

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA
FACULTAD DE INGENIERÍA DE MINAS, GEOLOGÍA Y CIVIL
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL



**MODELACIÓN HIDRODINÁMICA DE SISTEMAS
DE DRENAJE PLUVIAL CON EL MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS Y MATLAB**

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

PRESENTADO POR:

TONY VÍLCHEZ YARIHUAMÁN

DIRIGIDO POR:

MSc. Ing. CRISTIAN CASTRO PÉREZ

AYACUCHO PERÚ

OCTUBRE - 2015

“MODELACIÓN HIDRODINÁMICA DE SISTEMAS DE DRENAJE PLUVIAL CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y MATLAB”.

RECOMENDADO : 29 DE SETIEMBRE DEL 2015

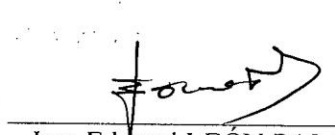
APROBADO : 06 DE NOVIEMBRE DEL 2015



MSc. Ing. Ernesto ESTRADA CÁRDENAS
(PRESIDENTE)



Ing. Jaime L. BENDEZÚ PRADO
(MIEMBRO)



Ing. Edward LEÓN PALACIOS
(MIEMBRO)



Ing. Flore N. YUNGALI GUERRA
(SECRETARIO DOCENTE)

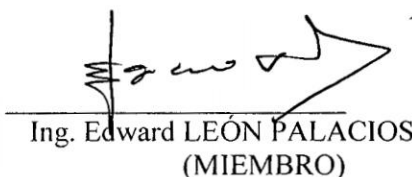
Según el acuerdo constatado en el Acta, levantado el 06 de noviembre del 2015, en la Sustentación de Tesis presentado por el Bachiller en Ciencias de la Ingeniería Civil Sr. **Tony VILCHEZ YARIHUAMÁN**, con la Tesis Titulado “**MODELACIÓN HIDRODINÁMICA DE SISTEMAS DE DRENAJE PLUVIAL CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y MATLAB**”, fue calificada con la nota de DIECISÉIS (16) por lo que se da la respectiva **APROBACIÓN**.



MSc. Ing. Ernesto ESTRADA CÁRDENAS
(PRESIDENTE)



Ing. Jaime L. BENDEZÚ PRADO
(MIEMBRO)



Ing. Edward LEÓN PALACIOS
(MIEMBRO)



Ing. Floro N. YANGALI GUERRA
(SECRETARIO DOCENTE)

PRESENTACIÓN

Esta tesis es presentada como parte de los requisitos exigidos para optar el título académico de *Ingeniero Civil*, de la *Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga*, y no ha sido presentada previamente para la obtención de otro grado o título en esta universidad u otras. La misma contiene los resultados obtenidos en investigaciones llevadas a cabo en el periodo 2014-2015.

TONY VÍLCHEZ YARIHUAMÁN

tonyvy_205@hotmail.com

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL

UNIVERSIDAD NACIONAL SAN CRISTÓBAL DE HUAMANGA

Ayacucho, 10 de noviembre de 2015

DEDICATORIA

En primer lugar a Dios por haberme guiado por el camino de la felicidad hasta ahora. En segundo lugar a mis padres Malco e Isabel por su apoyo, consejos, comprensión, amor, ayuda en los momentos difíciles, y por ayudarme con los recursos necesarios para estudiar. Me han dado todo lo que soy como persona, mis valores, mis principios, mi carácter, mi empeño, mi perseverancia, mi coraje para conseguir mis objetivos. A mis abuelitas Camelina y Rogelia (Q.E.P.D) por tanto amor que me dieron en mi niñez, tanta protección y ahora me iluminan del cielo.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, alma máter de la Región Ayacucho, del cual me siento orgulloso por haber pertenecido y egresado de sus aulas.

A los docentes de la Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga - Facultad de Ingeniería de Minas Geología y Civil, por su contribución durante mi desarrollo académico y profesional.

A mi asesor de tesis al Ing. Critian Castro Pérez, por la orientación y ayuda que me brindó para la realización de esta tesis, por su presencia incondicional, sus apreciados y relevantes aportes, críticas, comentarios y sugerencias durante el desarrollo de esta investigación.

A los docentes de la comisión revisora de esta tesis por darse el trabajo y tiempo de revisar: Ing. José Ernesto Estrada Cárdenas, Ing. Jaime Leonardo Bendezú Prado y el Ing. Edwar Leon Palacios, por sus comentarios, sugerencias y por toda la ayuda que me brindaron durante la revisión del borrador de esta tesis.

A mis padres Malco, Isabel y mi hermano Jonás, quienes a lo largo de toda mi vida han apoyado y motivado mi formación académica, creyeron en mí en todo momento y no dudaron de mis habilidades, los amo mucho.

A mis amigos y compañeros de estudio de la universidad Julián Tanta, Roland Huaripoma, con quienes compartimos muchas horas de estudio, para lograr nuestros objetivos.

A mis amigos(as) de infancia Jorge, Elsa y Luis Alberto, quienes fueron las personas que nos apoyamos mutuamente desde el colegio, pregrado y hasta ahora, amigos por siempre en las buenas y malas.

A toda la comunidad de desarrolladores y usuarios de \LaTeX ; en particular, quiero expresar mis agradecimientos a los tesisistas que me antecedieron por sus comentarios y sugerencias sobre mejoras posibles a los paquetes.

A la red de programadores en Matlab por su ayuda incomparable y orientación en el cómputo científico en este lenguaje de alto nivel basado en matrices que permite resolver problemas de cálculo con más rapidez y facilidad que los lenguajes de propósito general.

Al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) por contribuir a la difusión de modelos matemáticos y numéricos de problemas de ingeniería, desarrollo y aplicaciones de los métodos numéricos, tanto en relación con su utilidad como instrumentos de cálculo y análisis para el ingeniero y el científico, especialmente a los Doctores por haberme ayudado en el entendimiento del Método de Elementos Finitos.

A la Municipalidad Distrital de Kimbiri por facilitarme toda la información necesaria para realizar la aplicación de mi Tesis.

RESUMEN

En este trabajo de investigación se presenta un modelo matemático basado en el *Método de Elemento Finito* (MEF) para la simulación hidráulica de ***Sistemas de Drenaje Pluvial***. La variación espacial y temporal del flujo de agua en la red de drenaje se ha determinado a través de la solución numérica de la ecuación en derivadas parciales de conservación de masa y momentum de *Saint-Venant* que gobierna el flujo en alcantarillas de drenaje mediante el enfoque de *Galerkin* del Método de Elementos Finitos y se ha desarrollado el aplicativo computacional desarrollado *SMAP v2015*. El código numérico se desarrollo en *MATLAB* y se hace una comparación con los resultados obtenidos con otros programas disponibles en el mercado resolviendo el caso del proyecto “***Instalación del sistema de drenaje pluvial en la ciudad de Kimbiri, distrito de Kimbiri, provincia de la Convención - Cusco***”.

Palabras Clave: Método de Elementos Finitos, Drenaje Pluvial, MatLab, Saint Venant, Alcantarillas.

