

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN CRISTÓBAL DE
HUAMANGA**

FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL

ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



**El teorema de la variedad cociente y aplicaciones
a la geometría diferencial**

Tesis para optar el título profesional de:
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas.
Especialidad de Matemática

Presentado por:
Bach. Edgar Gomez Muñoz

Asesor:
Dr. Alexander Paul Condori Huamán

Ayacucho - Perú

2024

Dedicatoria

El presente trabajo es dedicado a mis padres,
Teófilo y Cecilia, por su constante e
incondicional apoyo para
lograr mis objetivos.

Agradecimientos

Al culminar el presente trabajo, en primer lugar dejo mis agradecimientos a Dios por darme salud, a mis padres Teófilo y Cecilia por el apoyo que siempre me han brindado en cada proyecto de mi vida, y por la incansable labor realizada en mi educación.

En segundo lugar agradezco a la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, por haberme abierto las puertas y a la Escuela de Ciencias Físico Matemáticas por haberme acogido en sus aulas.

En tercer lugar, quiero agradecer a mi asesor Alexander Paul Condori Huamán por su orientación y asesoramiento, y a todos los docentes que fueron parte de mi formación profesional.

En cuarto lugar, dar las gracias a mis compañeros de estudios y a todos los que contribuyeron directa e indirectamente de alguna forma en la conclusión de la tesis.

Resumen

En un mismo conjunto pueden convivir varias estructuras que hacen de este conjunto un elemento especial de estudio y en la atención de los matemáticos. En particular, en una variedad diferenciable puede existir además, por ejemplo, una estructura de grupo. Esto da origen a los llamados Grupos de Lie. En estas variedades, la estructura de grupo no puede estar desligada de la estructura diferenciable. El objetivo principal de este trabajo es detallar la demostración del Teorema de la variedad cociente, el cual establece que el cociente de una variedad diferenciable por una acción de grupo es nuevamente una variedad diferenciable. El tipo de estudio que proponemos es cuantitativo, junto a un nivel de investigación descriptivo y un diseño de investigación no experimental. Como resultado, logramos detallar exitosamente la demostración del Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), para acciones diferenciables, libres y propias, de G (grupo de Lie) en una variedad diferenciable M .

Abstract

In the same set can coexist several structures that make this set a special element of study and in the attention of mathematicians. In particular, in a differentiable manifold it may also exist, for example, a group structure. This gives rise to the so-called Lie Groups. In these manifolds, the group structure cannot be detached from the differentiable structure. The main objective of this work is to detail the proof of the Quotient Manifold Theorem, which establishes that the quotient of a manifold differentiable by a group action is again a manifold differentiable. The type of study that we propose is quantitative, together with a descriptive level of research and a non-experimental research design. As a result, we were able to successfully detail the proof of Theorem 3.1 (Quotient Manifold Theorem), for differentiable, free and proper actions of G (Lie group) on a differentiable manifold M .

Índice de figuras

1.1. Sistema de coordenadas	18
1.2. Cambio de coordenadas.	19
1.3. La expresión local de la aplicación $f: (\phi \circ f \circ \varphi^{-1})$	26
1.4. Diferenciabilidad de la aplicación $f_{\varphi_1\phi_1}$	28
1.5. Camino en una variedad diferenciable.	30
1.6. Operaciones en el espacio T_pM no depende de (U, φ)	36

Índice general

Dedicatoria	I
Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Índice de figuras	IV
I. Introducción	1
II. Marco teórico	3
III. Material y Métodos	7
IV. Resultados y Discusión	9
1. Preliminares	10
1.1. Espacio Topológico	10
1.1.1. Espacios de Hausdorff	12
1.1.2. Bases para una topología	12
1.1.3. Espacios localmente euclidianos	13
1.2. Topología cociente	14

1.2.1.	Espacios cocientes	14
1.2.2.	Aplicación de identificación	14
1.3.	Variedades topológicas	17
1.4.	Variedades diferenciables	22
1.4.1.	Aplicaciones diferenciables	26
1.4.2.	El espacio tangente	30
1.4.3.	Una base para el espacio vectorial $T_p M$	37
1.4.4.	Coordenadas de un vector tangente	39
2.	Introducción a los grupos de Lie	45
2.1.	Grupos de Lie	47
2.1.1.	Traslaciones a izquierda y derecha del grupo de Lie	49
2.2.	Fibrado tangente y proyección canónica	51
2.2.1.	Campo Vectorial	52
2.2.2.	Álgebra de Lie	56
2.3.	Acciones de grupo de Lie sobre variedades diferenciables.	59
2.3.1.	Nociones de órbita y grupo de isotropía	59
3.	Teorema de la variedad cociente.	64
3.1.	Demostración del Teorema de la variedad cociente	64
3.2.	Aplicaciones del Teorema de la variedad cociente	72
	Conclusiones	76
	Recomendaciones	78
	Referencias Bibliográficas	79

I. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de las estructuras algebraicas se pone en evidencia la acción de un grupo en un conjunto algebraico determinado. Es así que Lagrange fue el pionero en estudiar problemas relacionados a estructuras algebraicas, al investigar sobre las permutaciones de las variables en un polinomio en el año 1771 en su libro “*Réflexions sur la Résolution Algébrique des Equations*”. La noción primordial de la definición de grupo abstracto fue iniciada por numerosas áreas de las matemáticas; tales como: la topología, geometría, teoría de números; aunque fue en la teoría de ecuaciones, en el análisis de soluciones radicales a ecuaciones algebraicas, en la que la teoría de grupos abstractos progresó visiblemente, a través de las investigaciones de Lagrange, Abel y Galois.

El trabajo de Marius Sophus Lie (1842-1899) contribuyó de gran manera en la teoría de la simetría continua, y la adaptó para estudiar la geometría y las ecuaciones diferenciales. Uno de sus descubrimientos y formalizaciones matemáticas más destacadas fue el estudio de los grupos de transformaciones continuas, hoy en día denominado grupos de Lie. Ellas indujeron al estudio de muchas ramas de las matemáticas y la física. Por ejemplo, David Hilbert presenta una famosa lista de problemas matemáticos en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas, realizada en París en el año 1900, que, según él, resolverlas representarían un adelanto para la ciencia. Uno de los problemas presentados por Hilbert se vincula con la clasificación de los grupos de Lie, y es dado de la siguiente forma: *Dado que G es un grupo y M es un espacio topológico localmente euclídeo, sea $\theta : G \times M \longrightarrow M$ una acción continua de G en M . ¿Es factible entonces elegir las*

coordenadas de G y M de tal modo que la acción θ sea diferenciable?

Diversas variedades fundamentales son constituidas como cocientes por acciones de grupos en otras variedades, y esto brinda una manera mas fácil de comprender los espacios que han sido formados por otros medios.

El principal problema de investigación del presente trabajo es lograr presentar con detalles la demostración del Teorema de la Variedad Cociente; es por ello, que el objetivo fundamental del presente trabajo es detallar la demostración del teorema mencionado, resultado dentro de la teoría de grupos de Lie, enunciado por el Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), el cual afirma que podemos obtener una variedad diferenciable al realizar el cociente de un grupo de Lie y una variedad diferenciable. Para lograr este objetivo, seguiremos de cerca a (Lages Lima, 2007); (Aro Huanacuni, 2017); (Santamaria, 2014) ; (Lee, 2000); (Damato de Lacerda, 2007); (Fernández Barroso, 2019); (Salcedo, 2020) y (Sene, 2015).

La presente Tesis está dividida en tres capítulos, los cuales son descritos a continuación:

En el capítulo uno, exponemos algunos conceptos y resultados relacionados a la topología, variedades topológicas y variedades diferenciables que serán imprescindibles para realizar el presente trabajo.

En el capítulo dos, definimos los Grupos de Lie y sus principales propiedades, también introduciremos la noción de campos vectoriales y acciones de grupo de Lie sobre variedades diferenciables, que son herramientas fundamentales para la demostración del teorema central del presente trabajo.

Finalmente, en el capítulo tres, demostraremos el teorema central de la tesis, a saber, el Teorema de la Variedad Cociente y posteriormente veremos algunas de sus aplicaciones. Enseguida, presentaremos las conclusiones de la Tesis y recomendaciones pertinentes.

II. MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de este trabajo es necesario tener conocimientos de las siguientes definiciones y algunos resultados que pueden ser encontrados en: (Lee, 2000); (Lages Lima, 2007) y (Santamaria, 2014).

Iniciamos presentando las variedades topológicas, el tipo más básico de variedades.

Definición 1. Un espacio topológico $(M, \mathcal{T})$ es una **variedad topológica** de dimensión m , si cumple las siguientes condiciones:

1. $(M, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff.
2. $(M, \mathcal{T})$ es un espacio segundo contable.
3. $(M, \mathcal{T})$ es localmente Euclidean de dimensión m .

La condición (3) de la definición (1); quiere decir, que para cada $p \in M$ existe un conjunto $U \in \mathcal{T}$, con $p \in U$, y $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo entre U y el conjunto $\varphi(U)$ abierto en $\mathbb{R}^m$, si consideramos que $\varphi(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^m$ entonces U es denominado bola coordenada y cada homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ recibe el nombre de sistemas de coordenadas (o carta) con dominio U , denotado por (φ, U) .

Sea M una variedad topológica de dimensión m . Sean (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) las cartas de M , se dice que son compatibles si una de las 2 condiciones siguientes se cumple:

- a. $U_{ij} = U_i \cap U_j = \emptyset$, o
- b. Si $U_{ij} \neq \emptyset$, entonces $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \rightarrow \varphi_j(U_{ij})$ es un difeomorfismo de clase C^∞ .

Una colección de cartas $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \rightarrow V_i\}_{i \in \Lambda}$ m -dimensionales de M es denominado un atlas m -dimensional de M si cumple las siguientes condiciones:

- a. $M = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$.
- b. Para cualquier par de elementos de $\mathcal{A}$ son compatibles.

Una carta (W, ψ) en M es admisible en $\mathcal{A}$ si es compatible con cada elemento de $\mathcal{A}$.

Sea M una variedad topológica m -dimensional. Un atlas $\mathcal{E}$ sobre M es maximal si cada carta sobre M que es admisible en $\mathcal{E}$ es también elemento de $\mathcal{E}$. En este caso, $\mathcal{E}$ se llama estructura diferenciable m -dimensional.

Una **variedad diferenciable** de dimensión m , es una variedad topológica m -dimensional sobre la cual existe una estructura diferenciable.

Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable real o compleja, que también es un grupo en el sentido algebraico de tal manera que la aplicación multiplicación e inversión

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G & i : G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow m(a, b) = ab & a &\rightarrow i(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

son aplicaciones diferenciables.

Sea $(G, \circ)$ un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Entonces **una acción** a izquierda de G en M es una aplicación diferenciable $\theta : G \times M \rightarrow M$ que verifica las siguientes condiciones:

- a. $\theta(1_G, p) = p$ para todo $p \in M$.
- b. $\theta(g_1, \theta(g_2, p)) = \theta(g_1 \circ g_2, p)$ para todo $p \in M$ y $g_1, g_2 \in G$,

donde 1_G es la identidad de G .

Definición 2.

- Para todo $p \in M$ la órbita de p bajo la acción de θ es el conjunto $G.p = \{\theta_g(p) / g \in G\}$.
- Dado $p \in M$, el grupo de isotropía o estabilizador de p : $G_P = \{g \in G : \theta_g(p) = p\}$ es el conjunto de elementos de G que fijan p . Además, G_P es un subgrupo de G .

Definición 3. Supongamos que un grupo de Lie G actúa sobre una variedad M (digamos a la izquierda). El conjunto de órbitas de G en M es denotado por M/G ; con la topología cociente, este es llamado espacio órbita de la acción. De manera equivalente, M/G es el espacio del cociente de M determinado por la relación de equivalencia $p_1 \sim p_2$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $g.p_1 = p_2$.

A continuación se presenta el teorema principal de la tesis, para el cual detallaremos su demostración.

Teorema de la variedad cociente. Sea G un grupo de Lie con acción suave, libre y propia sobre una variedad diferenciable M . Entonces el espacio órbita M/G es una variedad topológica de dimensión igual a $\dim M - \dim G$. Además, M/G posee una estructura diferenciable única de modo que la aplicación cociente $\pi : M \rightarrow M/G$ es una submersión diferenciable.

A continuación, citamos algunos trabajos, en las líneas de geometría diferencial, y textos importantes que dan sustento a este trabajo de investigación:

- (Santamaria, 2014). Variedades diferenciables, una introducción. Lambayeque-Perú. En este material encontramos la definición de espacio cociente. Además, el autor demuestra proposiciones y corolarios útiles para lograr los objetivos de este trabajo.
- (Várilly, 2014) Geometría diferencial. Costa Rica: Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica. En este texto encontramos las definiciones de espacios topológicos, variedades topológicas, cartas, atlas, variedades diferenciables, teorema de la función inversa, vectores tangentes, subvariedades, campos vectoriales y ejemplos de aplicación. Material educativo que sirvió de ayuda para el desarrollo de este trabajo.
- (Lages Lima, 2007). Variedades diferenciáveis, IMPA. Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro. Este libro es el muy importante para nuestro trabajo. En este material se ha encontrado proposiciones y definiciones claves de Variedades diferencia-

bles, sistema de coordenadas locales, aplicaciones diferenciables entre variedades y espacio tangente, entre otros; los cuales han sido indispensables para para lograr los objetivos de este trabajo.

- (Lee, 2000). Introduction to smooth manifolds, version 3.0. USA, University of Washington. Utilizamos este material como guía para realizar un estudio especificado del teorema de la variedad cociente. Además, en este material podemos encontrar varias de las definiciones fundamentales sobre grupos de Lie, álgebra de Lie y acciones de grupos de Lie , los cuales fueron detallados en el capítulo 2.

III. MATERIAL Y MÉTODOS

Diseño metodológico

Tipo de investigación.

El tipo de estudio que proponemos en este trabajo de investigación es cuantitativo, explicativo y no experimental. La metodología usada en esta investigación es de tipo inductiva-deductiva.

Nivel de investigación.

El nivel de investigación es descriptivo.

Diseño de investigación.

El diseño de investigación es no experimental.

Población y muestra.

Por la naturaleza del presente estudio de investigación, no consigna.

Técnicas e instrumentos de recolección de datos.

- **Técnica.** Sistematización bibliográfica.
- **Instrumentos.** Artículos científicos, libros y trabajos de tesis.

Técnicas de procesamiento y análisis de datos.

Por la naturaleza del presente estudio de investigación, no consigna.

Materiales

- Humanos: Tesista, asesor y jurados.
- Materiales y equipos:
 - Recursos: libros, hojas bond, lapiceros, marcador, memoria usb, materiales de escritorio.
 - Equipos: laptop, tablet, internet y celular.
- Locales: sala de estudios de la universidad y encuentros por videollamadas.

IV. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos algunas nociones básicas relacionados a la topología y variedades diferenciables, los cuales son enunciaremos y demostrados, puesto que serán necesarias para el desarrollo de este trabajo.

En este capítulo seguiremos de cerca a: (Lee, 2000) ; (Santamaria, 2014); (Lages Lima, 2007) ; (Várilly, 2014) y (Loring W, 2010).

1.1. Espacio Topológico

Iniciamos introduciendo algunas definiciones básicas, teoremas y propiedades fundamentales relacionados a la topología.

Definición 1.1. Una topología, sobre un conjunto no vacío X , es una colección $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X (es decir $\mathcal{T} \subseteq P(X)$) que verifica las siguientes condiciones:

- I) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
- II) $G_1, G_2 \in \mathcal{T} \implies G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$;
- III) $\{G_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \implies \bigcup_{i \in I} G_i \in \mathcal{T}$.

Observación 1.1.

- 1.- El conjunto X dotado de la topología $\mathcal{T}$ recibe el nombre de espacio topológico.
- 2.- A los elementos de $\mathcal{T}$ se les denomina conjuntos abiertos del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

Ejemplo 1.1. Supongamos que el conjunto X está formado por $X = \{a, b, c, d\}$ y además consideremos las siguientes familias: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ y $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$. Veamos si estas familias son topologías sobre X .

Demostración. Veamos si $\mathcal{T}_1$ cumple con las tres condiciones de una topología.

En efecto:

- Podemos observar que $\emptyset, X \in \mathcal{T}_1$.
- Sean $X, \{a\} \in \mathcal{T}_1$ entonces $X \cap \{a\} = \{a\} \in \mathcal{T}_1$.
- Sean $X, \{a\} \in \mathcal{T}_1$ entonces $X \cup \{a\} = X \in \mathcal{T}_1$.

Por tanto, $\mathcal{T}_1$ es topología sobre X .

Ahora, veamos si $\mathcal{T}_2$ cumple con las tres condiciones de una topología.

- Claramente podemos ver que $\emptyset, X \in \mathcal{T}_2$.
- Sean $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_2$ entonces $\{a\} \cap \{b\} = \emptyset \in \mathcal{T}_2$.
- Sean $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{T}_2$ entonces $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_2$.

Por tanto, $\mathcal{T}_2$ no es topología sobre X .

Finalmente, veamos si $\mathcal{T}_3$ cumple con las tres condiciones de una topología.

- De manera similar podemos observar que $\emptyset, X \in \mathcal{T}_3$.
- Sean $\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{T}_3$ entonces $\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in \mathcal{T}_3$.
- Sean $\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{T}_3$ entonces $\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in \mathcal{T}_3$.

Por tanto, $\mathcal{T}_3$ es topología sobre X .

En este ejemplo, observamos que las familias $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_3$ cumplen con las tres condiciones de la topología es decir I), II) y III); por lo tanto, éstas familias son topologías sobre X . En cambio $\mathcal{T}_2$ no es topología sobre X ya que la familia $\mathcal{T}_2$ no cumple la condición III) de la definición de una topología. Podemos observar de esta manera que $(X, \mathcal{T}_1)$ y $(X, \mathcal{T}_3)$ resultan ser espacios topológicos. $\square$

Ejemplo 1.2. Sea X un conjunto cualesquiera, entonces podemos encontrar fácilmente dos topologías en X .

- i) $\mathcal{T} = P(X)$, llamada topología discreta.
- ii) $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$, llamada topología indiscreta.

1.1.1. Espacios de Hausdorff

Definición 1.2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, se denomina espacio de Hausdorff si para cada par de puntos $x, y \in X$, con $x \neq y$, existen dos abiertos $U, V \in \mathcal{T}$ disjuntos (es decir, $U \cap V = \emptyset$) tales que $x \in U$ y $y \in V$.

Ejemplo 1.3. Todo espacio métrico, con la topología generada por la métrica, es un espacio de Hausdorff. En particular $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual es espacio de Hausdorff.

1.1.2. Bases para una topología

Definición 1.3. (Base para una topología). Dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$, si cada elemento de $\mathcal{T}$ es unión de elementos de $\mathcal{B}$.

