q)(e_1)\}$, y como la dimensión de $T_p\mathbb{S}^1$ es 1, este conjunto es una base para $T_p\mathbb{S}^1$. Denote el elemento de esta base por $\frac{\partial}{\partial x_1}(p) = dx^{-1}(q)(e_1)$, es decir, $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p)\}$ es una base para $T_p\mathbb{S}^1$. Esta base es denominada como la base asociada a la carta local x y el elemento $\{\frac{\partial}{\partial x_1}\}$ es llamado un campo coordenado (campo unitario en $\mathbb{S}^1$) asociado a la carta local (x, U) alrededor de p .

Así, dado cualquier campo vectorial $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$, es posible representarlo, localmente, de manera única como $X(p) = f(p)\frac{\partial}{\partial x_1}(p)$, donde $p \in \mathbb{S}^1$ y $f \in C^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$. Es claro que $X(p) = 0$ si, y solamente si, $f(p) = 0$. Como fue observado, en el Corolario 1.3, dado cualquier conjunto cerrado $K \subset \mathbb{S}^1$ existe $f \in C^r(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ tal

que $f^{-1}(0) = K$. Así, X tiene como singularidades exactamente los puntos de K . Como la equivalencia topológica preserva singularidades, se tiene por lo menos tantas clases de equivalencia para los campos cuantas clases de subconjuntos cerrados de $\mathbb{S}^1$ módulo homeomorfismos exista. Esto muestra la imposibilidad de describir y clasificar las estructuras de órbitas de todos los campos de $\mathbb{S}^1$. Luego, es natural restringirse a un subconjunto residual de $\mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$, de preferencia abierto y denso.

Las definiciones siguientes son adaptaciones particulares a las presentadas en capítulos y secciones anteriores.

Una singularidad p de $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$ (es decir, $X(p) = 0$) es **hiperbólica** si $dX(p) \neq 0$, esto es, $df(p) \neq 0$, donde $X = f \frac{\partial}{\partial x_1}$. Si $df(p) < 0$, el punto p es un **pozo** (singularidad atractora) y, si $df(p) > 0$, p es una **fuentes** (singularidad repulsora). Sea $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$ la clase de campos vectoriales cuyas singularidades son todas hiperbólicas; como esas singularidades son aisladas, se tiene que el número de ellas es finito.

Observación 3.2. La clase $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$ no solamente resuelve el problema de clasificación local de campos sino también el problema de clasificación global en $\mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$.

Demostración. En efecto, Si $X \in \mathcal{G}_1$ entonces $X, X = f \frac{\partial}{\partial x_1}$, posee un número finito de singularidades hiperbólicas y, al observar el gráfico de $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que estas singularidades son alternadamente fuentes y pozos. De este modo, X es caracterizado por el número, que es siempre *par*, de esas singularidades, lo que constituye una clasificación de los elementos de $\mathcal{G}_1$ en $\mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$. $\square$

Aún más, los campos vectoriales $X \in \mathcal{G}_1$ tienen la propiedad de estabilidad estructural.

Teorema 3.4. Sea $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$. Entonces, X es estructuralmente estable si, y sólo si, X tiene únicamente singularidades hiperbólicas (un número finito de ellas); es decir, si $X \in \mathcal{G}_1$.

Demostración. Suponga que X es un campo vectorial con únicamente singularidades hiperbólicas. Se demostrará que X es estructuralmente estable. Se tiene, por el

Teorema 2.6, que la clase $\mathcal{G}_1 \subset \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$ de campos vectoriales con únicamente singularidades hiperbólicas es un conjunto abierto y denso en $\mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$ (el conjunto abierto $\mathcal{G}_1$ será la vecindad buscada en la propiedad de estabilidad estructural). Además, de la observación anterior se tiene que las singularidades son pozos y fuentes alternadas y que el número de singularidades es par. De lo anterior, se tiene que:

Afirmación. Si $X, Y \in \mathcal{G}_1$ tienen el mismo número de singularidades, entonces X y Y son topológicamente equivalentes. De hecho, sean $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_s, b_s$ los pozos y fuentes de X ordenados en $\mathbb{S}^1$. Análogamente, sean $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{a}_s, \tilde{b}_s$ los pozos y fuentes de Y ordenados en $\mathbb{S}^1$. Defina la aplicación $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ por $h(a_1) = \tilde{a}_1$ y $h(b_1) = \tilde{b}_1$. Escogiendo puntos $p_i \in (a_i, b_i)$, $q_i \in (b_i, a_{i+1})$ y $\tilde{p}_i \in (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$, $\tilde{q}_i \in (\tilde{b}_i, \tilde{a}_{i+1})$. Defina $h(p_i) = \tilde{p}_i$ y $h(q_i) = \tilde{q}_i$. Si $p \in (a_i, b_i)$, existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(p) = p_i$; defina $h(p) = Y_{-t}(\tilde{p}_i) = Y_{-t}hX_t(p)$. Análogamente, para puntos de (b_i, a_{i+1}) . Es claro que h es un homeomorfismo que conjuga los flujos de X e Y . Esto prueba la afirmación.

En caso de que X no posea singularidades, la única órbita de X es el propio $\mathbb{S}^1$. Si $X = f \frac{\partial}{\partial x_1}$, entonces o $f > 0$ o $f < 0$ en todo $\mathbb{S}^1$. Si $f > 0$, la identidad define una equivalencia topológica entre X y $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Si $f < 0$, tome la aplicación antípoda como la equivalencia topológica.

Así, del párrafo anterior y la Afirmación se tiene que X es estructuralmente estable.

Ahora, suponga que el campo $X \in \mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$ es estructuralmente estable. Se demostrará que $X \in \mathcal{G}_1$. En efecto, observe que el número de singularidades de X es finito. Esto pues $\mathcal{G}_1$ es denso y, por tanto, X debe ser equivalente a un campo $Y \in \mathcal{G}_1$ próximo de X . Además, estas singularidades son hiperbólicas; caso contrario, es posible perturbar X de modo que sea posible crear un número mayor de singularidades en el campo perturbado, contrariando la hipótesis de estabilidad estructural de X . $\square$

La estabilidad estructural es una propiedad muy fuerte. Es decir, mostrar que la estabilidad estructural es una propiedad genérica para campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, en variedades diferenciables M de mayor dimensión, es una tarea sumamente complicada. Sin embargo, Peixoto (Peixoto, 1962) consiguió mostrar que el conjunto de campos vectoriales estructuralmente estables es abierto y denso

(genérico) para el caso $\dim M = 2$. Más adelante, S. Smale (Smale, 1967) mostró que en variedades de dimensión 4 el conjunto de campos con la propiedad de estabilidad estructural no es denso en $\mathfrak{X}^r(M)$, lo que sugiere que la propiedad de estabilidad estructural podría no ser una propiedad genérica en variedades de dimension mayores que 2.

Conclusiones

- (1) A partir del Teorema 2.6, se concluye que dentro del conjunto de los campos vectoriales de clase C^r , $\mathfrak{X}^r(M)$, “abundan” los campos vectoriales con únicamente singularidades hiperbólicas.
- (2) A partir del Teorema de Hartman y Grobman (Teorema 3.1) para campos vectoriales de clase C^r , se concluye que un campo vectorial es localmente conjugado a su parte lineal en una singularidad hiperbólica. De esta forma, para entender la dinámica local de sistemas no lineales en singularidades hiperbólicas es suficiente obtener información local del sistema linealizado asociado.
- (3) Finalmente, del Teorema 3.3, las conclusiones (1) y (2) arriba, se concluye que el conjunto $\mathcal{G}_1$ de campos vectoriales de clase C^r , con únicamente singularidades hiperbólicas, y que son localmente estables en cada punto de la variedad M , son representativos dentro de $\mathfrak{X}^r(M)$, significando que la presencia de sistemas dinámicos con “buen” comportamiento es típicamente apreciable en un sentido topológico (residual).
- (4) A partir de la Sección 4 del Capítulo 3, se concluye que la estabilidad local, siendo una propiedad local, permite una clasificación en la teoría global (para el caso de estabilidad estructural) de los campos vectoriales de clase C^r , $r \geq 1$, cuando $M = \mathbb{S}^1$; es decir, en el conjunto $\mathfrak{X}^r(\mathbb{S}^1)$.