Índice general

Portada

Presentación I

Dedicatoria II

Agradecimientos III

Resumen V

Índice General VI

Índice de Cuadros XVII

Índice de Figuras XIX

Lista de símbolos XXIX

I INTRODUCCIÓN 1

1. Introducción 2

1.1. Generalidades 2

VI

ÍNDICE GENERAL

1.2. Motivación de la investigación	4
1.3. Planteamiento del problema	5
1.3.1. Antecedentes	6
1.3.2. Problema	9
1.3.2.1. Problema principal	9
1.3.2.2. Problemas específicos	9
1.3.3. Objetivos	10
1.3.3.1. Objetivo General	10
1.3.3.2. Objetivos Específicos	10
1.3.4. Hipótesis	10
1.3.4.1. Hipótesis principal	10
1.3.4.2. Hipótesis específicos	11
1.4. Justificación	11
1.5. Metodología aplicada	13
1.5.1. Tipo de Investigación	13
1.5.2. Nivel de investigación	13
1.5.3. Diseño de la investigación	14
1.6. Organización del estudio	14
II ESTADO DEL ARTE	17
2. Estado del arte	18
2.1. Generalidades	18

ÍNDICE GENERAL

2.2. Hidrología Urbana	20
2.2.1. Influencia de la urbanización	21
2.2.2. Problema del Drenaje Urbano	22
2.2.2.1. Caudales y nivel de seguridad de la red	22
2.2.2.2. Captación de las aguas en superficie	23
2.2.2.3. Cálculo hidráulico de las redes de drenaje urbano	24
2.3. Drenaje Urbano	26
2.3.1. Efectos de la urbanización sobre el drenaje	29
2.3.2. Drenaje urbano y salud pública	32
2.3.3. Geografía de drenaje urbano	33
2.4. Ecuaciones Gobernantes	34
2.4.1. Ecuaciones de Saint-Venant	34
2.4.2. Ecuación de continuidad	35
2.4.3. Ecuación de momentum	38
2.4.3.1. Fuerzas	39
2.4.3.2. Momentum	43
2.4.4. Formas de la ecuación de Saint-Venant	47
2.5. Hidráulica de alcantarillas	49
2.5.1. Descripción de Alcantarillas	50
2.5.1.1. Formas	50
2.5.2. Diseño de Alcantarillas	50
2.5.2.1. Cálculo de tirante normal y tirante crítico	51

2.6. Métodos Numéricos	56
2.6.1. Método de Diferencias Finitas	56
2.6.1.1. Derivada de una función	56
2.6.1.2. Diferencias finitas	57
2.6.1.3. Esquema explícito	60
2.6.1.4. Esquema implícito	62
2.6.1.5. Representación general del método de diferencias finitas	63
2.6.1.5.1. Aproximación hacia adelante	63
2.6.1.5.2. Aproximación hacia atrás	64
2.6.1.5.3. Aproximación por diferencias centrales	64
2.6.2. Método de Elementos Finitos	65
2.6.2.1. Perspectiva histórica	65
2.6.2.2. Orígenes	65
2.6.2.3. Definición	67
2.6.2.4. Presente del MEF	67
2.6.2.5. Fundamentos matemáticos	68
2.6.3. El Método de los Residuos Ponderados	69
2.6.3.1. El Método de Galerkin (Bubnov - Galerkin)	71
2.6.4. Métodos Variaciones	72
2.6.4.1. Notación Variacional	73
2.6.4.2. Principio de la Energía Potencial Mínima	74
2.6.4.3. Principio del trabajo Virtual	75

III	MATERIALES Y MÉTODOS	77
3.	Análisis de la red de drenaje	78
3.1.	Descripción del problema	78
3.1.1.	Nivel de seguridad de la red y caudales de proyecto	79
3.1.2.	Captación de las aguas en superficie	80
3.1.3.	Calculo hidráulico de las redes de drenaje urbano	83
3.1.4.	Vertido al medio receptor	85
3.2.	Riesgos geológico-climatológicos	88
3.2.1.	Deslizamientos recientes	88
3.2.2.	Deslizamientos potenciales	89
3.2.3.	Socavamiento y cárcavas	89
3.2.4.	Desprendimiento de rocas y derrumbe de suelos	89
4.	Modelamiento del Problema	91
4.1.	Introducción	91
4.2.	Modelamiento con Diferencias Finitas	92
4.2.1.	Esquema de solución de Preissmann	92
4.2.1.1.	Ecuación de continuidad	92
4.2.1.2.	Ecuación de momentum	93
4.2.1.3.	Solución del sistema de ecuaciones	95
4.2.2.	Esquema de solución de Abbott & Ionescu	97
4.2.2.1.	Ecuación de continuidad	97

ÍNDICE GENERAL

4.2.2.2.	Ecuación de momentum	98
4.2.2.3.	Solución del sistema de ecuaciones	99
4.2.3.	Esquema de solución de EPA-SWMM	102
4.2.3.1.	Método de solución	103
4.3.	Modelamiento con Elementos Finitos	104
4.3.1.	Descripción de los elementos Finitos	105
4.3.1.1.	Elemento unidimensional	106
4.3.1.2.	Condiciones de contorno	107
4.3.1.3.	Condiciones iniciales	108
4.3.1.4.	Modelo general de Elementos Finitos	109
4.3.1.4.1.	Ecuaciones gobernantes	109
4.3.1.4.2.	Formulación con el Método de Elementos Finitos	109
4.3.1.4.3.	Elemento lineal unidimensional	111
4.3.1.4.4.	Obtención de las matrices	116
4.3.1.4.5.	Solución temporal con Elementos Finitos (MEF)	118
4.4.	Programación en MATLAB	124
4.4.1.	Modelo matemático	125
4.4.2.	Descripción del programa <i>SMAP V2015</i>	127
4.4.2.1.	Ingreso de datos	129
4.4.2.2.	Discretización o enmallado	129
4.4.2.3.	Solución	130
4.4.2.4.	Visualización de los resultados	130

4.4.2.5. Alcances y limitaciones del programa	130
4.4.3. Modelado de una red de drenaje pluvial	131
4.4.3.1. Construcción del modelo	131
4.4.3.2. Solución con <i>SMAP v2015</i>	132
5. Caso de estudio	137
5.1. Generalidades	137
5.2. Información básica del proyecto	138
5.2.1. Ubicación	138
5.2.2. Cuencas de interés	139
5.3. Hidrología del proyecto	140
5.3.1. Estaciones hidrometeorológicas	140
5.3.1.1. Análisis de la información pluviométrica	142
5.3.1.1.1. Selección del Período de Retorno	144
5.3.1.1.2. Análisis de frecuencias y pruebas de consistencia	146
5.3.1.1.3. Hietogramas de diseño	150
5.4. Red de Drenaje de la Ciudad de Kimbiri	157
5.4.1. Configuración del modelo	157
5.4.2. Topología de la red	158
IV RESULTADOS Y DISCUSIÓN	161
6. Resultados y Discusión	162
6.1. Resultados de la investigación	162

6.1.1.	Solución con el programa <i>SMAP V2015</i>	162
6.1.1.1.	Geometría de la red	163
6.1.1.2.	Tipo de sección y materiales	163
6.1.1.3.	Condiciones de borde	164
6.1.1.4.	Datos de simulación	166
6.1.1.5.	Resultados con el programa <i>SMAP V2015</i>	166
6.1.1.5.1.	Niveles de agua	167
6.1.1.5.2.	Caudales	168
6.1.1.5.3.	Velocidades	170
6.1.1.5.4.	Tirantes	171
6.1.1.5.5.	Hidrograma de salida en los nodos	173
6.1.2.	Solución de la Red Kimbiri con <i>SWMM</i>	174
6.1.2.1.	Configuración del Proyecto	174
6.1.2.2.	Esquemmatización de la red de drenaje Kimbiri	176
6.1.2.3.	Asignación de un pluviómetro	177
6.1.2.4.	Propiedades de las cuencas	179
6.1.2.5.	Resultados de la simulación con <i>SWMM 5 vE</i>	180
6.1.2.5.1.	Resultados nodales	180
6.1.2.5.2.	Resultados de los conductos	182
6.1.3.	Diseño de la sección de los conductos	184
6.2.	Validación del modelo	189
6.2.1.	Pruebas de bondad de ajuste	189

6.2.1.1.	Prueba Chi-Cuadrado χ^2	189
6.2.1.1.1.	Criterios de decision	191
6.2.2.	Validación de resultados: Caudales del sistema de drenaje	193
6.2.2.1.	Prueba de bondad de ajuste de Chi-Cuadrado	193
6.2.2.1.1.	Distribución normal	194
6.2.2.1.2.	Distribución Log Normal de 2 Parámetros	194
6.2.2.1.3.	Distribución Log Normal de 3 Parámetros	197
6.3.	Discusión de resultados	199
6.3.1.	Comparación de resultados	199
6.3.2.	Sobre ciudades sostenibles	207
6.3.3.	Sobre el calentamiento global	209
6.3.4.	Sobre los riesgos geológico-climatológicos	211
6.3.5.	Sobre la solución de las ecuaciones de Saint Venant	213
6.3.6.	Sobre el modelo propuesto	213
6.3.7.	Sobre el caso de estudio	214
V	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	218
7.	Conclusiones y Recomendaciones	219
7.1.	Conclusiones	219
7.1.1.	De la teoría	219
7.1.2.	De la metodología	220
7.1.3.	Del modelo	221