En otras palabras, $\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$, si para cualquier abierto $V \in \mathcal{T}$ con $V \neq \emptyset$, tenemos que $V = \bigcup_i B_i$, con $B_i \in \mathcal{B}$. Los elementos de una base se llaman conjuntos abiertos básicos o también abiertos básicos. Si $\mathcal{T}$ tiene a $\mathcal{B}$ como base diremos que $\mathcal{T}$ es generada por $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.4.

- a) En todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ resulta que $\mathcal{T}$ es base para sí misma.
- b) Dado (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{T}$ topología generada por d , entonces la colección $\mathcal{B}$ formada por todas las bolas abiertas en (X, d) es una base para $\mathcal{T}$.

Definición 1.4. (Base Local). Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $x \in X$. La colección $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$ se llama base local en x si cumplen las siguientes dos condiciones:

- 1) $x \in B$, para cualquier $B \in \mathcal{B}_x$.
- 2) Para cada $V \in \mathcal{T}$, con $x \in V$, existe algún $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $B \subseteq V$.

Definición 1.5. (Espacio primero contable). Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es primero contable, si en cada punto de X hay una base local enumerable.

Definición 1.6. (Espacio segundo contable). Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es segundo contable, si $\mathcal{T}$ tiene alguna base enumerable.

Proposición 1.1. *Todo espacio topológico segundo contable es primero contable.*

Demostración. Dado $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $x \in X$ arbitrario. Por hipótesis tenemos que bajo esta topología dicho espacio es segundo contable, entonces existe una base enumerable $\mathcal{B}$ para $\mathcal{T}$. A su vez, usando esta base consideramos la colección enumerable

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\},$$

entonces $\mathcal{B}_x$ es una base local en x . □

1.1.3. Espacios localmente euclidianos

Definición 1.7. Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es localmente euclidiano, si para cada punto $x \in X$ existe algún abierto $U \in \mathcal{T}$, con $x \in U$, que es homeomorfo a un abierto V de algún espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$, con $m \geq 0$.

1.2. Topología cociente

1.2.1. Espacios cocientes

Sea $\sim$ una relación de equivalencia definida en un espacio topológico X , entonces podemos denotar por $X/\sim$ a la colección de todas las clases de equivalencias dadas por esta relación de equivalencia en X .

Se puede proporcionar a $X/\sim$ una topología, de tal forma que la aplicación proyección denotado por $\pi : X \rightarrow X/\sim$ sea continua. Como podemos observar la topología trivial cumple con esta condición y es la topología más pequeña.

Ahora, veamos la topología más grande donde π es continua, es claro si $B \subset (X/\sim)$ tal que $\pi^{-1}(B)$ es un conjunto abierto de X , entonces B está contenida en esta topología.

De esta forma, tenemos una topología sobre $X/\sim$, dada por la siguiente colección

$$\{B \subset (X/\sim) \mid \pi^{-1}(B) \text{ es abierto en } X\}.$$

Por tanto, el espacio $X/\sim$ se denomina espacio cociente, llamaremos a $\pi : X \rightarrow (X/\sim)$ aplicación cociente.

1.2.2. Aplicación de identificación

La aplicación cociente dada por $\pi : X \rightarrow (X/\sim)$ es continua y además es sobreyectiva. Así mismo, si $B \subset (X/\sim)$ con $\pi^{-1}(B)$ un conjunto abierto en X entonces B es un conjunto abierto en $(X/\sim)$.

Definición 1.8. Sean Z, W espacios topológicos y $g : Z \rightarrow W$ una aplicación continua. Decimos que g es una aplicación de identificación si es sobreyectiva y además si $B \subset W$ con $g^{-1}(B)$ es un conjunto abierto de Z , entonces B es abierto en W .

Podemos observar que toda aplicación cociente es una aplicación de identificación.

Lema 1.1. Una aplicación de identificación $g : Z \rightarrow W$ tiene la naturaleza de una

aplicación cociente; es decir, hay una relación de equivalencia $\sim$ sobre Z y un homeomorfismo $k : W \longrightarrow (Z/\sim)$ de tal manera que se cumpla que $k \circ g = \pi$.

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in Z$, definamos una relación sobre Z como: $z_1 \sim z_2$, si y sólo si $g(z_1) = g(z_2)$. Es evidente que la relación definida anteriormente es de equivalencia. Consideremos $k : W \longrightarrow (Z/\sim)$ de la siguiente manera, sea $w \in W$ existe $z \in Z$ tal que $g(z) = w$, de manera que definimos $k(w) = \pi(z)$; por definición $k \circ g = \pi$, vemos que k es inyectiva y además π es sobreyectiva, entonces k también es sobreyectiva. Por lo tanto, k es biyectiva.

Observemos ahora que k es una aplicación abierta. En efecto, dado $B \subset W$ abierto, si consideramos $g = k^{-1} \circ \pi$ entonces $\pi^{-1}(k(B)) = g^{-1}(B)$ es abierto en Z y así $k(B)$ es abierto.

Mostraremos la continuidad de k . De hecho, sea B un conjunto abierto de $(Z/\sim)$, luego $g^{-1}[k^{-1}(B)] = \pi^{-1}(B)$ es abierto de Z , y además, g es la aplicación de identificación, es así que $k^{-1}(B)$ es abierto en W . Entonces k es un homeomorfismo. $\square$

Teorema 1.1. *Dada la aplicación de identificación $g : Z \longrightarrow W$ y $\sim$ la relación de equivalencia originada por g , entonces se dice que $(Z/\sim)$ es homeomorfo a W .*

Veamos a continuación, la utilidad de un criterio para conocer en qué momento una aplicación $h : Y \longrightarrow Z$ entre espacios topológicos con Y espacio cociente, es continua.

Proposición 1.2. *Dada una aplicación de identificación denotada por $g : Z \longrightarrow W$ y además sea $h : W \longrightarrow Q$ otra aplicación, siendo Q un espacio topológico. Si la aplicación composición $g \circ h : Z \longrightarrow Q$ es continua, entonces se dice que la aplicación h es continua.*

Demostración. Sea $B \subset Q$ abierto, entonces $(h \circ g)^{-1}(B)$ es abierto en Z , lo cual es análogo decir que $g^{-1}[h^{-1}(B)]$ es abierto en Z . Además, de la aplicación g se observa que $h^{-1}(B)$ es abierto en W ; por lo tanto, demostramos que h es continua. $\square$

Observación 1.2. En los teoremas y proposiciones anteriores también podemos considerar cerrado en lugar de abierto.

Una aplicación continua y sobreyectiva $g : Z \longrightarrow W$ es de identificación si, $g^{-1}(B)$ es un conjunto cerrado en Z entonces B es un conjunto cerrado en W .

Proposición 1.3. Dada $g : Z \longrightarrow W$ una aplicación continua y sobreyectiva. Si la aplicación g es abierta o cerrada, entonces decimos g es una aplicación de identificación.

Demostración. Sea $B \subset W$ entonces $g[g^{-1}(B)] = B$; esto es consecuencia de la sobreyectividad de g . Para el caso en el que g es abierta, tenemos que si $g^{-1}(B)$ es abierto entonces el conjunto B es abierto. En el otro caso, si g es cerrada, tenemos que $g^{-1}(B)$ es cerrado, esto implica que B es cerrado. Por lo tanto, en cualquier caso podemos decir que g es una aplicación cociente. $\square$

Proposición 1.4. Dada $g : Z \longrightarrow W$ una aplicación biyectiva e identificación, entonces se dice que la aplicación g es un homeomorfismo.

Demostración. Mostraremos que g es una aplicación abierta. Dado $B \subset Z$ abierto, de la biyectividad de g tenemos que $g^{-1}[g(B)] = B$. Además, g es una aplicación de identificación. Luego, $g(B)$ es abierto en W .

Esto muestra que g es un homeomorfismo. $\square$

Observación 1.3. Recordemos que $g : Z \longrightarrow W$ es una aplicación cociente, esto implica que W sea homeomorfo al espacio $Z/\sim$.

Definición 1.9. Dadas Z y W dos espacios topológicos, entonces decimos que una aplicación $h : Z \longrightarrow W$ es propia si para cualquier conjunto compacto $K \subset W$ la preimagen $h^{-1}(K)$ es también un conjunto compacto.

1.3. Variedades topológicas

En términos simples, una variedad topológica es vista, localmente, como una deformación continua de un subconjunto de un espacio euclidiano. Veamos la definición exacta de esta noción.

Definición 1.10. Se dice que un espacio topológico denotado por $(M, \mathcal{T})$ es una variedad topológica de dimensión m , si satisface las siguientes condiciones:

- a) $(M, \mathcal{T})$ es un espacio de Hausdorff.
- b) $(M, \mathcal{T})$ es un espacio segundo contable.
- c) $(M, \mathcal{T})$ es un espacio localmente euclidiano cuya dimensión es m .

Observación 1.4.

- 1) La condición c) de la definición anterior quiere decir que para cada $p \in M$ existe un conjunto $U \in \mathcal{T}$, con $p \in U$ tales que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo entre U y el conjunto $\varphi(U)$ abierto en $\mathbb{R}^m$.
- 2) Si consideramos que $\varphi(U)$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^m$ entonces U es denominado bola coordenada.

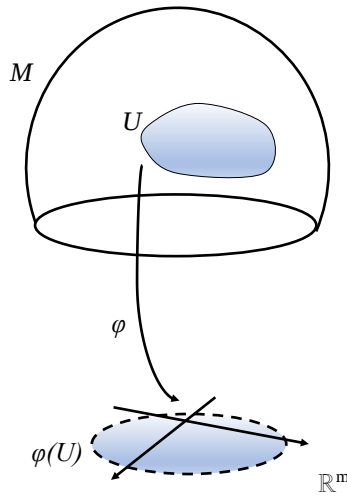


Figura 1.1: Sistema de coordenadas

- 3) De la figura (figura 1.1) se dice que cada homeomorfismo $\varphi : U \longrightarrow \varphi(U)$ recibe el nombre de carta o *sistemas de coordenadas* cuyo dominio es U y lo denotaremos por el par (U, φ) . Por otro lado, para cualquier $p \in U$ tenemos que $\varphi(p) = (a_1, \dots, a_m)$, al cual llamaremos *coordenadas locales de p* .

Si (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son cartas en M , tales que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces la aplicación $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ es un homeomorfismo, por ser la composición de homeomorfismos. Esta aplicación se denomina cambio de coordenadas y la denotaremos por φ_{ij} .

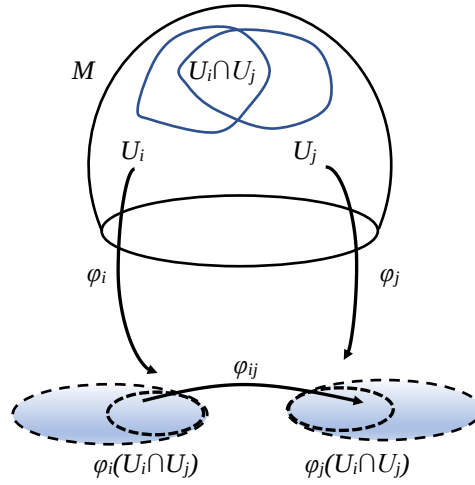


Figura 1.2: Cambio de coordenadas.

Decir diferenciable o suave es equivalente a decir que es C^∞ -diferenciable.

Definición 1.11. Una función $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, donde U es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, es llamada suave o C^∞ si todas las derivadas parciales de f existen y son continuas en U .

Definición 1.12. La aplicación $f : M \longrightarrow N$ se llama difeomorfismo si:

- i) f es biyectiva.
- ii) f es diferenciable.
- iii) $f^{-1} : N \longrightarrow M$ (la inversa existe porque f es biyectiva) es diferenciable.

Definición 1.13. Dos cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) sobre M , se dice que son compatibles si satisface cualesquiera de las dos condiciones siguientes:

- 1) $U_{ij} := U_i \cap U_j = \emptyset$, ó bien
- 2) Si $U_{ij} \neq \emptyset$ entonces $\varphi_{ij} := \varphi_j \circ (\varphi_i)^{-1} : \varphi_i(U_{ij}) \longrightarrow \varphi_j(U_{ij})$ es un difeomorfismo entre abiertos de clase C^∞ .

Definición 1.14. Una colección de cartas $\mathcal{A} = \{\varphi_i : U_i \longrightarrow V_i\}_{i \in \Lambda}$ m -dimensional sobre M es un atlas m -dimensional sobre M , si cumple los siguientes dos casos:

- 1) Cuando $M = \bigcup_{i \in \Lambda} U_i$, es decir cuyos dominios cubren a M .
- 2) Cualesquiera dos cartas en $\mathcal{A}$ son compatibles.

Definición 1.15. Una carta (W, ψ) en M es **admisible** en $\mathcal{A}$, si es compatible con cada elemento de $\mathcal{A}$.

Definición 1.16. Sea $1 \leq k \leq \infty$. Se denomina estructura diferenciable de clase C^k a toda atlas $\mathcal{A}$, verificando las siguientes condiciones:

- 1) Si $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j) \in \mathcal{A}$, con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es de clase C^k , para cada $i, j \in I$.
- 2) $\mathcal{A}$ es un Atlas Maximal, es decir, si tenemos una carta (U, φ) en M tales que $\varphi^{-1} \circ \varphi_i$ y $\varphi_i^{-1} \circ \varphi \in C^k$ para cada $i \in I$ (una carta (U, φ) es compatible con todas las cartas de $\mathcal{A}$) entonces $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$.

Lema 1.2. Sea M una variedad topológica. Todo atlas sobre M está contenido en un único atlas maximal sobre M .

Demostración. Dada $\mathcal{A}$ un atlas sobre M y sea $\mathcal{M}$ la colección de todas las cartas que son admisibles en $\mathcal{A}$. Como sabemos que cada carta en $\mathcal{A}$ es admisible en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$.

- 1) $\mathcal{M}$ es un atlas.

En efecto, como los dominios de los elementos de $\mathcal{A}$ forman un cubrimiento abierto de M , lo mismo pasa con los dominios de las cartas que constituyen $\mathcal{M}$. Por otro lado, dadas dos cartas (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) en $\mathcal{M}$ tales que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, se debe mostrar que éstas son compatibles, y para ello es necesario verificar que el cambio de coordenadas $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ es un difeomorfismo de

clase C^∞ .

Sea $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$, arbitrario, y $p \in U_1 \cap U_2$ la preimagen de x mediante φ_1 . Además, como $\mathcal{A}$ es un atlas sobre M , existe una carta $(V, \phi) \in \mathcal{A}$ cuyo dominio V contiene a p . Siendo (U_1, φ_1) y (U_2, φ_2) admisibles en $\mathcal{A}$, tenemos que los cambios de coordenadas

$$\phi \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap V) \longrightarrow \phi(V \cap U_1) \text{ y } \varphi_2 \circ \phi^{-1} : \phi(V \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_2 \cap V)$$

son difeomorfismos de clase C^∞ . Observemos que $p \in U_1 \cap V \cap U_2$ y

$$x \in \varphi_1(U_1 \cap V \cap U_2) \subseteq \varphi_1(U_1 \cap U_2).$$

Por otro lado, en $\varphi_1(U_1 \cap V \cap U_2)$, tenemos que

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} |_{\varphi_1(U_1 \cap V \cap U_2)} = (\varphi_2 \circ \phi^{-1}) |_{\phi(U_1 \cap V \cap U_2)} \circ (\phi \circ \varphi_1^{-1}) |_{\varphi_1(U_1 \cap V \cap U_2)}$$

y así, $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en $x \in \varphi_1(U_1 \cap U_2)$. Siendo x arbitrario concluimos que $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_1(U_1 \cap U_2)$. De forma similar se comprueba la diferenciable de $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ en cada punto de $\varphi_2(U_1 \cap U_2)$. Por tanto, $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ es un difeomorfismo de clase C^∞ . Luego, $\mathcal{M}$ es un atlas.

2) $\mathcal{M}$ es maximal.

En efecto, si (U, φ) es un sistema admisible en $\mathcal{M}$ entonces es compatible con cada elemento de $\mathcal{M}$, en particular es compatible con cada elemento de $\mathcal{A}$. Es decir, (U, φ) es admisible en $\mathcal{A}$. Por tanto, por definición misma de $\mathcal{M}$ vemos que la carta $(U, \varphi) \in \mathcal{M}$.

3) Si existiera otro atlas maximal $\mathcal{N}$ tal que cada uno de sus elementos son admisibles en $\mathcal{A}$, entonces $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ y como $\mathcal{N}$ es maximal tenemos que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, por tanto $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

□

1.4. Variedades diferenciables

En términos simples una variedad diferenciable es una estructura geométrica que localmente es vista como un subconjunto de un espacio euclidiano (de hecho, una deformación suave de ella). En esta sección daremos la definición de una variedad diferenciable y presentaremos las propiedades que posee en relación a su estructura y a la noción de tangencia. Posteriormente, estudiaremos propiedades de aplicaciones que son definidas entre variedades diferenciables (propiedades tales como la diferenciabilidad).

Definición 1.17. (Variedad diferenciable). Se denomina variedad diferenciable m -dimensional de clase C^k ($1 \leq k \leq \infty$) a una pareja $(M^m, \mathcal{A})$, de tal manera que M^m es una variedad topológica m -dimensional, mientras que $\mathcal{A}$ cumple con la condición de estructura diferenciable m -dimensional de clase C^k en M^m .

En algunas partes de este trabajo expresaremos M^m en lugar de M , esto es para indicar que la dimensión de M es m , pero si la estructura diferenciable es conocida obviaremos todo lo referente a ella.

Ejemplo 1.5.

- 1) El espacio $\mathbb{R}^n$ de dimensión n cumple con ser variedad diferenciable. En consecuencia, el espacio $\mathbb{R}^n$ considerando con su topología usual $\mathbb{R}^n$ es de Hausdorff y segundo contable. Además de esto, la familia $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, I)\}$, es decir aquellas aplicaciones que están formadas únicamente de la aplicación identidad $I : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, resulta en un atlas diferenciable con dimensión n .
- 2) (La esfera es una variedad diferenciable). Considere la m -esfera unitaria

$$S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}, \text{ donde } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m+1} x_i^2},$$

con la topología de subespacio. Sabemos que $\mathbb{R}^{m+1}$ es un espacio de Hausdorff y segundo contable, S^m hereda también estas propiedades.

Para $j = 1, \dots, m+1$, definimos los hemisferios

$$U_{2j-1} = \{x \in S^m : x_j > 0\} \quad y \quad U_{2j} = \{x \in S^m : x_j < 0\}.$$

Observamos que, estos hemisferios son abiertos en S^m , pues $U_{2j-1} = h_j^+ \cap S^m$ y $U_{2j} = h_j^- \cap S^m$ donde

$$h_j^+ = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x_j > 0\} \quad y \quad h_j^- = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : x_j < 0\}$$

son conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^m$.