Cálculo diferencial en espacios de Banach

En este apéndice se recordarán algunos de los resultados más importantes de la teoría del cálculo diferencial en espacios de Banach. Se presentará la definición formal de diferenciabilidad en el sentido de Fréchet, el teorema de la función inversa, el teorema de punto fijo para contracciones y algunas consecuencias como la perturbación de la identidad y del isomorfismo.

Definición A.1. Un espacio métrico (X, d) es dicho completo si toda sucesión de Cauchy (x_n) , con $x_n \in X$, converge para un punto $x \in X$.

Definición A.2. Un espacio vectorial normado E completo con la métrica oriunda de una norma es llamado de espacio de Banach.

Definición A.3. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. Se dice que la aplicación $T : X \rightarrow Y$ es continua en un punto $x \in X$ si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in X$ con $d_1(x, y) < \delta$ $K \geq 0$ implica que $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. La aplicación f es dicha continua si es continua en cada punto de X .

Definición A.4. Sean (X, d_1) , (Y, d_2) espacios métricos. Una aplicación $T : X \rightarrow Y$ es llamada lipschitziana si existe $K \geq 0$, tal que $d_2(Tx, Ty) \leq Kd_1(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Se dice que K es una constante de Lipschitz de T .

Definición A.5. Sea (X, d) un espacio métrico. Una aplicación $T : X \rightarrow X$ es dicha una contracción si existe $0 \leq K < 1$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Sean E y F espacios de Banach sobre el mismo cuerpo $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición A.6. Sea $f : U \subset E \rightarrow F$ una aplicación y $U \subset E$ un abierto. Se dice que f es (Fréchet) diferenciable en $a \in U$ si existe una función continua $df(a) = df_a : E \rightarrow F$, llamada la derivada de f en a , tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df(a)h\|}{\|h\|} = 0.$$

Definición A.7. Una aplicación $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable en U si f es diferenciable en todos los puntos de U . En este caso, la aplicación

$$\begin{aligned} f' = df & : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ x & \mapsto df(x) \end{aligned}$$

es llamada la diferencial de f en U .

Observaciones A.1.

- 1) Si $f : E \rightarrow F$ es diferenciable en $a \in X$, entonces f es continua en a .
- 2) Sean $f : E \rightarrow F$ y $g : F \rightarrow G$ diferenciables, entonces $h = g \circ f$ es diferenciable, y su derivada es dada por la regla de la cadena $dh_x = dg_{f(x)} df_x$.

Definición A.8. Sean E_1, E_2 y F espacios de Banach, $E = E_1 \oplus E_2$ la suma directa de espacios de Banach, $U \subset E$ un abierto y $f : U \rightarrow F$. Las derivadas parciales de f en un punto $(a, b) \in U$ son aplicaciones lineales $\partial_1 f(a, b) : E_1 \rightarrow F$ y $\partial_2 f(a, b) : E_2 \rightarrow F$, definidas por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} f(a+h, b) &= f(a, b) + \partial_1 f(a, b).h + r_1(h), & \text{donde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{\|h\|} &= 0, \\ f(a, b+k) &= f(a, b) + \partial_2 f(a, b).k + r_2(k), & \text{donde } \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{\|k\|} &= 0. \end{aligned}$$

f puede poseer una, ambas, o ninguna de las derivadas parciales $\partial_1 f(a, b)$, $\partial_2 f(a, b)$ en un punto $(a, b) \in U$.

Observaciones A.2.

- 1) La derivada parcial $\partial_1 f(a, b)$, en el caso que exista, es la derivada de la *función parcial* $g : E_1 \cap U \rightarrow F$, $g(x) = f(x, b)$ en el punto $a \in E_1$; análogamente $\partial_2 f(a, b)$ es la derivada de la *función parcial* $h : E_2 \cap U \rightarrow F$ dada por $h(y) = f(a, y)$ en el punto $b \in E_2$, en el caso que esta exista.
- 2) Si la aplicación $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable en el punto $c \in U$ entonces, cualquiera que sea la descomposición en suma directa $E = E_1 \oplus E_2$, con $c = (a, b)$, $a \in E_1$, $b \in E_2$, las derivadas parciales $\partial_1 f(a, b)$, $\partial_2 f(a, b)$ existe, y $df(c)(h, k) = \partial_1 f(c)h + \partial_2 f(c)k$. En otras palabras $\partial_1 f(c) = f'(c)|_{E_1}$ y $\partial_2 f(c) = f'(c)|_{E_2}$.