7.1.4. De los resultados	222
7.1.5. De la tesis	226
7.2. Recomendaciones	226
7.3. Investigaciones futuras	227
Referencias	228
VI ANEXOS	233
A. Manual del program <i>SMAP V2015</i>	234
A.1. Fase Preproceso	236
A.1.1. Gestión de archivos	236
A.1.2. Definir la geometría de la alcantarilla	237
A.1.3. Datos de la Simulación	240
A.1.4. Condiciones de borde	240
A.2. Fase solución	241
A.2.1. Solución en regimen permanente	241
B. Ensamblaje del MEF	244
C. Algebra Lineal	247
C.1. Matrices	247
C.1.1. Operaciones básicas y sus propiedades	248
C.1.1.1. Suma de matrices	248

ÍNDICE GENERAL

C.1.1.2. Diferencia de matrices	250
C.1.1.3. Multiplicación de matrices	250
C.1.1.4. Inversa de una matriz	250
C.1.1.5. Número de Condición de una matriz	251
C.1.1.6. Rango de una matriz	252
C.2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales	252
C.2.1. Métodos Directos	254
C.2.2. Métodos Iterativos	255
D. Ecuaciones Diferenciales Parciales	257
D.1. Generalidades	257
D.2. Clasificación de Ecuaciones de Segundo Orden	258
D.3. Ecuación diferencial parcial lineal	259
D.4. Métodos de solución de las EDPs	260
E. Código fuente programa SMAP	261
F. Laminas y Planos	264

Índice de cuadros

2.1. Porcentaje de población conectada al alcantarillado principal en ciertos países de Europa (cifras de 1997) [15]	34
2.2. Resumen de las ecuaciones de Saint- Venant*. Fuente [14]	47
5.1. Valores de Período de Retorno T (Años). Fuente: <i>Elaboración propia</i> . . .	145
5.2. Precipitaciones máximas de 24 horas ajustadas con las distribuciones teóricas de la estación <i>Pichari</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	147
5.3. Precipitaciones máximas de 24 horas ajustadas con las distribuciones teóricas de la estación <i>Sivia</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	148
5.4. Precipitación de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación <i>Pichari</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	151
5.5. Precipitación de diseño para un periodo de retorno de 500 años de la estación <i>Pichari</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	153
5.6. Resumen de Hietogramas de diseño para todas las estaciones del proyecto (mm). Fuente: <i>Elaboración propia</i>	157
6.1. Tirantes y alturas del conducto calculadas y adoptadas	184
6.2. Cálculo de la frecuencia acumulada (Distribución Normal)	194

6.3. Cálculo de la frecuencia acumulada (Distribución LN2P)	195
6.4. Cálculo de la frecuencia acumulada (Distribución LN3P)	197
6.5. Selección de la mejor distribución	198
6.6. Resultados de caudales en los conductos con el programa SMAP V2015 : Fuente: <i>Elaboración propia</i>	204
6.6. Continuación de los resultados de caudales en los conductos con el programa SMAP V2015 : Fuente: <i>Elaboración propia</i>	205
6.7. Resultados de caudales en los conductos con el programa SWMM v5 : Fuente: <i>Elaboración propia</i>	205
6.7. Continuación de los resultados de caudales en los conductos con el programa SWMM v5 : Fuente: <i>Elaboración propia</i>	206
6.7. Continuación de los resultados de caudales en los conductos con el programa SWMM v5 : Fuente: <i>Elaboración propia</i>	207
7.1. Caudales máximos en el sistema de drenaje de Kimbiri. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	224
D.1. Categorías de las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo or- den en dos variables	260

Índice de figuras

2.1. Imbornal en medio urbano: Fuente: <i>Internet</i>	24
2.2. Inundación superficial por insuficiencia de la red de drenaje. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	26
2.3. Interfaces con el público y el medio ambiente [15]	27
2.4. Efecto de la urbanización sobre el destino de lluvia [15]	30
2.5. Efecto de la urbanización en la tasa máxima de escurrimiento [15]	31
2.6. Tramo elemental de un canal para la deducción de las ecuaciones de Saint-Venant: Fuente [14]	36
2.7. Secciones mas comunes de alcantarillas en sistemas de drenaje pluvial. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	49
2.8. Alcantarilla de sección <i>circular</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	52
2.9. Alcantarilla de sección <i>elíptica horizontal</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	52
2.10. Alcantarilla de sección <i>abovedado</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	53
2.11. Alcantarilla de sección <i>arco</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	53
2.12. Alcantarilla de sección <i>arco perfil bajo</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	54
2.13. Alcantarilla de sección <i>arco perfil alto</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	54
2.14. Alcantarilla de sección <i>pera</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	55

ÍNDICE DE FIGURAS

2.15. Aproximación por diferencias finitas para la función $u(x)$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	58
2.16. Malla en el plano $x-t$ utilizada para la solución numérica de las ecuaciones de <i>Saint-Venant</i> mediante Diferencias Finitas. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	61
2.17. Desplazamientos virtuales. a)- compatibles con las condiciones de apoyo. b)- incompatibles con las condiciones de apoyo	75
3.1. Registro de precipitaciones: Estación meteorológica Teresita. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	81
3.2. Colector Jirón San Martín Ayacucho: Fuente [16]	82
3.3. Ejemplo de una rejilla en medio urbano: Fuente: <i>Elaboración propia</i>	83
3.4. Inundación superficial por insuficiencia de la red de alcantarillado: Fuente: <i>Elaboración propia</i>	85
3.5. Vertido a un cauce y mortandad de peces. Fuente: <i>Internet</i>	87
4.1. Esquema de solución de <i>Preissmann</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	93
4.2. Esquema de solución de <i>Abbott & Ionescu</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	98
4.3. Esquema de solución del módulo EXTRAN del programa EPA-SWMM. Fuente: <i>Manual de SWMM</i>	103
4.4. Enmallado con elemento lineal. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	106
4.5. Elemento tubería 1D. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	107
4.6. Malla de elementos finitos 1D. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	107
4.7. Variación de las funciones de forma, profundidad de flujo, velocidades y sus derivadas en un elemento lineal. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	115
4.8. Discretización del tiempo en el intervalo n y $n+1$. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	119

ÍNDICE DE FIGURAS

4.9. Diagrama de flujo general del código <i>SMAP-V2015</i> en MATLAB. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	126
4.10. Portada principal del programa <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	127
4.11. Integración del programa <i>SMAP V2015</i> con con Excel. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	128
4.12. Modelo de red de drenaje pluvial. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	132
4.13. Datos de los conductos. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	133
4.14. Datos de los nodos o pozos de visita. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	134
4.15. Datos de las estructuras de salida o desagüe. Fuente: <i>Elaboración propia</i> .	134
4.16. Niveles de agua en todos los nodos de la red para $t=1600\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	135
4.17. Caudales en todos los nodos de la red para $t=3000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuen- te: <i>Elaboración propia</i>	136
4.18. Hidrograma de salida en el nodo 2 para <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	136
5.1. Distrito de Kimbiri. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	138
5.2. Región Cuzco. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	139
5.3. Mapa de estaciones hidrometeorológicas próximas a la Ciudad de Kimbiri. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	141
5.4. Registro histórico de <i>precipitaciones máximas en 24 horas</i> en la estación de Pichari. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	142
5.5. Registro histórico de <i>precipitaciones máximas en 24 horas</i> en la estación de Sivia. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	143

ÍNDICE DE FIGURAS

5.6. Registro histórico de <i>precipitaciones máximas en 24 horas</i> en la estación de Teresita. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	143
5.7. Registro histórico de <i>precipitaciones máximas en 24 horas</i> en la estación de Machente. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	144
5.8. Riesgo de por lo menos una excedencia del evento de diseño durante la vida útil. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	145
5.9. Funciones de frecuencia ajustada a la precipitación máxima en 24h de la estación Pichari. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	149
5.10. Funciones de frecuencia ajustada a la precipitación máxima en 24h de la estación Sivia. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	150
5.11. Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación <i>Pichari</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	152
5.12. Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 500 años de la estación <i>Pichari</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	154
5.13. Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación <i>Sivia</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	155
5.14. Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación <i>Teresita</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	156
5.15. Red de Drenaje Pluvial proyectado inicialmente de la ciudad de <i>Kimbiri</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	159
5.16. Red de Drenaje Pluvial final de la ciudad de <i>Kimbiri</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	160
6.1. Elementos y nodos del sistema de drenaje de la ciudad de <i>Kimbiri SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	163