Por otra parte, definimos aplicaciones $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ por esta igualdad

$$\varphi_i(x) = (x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{m+1})$$

de tal manera que $i = 2j - 1$ ó $i = 2j$, $j = 1, \dots, m+1$. (Denotemos por $\widehat{x}_j$ que indica que la coordenada x_j ha sido suprimida). También se observa que $\varphi_i(U_i)$ es la bola abierta en $\mathbb{R}^m$ de centro en $0 \in \mathbb{R}^n$ y radio 1. Además, estas aplicaciones $\varphi_i : U_i \longrightarrow \varphi_i(U_i)$ son inyectivas. En consecuencia, sean $x, y \in U_i \subseteq S^m$ y suponga que $i = 2j - 1$. Entonces, $x_j > 0$ y $y_j > 0$. Si $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ esto implica que

$$(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{m+1}) = (y_1, \dots, \widehat{y}_j, \dots, y_{m+1})$$

de esta la igualdad tenemos que

$$x_1 = y_1, \dots, x_{j-1} = y_{j-1}, x_{j+1} = y_{j+1}, \dots, x_{m+1} = y_{m+1}$$

de donde obtenemos

$$x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + x_{j+1}^2 + \dots + x_{m+1}^2 = y_1^2 + \dots + y_{j-1}^2 + y_{j+1}^2 + \dots + y_{m+1}^2.$$

Dados $x, y \in S^m$ tenemos que $\|x\|^2 = 1 = \|y\|^2$, de esta manera de la igualdad anteriormente mencionada resulta en

$$1 - x_j^2 = 1 - y_j^2.$$

Además, como $x_j > 0$ y $y_j > 0$ resulta que $x_j = y_j$, es así que $x = y$.

Análogamente, se procede cuando $i = 2j$.

Considerando las restricciones al conjunto U_i de las proyecciones

$\pi_1, \dots, \pi_{m+1} : \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ obtenemos que

$$\varphi_i = \left(\pi_1|_{U_i}, \dots, \widehat{\pi_j|_{U_j}}, \dots, \pi_{m+1}|_{U_i} \right).$$

Así, de los resultados anteriores, podemos deducir que φ_i es continua. A continuación, definamos la función $\phi_i : B(0, 1) \longrightarrow U_i$, como

$$\phi_i(y) = \left(y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_j, \dots, y_m \right), \text{ si } i = 2j - 1$$

$$\phi_i(y) = \left(y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_j, \dots, y_m \right), \text{ si } i = 2j$$

donde $j = 1, 2, \dots, m+1$. Podemos observar que cada una de estas funciones ϕ_i son continuas y además es inversa de φ_i para cada i .

Ahora, veamos que $S^m = \bigcup_i U_i$.

En efecto, sabemos que U_i es un subconjunto de S^m para todo índice i , de aquí resulta que $\bigcup_i U_i \subseteq S^m$. Por otra parte, si $x = (x_1, \dots, x_{m+1}) \in S^m$, luego $\|x\| = 1$, de esto deducimos que $x \neq 0$, entonces existe algún $j = 1, \dots, m+1$ tal que $x_j \neq 0$.

Hay dos casos:

a) si $x_j < 0$, esto implica que $x \in U_{2j} \subseteq \bigcup_i U_i$.

b) si $x_j > 0$ entonces $x \in U_{2j-1} \subseteq \bigcup_i U_i$.

De esta manera, en cualesquiera de estos dos casos tenemos que $S^m \subseteq \bigcup_i U_i$.

Además, el cambio de coordenadas son difeomorfismos. Así, la colección

$$\mathcal{A} = \{(U_{2j-1}, \varphi_{2j-1}), (U_{2j}, \varphi_{2j}) : j = 1, \dots, m+1\}$$

constituye para S^m un atlas diferenciable y de dimensión igual a m . Por lo tanto, $(S^m, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión m .

- 3) Denotemos por $M = M(n \times m, \mathbb{R})$ la colección de matrices cuya orden es $n \times m$ y que tienen coeficientes reales. Donde $M(n \times m, \mathbb{R})$ tiene la topología inducida por la biyección $\varphi : M(n \times m, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{nm}$ dada por $\varphi(a_{ij}) = (a_{11}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm})$. Notemos que $(M(n \times m, \mathbb{R}), \varphi)$ es una carta local de la matriz $M(n \times m, \mathbb{R})$, cuyo dominio cubre todo el conjunto $M(n \times m, \mathbb{R})$. Es más, el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(M(n \times m, \mathbb{R}), \varphi)\}$$

es un atlas de dimensión nm y diferenciable; por consiguiente, $(M, \mathcal{A})$ es una variedad diferenciable de dimensión nm .

- 4) (Subvariedad abierta). Dada $(M^m, \mathcal{A})$ una variedad diferenciable y Z un subconjunto abierto en M , entonces Z con la topología de subespacio es de Hausdorff y con base enumerable; además, para cualesquiera $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $U \cap Z \neq \emptyset$ la restricción $\varphi|_{U \cap Z} : U \cap Z \longrightarrow \varphi(U \cap Z)$ es un sistema de coordenadas para Z . Entonces, la colección

$$\mathcal{A}_Z := \{(U \cap Z, \varphi|_{U \cap Z}) : (U, \varphi) \in \mathcal{A}\}$$

es un atlas diferenciable para Z . Además, $(Z, \mathcal{A}_Z)$ es una variedad diferenciable, y tiene la misma dimensión que M . En este caso $(Z, \mathcal{A}_Z)$ se llama subvariedad abierta de M .

- 5) $GL(n \times n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$, donde

$$\det : \mathbb{R}^{n^2} \approx M(n \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la aplicación determinante la cual es diferenciable y

$$GL(n \times n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$$

es abierto en $\mathbb{R}^{n^2}$. Por la parte 4) nos permite concluir que $GL(n \times n, \mathbb{R})$ es una variedad por sí misma y de igual dimensión de $\mathbb{R}^{n^2}$, es decir $GL(n \times n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable n^2 -dimensional.

1.4.1. Aplicaciones diferenciables

Definición 1.18. Sean $(M^m, \mathcal{A})$ y $(N^n, \mathcal{A}')$ variedades diferenciables, entonces decimos que $f : M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable en el punto $p \in M$, si hay dos sistemas de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de M en p y $(V, \phi) \in \mathcal{A}'$ de N en $f(p)$, con $f(U) \subseteq V$ tales que $\phi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \phi(V)$ es diferenciable en el punto $\varphi(p)$.

La aplicación $\phi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es llamada representación local de f o lectura de f en términos de las cartas (U, φ) y (V, ϕ) , y la notación de esta aplicación, a partir de aquí en adelante, será $f_{\varphi\phi}$.

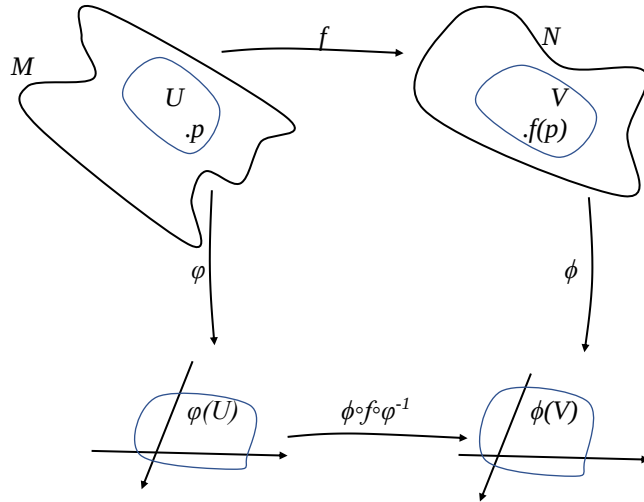


Figura 1.3: La expresión local de la aplicación $f: (\phi \circ f \circ \varphi^{-1})$

Ejemplo 1.6.

- 1) La aplicación inclusión $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tiene la propiedad de ser diferenciable y poseer rango n en todos los miembros de S^n . De hecho, la representación local de esta aplicación con respecto, por ejemplo, a la proyección en las n primeras componentes y la aplicación identidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ es la aplicación que asigna $(x_1, \dots, x_n, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2})$ a cada $(x_1, \dots, x_n)$, el cual es claramente diferenciable y de rango n , esto debido a que su matriz jacobiana es la matriz identidad de orden n .
- 2) La aplicación inclusión $i : \bar{B}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ también posee la propiedad de ser diferenciable y con rango n en todos sus puntos, pues como fue visto, en una vecindad de cada uno de sus puntos, $\bar{B}^n$ tiene carta a la aplicación identidad. Así, la representación local de la aplicación inclusión respecto de la aplicación identidad, en $\bar{B}^n$ como en $\mathbb{R}^n$, es la aplicación identidad.

Proposición 1.5. Si una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable en un punto $p \in M$, entonces f es continua en el punto p .

Demostración. Como f es una aplicación diferenciable en $p \in M$, entonces por la definición de aplicación diferenciable existen dos sistemas de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de M en p , y $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ de N en $f(p)$, con $f(U) \subseteq V$, por consiguiente la aplicación

$$f_{\varphi\psi} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V)$$

es diferenciable en $\varphi(p) \in \varphi(U)$. Puesto que el abierto U es dominio de φ , tenemos que $f = \psi^{-1} \circ f_{\varphi\psi} \circ \varphi$. Además, como φ es continua en p , $f_{\varphi\psi}$ es continua en $\varphi(p)$ y ψ^{-1} es continua $f_{\varphi\psi}(\varphi(p))$, entonces f es continua en p . $\square$

Proposición 1.6. Sea $f : M \longrightarrow N$ y $p \in M$. La diferenciabilidad de f en p no depende de los sistemas de coordenadas elegidos en $\mathcal{A}$ y en $\mathcal{A}'$.

Demostración. Como $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable en $p \in M$, por definición existe sistemas de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ de M en p , y $(V, \psi) \in \mathcal{A}'$ de N en $f(p)$ de tal

manera que $f_{\varphi\phi} : \varphi(U) \longrightarrow \phi(V)$ es diferenciable en $\varphi(p)$. Sean otro par de sistemas de coordenadas $(U_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}$ de M en p , y $(V_1, \phi_1) \in \mathcal{A}'$ de N en $f(p)$, entonces las aplicaciones

$$\varphi \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U \cap U_1) \longrightarrow \varphi(U \cap U_1) \text{ y } \phi_1 \circ \phi^{-1} : \phi(V \cap V_1) \longrightarrow \phi_1(V \cap V_1)$$

son difeomorfismos y en particular $\varphi \circ \varphi_1^{-1}$ es diferenciable en $\varphi_1(p)$ y $\phi_1 \circ \phi^{-1}$ es diferenciable en $\phi(f(p))$. Entonces, la aplicación $\phi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = (\phi_1 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \varphi_1^{-1})$ es diferenciable en $\varphi_1(p)$, es decir, $f_{\varphi_1\phi_1}$ es diferenciable en $\varphi_1(p)$. $\square$

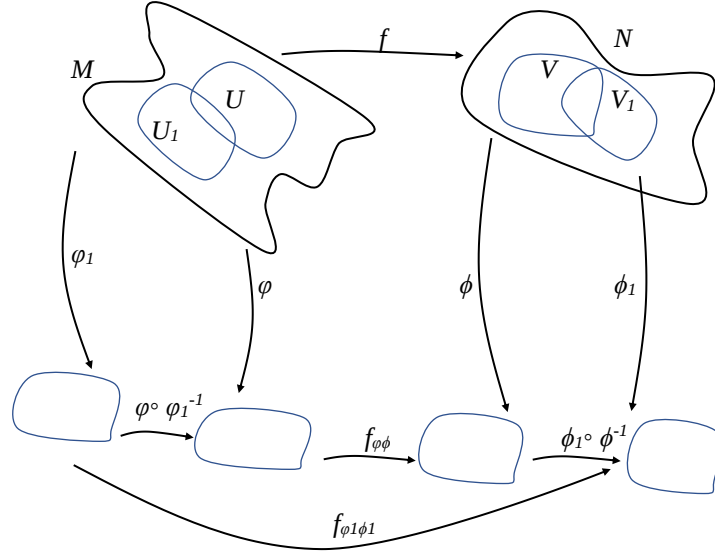


Figura 1.4: Diferenciabilidad de la aplicación $f_{\varphi_1\phi_1}$.

Ejemplo 1.7.

- 1) Sean los espacios euclidianos $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ con su estructura diferenciable usual, la noción de diferenciabilidad de una función $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ en el sentido de la definición, coincide con la noción usual de diferenciabilidad para funciones entre espacios euclidianos. Esto se explica en términos de las cartas $(\mathbb{R}^m, I_m)$ y $(\mathbb{R}^n, I_n)$, dados por la identidad en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ respectivamente, tenemos que $I_n \circ f \circ I_m^{-1} = f$. Esto también es válido si f es definida en algún abierto de $\mathbb{R}^m$.

- 2) Si $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable, entonces la restricción de la aplicación f a cualquier abierto V de M será también diferenciable.
- 3) Toda aplicación constante $f : M \longrightarrow N$ es diferenciable; de hecho, si $c \in N$ y $f(M) = \{c\}$ entonces toda expresión local de f es también una aplicación constante.

Proposición 1.7. Sean $f : M^m \longrightarrow N^n$ y $g : N^n \longrightarrow S^r$ aplicaciones diferenciables, entonces la composición $g \circ f : M^m \longrightarrow S^r$ es una aplicación diferenciable.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $f : M^m \longrightarrow N^n$ y $g : N^n \longrightarrow S^r$ son aplicaciones diferenciables; por consiguiente, demostremos que $g \circ f : M^m \longrightarrow S^r$ también es diferenciable. Consideramos un punto cualquiera $p \in M$, como f es diferenciable en el punto p entonces existen sistemas de coordenadas (U, φ) de M en p y (V_1, ϕ_1) de N en $f(p)$, con $f(U) \subseteq V_1$, de tal manera que, la aplicación

$$\phi_1 \circ f \circ \varphi^{-1} = f_{\varphi\phi_1} : \varphi(U) \longrightarrow \phi_1(V_1)$$

es diferenciable. Es así que de manera similar, por ser g diferenciable en $f(p)$, hay sistemas de coordenadas (V_2, ϕ_2) de N en $f(p)$ y (Z, ϕ) de S en $g(f(p))$, con $g(V_2) \subseteq Z$ tales que

$$\phi \circ g \circ \phi_2^{-1} = g_{\phi_2\phi} : \phi_2(V_2) \longrightarrow \phi(Z)$$

es diferenciable. Restringiendo U de forma que $f(U) \subseteq V_1 \cap V_2$ y de la igualdad

$$\phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\phi \circ g \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ f \circ \varphi^{-1}),$$

y además como $\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \phi_2(V_1 \cap V_2)$ es difeomorfismo, entonces

$$\phi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$$

es diferenciable en el punto $\varphi(p)$ y así $g \circ f$ es diferenciable en el punto $p \in M$. □

Definición 1.19. Decimos que una variedad M es difeomorfa a N , si existe un difeomorfismo $f : M \longrightarrow N$.

1.4.2. El espacio tangente

La idea es identificar curvas diferenciables en una variedad diferenciable, de modo que, sus expresiones locales tengan el mismo vector tangente en un punto dado. De esta manera empezamos definiendo la noción de camino diferenciable, que no es más que un caso particular de la definición de diferenciabilidad.

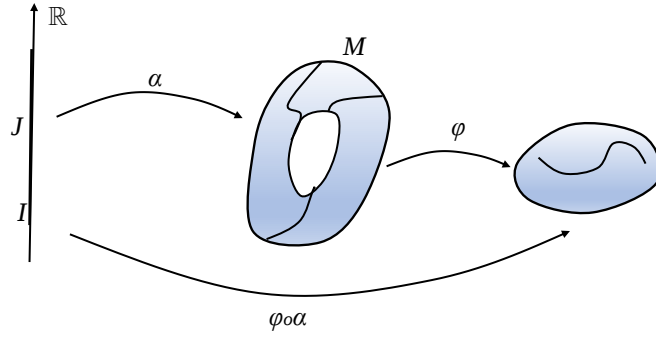


Figura 1.5: Camino en una variedad diferenciable.

Un camino en una variedad diferenciable M es una aplicación continua $\alpha : I \rightarrow M$ definida en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

Definición 1.20. Un camino $\alpha : I \rightarrow M$ definido en el intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$ es diferenciable en I , si para todo $t \in I$ existe un intervalo $J \subseteq I$, con $t \in J$ y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, tales que $\alpha(J) \subseteq U$ y la composición de estas aplicaciones $\varphi \circ \alpha : J \rightarrow \varphi(U)$ es diferenciable en t . Observemos que $\varphi \circ \alpha$ es un camino en $\mathbb{R}^n$.

Fijemos un punto $p \in M$ y denotemos el conjunto $\mathcal{C}_p(M)$, formado por todos los caminos $\alpha : J_\alpha \rightarrow M$, definidos en un intervalo abierto $J_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ en el que α es diferenciable en J_α , con $0 \in J_\alpha$ y $\alpha(0) = p$. El subíndice en J_α significa que dicho dominio depende del camino α .

Sea un camino $\alpha : J \rightarrow M$ en $\mathcal{C}_p(M)$ y (U, φ) una carta tal que $\alpha(J)$ no esté contenido en U , podemos hallar algún subintervalo $J_0 \subseteq J$ tal que $\alpha(J_0) \subseteq \varphi(U)$. Entonces,

cada vez que escribamos $\varphi \circ \alpha : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$ estamos admitiendo que el dominio de α ha sido suficientemente reducido, de tal forma que su imagen $\alpha(J)$ está contenida en U . De esta manera, el vector velocidad es denotado por $(\varphi \circ \alpha)'(t)$ en el punto $t \in J$.

Proposición 1.8. Consideremos los caminos $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_p(M)$. Si existe sistema de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con $p \in U$ tal que $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$, entonces esta igualdad se satisface para todo sistema $(V, \phi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in V$.

Demostración. Sean los caminos $\alpha : J_\alpha \longrightarrow M$ y $\beta : J_\beta \longrightarrow M$ en $\mathcal{C}_p(M)$.

Consideremos $(V, \phi) \in \mathcal{A}$ con $p \in V$ otro sistema de coordenadas de tal manera que tengamos la composición $(\phi \circ \alpha)(0) = (\phi \circ \beta)(0)$. Podemos restringir, si fuera necesario, los intervalos J_α y J_β de modo que $\alpha(J_\alpha) \subseteq U \cap V$ y $\beta(J_\beta) \subseteq U \cap V$, entonces

$$\begin{aligned} (\phi \circ \alpha)'(0) &= ((\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))'(0) \\ &= d((\phi \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ \alpha)(0)})((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= d((\phi \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ \alpha)(0)})((\varphi \circ \beta)'(0)) \\ &= (\phi \circ \beta)'(0). \end{aligned}$$

□

Dado este resultado, en $\mathcal{C}_p(M)$ definimos la siguiente relación: sean los caminos $\alpha, \beta \in \mathcal{C}_p(M)$, decimos que están relacionados, lo cual denotaremos por $\alpha \sim \beta$, si existe un sistema de coordenada $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$ y

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0). \quad (1.1)$$

La proposición anterior garantiza que la relación definida $\sim$ no depende del sistema de coordenadas.