Teorema A.1 (Teorema de la función implícita). *Sea X, Y y Z espacios de Banach, $U \subset X$, $V \subset Y$ abiertos y $(x_0, y_0) \in U \times V$. Sea además $f : U \times V \rightarrow Z$ una aplicación de clase C^k , $k \geq 1$, con $f(x_0, y_0) = 0$ y $\partial_1 f(x_0, y_0)$ invertible con inversa limitada. Entonces existen $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ una vecindad abierta de (x_0, y_0) y $\xi : V_0 \rightarrow U_0$ una aplicación de clase C^k tales que $f(\xi(y), y) = 0$ para todo $y \in V_0$. Mas precisamente, tenemos que $f(x, y) = 0$, con $(x, y) \in U_0 \times V_0$, si y sólo si, $x = \xi(y)$.*

Teorema A.2 (Teorema de la función inversa). *Sea X y Y espacios de Banach, $U \subset X$ abierto, $x_0 \in U$ y $f : U \rightarrow Y$ una aplicación de clase C^k , $k \geq 1$, con df_{x_0} invertible y con inversa limitada. Entonces existen $U_0 \subset U$ y $V_0 \subset Y$, vecindades abiertas de x_0 y $f(x_0)$, respectivamente, y una aplicación $g : V_0 \rightarrow U_0$ de clase C^k tal que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in U_0$ y $f(g(y)) = y$ para todo $y \in V_0$.*

Teorema A.3 (Punto fijo para contracciones). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $T : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces existe un único punto fijo p por T , es decir, existe un único punto $p \in X$ tal que $T(p) = p$. Además, tal punto p es un atractor de T , esto es, fijado cualquier $x \in X$, $T^n(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.*

Resultados bastante útiles, que son consecuencias del Teorema del punto fijo para contracciones, son enunciados a seguir. Estos resultados son una de las tantas versiones no diferenciables del teorema de la función inversa.

Lema A.1 (Perturbación de la identidad). *Sean E un espacio de Banach, I la identidad y $\phi : E \rightarrow E$ una contracción en E . Entonces, $\phi + I : E \rightarrow E$ es un homeomorfismo sobre E .*

Lema A.2 (Perturbación del isomorfismo). *Sean E, F espacios de Banach y $T : E \rightarrow F$ un isomorfismo lineal. Sea $\phi : E \rightarrow F$ una aplicación Lipschitz tal que su constante de Lipschitz $\delta < \|T^{-1}\|^{-1}$. Entonces, $T + \phi : E \rightarrow F$ es un homeomorfismo.*

Definición A.9. (Espectro de un operador lineal) Sea E un espacio vectorial normado complejo y sea $A : E \rightarrow E$ un operador lineal. El espectro de A es el conjunto

$$Sp(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A) \text{ no es invertible}\}.$$

Note que la definición del espectro de A no depende de la métrica o norma del cual E sea dotado, sólo de A ; es decir, si $A - \lambda I$ es o no sobreyectiva e inyectiva. Además, en espacios de dimension finita, el espectro del operador lineal A coincide con el conjunto de autovalores de A .

Revisión de álgebra lineal: forma canónica de Jordan

En este apéndice se recordarán algunos resultados del álgebra lineal, en especial resultados matriciales tales como la forma canónica de Jordan real y compleja que son usados en el Capítulo 2, Sección 2.2, de la tesis.

Se inicia recordando el Teorema elemental de la dimensión del Núcleo y de la Imagen.