6.2. Selección del tipo de sección y material <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	164
6.3. Hidrograma de entrada aguas arriba <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	165
6.4. Hietograma de diseño para la red de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	165
6.5. Datos de simulación <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	166
6.6. Niveles de agua en todo los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	167
6.7. Niveles de agua en todo los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	168
6.8. Caudales en todos los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	169
6.9. Caudales en todos los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	169
6.10. Velocidades en todos los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	170
6.11. Velocidades en todos los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	171
6.12. Tirantes en todos los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	172
6.13. Tirantes en todos los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	172
6.14. Hidrograma de salida en el <i>nodo 1</i> <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	173

6.15. Hidrograma de salida en el *nodo 9* (vertido) *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia* 173

6.16. Etiquetado por defecto del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 175

6.17. Valores por defecto de las subcuencas del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 175

6.18. Valores por defecto de los nudos y líneas del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 176

6.19. Red de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 177

6.20. Ventana de diálogo del editor de series temporales del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 178

6.21. Hietograma de diseño ingresado al programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 178

6.22. Ventana del editor de propiedades de las subcuencas en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 179

6.23. Esquema final de la simulación de la red de drenaje de Kimbiri *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 180

6.24. Tirante de agua del *nodo 8* en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 181

6.25. Altura de agua del *nodo 8* en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 181

6.26. Caudal de aporte del *nodo 8* en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia* 182

ÍNDICE DE FIGURAS

6.27. Caudales en el conducto 8 <i>SWMM 5 vE</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	183
6.28. Velocidades de agua en el conducto 8 <i>SWMM 5 vE</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	183
6.29. Tirantes de agua en el conducto 8 <i>SWMM 5 vE</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	184
6.30. Tirante y sección del conducto 1. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	185
6.31. Tirante y sección del conducto 2. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	185
6.32. Tirante y sección del conducto 3. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	186
6.33. Tirante y sección del conducto 4. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	186
6.34. Tirante y sección del conducto 5. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	187
6.35. Tirante y sección del conducto 6. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	187
6.36. Tirante y sección del conducto 7. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	188
6.37. Tirante y sección del conducto 8. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	188
6.38. Estadística no paramétrica: prueba Chi-Cuadrado χ^2	190
6.39. Selección de una distribución teórica	192
6.40. Marcas de clase y función de densidad (Distribución Normal)	195
6.41. Marcas de clase y función de densidad (Distribución LN2P)	196
6.42. Marcas de clase y función de densidad (Distribución LN3P)	197
6.43. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 1</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	199
6.44. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 2</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	200
6.45. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 3</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	200

ÍNDICE DE FIGURAS

6.46. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 4</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	201
6.47. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 5</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	201
6.48. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 6</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	202
6.49. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 7</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	202
6.50. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 8</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	203
6.51. Ciudad de Kimbiri	208
6.52. Variacion de la temperatura a nivel planetaria	210
6.53. Desborde del río Kimbiri	212
6.54. Niveles de agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP</i> <i>V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	215
6.55. Caudales en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	216
6.56. Velocidades de flujo en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP</i> <i>V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	216
6.57. Tirantes del agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP</i> <i>V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	217
7.1. Comparación de caudales de salida en el <i>conducto 7</i> entre los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	223

ÍNDICE DE FIGURAS

7.2. Caudales pico en todos los conductos de la red de drenaje con los programas <i>SMAP V215</i> y <i>SWMM V5</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	224
A.1. Ventana principal del programa “ <i>SMAP-V2015</i> ”. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	235
A.2. Menus y Submenus del programa “ <i>SMAP-V2015</i> ”. Fuente: <i>Elaboración propia</i>	237
A.3. Matriz de descripción de la conectividad de los conductos <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	238
A.4. Matriz de descripción de coordenadas de los nodos <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	238
A.5. Matriz de descripción de las estructuras de salida <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	238
A.6. Tipos de secciones de la red de drenaje pluvial <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	239
A.7. Vizualizando la red de drenaje pluvial <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	239
A.8. Datos generales de simulación <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i> .	240
A.9. Hietograma aguas arriba <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	240
A.10. Niveles de agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	241
A.11. Caudales en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	242
A.12. Velocidades de flujo en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	242
A.13. Tirantes del agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ <i>SMAP V2015</i> . Fuente: <i>Elaboración propia</i>	243

ÍNDICE DE FIGURAS

B.1. Un dominio con dos elementos triangulares lineales 245

Lista de símbolos

MEF	Método de Elementos Finitos
MDF	Método de Diferencias Finitas
MEC	Método de los Elementos de Contorno
MVF	Método de Volúmenes Finitos
t	Tiempo
Ω	Dominio del problema
R_{Ω}	Residuo en el dominio
A	Area de la sección
H	Nivel del agua
Q	Caudal en la red
N	Funcion de forma
N^T	Transpuesta de la función de forma
B	Derivada del vector de función de forma
[C]	Matriz de conductancia hidráulica
[K]	Matriz de rigidez hidráulica
f	Vector de cargas nodales
q	Caudal nodal (condición de borde)
c_k	Celeridad de onda cinemática
Ψ_i	Funciones de moderación o de peso

ÍNDICE DE FIGURAS

u_1, u_2, \dots, u_n	Desplazamientos
W_e	Trabajo virtual externo
W_i	Trabajo virtual interno
ϵ	Deformaciones
σ	Tensiones
C/B	Costo beneficio
T	Periodo de retorno
ρ	Densidad del fluido
g	Gravedad
t_o	Esfuerzo cortante
P	Perímetro mojado
S_f	Pendiente de la fricción
S_e	Pendiente de pérdidas
K_e	Coefficiente de expansion o contracción adimensional
t_w	Esfuerzo cortante de viento
V_r	Velocidad del fluido relativa a la frontera
V_w	Velocidad del viento
C_f	Coefficiente de esfuerzo cortante
β	Factor de corrección de momentum
EC	Ecuación de continuidad
EM	Ecuación de momentum
R	Riesgo de falla admisible
n	Vida util
$[K]$	Matriz global LHS
f	Vector RHS
EDP	Ecuación Diferencial Parcial

Parte I

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

La sostenibilidad de los *sistemas de drenaje urbano* de las ciudades expuestas a precipitaciones extremas a nivel mundial es un problema de gran importancia. El presente trabajo de investigación trata aspectos de *modelación matemática y simulación numérica* de la *escorrentía* en sistemas de *alcantarillado pluvial*. Se presentan aspectos teóricos y ejemplos prácticos del manejo integrado y sostenible de los sistemas de drenaje urbano, y aspectos avanzados de modelación, simulación y control integrado de dichos sistemas. Es necesario tener un concepto integrado del sistema de drenaje urbano el cual incluye la recolección, transporte y disposición de las aguas pluviales. El desarrollo de las computadoras y las nuevas tecnologías han permitido la creación de programas computacionales y el desarrollo de modelos matemáticos para sistemas complejos de drenaje urbano, la modelación es una herramienta muy útil para el diseño, la operación y la rehabilitación del alcantarillado y operaciones básicas del manejo integral del sistema. La modelación hidrodinámica de alcantarillados es una herramienta que facilita la toma de decisiones en las empresas de saneamiento y alcantarillado. Posibilita el entendimiento de los procesos

que se dan en la red y ayuda en la operación, mantenimiento y rehabilitación de las redes. Por la importancia de las decisiones que son tomadas a partir de los modelos, es necesario que estos representen la realidad de la mejor manera posible, es decir estén calibrados. En general, se puede decir que los modelos pueden ser usados como herramientas de apoyo para la toma de decisiones. Pero estas decisiones implican altos costos y no pueden ser tomadas a partir de meras aproximaciones o diseños simples, utilizando fórmulas empíricas validas para el flujo permanente, si no, de los modelos hidráulicos altamente sofisticados previamente calibrados.