Lema 1.3. La relación $\sim$ en $\mathcal{C}_p(M)$ es de equivalencia.

Demostración. Podemos ver de inmediato que $\sim$ es reflexiva y simétrica.

Veamos la transitividad de $\sim$:

Consideremos los caminos $\alpha : J_\alpha \longrightarrow M$, $\beta : J_\beta \longrightarrow M$ y $\lambda : J_\lambda \longrightarrow M$ tal que

$0 \in J_\alpha \cap J_\beta \cap J_\lambda$, $\alpha(0) = p = \beta(0) = \lambda(0)$ y $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \lambda$, por consiguiente existen sistemas de coordenadas $\varphi : U \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $\phi : V \subseteq M \longrightarrow \mathbb{R}^m$, tales que,

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) \quad (\phi \circ \beta)'(0) = (\phi \circ \lambda)'(0),$$

entonces

$$\begin{aligned} (\phi \circ \lambda)'(0) &= (\phi \circ \beta)'(0) = (\phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \beta)'(0) \\ &= d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}((\varphi \circ \beta)'(0)) \\ &= d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}((\varphi \circ \alpha)'(0)) \\ &= (\phi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= (\phi \circ \alpha)'(0). \end{aligned}$$

Es así que, $(\phi \circ \alpha)'(0) = (\phi \circ \lambda)'(0)$; por tanto, $\alpha \sim \lambda$. □

Definición 1.21. Sea M una variedad diferenciable, tenemos las siguientes definiciones:

- 1) Dado un camino $\alpha \in \mathcal{C}_p(M)$, llamaremos vector tangente al camino α en el punto $t = 0$ a la clase de equivalencia $[\alpha]$.
- 2) Denominamos vector tangente a la variedad diferenciable M en el punto p , a todo vector tangente de algún camino $\alpha \in \mathcal{C}_p(M)$.
- 3) El espacio tangente a M en p es la colección de todos los vectores tangentes a M en p , y es denotado por $T_p M$.

Debido a que cada vector tangente es la clase de equivalencia de una curva, el espacio tangente es entonces el espacio cociente $\mathcal{C}_p(M)/\sim$, según la relación dada en (1.1).

Denotemos por v a un vector tangente a M en p , es decir,

$$v = [\alpha] = \{\lambda \in \mathcal{C}_p(M) : \lambda \sim \alpha\}.$$

Sea (U, φ) un sistema de coordenadas de M en p , la representación local de cada camino

$\lambda \in v = [\alpha] \in \mathcal{C}_p(M)$, que posee en $\mathbb{R}^m$ cuando $t = 0$, que es el mismo vector velocidad $(\varphi \circ \alpha)'(0)$. Esto nos da la idea de relacionar cada vector $v = [\alpha] \in \mathcal{C}_p(M)$ con un vector en $\mathbb{R}^m$. Específicamente relacionamos $v = [\alpha]$ con el vector $(\varphi \circ \alpha)'(0)$. Se deduce así, una biyección entre $T_p M$ y $\mathbb{R}^m$. Tal como veremos en el siguiente resultado.

Lema 1.4. Cada sistema de coordenadas de M en p induce una aplicación biyectiva entre el conjunto $T_p M$ y el espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Fijemos un sistema cualesquiera $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con $p \in U$. Dada una clase cualquiera $[\alpha] \in T_p M$, deducimos de la proposición 1.8 que para cada $\beta \in [\alpha]$ tenemos que $(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$. Debido a esta observación definimos $\widehat{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por medio de la igualdad

$$\widehat{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0). \quad (1.2)$$

Es así que $\widehat{\varphi}_p$ es una biyección entre $T_p M$ y $\mathbb{R}^m$. De hecho,

- 1) $\widehat{\varphi}_p$ es inyectiva: Sean $[\lambda], [\beta] \in T_p M$ tales que $\widehat{\varphi}_p([\lambda]) = \widehat{\varphi}_p([\beta])$, por consiguiente de la definición de $\widehat{\varphi}_p$ resulta que $(\varphi \circ \lambda)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$, esto quiere decir que $\lambda \sim \beta$, por tanto obtenemos la igualdad $[\lambda] = [\beta]$.
- 2) Ahora, veamos que $\widehat{\varphi}_p$ es sobreyectiva: tomemos un vector arbitrario $v \in \mathbb{R}^m$, luego considere el camino $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \varphi(U)$ de forma que $\gamma(t) = \varphi(p) + tv$. Desde este resultado, podemos definir el camino $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow U$ como $\alpha = \varphi^{-1} \circ \gamma$, lo que implica que, $\alpha(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$. Desde que γ es diferenciable concluimos que $\alpha = \varphi^{-1} \circ \gamma$ también lo es. Además, $\alpha(0) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + 0) = p$ y por consiguiente $\alpha \in \mathcal{C}_p(M)$. Como $\widehat{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0) = v$, por lo tanto concluimos que $\widehat{\varphi}_p$ es sobreyectiva.

Es decir, que el espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ será considerado con la estructura de espacio vectorial dada por la suma usual de vectores y la multiplicación usual de un vector por un número real. Utilizando tal estructura por medio de sistemas de coordenadas induciremos una estructura de espacio vectorial sobre $T_p M$.

□

Proposición 1.9. Sea M una variedad diferenciable m -dimensional, entonces el espacio tangente $T_p M$ posee estructura de espacio vectorial de dimensión m .

Demostración. Consideremos un sistema de coordenadas arbitrario $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ con $p \in U$. Debido a Lema 1.4, la aplicación $\widehat{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\widehat{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ es biyectiva. Utilizando esta aplicación definimos en el espacio $T_p M$ las operaciones

$$[\alpha] + [\beta] = (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta]))$$

$$c[\alpha] = (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(c\widehat{\varphi}_p([\alpha])). \quad (1.3)$$

La suma que aparece en el lado izquierdo de la primera de las dos igualdades anteriores es la suma usual de vectores en $\mathbb{R}^m$, mientras que la suma que aparece en el lado derecho es la operación que se está definiendo en $T_p M$. De manera similar, se procede con la multiplicación.

Para definir las operaciones en $T_p M$ se hizo lo siguiente: puesto que $[\alpha]$ y $[\beta]$ están en $T_p M$ entonces, vía la biyección $\widehat{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ se relacionan con los vectores $\widehat{\varphi}_p([\alpha])$ y $\widehat{\varphi}_p([\beta])$, respectivamente. Como estos vectores ya están en $\mathbb{R}^m$, aquí aprovechamos la estructura de espacio vectorial que posee el espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ para que, bajo aquella estructura, podamos hallar el vector $\vec{z} = \widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])$ que también está en $\mathbb{R}^m$. Usando nuevamente la biyección $\widehat{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ para llevar a $\vec{z}$ de vuelta a $T_p M$. La clase resultante en $T_p M$ es la que utilizamos para tomar como definición de $[\alpha] + [\beta]$.

De forma similar, se procede para definir $c[\alpha]$. Como $[\alpha] \in T_p M$ entonces $\widehat{\varphi}_p([\alpha]) \in \mathbb{R}^m$. Luego, siendo $\mathbb{R}^m$ un espacio vectorial, entonces $c\widehat{\varphi}_p([\alpha]) \in \mathbb{R}^m$ para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\widehat{\varphi}_p^{-1}(c\widehat{\varphi}_p([\alpha])) \in T_p M$, y ésta es la clase que tomamos para definir $c[\alpha]$.

Comprobaremos que las operaciones definidas en (1.3) cumplen con los axiomas requeridos para que $T_p M$ sea un espacio vectorial.

Observamos, por la misma forma definida, que estas operaciones son cerradas.

a. La suma es asociativa:

Dados $[\alpha]$, $[\beta]$ y $[\lambda]$ elementos de $T_p M$. Entonces

$$\begin{aligned}
 ([\alpha] + [\beta]) + [\lambda] &= (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])) + [\lambda] \\
 &= (\widehat{\varphi}_p)^{-1}\{\widehat{\varphi}_p((\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta]))) + \widehat{\varphi}_p([\lambda])\} \\
 &= (\widehat{\varphi}_p)^{-1}\{(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta]) + \widehat{\varphi}_p([\lambda]))\} \\
 &= (\widehat{\varphi}_p)^{-1}\{(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p((\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\beta]) + \widehat{\varphi}_p([\lambda])))\} \\
 &= [\alpha] + (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\beta]) + \widehat{\varphi}_p([\lambda])) \\
 &= [\alpha] + ([\beta] + [\lambda]).
 \end{aligned}$$

b. La suma es commutativa:

$$[\alpha] + [\beta] = (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])) = (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\beta]) + \widehat{\varphi}_p([\alpha])) = [\beta] + [\alpha].$$

De forma similar, demostramos que las operaciones definidas en (1.3) cumplen con el resto de los axiomas del espacio vectorial. $\square$

Observación 1.5. Las operaciones definidas en (1.3) no dependen del sistema de coordenadas (U, φ) ; es decir, si $(V, \phi) \in \mathcal{A}$ es otro sistema tal que $p \in V$ entonces

$$(\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])) = (\widehat{\phi}_p)^{-1}(\widehat{\phi}_p([\alpha]) + \widehat{\phi}_p([\beta]))$$

$$(\widehat{\varphi}_p)^{-1}(c\widehat{\varphi}_p([\alpha])) = (\widehat{\phi}_p)^{-1}(c\widehat{\phi}_p([\alpha]))$$

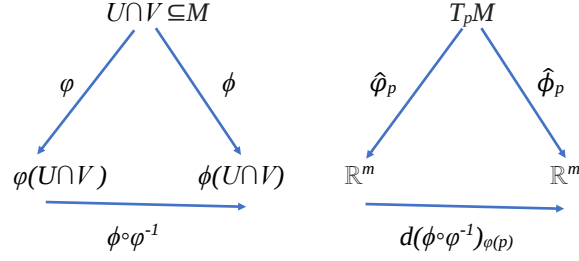


Figura 1.6: Operaciones en el espacio $T_p M$ no depende de (U, φ) .

En efecto: si $\phi \circ \varphi^{-1}$ es el respectivo cambio de coordenadas, entonces

$$(\phi \circ \alpha)'(0) = ((\phi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha))'(0) = d(\phi \circ \varphi^{-1})_{(\varphi \circ \alpha)(0)}((\varphi \circ \alpha)'(0));$$

es decir

$$\widehat{\phi}_p([\alpha]) = d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \widehat{\varphi}_p([\alpha]),$$

Entonces

$$\begin{aligned} (\widehat{\phi}_p)^{-1}(\widehat{\phi}_p([\alpha]) + \widehat{\phi}_p([\beta])) &= (\widehat{\phi}_p)^{-1}(d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \widehat{\varphi}_p([\alpha]) + d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \widehat{\varphi}_p([\beta])) \\ &= (\widehat{\phi}_p)^{-1}(d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta]))) \\ &= (\widehat{\phi}_p)^{-1} \circ d(\phi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)} \circ \widehat{\varphi}_p((\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta]))) \\ &= (\widehat{\phi}_p)^{-1} \circ (\widehat{\phi}_p)((\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta]))) \\ &= (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])). \end{aligned}$$

Corolario 1.1. Sea M una variedad diferenciable m -dimensional. Para todo sistema de coordenadas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$, con $p \in U$, y con la estructura de espacio vectorial dada por la operación (1.3), la aplicación $\widehat{\varphi}_p : T_p M \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $\widehat{\varphi}_p([\alpha]) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Tomemos $[\alpha]$ y $[\beta]$ en el espacio $T_p M$, luego tenemos que

$$[\alpha] + [\beta] = (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(\widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])),$$

y que $\widehat{\varphi}_p([\alpha] + [\beta]) = \widehat{\varphi}_p([\alpha]) + \widehat{\varphi}_p([\beta])$. De la misma manera mostramos la igualdad $\widehat{\varphi}_p(c[\alpha]) = c\widehat{\varphi}_p([\alpha])$. Puesto que $\widehat{\varphi}_p$ es, además, biyectiva concluimos con la demostración. $\square$

Corolario 1.2. La dimensión del espacio vectorial $T_p M$ es finita; por lo que, se puede expresar como $\dim(M) = m$.

Proposición 1.10. Sea M una variedad diferenciable. Los espacios tangentes $T_p M$ y $T_q M$ son disjuntos para cualquier par de puntos distintos $p, q \in M$.

Demostración. Supongamos que los espacios $T_p M$ y $T_q M$ comparten por lo menos un elemento en común, este vector común lo denotaremos por v . Ahora, veamos si $v \in T_p M$, esto implica que hay alguna curva diferenciable $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ de modo que $\alpha(0) = p$ y $v = [\alpha]$. Además, $v \in T_q M$, es así que existe alguna curva diferenciable

$$\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$$

de forma que $\beta(0) = q$ y $v = [\beta]$. Como $p \neq q$, esto implica que $\beta(0) = q \neq p$, es decir β no pasa por el punto p cuando $t = 0$ y por ende $\beta \notin \mathcal{C}_p(M)$. A su vez, esto significa que $[\beta] \notin \mathcal{C}_p(M) / \sim = T_p M$, es decir $v \notin T_p M$, es así que encontramos una contradicción. Esto demuestra la proposición. $\square$

1.4.3. Una base para el espacio vectorial $T_p M$

Como sabemos que $T_p M$ es un espacio vectorial m -dimensional, es natural, entonces indagar que existe alguna base de éste.

Sea $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$ y $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in U$. Consideremos las

curvas

$$\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$$

dadas por

$$\gamma_i(t) = \varphi(p) + te_i,$$

donde $i = 1, \dots, m$ y luego formamos las composiciones

$$\varphi^{-1} \circ \gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M,$$

las cuales son caminos en M , diferenciables en $t = 0$ y pasan por $p \in M$. Luego, tenemos que $\varphi^{-1} \circ \gamma_i \in \mathcal{C}_p(M)$, para todo $i = 1, \dots, m$. Afirmamos que el conjunto

$$\mathcal{B} = \{[\varphi^{-1} \circ \gamma_1], \dots, [\varphi^{-1} \circ \gamma_m]\}$$

es una base para $T_p M$.

En efecto: en primer lugar formemos la combinación lineal

$$c_1[\varphi^{-1} \circ \gamma_1] + \dots + c_m[\varphi^{-1} \circ \gamma_m] = 0,$$

(0 es el elemento neutro aditivo de $T_p M$, el cual es la clase de un camino constante) entonces

$$\widehat{\varphi}_p(c_1[\varphi^{-1} \circ \gamma_1] + \dots + c_m[\varphi^{-1} \circ \gamma_m]) = \widehat{\varphi}_p(0).$$

Dado que $\widehat{\varphi}_p$ es lineal, entonces la anterior igualdad se convierte en

$$c_1\widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_1]) + \dots + c_m\widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_m]) = \widehat{\varphi}_p(0).$$

Como definimos los caminos $(\varphi_1 \circ \gamma_i)$, obtenemos de la anterior igualdad la relación $c_1 \cdot e_1 + \dots + c_m \cdot e_m = 0$ y esto a su vez implica que $c_1 = \dots = c_m = 0$ y por tanto los

elementos $\mathcal{B}$ son linealmente independientes. En segundo lugar, sea el elemento $v \in T_p M$.

Es decir, debemos hallar escalares $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$v = c_1([\varphi^{-1} \circ \gamma_1]) + \dots + c_m([\varphi^{-1} \circ \gamma_m]).$$

Para hallar estos escalares aplicamos $\widehat{\varphi}_p$ a la anterior igualdad, luego tenemos que

$$\widehat{\varphi}_p(v) = c_1 \widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_1]) + \dots + c_m \widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_m])$$

y si $\alpha \in \mathcal{C}_p(M)$ es tal que $v = [\alpha]$ entonces

$$\widehat{\varphi}_p(v) = \left. \frac{d(\varphi \circ \alpha)(t)}{dt} \right|_{t=0} = c_1 \cdot e_1 + \dots + c_m \cdot e_m.$$

Por tanto, si $(\varphi \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ concluimos que $c_i = x'_i(0)$ para todo $i = 1, \dots, m$. Entonces, los escalares c_i existen y por tanto $\mathcal{B}$ genera el espacio $T_p M$.

Observación 1.6. Cada vector $[\varphi^{-1} \circ \gamma_i] \in \mathcal{B}$ será denotado como $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. Por consiguiente la base

$$\mathcal{B} = \{[\varphi^{-1} \circ \gamma_1], \dots, [\varphi^{-1} \circ \gamma_m]\}$$

es denotada mediante el conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p) \right\}$. $\mathcal{B}$ se llama base del espacio $T_p M$ asociada al sistema de coordenadas (U, φ) . Observemos que $\mathcal{B}$ no es otra cosa que el conjunto $\{(\widehat{\varphi}_p)^{-1}(e_1), \dots, (\widehat{\varphi}_p)^{-1}(e_m)\}$.

1.4.4. Coordenadas de un vector tangente

Sea $v = [\alpha] \in T_p M$ un vector tangente a M en el punto p . Hallaremos las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B} = \{[\varphi^{-1} \circ \gamma_1], \dots, [\varphi^{-1} \circ \gamma_m]\}$, donde $\gamma_i : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ son los caminos definidos por $\gamma_i(t) = \varphi(p) + t e_i$, siendo (U, φ) una carta alrededor del punto p .

Sea $(\varphi \circ \alpha)(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ la expresión local de α , luego tenemos que

$$\left. \frac{d(\varphi \circ \alpha)(t)}{dt} \right|_{t=0} = (x'_1(0), \dots, x'_m(0)) = x'_1(0)e_1 + \dots + x'_m(0)e_m.$$

Donde

$$\widehat{\varphi}_p(v) = \left. \frac{d(\varphi \circ \alpha)(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad y \quad e_i = \widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_i]), \text{ entonces}$$

$$\widehat{\varphi}_p(v) = x'_1(0)\widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_1]) + \dots + x'_m(0)\widehat{\varphi}_p([\varphi^{-1} \circ \gamma_m]).$$

Debido a que $\widehat{\varphi}_p(v)$ es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $T_p M$ y $\mathbb{R}^m$ tenemos, de la igualdad anterior, que

$$v = x'_1(0)[\varphi^{-1} \circ \gamma_1] + \dots + x'_m(0)[\varphi^{-1} \circ \gamma_m].$$

Es decir, las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B}$ son $(x'_1(0), \dots, x'_m(0))$, esto es, son las derivadas evaluadas en 0 de las coordenadas de la expresión local $\alpha_\varphi = \varphi \circ \alpha$.