Teorema B.1 (Dimensión del Núcleo y de la Imagen). *Sean E y V espacios vectoriales arbitrarios y $T : E \rightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces la dimensión del Núcleo de T (esto es, la colección de vectores $v \in E$ tales que $T(v) = 0$, denotada por $\text{Nuc}(T)$) sumada a la dimensión de la imagen de T , $\text{Im}(T)$, es igual a la dimensión de E .*

Suponga ahora que λ_1 sea un autovalor de $T : E \rightarrow E$, E un espacio vectorial de dimensión finita y que $\text{Nuc}(T - \lambda_1 I) \cap (T - \lambda_1 I)(E) = \{0\}$. Entonces, por el Teorema B.1, se tiene que $E = \text{Nuc}(T - \lambda_1 I) \oplus (T - \lambda_1 I)(E)$. Como se tiene que $E(\lambda_1) := \text{Nuc}(T - \lambda_1 I)$ es invariante por $(T - \lambda_1 I)$ y por $\lambda_1 I$, se tiene que $E(\lambda_1)$ es invariante por $T = (T - \lambda_1 I) + \lambda_1 I$. El mismo razonamiento se aplica a $E_1 := (T - \lambda_1 I)(E)$, que también es invariante por T . Ahora, si $\text{Nuc}(T - \lambda_j I) \cap (T - \lambda_j I)(E) = \{0\}$, con $j = i, \dots, s$, se puede aplicar recursivamente el mismo argumento a $A|E_j$, y así obtener una descomposición invariante $E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_s)$, donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ son los autovalores de T , y

$A|_{E(\lambda_j)} = \lambda_j I|_{E(\lambda_j)}$, es decir T es diagonalizable (ver la Definición B.1). Este sería el caso más simple de descomposición, pero no siempre ocurre, es decir no siempre se tiene que $\text{Nuc}(T - \lambda_j I) \cap (T - \lambda_j I) = \{0\}$. De este modo, se tiene de forma general el resultado siguiente:

Teorema B.2. Sean $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal complejo y $\sigma(T)$ el espectro de T (el conjunto de autovalores de T). Entonces existe una descomposición $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} E(\lambda)$, de modo que $T(E(\lambda)) \subset E(\lambda)$ y $(T - \lambda I)|_{E(\lambda)}$ es nilpotente (esto es, existe un $k \in \mathbb{N}$, $k \leq \dim(E(\lambda))$, tal que $(T - \lambda I)^k|_{E(\lambda)} \equiv 0$).

Definición B.1 (Operador diagonalizable). Sea $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $E \simeq K^n$ un espacio vectorial de dimensión finita sobre K . Un operador lineal $T : E \rightarrow E$ es dicho diagonalizable si existe una base $\{v_1 \cdots v_n\}$ de autovectores de T . En particular, la matriz de T en la base β es una matriz diagonal.

Proposición B.1. Todo operador lineal $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ se puede escribir como $T = D + N$, con $DN = ND$, donde D es un operador diagonalizable y N es nilpotente. Además, tal descomposición es única.

Sea E un espacio complejo de dimensión finita. Los resultados a seguir muestran como encontrar una base de E en la cual un operador $T : E \rightarrow E$ asume una matriz especialmente simple.

Definición B.2. Sean $\lambda_1 \cdots \lambda_j$ los autovalores distintos de una matriz J , $n \times n$. A matriz J está en la forma canónica de Jordan, si

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}, \text{ donde } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

(Al autovalor λ_i está asociado por lo menos un bloque J_i ; algunas veces, al definir J_i , se sitúa la sub-diagonal de 1's debajo de la diagonal principal. El bloque J_i puede ser una matriz 1×1). El bloque J_i es un bloque de Jordan asociado al autovalor λ_i .

Teorema B.3 (Forma de Jordan - caso complejo). Sea $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un operador lineal con autovalores complejos distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, $1 \leq r \leq n$. Entonces, existe una base β de $\mathbb{C}^n$ en la cual el operador es representado por la matriz

$$T_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & o & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \lambda_1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 & o & 1 & \\ 0 & \cdots & & \ddots & \ddots & & 0 & \\ 0 & \cdots & & & 0 & \lambda_r & 0 & o & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & & \lambda_r & \end{pmatrix}.$$

Definición B.3. Se define la complexificación de un espacio vectorial real E como el conjunto

$$E_{\mathbb{C}} = \{u + iv \mid u, v \in E\}.$$

En $E_{\mathbb{C}}$ definimos la suma de vectores y la multiplicación por un numero complejo de manera natural. Así, $E_{\mathbb{C}}$ se torna en un espacio vectorial sobre los complejos.