La ciudad de *Kimbiri* así como la ciudad de *Ayacucho*, en cada época de lluvia sufre situaciones de huaycos e inundaciones de sus calles y viviendas provocadas por las precipitaciones extremas y agravadas por la deficiente red de drenaje pluvial inadecuada a las situaciones actuales de desarrollo y crecimiento poblacional, tanto en su capacidad de conducción, diseños inadecuados como también en la falta de mantenimiento continuo. Creemos que es de vital importancia la modelación matemática en la práctica común de la ingeniería civil o del desarrollo de las obras de drenaje pluvial, de tal manera que nos permita realizar simulaciones *hidrológico-hidrodinámicas* en alcantarillas pluviales, determinar los parámetros hidráulicos de estado y aproximarse hacia la zonificación de áreas de riesgo hídrico. El presente trabajo de investigación será un aporte muy importante en este sentido porque se desarrollará un esquema numérico de alta resolución utilizando el ***Método de Elementos Finitos (MEF)*** para resolver las ecuaciones de Saint-Venant, ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento para calcular las características del flujo en régimen no permanente (modelación hidrodinámica) en el sistema de alcantarillas y estructuras de drenaje de diferentes secciones, teniendo como datos previos los resultados de la modelación hidrológica de la zona en estudio. Nuestro interés de contribuir con nuevas herramientas de análisis y diseño nos impone un reto en la modelación hidrodinámica de los alcantarillados pluviales porque estamos convencidos de que las ciudades deben tener un sistema de drenaje pluvial capaz de atender eventos de precipitaciones

extremas. El modelo matemático propuesto será implementado computacionalmente en *MATLAB*, como una herramienta de diseño, simulación y toma de decisiones del sistema de drenaje, bajo los eventos hidrológicos presentados en una determinada ciudad, en este caso se hará la aplicación práctica al *sistema de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri*.

1.2. Motivación de la investigación

El desarrollo del presente trabajo de investigación responde a un *sueño personal* desde que estaba en la Universidad como estudiante sobre todo cuando tuve la oportunidad de llevar los cursos de *Mecánica de Fluidos*, *Métodos Numéricos* e *Introducción al Método de Elementos Finitos*, me preguntaba si podía aplicar el MEF en el campo de la hidráulica, ya que la mayoría de los libros en esta área estaba dirigido a la Ingeniería Estructural.

En *segundo lugar*, durante el proceso de revisión de la literatura que dio inicio a este trabajo de investigación, pude contrastar la existencia de una cantidad *cuasi-infinita* de libros, artículos en revistas y congresos, y más recientemente, sitios en internet llenos de información referidos al MEF. Sin embargo al buscar una aplicación del MEF en específico al problema de *drenaje pluvial* no encontré información especializada ni una solución de las ecuaciones de *Saint-Venant en 1D* con el MEF. De manera que esta tesis trata de presentar un material homogéneo y unificado, que pueda servir a las próximas generaciones de investigadores.

Y, en *tercer lugar*, la enorme oferta de software disponible en el mercado internacional. Muchos de los lectores potenciales de esta *tesis* se preguntarían: ¿por qué y para qué necesito aprender *Elementos Finitos*, si tengo un software que me resuelve el problema?. Como respuesta puedo decir que esta tesis está dirigida a profesionales y estudiantes de las diferentes áreas de *ingeniería* y *ciencias aplicadas*, tanto en el plano académico como

de la práctica profesional. Y en general a todos aquellos que desean profundizar sus conocimientos sobre este método de análisis, y cuya curiosidad los lleve más allá de la simple ejecución de un programa de computador. Más aún, el usuario de software de elementos finitos debe poseer un mínimo de conocimientos básicos sobre la teoría que está detrás del programa computacional. En este sentido me he esforzado en aplicar el MEF al problema de *drenaje pluvial* y he desarrollado el programa *SMAP V2015*.

1.3. Planteamiento del problema

En las ciudades de la *sierra* y *selva* del *Perú* el problema de las inundaciones pluviales es cada vez más frecuente debido a los eventos extremos de carácter climatológico, vemos cada vez que caen "*lluvias*", nuestras calles son convertidas en ríos y lagunas, principalmente en zonas accidentadas y bajas, donde no existen drenajes ó los existentes son "*deficientes*" o no "*funcionan*" por falta de mantenimientos adecuados, y periódicos. De acuerdo a la **Norma OS.060** en ciudades o localidades donde se produzcan precipitaciones frecuentes con lluvias iguales o mayores a 10 *mm* en 24 *horas*, deberá contar en forma obligatoria con un sistema de alcantarillado pluvial, sin embargo en muchas ciudades del *Perú* no se cuenta con este sistema, la cual puede ocasionar:

- Colmatación de drenes, impidiendo la evacuación de las aguas de escorrentía hacia las zonas proyectadas.
- Colapso y deterioro del sistema de alcantarillado sanitario existente, durante épocas del Fenómeno El Niño ingresan aguas provenientes de lluvias que no estaban consideradas en el diseño del sistema de alcantarillado. Dichas aguas arrastran gran cantidad de sedimentos lo que propicia obstrucción en las tuberías.
- Inundación de las zonas bajas, ocasionando daños a la infraestructura existente.

1.3. Planteamiento del problema

- Brote de enfermedades contagiosas y mortales (cólera, dengue, malaria) asociado a las inundaciones que bloquean los sistemas de drenaje de aguas residuales haciendo que las materias fecales permanezcan en la superficie.
- Deterioro de las vías de comunicación.

En el caso específico de las ciudades que están en la *selva* como el caso de la ciudad de *Kimbiri*, las precipitaciones son más intensas y las inundaciones de la ciudad son más frecuentes, por lo que requiere metodología nuevas y más sofisticadas para su análisis. Sin embargo el problema del drenaje se puede dividir en dos aspectos: ***predicción de la escorrentía y diseño del sistema***. Actualmente se han desarrollado esfuerzos considerables para predecir la escorrentía en áreas urbanas (*modelación hidrológica*). El segundo aspecto del problema del drenaje es la metodología del diseño que ha recibido menos atención, los tipos básicos de enfoques son modelos de *diseño hidráulico* y modelos de *optimización*. Los modelos de diseño hidráulico se deberían desarrollar para flujo no permanente (*modelación hidrodinámica*) para poder determinar las dimensiones adecuadas de las estructuras de drenaje a partir de la simulación de estas. La forma de los sistemas de drenaje deben ser conductos que sean capaces de conducir el caudal máximo en cada *Jr.* o *calle*, para este fin en la presente investigación se desarrolló un esquema numérico basado en el ***Método de Elementos Finitos*** para resolver las ecuaciones de ***Saint-Venant en 1D*** que gobierna el *flujo no permanente en sistemas de drenaje pluvial*.

1.3.1. Antecedentes

La Historia del *Drenaje Urbano* se remonta a varios miles de años antes de Cristo y es un largo camino para volver a explorar los antecedentes, pero es un punto de partida útil. Imaginemos que alrededor del mundo, los animales salvajes viven en su hábitat natural y los seres humanos viven en pequeños grupos generando un mínimo impacto

1.3. Planteamiento del problema

ambiental en su entorno. Los procesos hidrológicos naturales predominaban, obviamente hubo inundaciones en condiciones extremas que se agravaron durante el tiempo por la alteración del relieve de la tierra por el hombre. Desechos sanitarios habría sido “*tratados*” por procesos naturales. [15, página 5].

La evacuación de las aguas pluviales ha sido un desafío para la *ingeniería* desde que el hombre pasó del nomadismo al sedentarismo debido a la formación de asentamientos humanos que pasaron a ser las capitales de las antiguas civilizaciones en todas las partes del mundo y tan pronto los seres humanos intentaron controlar su entorno, se desarrollaron sistemas de drenaje artificial. La evidencia arqueológica revela que el drenaje se suministró a los edificios de muchas civilizaciones antiguas como los *Mesopotámicos*, los *Minoicos* (Creta) y los *Griegos* (Atenas). Los romanos son bien conocidos por sus proezas de ingeniería de salud pública, particularmente por traer agua a la ciudad por los impresionantes acueductos; así mismo no menos espectacular, pero igualmente vital, se construyeron los drenajes artificiales, de los cuales el más conocido es la *cloaca máxima*, sistema de drenaje de la ciudad de Roma (todavía en uso hoy en día) [15, página 6].