Definición 1.22. Dada una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$. Llamaremos diferencial de la aplicación f en el punto $p \in M$, a toda aplicación de la forma

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N,$$

definida por

$$df_p([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

Definición 1.23. Dada V un subconjunto abierto del espacio $\mathbb{R}^n$. Llamaremos un k -slice de V , a todo subconjunto de la forma

$$Q = \{(v_1, \dots, v_n) \in V : v_{k+1} = t_{k+1}, \dots, v_n = t_n\},$$

para ciertas constantes $t_{k+1}, \dots, t_n$.

Definición 1.24. Sea M una variedad diferenciable n -dimensional y además sea (V, φ)

una carta diferenciable en M . Si Q es un subconjunto de V de manera que $\varphi(Q)$ es k -slice de $\varphi(V)$ entonces se dice sencillamente que Q es k -slice de V .

Definición 1.25. Sea M una variedad diferenciable n -dimensional. Decimos que un subconjunto $Q \subset M$ cumple con la condición local de k -slice, si para cualquier $p \in Q$ existe una carta diferenciable (V, φ) de p en M de tal manera que $V \cap Q$ es solamente un k -slice de V . Si $(V, \varphi) = (V, (v_1, \dots, v_n))$ entonces $V \cap Q$ es un k -slice, es ,

$$\varphi(V \cap Q) = \{(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n) \in \varphi(V) : v_{k+1} = t_{k+1}, \dots, v_n = t_n\}.$$

Teorema 1.2 (Teorema de la Función Inversa). Sean W y Z subconjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ y $g : W \rightarrow Z$ una aplicación diferenciable. Si $Dg(p)$ es invertible en algún punto $p \in W$, entonces existen vecindades conexas $W_0 \subset W$ de p y $Z_0 \subset Z$ de $g(p)$ de modo que $g|_{W_0} : W_0 \rightarrow Z_0$ es un difeomorfismo.

Demostración. Para la prueba, ver Lages Lima, E.(2007), Página 15. □

Teorema 1.3 (Teorema de la Función Inversa para Variedades). Sean M y N variedades diferenciables y $g : M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Si $a \in M$ es tal que dg_a es un isomorfismo entonces existen vecindades conexas W_0 de a y Z_0 de $g(a)$ tal que la restricción $g|_{W_0} : W_0 \rightarrow Z_0$ es un difeomorfismo.

Demostración. Debido a que dg_a es biyectiva tenemos que M y N comparten la misma dimensión, esto es, $\dim M = \dim N = n$. Escojamos cartas diferenciables: (W, φ) con centro en $a \in M$ y (Z, ψ) con centro en $g(a) \in N$ tales que $g(W) \subset Z$. Entonces, la representación local de g es

$$\widehat{g} = \psi \circ g \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(Z) \subset \mathbb{R}^n,$$

con $\widehat{f}(p) = 0$. Además, φ y ψ son difeomorfismos, por consiguiente

$$d(\widehat{g})_0 = d\psi_{g(p)} \circ dg_p \circ d(\varphi^{-1})_0$$

es no singular. Utilizando el teorema de la función inversa, existen vecindades conexas $\widehat{W}_0 \subset \varphi(W)$ y $\widehat{Z}_0 \subset \psi(Z)$ conteniendo 0 de forma que $\widehat{g}|_{\widehat{W}_0} : \widehat{W}_0 \longrightarrow \widehat{Z}_0$ es un difeomorfismo. Por lo tanto, $W_0 = \varphi^{-1}(\widehat{W}_0)$ y $Z_0 = \psi^{-1}(\widehat{Z}_0)$ son vecindades conexas en a y $g(a)$ respectivamente y $g|_{W_0} : \psi^{-1} \circ \widehat{g}|_{\widehat{W}_0} \circ \varphi : W_0 \longrightarrow Z_0$, es un difeomorfismo. $\square$

Definición 1.26. Sean M^m y N^n dos variedades diferenciables de dimensiones m y n , respectivamente, con $m \leq n$. Diremos que una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una inmersión si

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

es inyectiva para cualquier $p \in M$. Si además, f es un homeomorfismo sobre $f(M) \subseteq N$, donde $f(M)$ tiene la topología inducida de N ($\mathcal{T}|_{f(M)} := \{A \cap f(M) : A \in \mathcal{T}\}$), diremos que f es un embebimiento (o incrustación).

Definición 1.27. Sea M una variedad diferenciable m -dimensional. Se dice que un subconjunto no vacío $N \subseteq M$ es una subvariedad de M de dimensión n ($n \leq m$), si para cualquier punto $p \in N$ existe una carta local (U, φ) de M con $p \in U$ tal que la intersección $N \cap U$ de N es llevado vía φ a un abierto del subespacio vectorial

$$\mathbb{R}^n \times \{0\} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_{n+1} = \dots = x_m = 0\}.$$

Definición 1.28. Sean M^m y N^n dos variedades diferenciables de dimensiones m y n , respectivamente, con $m \geq n$. Decimos que una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una submersión si

$$df_p : T_p M \longrightarrow T_{f(p)} N$$

es sobreyectiva para todo $p \in M$.

Proposición 1.11 (Propiedades de las Submersiones). Sea $\pi : M \longrightarrow N$ una submersión, entonces se cumplen las dos condiciones siguientes:

- 1) π es una aplicación abierta.

- 2) Cada punto del dominio de π está en la imagen de una sección local diferenciable de π .

Demostración. Para la prueba, ver John M, Lee.(2000), Página 111. $\square$

Proposición 1.12. Sea $\pi : M \longrightarrow N$ una submersión diferenciable sobreyectiva, donde M y N son variedades diferenciables. Se dice que para cualquier variedad diferenciable B , la aplicación $f : N \longrightarrow B$ es diferenciable si y solo si $f \circ \pi$ es diferenciable.

Demostración. Puesto que f es diferenciable implica que $f \circ \pi$ es también diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ N & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Ahora, probemos el recíproco, puesto que por hipótesis $f \circ \pi$ es diferenciable y además sea un punto cualesquiera $q \in N$. Luego para cualquier $p \in \pi^{-1}(q)$ existe una vecindad U de q y una sección local diferenciable $\phi : U \longrightarrow M$ de π de manera que $\phi(q) = p$ (por proposición anterior). Entonces $\pi \circ \phi = Id|_U$, por otro lado

$$f|_U = f|_U \circ Id|_U = (f \circ \pi) \circ \phi,$$

esto nos demuestra que f es diferenciable en una vecindad U de q , por tanto f es diferenciable. $\square$

Teorema 1.4. Sea $f : M \longrightarrow N$ una inmersión inyectiva diferenciable donde M y N son variedades diferenciables. Si la aplicación f es propia, entonces f es una aplicación diferenciable cerrada y de embebimiento (incrustación).

Demostración. Primeramente, debemos verificar que si f es propia, entonces f es una aplicación cerrada. Dados $A \subset M$ cerrado y arbitrario y $r \in \overline{F(A)}$, sabemos que N es precompacto, luego existe una vecindad U_r de r de modo que $\overline{U_r}$ es compacto en N .

Como f es propia, tenemos que $f^{-1}(\overline{U_r})$ es compacto. Por consiguiente, $f^{-1}(\overline{U_r}) \cap A$ es compacto en M . Además, de la continuidad de f tenemos que el conjunto

$$f(f^{-1}(\overline{U_r}) \cap A) = \overline{U_r} \cap f(A)$$

es compacto en N . Como sabemos N es de Hausdorff y así $\overline{U_r} \cap f(A)$ será cerrado en N . Entonces, $r \in \overline{\overline{U_r} \cap f(A)} = \overline{U_r} \cap f(A) \subset f(A)$, es decir $r \in f(A)$. Debido a que f es inyectiva, tenemos que $f : M \longrightarrow f(M)$ es biyectiva y así existe $f^{-1} : f(M) \longrightarrow M$.

Supongamos ahora, que el conjunto $A \subset M$ es cerrado y arbitrario, entonces $f(A)$ es cerrado en N . Por otro lado, $f(A) = f(A) \cap f(M)$ y por consiguiente $f(A)$ resulta cerrado en $f(M)$. De esta manera, con todo lo visto anteriormente, mostramos que

$$f : M \longrightarrow f(M)$$

es una aplicación continua, biyectiva y cerrada. Por lo tanto, ella resulta en un homeomorfismo. □

Capítulo 2

Introducción a los grupos de Lie

Iniciaremos este capítulo dando un breve comentario sobre los orígenes de la teoría de Lie, para ello seguimos de cerca a (Andruskiewitsch, 1998).

El científico Noruego Sophis Lie(1842-1899) desarrolló nociones trascendentales del grupo de Lie y una serie de trabajos con diversos matemáticos: Henri Poincaré, Felix Klein, Élie Cartan, Gaston Darboux, Charles E. Picard, Friedrich Engel, Wilhelm Killing, Gosta Mittag-Leffler, etc.

Para entender la idea fundamental de los grupos de Lie, es necesario remontarnos a principios del siglo XIX. Son tres fuentes básicas las que proporcionan el principio de la teoría de Lie y de sus avances más destacados.

Primero, resaltamos las ideas del matemático francés Evariste Galois (1811-1832). Galois, buscó una determinada relación primordial que expresara las soluciones de un polinomio de grado cinco en función de los coeficientes de forma que se permitiera utilizar las operaciones básicas, uno de los problemas notables que se estudiaba por el año 1800. Para aquella fecha, eran conocidas las soluciones para polinomios de grados menores a cinco, que de alguna manera fueron resueltas por Abel y Ruffini, pero sin encontrar fórmula o relación alguna. Galois, mencionó que la investigación de las soluciones de un polinomio se debe realizar mediante permutaciones del conjunto de soluciones que sean

de principio algebraico. El conjunto de dichas permutaciones es un grupo, que se le denomina "Grupo de Galois".

La idea fundamental de las propiedades básicas de un objeto matemático (las soluciones de un polinomio) son conservadas por la acción de un grupo asociado regularmente al objeto en estudio (grupo de Galois).

En segundo lugar: mencionamos otro hallazgo de vital importancia fue realizado en el año 1930 por Bolyai, Lobachevsky y Gauss; referido a la validez de geometrías no euclídeas, recordemos que el quinto postulado de Euclides nos manifiesta lo siguiente: "por un punto del plano exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a la misma". A lo largo de un tiempo, se realizaron diversas investigaciones para probar este postulado; por lo tanto, los matemáticos antes mencionados dieron diversos ejemplos de geometrías que satisfacen los cuatro postulados, pero no el quinto. De modo que, el quinto postulado no se puede deducir de los anteriores; es lógicamente independiente de ellos.

El estudio de geometrías no euclídeas provocó una intensa actividad intelectual: se sucedieron los ejemplos de geometrías no euclídeas y las investigaciones se intensificaron de manera positiva sobre estos interesantes objetos. Ineludiblemente, se discutió el significado de estos descubrimientos; se preguntaron cuál era la esencia fundamental de la geometría, a qué se debían llamar propiedades geométricas. Una réplica fue dada por el matemático alemán Félix Klein (1849-1925) en una conferencia dada en la Universidad de Erlangen en el año de 1872 (Klein, compañero de Lie, había publicado junto con él en 1870 y 1871 dos trabajos que trataban de las propiedades de grupos de transformaciones de ciertos objetos geométricos y analíticos). La idea principal del Programa de Erlangen, como se conoce a la conferencia de Klein, es dada del siguiente modo: las propiedades fundamentales de un objeto geométrico son aquéllas que son conservadas por su grupo de transformaciones.

En tercer lugar, es de suma importancia mencionar los renombrados trabajos del francés Joseph Fourier (1768 -1830). Realiza profundas generalizaciones de la teoría de Fou-

rier que están presentes en la teoría de representaciones de grupos de L  .

En este capítulo, desarrollaremos los conceptos y propiedades fundamentales de los Grupos de Lie, campos vectoriales y acciones de grupos de Lie sobre variedades diferenciables, puesto que son herramientas fundamentales para lograr demostrar el objetivo central de la presente Tesis; para ello, seguiremos de cerca a (Lee, 2000); (Aro Huanacuni, 2017) ; (Rubio Martí, 2016); (Santamaria, 2014); (Osorio Acevedo, 2008) ; (Citoler Berdala y Martínez Pérez, 2018) ; (Fernández Barroso, 2019) ; (Jancsa, 2007) y (Salcedo, 2020).

2.1. Grupos de Lie

Esta sección es dedicada al estudio de un grupo de Lie. Un grupo de Lie no es más que una variedad diferenciable con estructura de grupo de modo que las operaciones, que definen la estructura de grupo, son diferenciables.

Definición 2.1. Un grupo de Lie G es una variedad diferenciable real o compleja, que también es un grupo en el sentido algebraico, de tal manera que la aplicación multiplicación e inversión

$$\begin{aligned} m : G \times G &\longrightarrow G & i : G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow m(a, b) = ab & a &\longrightarrow i(a) = a^{-1} \end{aligned}$$

son aplicaciones diferenciables.

Esta definición deja en claro que las estructuras de variedad y de grupo, si bien son distintas, no están desligadas.

Lema 2.1. *Sea G una variedad diferenciable con estructura de grupo. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longrightarrow gh^{-1} \text{ es diferenciable} \Leftrightarrow G \text{ es un grupo de Lie.} \end{aligned}$$

Demostración. Supongamos que $G \times G \longrightarrow G$ es una aplicación diferenciable, entonces debemos probar que G es un grupo de Lie.

En efecto:

$$\mathbf{a)} \quad G \xrightarrow{inc} G \times G \xrightarrow{C^\infty} G$$

$$g \longrightarrow (1_G, g) \longrightarrow 1_G \cdot g^{-1} = g^{-1} \text{ es diferenciable.}$$

$$\mathbf{b)} \quad G \times G \xrightarrow{(\text{Id}, i)} G \times G \xrightarrow{C^\infty} G$$

$$(g, h) \longrightarrow (g, h^{-1}) \longrightarrow g \cdot (h^{-1})^{-1} = gh \text{ es diferenciable.}$$

Esto implica que G es un grupo de Lie.

Ahora, veamos el recíproco. Es decir, sea G un grupo de Lie, entonces debemos probar que $G \times G \longrightarrow G$ es diferenciable.

En efecto:

$$\text{Sea } G \times G \xrightarrow{(\text{Id}, i)} G \times G \xrightarrow{C^\infty} G$$

$$(g, h) \longrightarrow (g, h^{-1}) \longrightarrow g \cdot h^{-1} \text{ es diferenciable.}$$

□

Observación 2.1. La inclusión es diferenciable y lo denotaremos con inc . Además, 1_G es el elemento neutro de G .

Proposición 2.1. Sean G, H grupos de Lie, entonces el producto directo $G \times H$ es un grupo de Lie.

Demostración. Como G y H son variedades diferenciables, entonces el producto cartesiano $G \times H$ también es una variedad diferenciable. Además,

$$m^* : (G \times H) \times (G \times H) \longrightarrow G \times H$$

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \longrightarrow (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$$

es diferenciable, pues cada componente es diferenciable.

Por otro lado,

$$i^* : G \times H \longrightarrow G \times H$$

$$(g, h) \longrightarrow (g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$$

es diferenciable, pues cada componente es diferenciable. Por tanto, el producto directo $G \times H$ es un grupo de Lie. $\square$

Ejemplo 2.1

- 1) Considere la variedad diferenciable $G = \mathbb{R}$ con su estructura de grupo aditivo (suma usual de números reales), entonces las aplicaciones $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $m(x, y) = x + y ; i(x) = -x$, son evidentemente diferenciables.
- 2) $G = GL(n \times n, \mathbb{R})$ es llamado un grupo bajo la multiplicación de matrices. Además, A es no singular $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, también AB es no singular pues

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \neq 0.$$

Es claro que las aplicaciones $(A, B) \longrightarrow AB$ y $A \longrightarrow A^{-1}$ son diferenciables, debido a que la multiplicación posee términos que son polinomios de las entradas de las matrices A y B . La matriz inversa de $A = (a_{ij})$ puede ser escrita como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\widetilde{a_{ij}}),$$

donde $\widetilde{a_{ij}}$ es el adjunto de a_{ij} en A (polinomio en términos del conjunto A) y $\det A$ es un polinomio de términos de A distinto a cero. De esto, concluimos que los términos de A^{-1} son de hecho funciones racionales sobre $GL(n, \mathbb{R})$, cuyos denominadores son distintos de cero y en consecuencia es diferenciable. Finalmente, $GL(n, \mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

2.1.1. Traslaciones a izquierda y derecha del grupo de Lie

Definición 2.2. Sea G un grupo de Lie cualesquiera. Entonces, para todo $g \in G$ definimos dos aplicaciones L_g y R_g de la siguiente forma:

$$L_g : G \longrightarrow G \qquad R_g : G \longrightarrow G$$

$$\begin{array}{ll} h \longrightarrow gh & h \longrightarrow hg \\ \text{(traslación a izquierda)} & \text{(traslación a derecha)} \end{array}$$

Proposición 2.2. L_g y R_g son aplicaciones diferenciables.

Demostración. Veamos el caso traslación a izquierda L_g , esto es, la composición de las aplicaciones de inclusión y multiplicación de grupo

$$\begin{array}{ll} inc : G \xrightarrow{C^\infty} G \times G & m : G \times G \xrightarrow{C^\infty} G \\ h \longrightarrow (g, h) & (g, h) \longrightarrow g \cdot h \end{array}$$

$L_g = m \circ inc$ es diferenciable.

De la misma manera se demuestra para R_g . □

Definición 2.3. Dadas G y G' grupos de Lie, un homomorfismo de grupos de Lie

$$F : G \longrightarrow G'$$

es una aplicación de clase C^∞ que también es un homomorfismo de grupos; es decir, que conserva la operación de grupo

$$F(g_1 \circ g_2) = F(g_1) \circ F(g_2).$$

Decimos que F es un Isomorfismo de grupo de Lie si también es un difeomorfismo, lo que implica que tiene un inverso que también es un homomorfismo de grupos de Lie.

Proposición 2.3. Las traslaciones L_g y R_g son difeomorfismos. Debido a que L_g^{-1} y R_g^{-1} son de clase C^∞ .