Definición B.4. Sea E un espacio vectorial real y $T : E \rightarrow E$ una aplicación lineal. Se define la complexificación de T como la aplicación $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, dada por $T_{\mathbb{C}}(u + iv) = Tu + iTv$.

Teorema B.4 (Forma de Jordan - caso real). *Sea $T : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ un operador lineal con autovalores reales $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ y autovalores complejos $a_1 + ib_1, \dots, a_s + ib_s$ no reales. Entonces, existe una base β de $\mathbb{R}^n$ en la cual el operador es representado por la matriz con bloques en la diagonal*

$$T_\beta = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & J_r & \\ \vdots & 0 & \tilde{J}_1 & 0 \\ 0 & \cdots & & \ddots \\ 0 & \cdots & & 0 & \tilde{J}_s \end{pmatrix},$$

donde cada J_k , $1 \leq k \leq r$, es de la forma:

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & o & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 0 & o & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 0 & o & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k & & & \end{pmatrix}$$

y cada $\tilde{J}_l$, $1 \leq l \leq s$, es de la forma:

$$\tilde{J}_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l & c_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ -b_l & a_l & 0 & c_1 & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & c_d & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & c_d \\ 0 & & & & a_l & b_l \\ 0 & \dots & & 0 & -b_l & a_l \end{pmatrix},$$

donde cada $c_t = 0$ o $c_t = 1$, $t = 1, \dots, d$.

Referencias Bibliográficas

- Andronov, A. y Pontryagin, L. S. (1937). *Systemes grossiers*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 14.
- Brickell, F. y Clark, R. S. (1970). *Differentiable Manifolds: An Introduction*. Great Britain: Van Nostrand Reinhold Company Ltd. The New University Mathematics Series.
- Castro Jr, A. A. (2009). *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. Preprint UFBA, disponible en: www.alunospgmat.ufba.br/
- Grobman, D. M. (1959). *Homeomorphisms of systems of differential equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR. 128, pp. 880-881.
- Guillemin, V. y Pollack, A. (2010). *Differential topology* (Vol. 370). American Mathematical Soc.
- Hartman, P. (1960). *On local Homeomorphisms of Euclidean spaces*. Bol. Soc. Math. Mexicana. 5, pp. 220-241.
- Irwin, M. C. (2001). *Smooth Dynamical System*. Singapore: Uto-Print, Advanced Series in Nonlinear Dynamics Vol. 17. World Scientific.
- Johannesen, S. (2017). *Smooth manifolds and fibre bundles with applications to theoretical physics*. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group.
- Katok, A. y Hasselblatt, B. (1996). *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. The United States of America: Edit. Board, Encycl. of Math. and its Applic. Vol. 54.
- Lages Lima, E. (2000). *Curso de Análise. Volumen 2*. Brasil: Proyecto Euclides, Sexta Edición, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.
- Lages Lima, E. (2011a). *Variedades Diferenciáveis*. Brasil: Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

- Lages Lima, E. (2011b). *Introdução à Topologia Diferencial*. Brasil: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
- Lee, J. M. (2013). *Introduction to smooth manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, Segunda edición. New York: Springer.
- Lyapunov, A. (1907). *Problema general de la estabilidad del movimiento*. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse: Mathematiques, Serie 2, Vol. 9, pp. 203-474.
- Milnor, J. (1965) *Topology from a Differential Viewpoint*. University of Virginia Press.
- Palis, J. y de Melo, W. (1978). *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. Brasil: Editora Edgard Blücher, Ltda., Instituto de Matemática Pura e Aplicada-CNPq. Projecto Euclides.
- Peixoto, M. M. (1962). *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology, Vol. 1, Issue 2, pp. 101-120.
- Peixoto, M. M. (1969). Teoria Geometrica das Equacoes Diferenciais. 7º Col. Bras. de Mat., Rio de Janeiro: IMPA, 75pp.
- Poincaré, H. (1890). *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Acta Mathematica, 13, pp. 1-270.
- Smale, S. (1967). *Differentiable dynamical systems*. Bull. Amer. Math. Soc. Vol 73, No. 6, pp. 747-817.
- Thom, R. (1954). *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*. Commentarii Mathematici Helvetici, 28(1), 17-86.