A nivel internacional se han desarrollado diferentes esquemas numéricos, abordando el tema *drenaje pluvial* de diferentes puntos de vista teórico y matemático, a continuación se menciona alguno de estos:

M.E. Moreno y J.G. Saldarriaga desarrollaron una investigación, donde presentan un análisis comparativo del desarrollo e implementación de tres esquemas de solución de las ecuaciones de *Saint-Venant* para simular el comportamiento hidráulico de las redes de alcantarillado operando bajo condiciones de flujo no permanente en el programa *Alcantarillados*. El *esquema de solución de Preissman* es implícito en donde se calcula el nivel del agua y el caudal en cada tramo del conducto. El *esquema de solución de Abbott & Ionescu* es implícito que calcula los niveles de agua y el caudal de una manera intercalada en los puntos internos del conducto. El *esquema de solución desarrollado por la EPA* es explícito

1.3. Planteamiento del problema

en donde se calcula el caudal en el conducto y los niveles de agua en los nodos de unión. Los tres esquemas de solución han mostrado ser efectivos para solucionar la hidráulica de alcantarillado. [39]

Rudy Rolandy Granda Acha en su tesis de pregrado *Análisis numérico de la red de drenaje pluvial de la Urb. Angamos* plantea el análisis de una red de drenaje en particular de la ciudad de *Piura* a través del modelo *Storm WaterManagemenModel (SWMM)* hace la comparación con los resultados obtenidos por el método racional y un breve análisis del porqué de la variación de los mismos [2].

Desde la *Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga* se han desarrollado tres tesis de pregrado en el área de Drenaje Urbano, el primero en el año 2006, *Canales Días Vidal Eleuterio*, desarrolló la tesis “*Análisis y diseño del sistema de drenaje pluvial*”, el segundo en el año 2009 *Misaico Vilchez, Edilberto* presentó la tesis “*Propuesta de diseño de drenaje pluvial para el centro histórico de la ciudad de Ayacucho*” y el último en el año 2011, *Danitza Prado Días* presentó la tesis “*Simulación dinámica de flujo no permanente en redes de alcantarillado pluvial*”. Todas estas tesis contemplan tanto la teoría y el enfoque matemático de redes de alcantarillado de drenaje pluvial utilizando metodología y softwares comerciales ya existentes [10], [29], [34]. Sin embargo en el presente trabajo de investigación se presenta un método matemático distinto a lo que han presentado anteriormente y se ha desarrollado un programa propio denominado *SMAP V2015*.

El crecimiento de las zonas urbanas en los últimos años sobrepasa cualquier previsión, cualquier diseño, cualquier planeamiento de servicios urbanos por lo que es necesario la planificación en base a resultados de simulaciones fiables de sistemas de drenaje pluvial.

1.3.2. Problema

1.3.2.1. Problema principal

¿El **Método de Elementos Finitos** son métodos numéricos adecuados para la solución y simulación numérica del flujo no permanente en redes de drenaje pluvial en la ciudad de **Kimiri** donde se genera *colmatación de cunetas, colapso y deterioro del sistema de alcantarillado sanitario existente, obstrucción de tuberías, inundación de las zonas bajas, brote de enfermedades contagiosas y mortales y deterioro de las vías de comunicación, etc.* que perjudica la calidad de vida de las *personas*?

1.3.2.2. Problemas específicos

1. ¿Qué relación existe entre el comportamiento *hidrodinámico* del *flujo de agua* en **regimen no permanente**, *hietogramas de diseño, secciones transversales de los conductos, condiciones topográficas de las calles, condiciones de contorno, condiciones iniciales, etc.* en un modelo teórico y matemático del **Método de Elementos Finitos**?
2. ¿Cuál es la *variabilidad espacial y temporal* de los parámetros hidrodinámicos del flujo de agua en *regimen no permanente* y la influencia de su respuesta en el sistema de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimiri*?
3. ¿En qué medida la **Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga** promueve la *modelación matemática, simulación numérica* y desarrollo de *códigos computacionales* para resolver problemas reales y prácticos en la Región Ayacucho y el País, en apoyo al desarrollo de la ciencia y la ingeniería del futuro?

1.3.3. Objetivos

1.3.3.1. Objetivo General

Desarrollar un modelo matemático hidrodinámico de análisis y simulación numérica de sistemas de drenaje pluvial en *régimen de flujo unidimensional no permanente* con el *Método de Elementos Finitos*.

1.3.3.2. Objetivos Específicos

1. Formular un *marco teórico* y determinar las *relaciones matemáticas* de las ecuaciones del *flujo no permanente* en *1D* y las demás variables mediante el *Método de Elementos Finitos* que permita caracterizar el comportamiento del flujo no permanente en sistemas de drenaje pluvial.
2. Analizar y evaluar la *variabilidad espacial* y *temporal* de los parámetros del *flujo no permanente* en *1D* y su comportamiento en el sistema de drenaje pluvial de la Ciudad de *Kimbiri*.
3. Implementar un *código computacional* del modelo matemático propuesto en *MATLAB* para la automatización y simulación numérica del *flujo no permanente* en *1D* que contribuya en la planificación y gestión del sistema de drenaje pluvial en la ciudad de *Kimbiri* y comparar los resultados obtenidos con el software comercial *SWMM* (*Storm Water Management Model*).

1.3.4. Hipótesis

1.3.4.1. Hipótesis principal

Resolviendo las *ecuaciones diferenciales parciales* del flujo no permanente por el *Método de Elementos Finitos (MEF)* con una aproximación *unidimensional* se puede realizar

simulaciones numéricas y calcular los *tirantes de agua*, *caudales*, *velocidades* y las *alturas totales* en cada uno de los *conductos* y *nodos* de la una red de drenaje pluvial.

1.3.4.2. Hipótesis específicos

1. Existe una relación directa entre la cantidad de *flujo de agua* en **regimen no permanente**, *hietogramas de diseño*, *secciones transversales de los conductos*, *condiciones topográficas de las calles*, *condiciones de contorno*, *condiciones iniciales*, etc. En un modelo matemático de Elementos Finitos.
2. Tanto la *variabilidad espacial* como *temporal* de los parámetros del flujo *no permanente* en 1D es determinante en problemas de drenaje pluvial y su influencia en los resultados es *alta* debido a la relación directa de las *ecuaciones gobernantes*.
3. Al desarrollar una *aplicación informática* en **MATLAB** se automatiza los diferentes procesos de análisis del flujo de agua en *régimen no permanente* en 1D, con múltiples opciones de simulación computacional bajo diferentes escenarios y realidades para tomar decisiones adecuadas en la planificación y gestión del drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri*.

1.4. Justificación

Las migraciones desde las zonas rurales a las urbanas producen cambios en el uso del espacio y afectan tanto a las primeras como a las segundas; su resultado final es un acelerado proceso de urbanización, o aumento de la proporción de población que vive en las áreas urbanas, que repercute en la periferia de las ciudades más atractivas. Este crecimiento urbanístico de las ciudades es permanente, y cada vez se construyen más fraccionamientos que convierten amplias zonas de terrenos en estado natural en nuevas

zonas pavimentadas, lo cual provoca un cambio en el comportamiento de los *escorrentías pluviales*.

La urbanización afecta el ciclo hidrológico debido a que incrementa el volumen y la velocidad de escurrimiento superficial en el área afectada, tal incremento provoca una mayor intensidad del escurrimiento en el área urbana, en corrientes receptoras y en zonas aguas abajo de la cuenca en estudio. Es común que el plan de desarrollo de una ciudad no esté ligado a estudios hidrológicos que lo orienten para evitar zonas de inundación, lo cual es una situación de alerta, por que los problemas que pueden presentarse son graves, debido a que los cambios observados como las lluvias extremas cada vez serán más frecuentes en el futuro por el cambio climático que está experimentando nuestro planeta. Actualmente es necesario tomar conciencia de que es urgente tomar medidas de planeación en el crecimiento de una ciudad que estén ligadas a las condiciones hidrológicas de la zona, que permitan un crecimiento ordenado y poder estar en condiciones de resolver los problemas de huaycos e inundaciones sin recurrir a acciones que solo retarden un problema más grave. Las instituciones gubernamentales y académicas deberían revolucionar los modelos de diseño de las alcantarillas pluviales, con el propósito de promocionar la introducción de nuevas tecnologías en los trabajos de alcantarillados para hacerlos más eficientes, de tal manera que contribuyan al mejoramiento del ambiente de vida del país, a través de la investigación y el desarrollo de nuevas tecnologías relacionadas a los sistemas de alcantarillado. Con la finalidad de introducir una dosis de innovación en el modelaje matemático de las alcantarillas pluviales, en el presente trabajo de investigación, el sistema de ecuaciones de *Saint Venant* que constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de derivadas parciales no lineales de tipo hiperbólico se solucionará utilizando el *Método de Elementos Finitos*. La representación del flujo variado no permanente unidimensional en el interior del sistema de conductos puede ser hecha satisfactoriamente con la ayuda de modelos numéricos de última generación, como el MEF, donde la precisión es mucho mayor con respecto a otros esquemas numéricos como el Método de Diferencias Finitas. Para validar

el modelo se hará una aplicación práctica resolviendo el *sistema de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri*.