Demostración. Primero, por la definición 2.1.1, tenemos la traslación a izquierda,

$$\begin{array}{l} L_g : G \longrightarrow G \\ h \longrightarrow gh. \end{array}$$

Sabemos que la traslación L_g es una aplicación diferenciable, pues es la composición de la inclusión y multiplicación

$$inc : G \xrightarrow{C^\infty} G \times G \quad m : G \times G \xrightarrow{C^\infty} G$$

$$h \longrightarrow (g, h) \qquad (g, h) \longrightarrow g \cdot h$$

En efecto:

$$L_g(h) = gh = \tilde{h},$$

aplicamos g^{-1}

$$g^{-1}gh = g^{-1}\tilde{h}$$

$$h = g^{-1}\tilde{h}$$

$$L_g^{-1}(\tilde{h}) = g^{-1}\tilde{h}.$$

Es así que,

$$\begin{aligned} (L_g \circ L_g^{-1})(h) &= L_g(g^{-1}h) \\ &= g.g^{-1}h = Ih = h. \end{aligned}$$

Para R_g^{-1} se demuestra del mismo modo. □

Definición 2.4. Sea G un grupo de Lie. Un grupo de Lie H recibe el nombre de subgrupo de Lie de G si H es a la vez un subgrupo y una subvariedad de G .

2.2. Fibrado tangente y proyección canónica

Definición 2.5. Sea M una variedad diferenciable. El fibrado tangente sobre una variedad diferenciable M se define por:

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

Además, consideramos la aplicación $\pi : TM \longrightarrow M$, llamada proyección canónica de TM , definida por $\pi(p, v) = p$, para todo $v \in T_p M$ y $p \in M$.

2.2.1. Campo Vectorial

Definición 2.6. Un campo vectorial X sobre M es una correspondencia que asigna a cada elemento $p \in M$ un vector $v_p \in T_p M$. Esto es, una aplicación $X : M \longrightarrow TM$ de tal manera que se cumpla $\pi \circ X = Id_M$.

Un campo vectorial X en M es diferenciable, si considerado como aplicación

$$X : M \longrightarrow TM,$$

es diferenciable. Consideremos una carta (U, φ) de M en p y $(TU, T\varphi)$ del fibrado TM en

$$X(p) = (p, v_p).$$

Debido a que, en cada espacio tangente $T_p M$, podemos considerar la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p)\}$ asociado a (U, φ) , entonces cada vector v_p puede ser escrito como:

$$v_p = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p). \quad (2.1)$$

Haciendo variar el punto p en U obtenemos las funciones $a_1, \dots, a_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$, las cuales serán llamadas funciones coordenadas de X respecto al sistema (U, φ) .

Con esta notación la expresión local de X está dada por la aplicación

$$T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow T\varphi(X(U))$$

tal que

$$\begin{aligned} T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}(q) &= T\varphi(X(p)) = T\varphi \left(p, \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) \\ &= (\varphi(p), a_1(p), \dots, a_n(p)) = (q, a_1(\varphi^{-1}(q)), \dots, a_n(\varphi^{-1}(q))) \end{aligned}$$

y así, tenemos que

$$T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} = (Id \mid \varphi(U), a_1 \circ \varphi^{-1}, \dots, a_n \circ \varphi^{-1}).$$

Pero las funciones $a_1 \circ \varphi^{-1}, \dots, a_n \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \mathbb{R}$, no son otra cosa que las expresiones locales de las funciones coordenadas $a_1, \dots, a_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

Observación 2.2.

- 1) Considerando una carta (U, φ) en M y si $X : M \longrightarrow TM$ es un campo vectorial en M , entonces conviene escribir

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p),$$

donde $a_1, \dots, a_n : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son las funciones coordenadas de X en términos de (U, φ) y donde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}(p)\}$ es la respectiva base de $T_p M$ asociada a dicho sistema. Esta forma de expresar un campo vectorial es bastante conveniente como veremos mas adelante.

- 2) Sea $\hat{X}$ un campo de vectores en M . Para cualquier punto p de M , $\hat{X}(p) \equiv X_p$ es un vector tangente a M en p y por consiguiente, es una derivación local (en el conjunto de las funciones diferenciables en un entorno de p) de manera que los campos de vectores se pueden considerar como las aplicaciones

$$\begin{aligned} \hat{X} : \mathcal{C}^\infty(M) &\longrightarrow \mathcal{C}_p^\infty(M) & X(p) : \mathcal{C}_p^\infty(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longrightarrow \hat{X}(f) : M \longrightarrow \mathbb{R} & f &\longrightarrow X(p)f := \hat{X}(f)(p) \\ p &\longrightarrow \hat{X}(f)(p) := X_p(f) \end{aligned}$$

$$\hat{X}(f)(p) := \hat{X}(p)(f) := X_p(f) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} f(p).$$

- 3) Sea $\mathfrak{X}(M) = \{\text{El conjunto de todos los campos vectoriales diferenciables de } M\}$, con las operaciones:

a) Suma.

Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces el campo $X + Y$ es definido por $X + Y : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$

$$(X + Y)(f) : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X + Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f).$$

b) Producto.

$X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ esto implica que $fX : \mathcal{C}^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ está definido por

$$(fX)(g) : M \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (fX)(g)(p) = f(p)X_p(g).$$

Con estas dos operaciones de suma y producto, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio $\mathbb{R}$ -vectorial.

4) Consideramos otra forma de definir la función diferencial.

Sea $F : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable entre variedades, definimos la derivada de F en el punto $p \in M$ por: $F_*X : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ mediante la regla

$$(F_*X)(f) = X(f \circ F)$$

para todo $X \in T_pM$ y $f \in \mathcal{C}_{F(p)}^\infty(N)$. Veamos algunas propiedades.

a) $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es lineal.

b) Cuando F resulta ser un difeomorfismo, entonces $F_* : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N$ es un isomorfismo.

Lema 2.2. Sean X, Y campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable M . Entonces, existe un único campo vectorial Z , tal que para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se cumple

$$Z(f) = (XY - YX)(f).$$

Demostración. En primer lugar, supongamos que Z existe, debemos comprobar que este es único.

Dada una carta (U, φ) y sean

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

las expresiones de X e Y en esta carta, entonces para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ obtenemos

$$XY(f) = X \left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$YX(f) = Y \left(\sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

por consiguiente, Z es dado en términos de la carta (U, φ) por medio de

$$\begin{aligned} Z(f) &= XY(f) - YX(f) = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_i \sum_j \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

con lo que

$$Z_i = \sum_j \left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right). \quad (2.2)$$

Esto muestra la unicidad de Z .

En segundo lugar, demostramos la existencia. Definamos Z_α en cada vecindad coordinada U_α de la estructura diferenciable $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ por medio de la igualdad $Z(f)$. Dada otro sistema (U_β, φ_β) , por la unicidad, tenemos que $Z_\alpha = Z_\beta$ en $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, lo cual permite definir Z en toda la variedad M . Observamos también que Z es diferenciable. $\square$

Ejemplo 2.2

Sean X, Y campos vectoriales diferenciables sobre M y $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, entonces

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X. \quad (2.3)$$

Demostración. $[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX)$

$$= fgXY + fX(g)Y - gfYX - gY(f)X$$

$$= fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X. \quad \square$$

El campo $Z = XY - YX$ dada por el lema 2.2 es llamado **el Corchete de Lie** de X , Y y se usa la notación $[X, Y] = XY - YX$.

2.2.2. Álgebra de Lie

Sea $\mathbb{K}$ cuerpo. Un álgebra de Lie sobre el cuerpo K es un espacio vectorial $\mathfrak{b}$ junto con una operación llamada “ corchete de Lie”

$$\begin{aligned} [\] : \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} &\longrightarrow \mathfrak{b} \\ (X, Y) &\longrightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

que verifica, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{b}$ y para todo $\lambda, u \in \mathbb{K}$, lo siguiente:

- 1) $[\lambda X + uY, Z] = \lambda[X, Z] + u[Y, Z]$ bilineal.
 $[X, \lambda Y + uZ] = \lambda[X, Y] + u[X, Z].$
- 2) $[X, Y] = -[Y, X]$ anti-simetría .
- 3) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, identidad de Jacobi.

Ejemplos 2.3

a) El espacio vectorial de matrices $M(n, \mathbb{R})$ reales n^2 - dimensional, con el corchete de Lie dado por $[A, B] = AB - BA$ para cada $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ constituye un álgebra de Lie que es denotada por $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Demostración

- 1) $[\lambda A + uB, C] = \lambda[A, C] + u[B, C]$
 $(\lambda A + uB)C - C(\lambda A + uB)$
 $(\lambda A)C + (uB)C - C(\lambda A) - C(uB)$
 $\lambda(AC) + u(BC) - \lambda(CA) - u(CB) \dots$ propiedad de matrices
 $\lambda(AC - CA) + u(BC - CB)$
 $\lambda[A, C] + u[B, C]$
- 2) $[A, B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B, A]$
- 3) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]]$

$$\begin{aligned}
&= [A, BC - CB] + [B, CA - AC] + [C, AB - BA] \\
&= A(BC - CB) - (BC - CB)A + B(CA - AC) - (CA - AC)B + C(AB - BA) - (AB - BA)C \\
&= (AB)C - A(CB) - (BC)A + (CB)A + B(CA) - B(AC) - (CA)B + (AC)B + C(AB) - C(BA) - (AB)C + (BA)C \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) De forma similar, $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ es el álgebra de Lie de dimensión $2n^2$ obtenida en $(M(n, \mathbb{C}), [,])$.

c) Todo el espacio vectorial V es un álgebra de Lie si se definen al corchete de Lie trivial

$$[X, Y] = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{b}.$$

d) Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Entonces $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es también álgebra de Lie con el corchete definido por

$$[(X, Y), (A, B)] = ([X, A], [Y, B]).$$

Además, $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ se llama álgebra de Lie producto.

Definición 2.7 (Campos invariantes por traslaciones a la izquierda y derecha)

Sea G un grupo de Lie, se dice que un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante por traslación a la izquierda si

$$Lg_*X = X, \forall g \in G.$$

Esto es equivalente a:

- $Lg_*X_h = X_{gh}$.
- $d(Lg)_h(X(h)) = X(gh)$.

Denotemos: $\mathfrak{X}_L(G) = \{\text{Todos los campos vectoriales de } G \text{ invariantes a la izquierda}\}.$

De igual manera, un campo $X \in \mathfrak{X}(G)$ es invariante por traslación a la derecha si

$$d(R_g)_h(X(h)) = X(hg).$$

Ejemplo 2.4. Dada $[X, Y] = XY - YX$, esto permite definir la operación corchete

$$[,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow [X, Y].$$

La operación corchete posee las propiedades de álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{X}(M)$ es un álgebra de Lie, por consiguiente $\mathfrak{X}_L(G)$ es también un álgebra de Lie, donde la operación definida en $\mathfrak{X}_L(G)$ es precisamente el corchete de Lie.

Ejemplo 2.5.

Consideramos el grupo de Lie $(\mathbb{R}^2, +)$ donde $(+)$ denota la suma usual de vectores, en este caso las traslaciones a la izquierda son aplicaciones

$$\begin{aligned} L_g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longrightarrow L_g(x) = g + x, \forall g, x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

similares a las traslaciones a la derecha, observe que éstas no son otra cosa mas que las traslaciones usuales en $\mathbb{R}^2$.

Considere el campo vectorial

$$X(p) = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para cada $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ donde b_1, b_2 son constantes, es decir, las funciones coordenadas de X son las funciones constantes $f_1(p) = b_1$ y $f_2(p) = b_2$. En particular este campo vectorial es de clase C^∞ . En cada punto $g = p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ la diferencial de la traslación $L_p(q) = L_p(x, y) = (p_1 + x, p_2 + y)$ (donde $q = (x, y)$) es la aplicación $d(L_p)q : T_q\mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{p+q}\mathbb{R}^2$, cuya matriz asociada jacobiana está dada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces,

$$d(L_p)q(X(q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} = X(p+q) = X(pq).$$

Por lo tanto, X es invariante por traslaciones.

2.3. Acciones de grupo de Lie sobre variedades diferenciables.

Definición 2.8. Sea M una variedad diferenciable y $(G, \circ)$ un grupo de Lie.

Denominamos acción a izquierda de G en M , a toda aplicación diferenciable de la forma

$$\theta : G \times M \longrightarrow M,$$

de tal manera que se verifiquen las siguientes condiciones:

- i) $\theta(1_G, p) = p$, para cualquier punto $p \in M$.
- ii) $\theta(g_1, \theta(g_2, p)) = \theta(g_1 \circ g_2, p)$, para cualquier punto $p \in M$ y $g_1, g_2 \in G$.

Denominamos acción a derecha de G en M , a toda aplicación diferenciable de la forma

$$\theta : M \times G \longrightarrow M,$$

de tal manera que se verifiquen las siguientes condiciones:

- i) $\theta(p, 1_G) = p$, para cualquier punto $p \in M$.
- ii) $\theta(\theta(p, g_1), g_2) = \theta(p, g_1 g_2)$, para cualquier punto $p \in M$ y $g_1, g_2 \in G$.

Podemos también denotarlo por $\theta_g(p) = \theta(g, p)$, que verifica $\theta_{g_1} \cdot \theta_{g_2} = \theta_{g_1 g_2}$ y

$$\theta_{1_G} = Id_M,$$

para todo $g_1, g_2 \in G$. Además, $(\theta_g)^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. Por lo tanto, θ_g es un difeomorfismo.

2.3.1. Nociones de órbita y grupo de isotropía

Definición 2.9.

- Para cualquier $p \in M$, definimos la órbita de p bajo la acción de θ como el conjunto

$$G \cdot p = \{\theta_g(p) \mid g \in G\}.$$

- Para cualquier $p \in M$, el conjunto $G_p = \{g \in G : \theta_g(p) = p\}$ es denominado el grupo de isotropía o estabilizador de p ; es decir, aquellos que están formados por el conjunto de elementos de G que fijan p .

Además, G_p es un subgrupo de G . En efecto: $1_G \cdot p = p$ entonces $1_G \in G_p$.

Sean $g, h \in G_p$. Luego, tenemos lo siguiente $gh \cdot p = g(h \cdot p) = g \cdot p = p$, lo que implica que $gh \in G_p$. Por otro lado, tenemos que

$$p = 1_G \cdot p = h^{-1}h \cdot p = h^{-1}(h \cdot p) = h^{-1} \cdot p,$$

es decir $h^{-1} \in G_p$.

- La acción es transitiva si para cualesquiera dos puntos p y q de M existe g en G tal que $\theta_g(p) = q$. Es decir, $G \cdot p = M$, para cualquier $p \in M$.
- La acción es libre si el único elemento de G que fija a todo elemento de M es 1_G . Esto es, $G_p = \{1_G\}$, $\forall p \in M$.
- La acción es propia si la aplicación $\Psi : G \times M \longrightarrow M \times M$ definida por $\Psi(g, p) = (gp, p)$ es una aplicación propia.

Ejemplo 2.6. Dada $\theta : GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(A, x) \longmapsto Ax,$$

así definida θ es una acción. De hecho, sabemos que la acción de la identidad conserva vectores. Además, sabemos que la multiplicación de matrices es asociativa, es decir $(AB)x = A(Bx)$. Es diferenciable porque las componentes de Ax dependen polinómicamente de las entradas de la matriz de A y las componentes de x . Hay dos órbitas: $\{0\}$ y $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

Ejemplo 2.7. Si H es un subgrupo del grupo G , entonces $\theta : H \times G \longrightarrow G$ definida por

$$\theta(h, g) = h \cdot g,$$

es una acción de H sobre G .

Ejemplo 2.8. El grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{R})$ actúa de forma diferenciable y transitiva sobre el semiplano complejo $\mathbb{H}^2 = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$, mediante

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Veamos que se trata de una acción transitiva.

Sean $z = z_1 + iz_2, v = v_1 + iv_2 \in \mathbb{H}^2$. Encontremos una matriz de $SL(2, \mathbb{R})$ que envíe z a v , esto es.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az_1 + b + az_2i}{cz_1 + d + cz_2i} = v = v_1 + iv_2.$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente

$$v_1 = \frac{(az_1 + b)(cz_1 + d) + acz_2^2}{(cz_1 + d)^2 + c^2z_2^2}; \quad v_2 = \frac{-cz_2(az_1 + b) + az_2(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)^2 + c^2z_2^2}.$$

Si hacemos $c = 0$, entonces $ad = \det A = 1$ y tenemos:

$$v_1 = \frac{d(az_1 + b)}{d^2} = \frac{z_1 + db}{d^2}; \quad v_2 = \frac{adz_2}{d^2} = \frac{z_2}{d^2}.$$

De donde obtenemos que

$$d = \sqrt{\frac{z_2}{v_2}} \implies v_1 = \frac{v_2}{z_2}(z_1 + \sqrt{\frac{z_2}{v_2}}b) \implies b = \frac{v_1 \frac{z_2}{v_2} - z_1}{\sqrt{\frac{z_2}{v_2}}}.$$

Como además $a = \frac{1}{d} = \sqrt{\frac{v_2}{z_2}}$, concluimos que

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{v_2}{z_2}} & \frac{v_1 \frac{z_2}{v_2} - z_1}{\sqrt{\frac{z_2}{v_2}}} \\ 0 & \sqrt{\frac{z_2}{v_2}} \end{pmatrix} \cdot z = v.$$

Lema 2.3. Una acción $\theta : G \times M \longrightarrow M$ es propia si y sólo si para todo compacto $K \subset M$, la colección $G_K = \{g \in G : (g \cdot K) \cap K \neq \emptyset\}$ es compacto.

Definición 2.10. Sea G actuando sobre M . Decimos que los elementos $x, y \in M$ están relacionados si y sólo si, existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$, es decir

$$x \sim y \iff \exists g \in G, g \cdot x = y.$$

Esta relación es de equivalencia. En efecto:

- Reflexibilidad: Como 1_G es el elemento neutro de G tenemos que $1 \cdot x = x$, entonces $x \sim x$.

- Simetría: Si $x \sim y$, entonces existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Luego, tenemos que

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1}(g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = x,$$

debido a que $g^{-1} \in G$. Por lo tanto, $y \sim x$.

-Transitividad: Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces existen $g, h \in G$ tal que $g \cdot x = y$, $h \cdot y = z$.

También tenemos que $s = hg \in G$, por lo que $z = h \cdot y = h(g \cdot x) = (hg) \cdot x = s \cdot x$.

Entonces, existe $s \in G$ tal que $s \cdot x = z$, es decir, $x \sim z$.

Definición 2.11. Llamamos espacio cociente o espacio de órbitas al conjunto de clases de equivalencia de la relación $\sim$, y denotamos este conjunto por $M/G = \{G \cdot p\}_{p \in M}$.

Esto significa, que θ descompone a M en una unión disjunta de órbitas, es decir,

$$M = \bigcup_{p \in M} G \cdot p.$$

Ejemplo 2.9. La aplicación

$$\begin{aligned} \psi : G/G_p &\longrightarrow \mathcal{O}_p \\ gG_p &\longrightarrow g \cdot p \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva.

En efecto:

Sea $gG_p = hG_p$. Tenemos que $h^{-1}gG_p = G_p$, entonces $h^{-1}g \in G_p$. Así,

$$h \cdot p = h(h^{-1}g \cdot p) = (hh^{-1}g) \cdot p = g \cdot p.$$

Luego, ψ está bien definida.

Sea $g \cdot p \in \mathcal{O}_p$, entonces $g \cdot p = \psi(gG_p)$ lo cual implica que es sobreyectiva.

Por último, vemos que es inyectiva. Sean $gG_p, hG_p \in G/G_p$ tales que $g \cdot p = h \cdot p$, entonces $h^{-1}g \cdot p = h^{-1}(g \cdot p) = h^{-1}(h \cdot p) = h^{-1}h \cdot p = p$, es decir, $h^{-1}g \in G_p$. Por tanto, $gG_p = hG_p$.

Definición 2.12. Sea M una variedad diferenciable de dimensión $n + k$ y G un grupo. Un sistema de coordenadas (U, φ) sobre M , con funciones coordenadas $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n)$, es llamado una carta adaptada para una acción de G , si cumple las siguientes condiciones:

i) $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$.

ii) Cada una de las órbitas intercepta a un abierto U , en un conjunto vacío, o en un único slice de la forma $\{(x, y) : y_1 = c_1, \dots, y_n = c_n\}$.

Capítulo 3

Teorema de la variedad cociente.

En este capítulo detallaremos exhaustivamente la demostración del teorema de la variedad cociente, que es el objetivo principal que pretendemos alcanzar. Luego, veremos algunas aplicaciones importantes del teorema. Este capítulo sigue de cerca las siguientes referencias bibliográficas: (Lee, 2000) ; (Aro Huanacuni, 2017) y (Santamaria, 2014). Finalmente presentaremos conclusiones y recomendaciones pertinentes.

3.1. Demostración del Teorema de la variedad cociente

En esta sección enunciamos y demostramos el teorema central de la presente Tesis, a saber, el Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente).

Teorema 3.1. (Teorema de la variedad cociente). Sea G un grupo de Lie con acción suave, libre y propia sobre una variedad diferenciable M . Entonces, el espacio órbita M/G es una variedad topológica de dimensión igual a $\dim M - \dim G$. Además, M/G posee estructura diferenciable única de modo que la aplicación cociente $\pi : M \rightarrow M/G$ es una submersión diferenciable.

Demostración. Supongamos que existe una acción a izquierda de G en M y pongamos

$$\dim G = r, \dim M = s \text{ y } k = s - r.$$

Denotemos $\theta : G \times M \longrightarrow M$, la respectiva acción y por $\Phi : G \times M \longrightarrow M \times M$, la aplicación propia definida de la siguiente manera,

$$\Phi(g, m) = (g \cdot m, m).$$

En primer lugar, demostraremos la unicidad de la estructura diferenciable.

Supongamos que, el espacio M/G posee dos estructuras diferenciables distintas de modo que la aplicación cociente $\pi : M \longrightarrow M/G$, es una submersión diferenciable. Sean $(M/G)^*$ y $(M/G)^\Delta$ dos estructuras que hacen de (M/G) diferenciables, respectivamente. Siguiendo la Proposición 1.12, la aplicación identidad de $(M/G)^*$ para $(M/G)^\Delta$ es diferenciable.

De la misma manera, mostramos que $Id : (M/G)^* \longrightarrow (M/G)^\Delta$ es diferenciable. Esto implica que las dos estructuras diferenciables son equivalentes; por lo tanto, se muestra la unicidad.

En segundo lugar, se demostrará que el espacio órbita M/G es una variedad topológica.

i) Demostremos que el espacio M/G es de Hausdorff.

Definamos la relación órbita $\mathcal{O}$ en $M \times M$ de la siguiente manera:

$$\mathcal{O} = \Phi(G \times M) = \{(g \cdot m, m) : g \in G, m \in M\}.$$

Esta relación es denominada relación órbita debido a que si $(l, m) \in \mathcal{O}$ equivale a que m y l residen en la misma órbita. Dado que $G \times M$ es cerrado y que Φ es una aplicación propia, tenemos que $\mathcal{O} = \Phi(G \times M)$ imagen de la aplicación Φ , es también cerrado (consecuencia del Teorema 1.4). Puesto que $\pi(m)$ y $\pi(l)$ son elementos cualesquiera de M/G con $\pi(m) \neq \pi(l)$, esto nos da a entender que m y l están en órbitas distintas, de manera que $(l, m) \notin \mathcal{O}$. Como $\mathcal{O}^c$ es un conjunto abierto, es decir, que existe un contorno abierto producto $W \times Z$ de (l, m) , mostramos que $\pi(W)$ y $\pi(Z)$ están en el espacio M/G y son conjuntos abiertos y disjuntos. Además, cada uno de estos abiertos contienen como elementos a $\pi(l)$ y $\pi(m)$. Así, M/G es de Hausdorff.

ii) Demostremos que el espacio M/G es segundo contable.

Sea Z un conjunto abierto arbitrario en M/G , luego por el concepto de la aplicación cociente, tenemos que la imagen inversa $\pi^{-1}(Z)$ es un conjunto abierto sobre M . Así, podemos afirmar que existe una base numerable de abiertos $\{W_i\}$ en M de forma que $\pi^{-1}(Z) = \bigcup_i W_i$. Por lo tanto, $Z = \pi(\pi^{-1}(Z)) = \bigcup_i \pi(W_i)$. De esta manera, $\{\pi(W_i)\}$ es una base contable para M/G .

iii) Ahora, demostraremos que el espacio M/G es localmente Euclidiano.

Es decir, provaremos que para todo $m \in M$ exista una carta coordenada adaptada centrada en m .

Como $G \cdot m$ es una subvariedad embebida de M , podemos afirmar que existe una carta (L, ψ) sobre M con centro m , debido a que la intersección $G \cdot m \cap L$ es un r -slice sobre L . Escribamos las siguientes funciones coordenadas de ψ , dadas por $(w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_k)$, de manera que $G \cdot m \cap L$ sea un slice, tales que $\{(w, v) : v_1 = \dots = v_k = 0\}$. Supongamos que Q es subvariedad de V y que podamos definirlo como $\{(w, v) : w_1 = \dots = w_r = 0\}$ de manera que $T_m M$ pueda ser descompuesta como la suma directa

$$T_m M = T_m(G \cdot m) \oplus T_m Q,$$

donde $T_m(G \cdot m)$ es originado por $\{\frac{\partial}{\partial w_1}(m), \dots, \frac{\partial}{\partial w_r}(m)\}$ y $T_m Q$ por $\{\frac{\partial}{\partial v_1}(m), \dots, \frac{\partial}{\partial v_k}(m)\}$.

Denotemos la restricción de θ a $G \times Q \subset G \times M$, por la aplicación

$$\theta|_{G \times Q} : G \times Q \longrightarrow M.$$

Utilizando el teorema de la función inversa, demostraremos que la aplicación restricción $\theta|_{G \times Q}$ es un difeomorfismo en un entorno de $(1_G, m) \in G \times Q$. En efecto, sea $inc_m : G \longrightarrow G \times Q$, la aplicación diferenciable definida por $inc_m(g) = (g, m)$. Por otra parte, $\theta_m : G \longrightarrow M$, llamada aplicación órbita, está dada por

$$G \xrightarrow{inc_m} G \times Q \xrightarrow{\theta|_{G \times Q}} M.$$

Como θ_m es una aplicación de embebimiento diferenciable cuya imagen es la órbita $G \cdot m$, tenemos que $(\theta_m)_*(T_{1_G} G) = T_m(G \cdot m) \subset T_m M$, y además la imagen de

$$(\theta|_{G \times Q})_* : T_{(1_G, m)}(G \times Q) \longrightarrow T_m M,$$

contiene $T_m(G \cdot m)$. De manera similar, si $j_{1_G} : Q \longrightarrow G \times Q$ es la aplicación de embebimiento diferenciable definida por $j_{1_G}(l) = (1_G, l)$, entonces la inclusión

$$inc : Q \longrightarrow M,$$

está formada por la siguiente composición

$$Q \xrightarrow{j_{1_G}} G \times Q \xrightarrow{\theta|_{G \times Q}} M.$$

Asimismo, la imagen de $(\theta|_{G \times Q})_*$ también incluye $T_m Q \subset T_m M$. Si $T_m(G \cdot m)$ y $T_m Q$ generan a $T_m M$ entonces $(\theta|_{G \times Q})_*$ es sobreyectiva y por tanto, $(\theta|_{G \times Q})_*$ resulta un isomorfismo. Utilizando el teorema de la función inversa, existe un entorno $D \times E$ en $(1_G, m) \in G \times Q$ y una vecindad W en $m \in M$ tal que $\theta|_{D \times E} : D \times E \longrightarrow W$, es un difeomorfismo.

Disminuyendo D y E (si fuera necesario), y además asumimos que D y E , llamados conjuntos precompactos, son difeomorfas a las bolas del espacio euclideo $\mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R}^k$, respectivamente. Mostraremos que $E \subset Q$ (suficientemente reducido), logra interceptar a lo más en un sólo punto a cada órbita $G \cdot m$. Para ello, supongamos lo contrario. De esta manera, si $\{E_i\}$ es una base numerable para E en m (este resultado es debido a que el diámetro de las bolas euclideas tienden hacia cero), luego si tomamos i arbitrariamente, existen $q_i, q'_i \in E_i$. Además, $q_i \neq q'_i$ se encuentran en la misma órbita, equivalentemente $g_i \cdot q_i = q'_i$ siendo g_i algún elemento de G . Observamos que $\Phi(g_i, q_i) = (g_i \cdot q_i, q_i) = (q'_i, q_i)$ y son puntos que pertenecen al conjunto compacto $\overline{E} \times \overline{E}$, pues por hipótesis Φ es propia. Además, las imágenes inversas (g_i, q_i) están situadas en $N \subset G \times M$ que es compacto. De esta manera, aquellos puntos correspondientes de g_i pertenecen al conjunto $\pi_G(N) \subset G$. Tomando las siguientes subsucesiones, podemos afirmar que $g_i \longrightarrow g \in G$. Además, las dos sucesiones $\{q_i\}$ y $\{q'_i\}$ convergen a m , debido a que $q_i, q'_i \in E_i$ y $\{E_i\}$ es una base en m . Entonces de la continuidad tenemos que

$$g \cdot m = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i \cdot q_i = \lim_{i \rightarrow \infty} q'_i = m.$$

Dado que G actúa libremente, obtenemos que $g = 1_G$. Si i toma valores lo suficientemente grandes, entonces $g_i \in D$. Así, obtenemos la contradicción de que θ es inyectiva en $D \times E$, debido a que

$$\theta(g_i, q_i) = q'_i = \theta(1_G, q'_i),$$

y se asumió que $q_i \neq q'_i$.

Escojamos difeomorfismos $\gamma : B^r \longrightarrow D$ y $\delta : B^k \longrightarrow E$ (donde B^r y B^k son bolas abiertas en $\mathbb{R}^r$ y $\mathbb{R}^k$, respectivamente), y definamos $\eta : B^r \times B^k \longrightarrow U$ por

$$\eta(x, y) = \theta_{\gamma(x)}(\delta(y)).$$

Tenemos que η es equivalente a la composición de difeomorfismos

$$B^r \times B^k \xrightarrow{\gamma \times \delta} D \times E \xrightarrow{\theta|_{D \times E}} W.$$

Por lo tanto, η es un difeomorfismo. Entonces, la aplicación $\varphi = \eta^{-1}$ es una carta diferenciable en W .

Demostremos que (W, φ) es una carta adaptada para la acción de G . En efecto, observamos que

$$\begin{aligned} \varphi(W) &= B^r \times B^k \subset \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^k \text{ y } \varphi^{-1}(\{(x, y) \in \varphi(W \cap G \cdot m_0) : y = c_i\}) = \\ &= \theta \circ (\gamma \times \delta)\{(x, y) \in \varphi(W \cap G \cdot m_0) : y = c_i\} = \theta(D \times \{\delta(c)\}) \subset G \cdot \delta(c) = G \cdot m_0. \end{aligned}$$

Esto es,

$$G \cdot m_0 \cap W = \cup_i \varphi^{-1}(\{(x, y) : \varphi(W \cap G \cdot m_0) : y = c_i\}).$$

Dado que la órbita arbitraria $G \cdot m_0$ intercepta a E a lo más en un sólo punto, entonces para cualquier i tenemos que $c_i = c$. Por lo tanto, $G \cdot m_0 \cap W$ resulta un slice de modo que $\{(x, y) : y = c\}$. Entonces se demuestra que (W, φ) es una carta adaptada.

A fin de concluir la demostración de que M/G es localmente Euclidiana, vamos a considerar un punto arbitrario $l = \pi(m)$ en el espacio M/G , de modo que (W, φ) es un sistema de coordenada adaptada en M centrada en m , tal que

$$\varphi(W) = W_1 \times W_2 \subset \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^k.$$

Sea $Z = \pi(W)$ un abierto en M/G . Escribamos las funciones de φ de la forma $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$ y consideremos $E \subset W$, además tenemos la n -slice

$$\{(x, y) : x_1 = \dots = x_r = 0\}.$$

Veamos si $\pi|_E: E \rightarrow U$ es biyectiva. De hecho, dadas dos puntos $m_1, m_2 \in E$ tal que $\pi(m_1) = \pi(m_2)$, entonces existe $g \in G$ tal que $m_1 = g \cdot m_2$. Por concepto de la carta adaptada, tenemos que

$$\varphi(m_1), \varphi(m_2) \in \varphi(W \cap G \cdot m_1) = \{(x, y) : y = c\}.$$

Además, $\varphi(m_1), \varphi(m_2) \in \varphi(E) = \{(x, y) : x = 0\}$ y por lo tanto obtenemos que $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$, y así $m_1 = m_2$. Además, dado $v \in Z$, entonces existe $m \in W$ de manera que

$$\pi(m) = v,$$

y observamos que cada órbita $G \cdot m$ intercepta a E a lo más en un sólo punto, esto nos dice que existe $l \in E$ tal que $l = g \cdot m$. De esta manera, existe $l \in E$ tal que $\pi(l) = v$. Entonces, $\pi|_E$ es biyectiva.

Por otro lado, si $\hat{V}$ es un subconjunto abierto de E (n -slice $\{(x, y) \in W : x = 0\}$), entonces

$$\pi(\varphi^{-1}(\{(x, y) \in \varphi(W) : (0, y) \in \varphi(\hat{V})\})) = \pi|_E(\hat{V}),$$

es abierto en el espacio M/G y así, $\pi|_E$ es un homeomorfismo.

Dado $\mu = (\pi|_E)^{-1} : Z \rightarrow E \subset W$, una sección local de π . Definamos la aplicación $\sigma = \pi_2 \circ \varphi \circ \mu :$

$$\sigma : Z \rightarrow W_2$$

$$[(x, y)] \rightarrow y \tag{3.1}$$

donde $\pi_2 : W_1 \times W_2 \rightarrow W_2 \subset \mathbb{R}^k$, es la proyección en el segundo factor identificado por $(x, y) = m$. Como $\mu : Z \rightarrow E \subset W$ y $\pi_2 \circ \varphi : E \rightarrow W_2$ son homeomorfismos,

entonces σ es un homeomorfismo. Por ende, hemos demostrado que el espacio M/G , es una variedad topológica cuya dimensión es k .

Ahora, demostremos que el espacio M/G posee una estructura diferenciable, y que π es una submersión. Consideremos un atlas $\{(Z_\gamma, \sigma_\gamma)\}$, formado por todas aquellas cartas $(Z_\gamma, \sigma_\gamma)$ de M . Veamos si dos cartas arbitrarias de M/G son compatibles.

Sean $(W_\gamma, \varphi_\gamma)$ y $(W_\delta, \varphi_\delta)$ dos cartas adaptadas sobre M , y además sean $(Z_\gamma, \sigma_\gamma)$ y $(Z_\delta, \sigma_\delta)$ las correspondientes cartas para el espacio M/G . En primer lugar, consideremos que las dos cartas adaptadas están centradas en el mismo punto $m \in M$. Sean las coordenadas de la forma, $\varphi_\gamma = (x, y)$ y $\varphi_\delta = (\hat{x}, \hat{y})$. La aplicación transición dada por

$$\varphi_\delta \circ \varphi_\gamma^{-1} : \varphi_\gamma(W_\gamma \cap W_\delta) \longrightarrow \varphi_\delta(W_\gamma \cap W_\delta),$$

y que $(\varphi_\delta \circ \varphi_\gamma^{-1}) = (P(x, y), Q(x, y)) = (\hat{x}, \hat{y})$, donde $P : \varphi_\gamma(W_\gamma \cap W_\delta) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ y $Q : \varphi_\gamma(W_\gamma \cap W_\delta) \longrightarrow \mathbb{R}^k$, son aplicaciones diferenciables. Dadas x_1, x_2 dos puntos de manera que $(x_1, y), (x_2, y) \in \varphi_\gamma(W_\gamma \cap W_\delta)$, por consiguiente $\varphi_\gamma^{-1}(x_1, y), \varphi_\gamma^{-1}(x_2, y)$ se encuentran en la misma órbita (por ser carta adaptada). Entonces, $Q(x_1, y) = Q(x_2, y)$, y así $Q(x, y) = Q_0(y)$.

La aplicación de transición $\sigma_\delta \circ \sigma_\gamma^{-1} : \sigma_\gamma(Z_\gamma \cap Z_\delta) \longrightarrow \sigma_\delta(Z_\gamma \cap Z_\delta)$, definida de la siguiente manera: $(\sigma_\delta \circ \sigma_\gamma^{-1})(y) = (\pi_{2\delta} \circ \varphi_\delta \circ \mu_\delta) \circ (\mu_\gamma^{-1} \circ \varphi_\gamma^{-1} \circ \pi_{2\gamma}^{-1})(y) = Q_0(y) = \hat{y}$, es diferenciable.

Veamos el caso general. Supongamos que $(W_\gamma, \varphi_\gamma)$ y $(W_\delta, \varphi_\delta)$ son dos cartas adaptadas para M y $m \in W_\gamma, \hat{m} \in W_\delta$ tal que $\pi(m) = \pi(\hat{m}) = l$. Modifiquemos ambas cartas y supongamos que ellas están centradas en m y $\hat{m}$. Además, como m y $\hat{m}$ están en la misma órbita, entonces existe $g \in G$ tal que $g \cdot m = \hat{m}$. Como la aplicación $\theta_g : \theta_g^{-1}(W_\delta) \longrightarrow W_\delta$ es un difeomorfismo, entonces $\varphi'_\delta = \varphi_\delta \circ \theta_g : \theta_g^{-1}(W_\delta) \longrightarrow \varphi_\delta(W_\delta)$ es una nueva carta adaptada centrada en m . Por otro lado, $\mu'_\delta = \theta_g^{-1} \circ \mu_\delta$, es la sección local respectivamente a φ'_δ , entonces tenemos que

$$\sigma'_\delta = \pi_2 \circ \varphi'_\delta \circ \mu'_\delta = \pi_2 \circ \varphi_\delta \circ \mu_\delta = \sigma_\delta.$$

Por consiguiente, podemos reducir el problema al primer caso y por tanto, $\sigma_\delta \circ \sigma_\gamma^{-1}$ es diferenciable.