1.5. Metodología aplicada

1.5.1. Tipo de Investigación

La investigación es del tipo *cuantitativa*, de tipo *aplicativo tecnológico*; se inicia con el tratamiento de las series de tiempo en este caso de las *precipitaciones máximas de 24 horas* de las estaciones de *Pichari, Sivia, Teresita y Machente*, que se encuentra en la zona del influencia del proyecto de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri*, seguidamente se obtienen los hietogramas de diseño para los *periodos de retorno* del proyecto. Teniendo com dato la topología de la red de drenaje se determina las áreas de aporte de las subcuen- cas para cada buzón. A partir del dominio del problema de drenaje pluvial se obtiene un modelo de Elementos Finitos para el análisis y simulación numérica del problema cuyos resultados se compara con lo obtenido por el programa *SWMM (Storm Water Management Model)* y se valida los resultados utilizando *estadística no paramétrica* mediante la prueba de bondad de χ^2 -Cuadrado.

1.5.2. Nivel de investigación

El tipo de *Diseño de Investigación* del presente trabajo de investigación es *Descriptiva* porque tiene como objetivo la descripción del *flujo no permanente* en redes de drenaje pluvial, tal como es y como se manifiesta en el momento del tránsito del flujo de agua durante una tormenta dada, buscando especificar las propiedades importantes para medir y evaluar aspectos, dimensiones o componentes. Ofrece la posibilidad de predicciones a través de la simulación numérica.

1.5.3. Diseño de la investigación

El tipo de Diseño de Investigación del presente estudio es *Longitudinal* y *Estudio de Caso* debido a las siguientes consideraciones:

1. Utiliza series de tiempo de precipitaciones de 24 horas de cuatro estaciones de la zona de influencia del proyecto, series historiadas tomadas en el tiempo que han sido útiles para la obtención de la escorrentía.
2. El método de solución (MEF) de las ecuaciones gobernantes es especialmente útil para intentar poner a prueba los modelos teóricos y matemáticos aplicándolos en situaciones del mundo real, en este caso al sistema de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri*.

1.6. Organización del estudio

- **Capítulo 1:** En esta primera parte de la tesis se hace una introducción al estudio, análisis y modelamiento de *sistemas de drenaje pluvial*, así mismo se describe los antecedentes sobre el tema a nivel mundial como a nivel local, consiguientemente se justifica la importancia de la tesis o los aportes más relevantes, así mismo se plantea los objetivos a alcanzar en el presente trabajo de investigación.
- **Capítulo 2:** Describe explícitamente el estado de arte sobre el *flujo unidimensional no permanente* y los *métodos numéricos* utilizados en la tesis, con especial énfasis el *Método de Elementos Finitos*, es decir sobre los avances a nivel de teoría, modelos matemáticos e implementación computacional de modelación hidráulica de sistemas de drenaje pluvial a través de la historia de la humanidad en todo el mundo.
- **Capítulo 3:** Se describe y se analiza el problema de *drenaje pluvial*, las causas y sus consecuencia que podría generar en caso de ocurrir precipitaciones extremas,

también se hace la formulación matemática de las ecuaciones que gobierna este fenómeno.

- **Capítulo 4:** Se hace el modelamiento del problema y se resuelve las ecuaciones en derivadas parciales de *Saint Venant* que gobierna el flujo no permanente en sistemas de drenaje pluvial, utilizando el *Método de Elementos Finitos*, además se establece las condiciones iniciales y las condiciones de contorno para la modelación del sistema de drenaje pluvial.
- **Capítulo 5:** Se hace la aplicación del modelo desarrollado a un caso real, en este caso se hace la simulación numérica del *sistema de drenaje pluvial* de la ciudad de *Kimbiri*, mediante el esquema numérico desarrollado basado en el *Método de Elementos Finitos*, así mismo se presenta varias soluciones generales para validar el modelo.
- **Capítulo 6:** Se hace una discusión detallada sobre cada caso relevante, sobre la aplicabilidad del modelo propuesto, criterios para una adecuada modelación y simulación del problema y sobre los resultados de la aplicación.
- **Capítulo 7:** Se describe las principales conclusiones de la tesis, como resultado final del trabajo de investigación así mismo se detalla las recomendaciones sobre el tema.
- **Referencias:** Se presenta la lista completa de todos los libros, páginas y todas las referencias utilizadas para el desarrollo de la tesis .
- **Apéndice A:** Se muestra paso a paso el manual del programa *SMAP V2015* desarrollado en MATLAB.
- **Apéndice B:** Se detalla la técnica de ensamblaje del Método de Elementos Finitos MEF.
- **Apéndice C:** Se describe todo relacionado a Algebra Matricial.

1.6. Organización del estudio

- **Apéndice D:** Se desarrolla en su forma básica las Ecuaciones Diferenciales Parciales.
- **Apéndice E:** Se presenta el Código fuente del programa *SMAP V2015*.
- **Apéndice F:** Se presenta Láminas y planos.

Parte II

ESTADO DEL ARTE

Capítulo 2

Estado del arte

2.1. Generalidades

Varios miles de años de existencia de la humanidad puede parecer un largo camino para volver a recordar trazar la historia del *drenaje urbano*, pero es un punto de partida útil. Imaginemos que alrededor del mundo, los animales salvajes viven en su hábitat natural y los seres humanos viven en pequeños grupos generando un mínimo impacto ambiental en su entorno. Los procesos hidrológicos naturales predominaban, obviamente hubo inundaciones en condiciones extremas que se agravaron durante el tiempo por la alteración del relieve de la tierra por el hombre. Desechos sanitarios habría sido “*tratados*” por procesos naturales [15].

Tan pronto como los seres humanos intentaron controlar su entorno, se desarrollaron sistemas de drenaje artificial. La evidencia arqueológica revela que el drenaje se proporcionó a los edificios de muchas civilizaciones antiguas como los mesopotámicos, los *Minoicos* (Creta) y *Griegos* (Atenas). Los romanos son bien conocidos por sus proezas de ingeniería de salud pública, particularmente los impresionantes acueductos que traen agua a la ciudad; menos espectacular, pero igualmente vital, se construyeron los drenajes artificiales,

de los cuales el más conocido es la *cloaca máxima*, sistema de drenaje de la ciudad de Roma (todavía en uso hoy en día) [15].

Se produjo un cambio en la década de 1980, con la introducción de metodologías de modelado de sistemas de alcantarillado. Dichos modelos han estado disponibles en *Estados Unidos* durante un tiempo, pero el primer paquete de modelo escrito para *UK conditions*, *WASSP (Wallingford Storm Sewer Package)*, estaba basado en un conjunto de cálculos de precipitación, escorrentía y flujo de tubo llamado *Wallingford Procedure*, que fue lanzado en 1981. La primera versión no era particularmente fácil de usar y se necesitaba un ordenador central para funcionar, pero más tarde, se desarrolló el software en respuesta al desarrollo de los ordenadores y la demanda de una buena interfaz de usuario. La herramienta tuvo un profundo efecto en las actitudes y prácticas de los ingenieros dedicados al problema de drenaje. Para modelar un sistema, sus datos físicos tenían que ser conocido; por lo tanto, los modelos informáticos creados exigían mejor conocimiento y más datos de las alcantarillas. El uso de los modelos acercó mucho más al entendimiento de cómo realmente funciona un sistema de drenaje. Se convirtió en una filosofía, un análisis del problema con tecnologías más sofisticadas podían hacer grandes ahorros en los costos de modelación y construcción [15].