Para terminar, demostraremos que la aplicación cociente $\pi : M \longrightarrow M/G$ cumple las condiciones para llamarse una submersión. Sean m, l dos elementos tales que $m \in M$ y $l = \pi(m) \in M/G$. Por consiguiente, existen cartas diferenciables (W, φ) en m y (Z, σ) en l de forma que la representación coordinada

$$\widehat{\pi}(a, b) = b$$

resulte en una submersión diferenciable. Por lo tanto, se concluye que π es submersión diferenciable.

□

Ejemplo 3.1. Dados $M = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R} = G$. Observemos que $\mathbb{R} = G$ actúa en $\mathbb{R}^2$ mediante la siguiente acción

$$\theta : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \theta(z, (p, q)) = (p + z, q).$$

Vemos que el espacio cociente $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$ posee una estructura de variedad cociente. Además, la acción es libre, porque $\theta(z, (p, q)) = (p, q)$, entonces $p + z = p$ y así $z = 0$ es la identidad de $\mathbb{R}$. Consideremos $L \subset \mathbb{R}^2$ un compacto, con $L \subset [m, n] \times [r, s]$, de modo que

$$\{z \in \mathbb{R} : zL \cap L \neq \emptyset\} \subset \{z \in \mathbb{R} : ([m + z, n + z] \times [r, s]) \cap ([m, n] \times [r, s]) \neq \emptyset\}.$$

Por lo tanto, este conjunto es compacto y así es una variedad cociente.

Ejemplo 3.2. Sea $G = \mathbb{R}^2$ actúa en $M = \mathbb{R}^2$ por traslación:

$$\theta : G \times M \longrightarrow M$$

$$(g, x) \longrightarrow \theta(g, x) = g + x.$$

Entonces la órbita está dada por $\mathbb{R}^2 \cdot x = \{g + x : g \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$. Observamos que la acción es propia y libre, entonces $M/\mathbb{R}^2$ es una variedad diferenciable.

El siguiente ejemplo nos muestra que ciertas variedades cocientes son obtenidas sin ser consecuencia directa del teorema de la variedad cociente.

Ejemplo 3.3. Sea $M = \mathbb{R}^n$ y una acción del grupo $\mathbb{Z}^n$ en M , definido del siguiente modo:

$$(z_1, \dots, z_n) \cdot (p_1, \dots, p_n) = (p_1 + z_1, \dots, p_n + z_n).$$

Observamos que la acción es propia y libre, entonces $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ es una variedad diferenciable.

Ejemplo 3.4. Dada $G = \mathbb{R}$, el grupo que actúa sobre $M = \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} \theta : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &= \theta(g, p) = e^g \cdot p. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ y $\{0\}$ son órbitas de $M/\mathbb{R}$. Se observa que $M/\mathbb{R}$ no es de Hausdorff.

3.2. Aplicaciones del Teorema de la variedad cociente

En esta sección, presentamos algunas aplicaciones del Teorema de la variedad cociente. A continuación, listamos los resultados que vienen como consecuencia directa del teorema en mención:

- Una aplicación importante del Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), es estudiar cocientes de grupos de Lie por subgrupos de Lie. Dado G un grupo de Lie y $H \subset G$ un subgrupo de Lie. Si H actúa sobre G por traslación a la derecha, entonces un elemento del espacio orbital es la órbita de un elemento $g \in G$, que es un conjunto de la forma $gH = \{gh : h \in H\}$. Es decir, una órbita bajo la acción derecha por H es una clase lateral izquierda de H . Utilizaremos la notación G/H para denotar el espacio de la órbita por esta acción derecha (el espacio lateral izquierdo). Veamos un teorema importante.

Teorema 3.2. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de Lie de G . Si la acción por traslación a derecha de H sobre G es diferenciable, libre y propia, entonces el espacio lateral izquierda G/H es una variedad diferenciable. Además, la aplicación cociente $\pi : G \longrightarrow G/H$ es una submersión diferenciable.

Demostración. Recordemos que en estas condiciones, H actúa suavemente y libremente sobre un grupo de Lie G . Ahora, a fin de mostrar que la acción es adecuada, consideremos una aplicación $\theta : G \times H \rightarrow G \times G$ la cual es definida por $\theta(g, h) = (gh, g)$, y asumamos que $L \subset G \times G$ es un subconjunto compacto. Sea $\{(g_i, h_i)\}$ una secuencia en $\theta^{-1}(L)$; entonces, pasando a una subsecuencia si fuera necesario, es posible suponer que las secuencias $\{g_i h_i\}$ y $\{g_i\}$ convergen. Así, por continuidad, $h_i = g_i^{-1}(g_i h_i)$ convergerá a un punto en G , pero como H es cerrado en G obtenemos que $\{(g_i, h_i)\}$ converge en el producto $G \times H$.

□

- El espacio homogéneo o variedad homogénea, es una variedad diferenciable dotada con una acción transitiva diferenciable realizada por un grupo de Lie G .

Ejemplo 3.5. El grupo especial lineal $SL(2, \mathbb{R})$ actúa de forma diferenciable y transitiva sobre el semiplano complejo $\mathbb{H}^2 = \{z : z \in \mathbb{C}, \text{Im}z > 0\}$,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Demostramos que es transitiva (vea el ejemplo 2.8). Luego $\mathbb{H}^2$ es un espacio homogéneo

Ejemplo 3.6. Dada G grupo de Lie y sea H un subgrupo cerrado de Lie de G . Por el Teorema 3.2, G/H es una variedad diferenciable. Definimos la acción a izquierda de la siguiente forma

$$\theta : G \times G/H \longrightarrow G/H$$

$$(g_1, g_2H) \longrightarrow (g_1g_2)H$$

entonces θ es diferenciable y transitiva, todo espacio homogéneo es equivalente a uno de esta forma.

Veamos algunas aplicaciones de los espacios homogéneos.

Teorema 3.3. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado de G . Entonces, G es conexo si H y G/H lo son.

Demostración. Asumamos que $G = U \cup V$, con U y V subconjuntos no vacíos de G . Entonces, $G/H = \pi(U) \cup \pi(V)$ donde $\pi(U)$ y $\pi(V)$ son subconjuntos no vacíos de G/H . Por hipótesis, G/H es conexo lo que implica en la existencia de un punto σH de G/H de modo que $\sigma H \in \pi(U) \cap \pi(V)$. Ahora, por la descomposición de G tenemos que $\sigma H = (\sigma H \cap U) \cup (\sigma H \cap V)$ con $\sigma H \cap U$ y $\sigma H \cap V$ subconjuntos abiertos de σH (esto debido a que H posee la topología inducida). Además, $\sigma H \cap U$ y $\sigma H \cap V$ son no vacíos y como σH es homeomorfo a H , entonces obtenemos que σH es conexo y así $(\sigma H \cap U) \cap (\sigma H \cap V) \neq \emptyset$, de donde se infiere que $U \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, G es conexo. $\square$

Teorema 3.4. Sea G un grupo de Lie que actúa de forma suave, libre y adecuada sobre una variedad M . Entonces, M es conexo si G y M/G lo son.

Demostración. Demostremos esto por reducción al absurdo, es decir, asumamos que M no es conexo y que G y M/G si lo son. Así, desde que M no es conexo existen dos subconjuntos abiertos U y V , disjuntos y no vacíos, tales que $M = U \cup V$.

Ahora, del Teorema 3.1, la aplicación cociente $\pi : M \rightarrow M/G$ es abierta lo que implica que tanto $\pi(U)$ como $\pi(V)$ son subconjuntos abiertos y no vacíos de M/G . Si $\pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$ entonces existe una G -órbita que contiene puntos tanto de U

como de V . Sin embargo, cada órbita es una subvariedad embebida difeomorfa a G , quien por hipótesis es conexo, lo que implica en que cada órbita debe estar incluida o bien en U o bien en V . Por tanto, $\pi(U)$ y $\pi(V)$ forman una escisión de M/G . Lo cual es absurdo desde que éste fue asumido conexo. $\square$

- En Matemáticas el flujo de Ricci es una ecuación de transformación de cierta curva de métricas en una variedad Riemanniana respectiva. Un caso particular es la homogénea, que es semejante al flujo de corchetes, pues es una EDO para cierta curva de álgebras de Lie. El teorema central de la tesis (Teorema 3.1), es fundamental en el flujo de Ricci sobre variedades Riemannianas, empleando el flujo de corchetes. Recordemos que uno de los problemas mas emblemáticos de los últimos tiempos es la conjetura de geometrización de Thurston sobre la clasificación de variedades cerradas de dimensión 3, el cual tiene como corolario la prueba de la famosa conjetura de Poincaré. Gregorio Perelman, matemático ruso, utiliza la ecuación del flujo de Ricci como herramienta fundamental. Sea (M, h) una variedad Riemanniana, el flujo de Ricci se puede definir del siguiente modo

$$\frac{\partial}{\partial t} h(t) = -2Rc(h(t)), \quad h(0) = h,$$

donde, $Rc(h(t))$ es el tensor de Ricci de la métrica $h(t)$. Esta fue descubierta por Richard Hamilton en 1982, donde trabajó con diversos matemáticos en la solución de la conjetura ya mencionada.

El Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), ha sido fundamental para obtener resultados en geometría diferencial, Topología y geometría Riemanniana, y de hecho se ha transformado en un tema fundamental para la investigación y de mucha influencia en los últimos tiempos.

Conclusiones

Conforme a los objetivos propuestos, al término de este trabajo se llegó a las siguientes conclusiones:

- El Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), garantiza que si realizamos el cociente entre un grupo de Lie G , con acción suave, libre y propia, sobre una variedad diferenciable M entonces el espacio M/G tiene estructura de variedad topológica de dimensión igual a $\dim M - \dim G$. Además, este mismo teorema nos garantiza que el espacio cociente M/G posee estructura diferenciable de modo que es también una variedad diferenciable. Este resultado nos permite la construcción de nuevas variedades.
- El Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), nos permite estudiar cocientes de grupos de Lie por subgrupos de Lie, es decir, dada G un grupo de Lie, H un subgrupo cerrado de Lie de G y la acción de H sobre G por traslación a derecha es diferenciable libre y propia, observamos que G/H es una variedad diferenciable. Esto nos permite estudiar los llamados espacios homogéneos o variedades homogéneas, los cuales son de gran importancia en el estudio de la geometría, sistemas dinámicos, etc.
- Finalmente, logramos detallar exitosamente la demostración del Teorema 3.1 (Teorema de la variedad cociente), para acciones diferenciables, libres y propias, de G (grupo de Lie) en una variedad diferenciable M . De forma resumida, mediante una

carta adaptada en M , logramos elaborar una carta en el espacio M/G que cumple con las condiciones requeridas para definir una variedad topológica y una estructura diferenciable.

Recomendaciones

Acorde al análisis minucioso realizado del presente trabajo, se sugiere las siguientes recomendaciones:

1. En la presente Tesis, se logró detallar la demostración del Teorema de la Variedad Cociente (Teorema 3.1). Por ello, se recomienda desarrollar un estudio futuro sobre las variedades homogéneas ya que es importante debido a que es vital para aplicaciones en diferentes áreas.
2. El presente estudio de investigación será muy útil y recomendable para aquellos estudiantes que siguen la carrera de Ciencias e Ingenierías.
3. Se recomienda iniciar un estudio de las Álgebras de Lie a fin de dar inicio al estudio de las representaciones de Lie.

Referencias Bibliográficas

- Andruskiewitsch, N. (1998). Sobre los orígenes de la teoría de Lie. *Revista de Educación Matemática*, 13(3), 30–35.
- Aro Huanacuni, A. Y. (2017). *Teorema de reducción simplética de Marsden, Weinstein y Meyer*. Perú, Universidad Nacional del Altiplano.
- Citoler Berdala, B., y Martínez Pérez, C. (2018). *Teoría de grupos y álgebras de Lie*. España, Universidad de zaragoza.
- Damato de Lacerda, L. C. (2007). *Introdução aos grupos de Lie: e às variedades diferenciáveis*. Brazil, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Fernández Barroso, J. M. (2019). *Grupos de Lie y fibrados principales*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España). Facultad de Ciencias.
- Jancsa, P. (2007). *Algebras de Lie*. España, Universidad Autónoma de Madrid.
- Lages Lima, E. (2007). Variedades diferenciáveis. *Brasil, Instituto de Matemática*.
- Lee, J. M. (2000). Introduction to smooth manifolds, version 3.0. *Usa, University of Washington*.
- Loring W, T. (2010). *An introduction to manifolds*. Universitext.
- Osorio Acevedo, L. E. (2008). *Algunos tópicos sobre las acciones de grupos*. Colombia, Universidad Tecnológica de Pereira.
- Rubio Marti, V. (2016). *Grupos de Lie*. Universidad Nacional de Educación a Distancia (España). Facultad de Ciencias.
- Salcedo, L. (2020). *Física matemática. grupos de Lie, rotaciones, unitarios, Poincaré*.

monte carlo. España, Universidad de Granada.

Santamaria, O. (2014). *Variedades diferenciables, una introducción*. Lambayeque-Perú.

Sene, R. T. (2015). *Curvaturas de métricas invariantes em grupos de Lie*. Universidade Federal de Uberlândia.

Várilly, J. C. (2014). *Ma-870: Geometría diferencial*. Costa Rica: Universidad de Costa Rica.

**UNSCH**FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL**ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS N° 017-2024-FIMGC:****PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO
MATEMÁTICAS. ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICA**

En la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga de la ciudad de Ayacucho, en cumplimiento a la **Resolución Decanal N° 181-2024-FIMGC-D**, a los cuatros días del mes de marzo de 2024, siendo las 10:00 a.m, reunidos en el Auditorio de la Escuela Profesional de Ingeniería Civil, bajo la presidencia del MSc. José Ernesto ESTRADA CÁRDENAS Decano de la FIMGC y los miembros; Mg. Guillermo Jesús ZELA QUISPE, Dr. Nelson BERROCAL HUAMANÍ, Dr. Alexander Paul CONDORI HUAMÁN, actuando como secretario docente el MSc. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO, para proceder a la sustentación de tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas. Especialidad de Matemática, del bachiller en Ciencias Físico Matemáticas:

Edgar Gomez Muñoz

Quien presentó la tesis denominada:

El teorema de la variedad cociente y aplicaciones a la geometría diferencial

Los señores miembros del jurado luego de expuesto la tesis y absueltas las preguntas, delibera y lo declaran:

APROBADO CON NOTA DIECISEIS (16)

Siendo las 11:20 a.m. del día 04 de marzo de 2024, culmina el acto de sustentación de tesis, y en conformidad a lo actuado los miembros del jurado firmamos al pie del presente.

MSc. José Ernesto ESTRADA CÁRDENAS
Presidente

Mg. Guillermo Jesús ZELA QUISPE
Miembro

Dr. Nelson BERROCAL HUAMANÍ
Miembro

Dr. Alexander Paul CONDORI HUAMÁN
Miembro

M.Sc. Kelvis BERROCAL ARGUMEDO
Secretario docente de la FIMGC

cc:
Archivo



UNSCH

FACULTAD DE
INGENIERÍA
DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL



CONSTANCIA DE ORIGINALIDAD DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

CONSTANCIA N° 003-2024-JAHQ-FIMGC/UNSCH

El que suscribe; responsable verificador de originalidad de trabajos de tesis de pregrado con el software Turnitin, en segunda instancia para las **Escuelas Profesionales** de la **Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil**; en cumplimiento a la **Resolución de Consejo Universitario N° 039-2021-UNSCH-CU**, Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación de la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y **Resolución Decanal N° 473-2023-FIMGC-D**, deja constancia de originalidad de trabajo de investigación, que el/la Sr./Srta.

Nombres y Apellidos : EDGAR GOMEZ MUÑOZ.
Escuela Profesional : CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.
Título de la Tesis : El teorema de la variedad cociente y aplicaciones a la geometría diferencial
Evaluación de la Originalidad : 19 % Índice de Similitud.
Identificador de la entrega : 2300479926.

Por tanto, según los Artículos 12, 13 y 17 del Reglamento de Originalidad de Trabajos de Investigación, es **PROCEDENTE** otorgar la **Constancia de Originalidad** para los fines que crea conveniente.

En señal de conformidad y verificación se firma la presente constancia

Ayacucho, 01 de setiembre del 2024

Dr. JUAN ALFREDO HUAMANCHAQUI QUISPE
DNI N°: 41764585

El teorema de la variedad cociente y aplicaciones a la geometría diferencial

por Edgar Gomez Muñoz

Fecha de entrega: 01-sep-2024 11:44a.m. (UTC-0500)

Identificador de la entrega: 2300479926

Nombre del archivo: Tesis_Edgar_2024.pdf (1.17M)

Total de palabras: 19607

Total de caracteres: 85154

El teorema de la variedad cociente y aplicaciones a la geometría diferencial

INFORME DE ORIGINALIDAD

19%

INDICE DE SIMILITUD

20%

FUENTES DE INTERNET

1%

PUBLICACIONES

6%

TRABAJOS DEL
ESTUDIANTE

FUENTES PRIMARIAS

1

repositorio.unprg.edu.pe

Fuente de Internet

6%

2

repositorio.unap.edu.pe

Fuente de Internet

4%

3

hdl.handle.net

Fuente de Internet

2%

4

Submitted to Universidad Nacional de
Educación a Distancia

Trabajo del estudiante

1%

5

ri.ues.edu.sv

Fuente de Internet

1%

6

www.scribd.com

Fuente de Internet

1%

7

repositorio.unsch.edu.pe

Fuente de Internet

1%

8

1library.co

Fuente de Internet

1%

9	www.um.es Fuente de Internet	<1 %
10	Submitted to Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga Trabajo del estudiante	<1 %
11	www.researchgate.net Fuente de Internet	<1 %
12	Submitted to Universidad de Cantabria Trabajo del estudiante	<1 %
13	repositorio.unican.es Fuente de Internet	<1 %
14	physics.brown.edu Fuente de Internet	<1 %
15	lic.mat.uson.mx Fuente de Internet	<1 %
16	Submitted to BENEMERITA UNIVERSIDAD AUTONOMA DE PUEBLA BIBLIOTECA Trabajo del estudiante	<1 %
17	Submitted to Unviersidad de Granada Trabajo del estudiante	<1 %
18	repositorio.unal.edu.co Fuente de Internet	<1 %
19	www.kerwa.ucr.ac.cr Fuente de Internet	<1 %

Excluir citas

Activo

Excluir coincidencias < 30 words

Excluir bibliografía

Activo