El siglo XXI trae nuevos retos en el campo de drenaje urbano. La movilidad urbana, el drenaje pluvial y la recuperación de espacios públicos son los retos más acuciantes sobre los cuales los gobiernos locales deben emprender acciones concretas. No obstante, los diferentes niveles de gobierno deberán garantizar la continuidad de estos procesos y atender otros sectores críticos para lograr un modelo de sostenibilidad local que contemple el manejo integral de los sistemas de drenaje.

El cambio climático global amenaza con sequías e inundaciones en todas las partes del planeta. El impacto antropogénico en nuestro clima global ahora parece ser demostrado de manera concluyente, pero las consecuencias no se entienden completamente. Nuestras

mejores predicciones indican que habrá cambios significativos en el régimen de lluvias. Estos cambios deben tenerse en cuenta en el diseño de los sistemas de drenaje y de otras estructuras hidráulicas.

Una de las consecuencias más graves es el aumento potencial de inundaciones (pluvial) de alcantarillado. Externo o, incluso peor, inundación interna con las aguas residuales se considera inaceptable en el siglo XXI, según algunas fuentes (*WaterVoice Yorkshire, 2002*). Dada la naturaleza estocástica de la precipitación y el potencial para más eventos extremos en el futuro, esta es un área que es probable que requiera atención cuidadosa por investigadores de drenaje urbano y profesionales. La relación entre drenaje urbano y la superficie de inundación se ha convertido en un área clave [15].

2.2. Hidrología Urbana

La *Hidrología urbana* es una ciencia, parte de la *hidrología superficial*, que estudia el ciclo hidrológico, el régimen del agua y la calidad en zonas urbanizadas. Hidrología urbana es un eslabón de una serie de ciencias que tratan los problemas de ecología, protección del medio ambiente, conservación y uso racional de los recursos hídricos de la tierra. El *Programa Internacional de Hidrología de la UNESCO*, que incluye un proyecto integral “*Influencia de la urbanización en la calidad y régimen del agua*”, fue adoptado en 1974 y tenía una gran importancia para el establecimiento y desarrollo de la hidrología urbana.

El proyecto cubre una amplia gama de cuestiones relacionadas con el estudio del impacto de la urbanización sobre el equilibrio del agua y recursos hídricos. En los años 80-90s, había muchas publicaciones sobre los resultados del proyecto, que refleja que el estado del conocimiento en el área de Hidrología Urbana basado en información recibida de muchos países. En particular, en 1987, la UNESCO publicó dos volúmenes de la orientación básica sobre Hidrología Urbana, que contiene información sobre la adquisición de datos,

análisis y procesamiento de observaciones de ciclos hidrológicos y cálculos del sistema de drenaje en las ciudades. Los resultados de la cooperación internacional en las últimas décadas permiten definir una gama de objetivos en Hidrología Urbana y el nivel de nuestro conocimiento.

2.2.1. Influencia de la urbanización

La tendencia al desplazamiento de la población desde zonas rurales hacia zonas urbanas es cada vez más creciente. En la actualidad más del 50 % de la población mundial vive en zonas urbanas, habiéndose incrementado en más de un 80 % en los últimos 20 años.

La urbanización de una cuenca modifica su respuesta hidrológica frente a una determinada lluvia. La urbanización conlleva la alteración de las redes de drenaje natural (construcción de colectores y encauzamientos que aumentan la velocidad del agua hacia aguas abajo de la cuenca) y un incremento de las zonas impermeables en superficie además con materiales menos rugosos, todo ello con el criterio de drenar lo más eficiente y rápido posible el área urbanizada. Como hemos dicho, esta dinámica afecta a la hidrología de la cuenca y muy especialmente a las zonas situadas aguas abajo. La urbanización aguas arriba modifica el hidrograma que reciben estas zonas, de forma que se incrementan el volumen de escorrentía y el caudal máximo

Asimismo es menor el tiempo que transcurre entre el inicio de la escorrentía provocada por la lluvia y el máximo caudal: disminuye el tiempo de concentración. Todo ello conlleva que la zona aguas abajo este afectada con mayor frecuencia por caudales que pueden crear problemas de inundación, tanto más importantes cuanto menores sean las pendientes. La disminución del tiempo de respuesta es debido, como ya se ha comentado anteriormente, a la mayor velocidad del agua en una cuenca urbana que en una cuenca natural. Evidentemente en este aumento de velocidad juega un papel importante la red de colectores.

2.2.2. Problema del Drenaje Urbano

El primer problema es el problema hidrológico, es decir, determinar la cantidad de agua que debemos evacuar desde la superficie de la ciudad. El segundo se refiere a que el agua de la escorrentía que se genera en la superficie, sea recogida e introducida en la red de alcantarillado subterránea. El tercer problema es el llamado problema hidráulico: diseñar una red con capacidad suficiente para que los caudales captados circulen sin problemas hasta el punto de desagüe, mientras que el cuarto problema se refiere a estudiar las consecuencias desde el punto de vista de cantidad y calidad sobre el medio receptor.

2.2.2.1. Caudales y nivel de seguridad de la red

Para el diseño de un colector o de la red en su totalidad, necesitamos definir un nivel de seguridad y unos caudales de paso, asociados a ese nivel de seguridad. Los niveles de seguridad se podrán intentar estimar a partir de una relación costo - beneficio, evaluando los costos de construcción de una red para diferentes periodos de retorno, comparándolos con los costos de los daños esperables durante un horizonte de tiempo asociado a la vida útil de la infraestructura. La suma de ambos componentes deberá dar un mínimo para el periodo de retorno óptimo. Sin embargo, este proceso se puede frustrar por la dificultad en la estimación de los daños asociados. Si bien la curva de los costos de construcción se podrá considerar más o menos objetiva, la de daños presenta el problema de su cuantificación y sobre todo el de la estimación de esos daños en una cierta zona de la ciudad dentro de 15 a 20 años. No sabemos con certeza como se va a desarrollar el crecimiento urbano, ni que zonas de una ciudad se pondrán de moda o caerán en desgracia, con la consiguiente repercusión sobre los costos de una inundación en un barrio de los llamados de alto standing (permanente) o en un barrio semiabandonado por problemas diversos.

2.2.2.2. Captación de las aguas en superficie

De los problemas enunciados, el primero es el de tipo hidrológico mientras que el tercero es el problema hidráulico. Entre estos pasos, existe uno que con frecuencia solemos olvidar: los caudales de escorrentía deben introducirse en la red de drenaje y en los puntos previstos, para que el agua no circule descontrolada por la superficie de la ciudad.

En numerosas ciudades algunas superficies, por ejemplo los tejados, suelen estar directamente conectados a la red de drenaje, asegurando así la captación de la escorrentía en la misma zona en que cae. Para la lluvia sobre aceras, viales, plazas y espacios abiertos contamos en superficie con rejillas de captación, también denominadas *sumideros* o *imbornales*, que tienen la responsabilidad de recoger el caudal, fruto del proceso de transformación de la lluvia en escorrentía, que circula por la calle y aceras, e introducirlo en la red de drenaje.

En el proceso de diseño de una red de drenaje, estamos haciendo siempre la hipótesis implícita de que la lluvia caída que se transforma en escorrentía superficial, entra en la red de drenaje en la misma zona en que cae. Definimos en base a esa hipótesis una serie de subcuencas hidrológicas cuyos límites están fijados en el supuesto que el agua superficial no los supera. Cuando esto no se cumple, el esquema hidrológico e hidráulico que hemos supuesto en la ciudad puede saltar en pedazos.

Los elementos de captación que ofrecen las diferentes empresas suministradoras cuentan con una información en general escasa, cuando no nula, sobre la capacidad del *sumidero* o *imbornal* para recoger agua. Podemos encontrarnos con numerosos datos de su capacidad resistente, dimensiones, etc. pero raramente se encuentran datos de capacidad de recogida de aguas, por sorprendente que parezca. Si bien estos elementos deben resistir por ejemplo las cargas del tráfico y no será bueno que en cuanto pasara un camión u otro vehículo pesado, se rompieran, pero no debemos olvidar que la razón primera de su existencia es captar agua, y que la capacidad resistente debe ser un valor adicional.

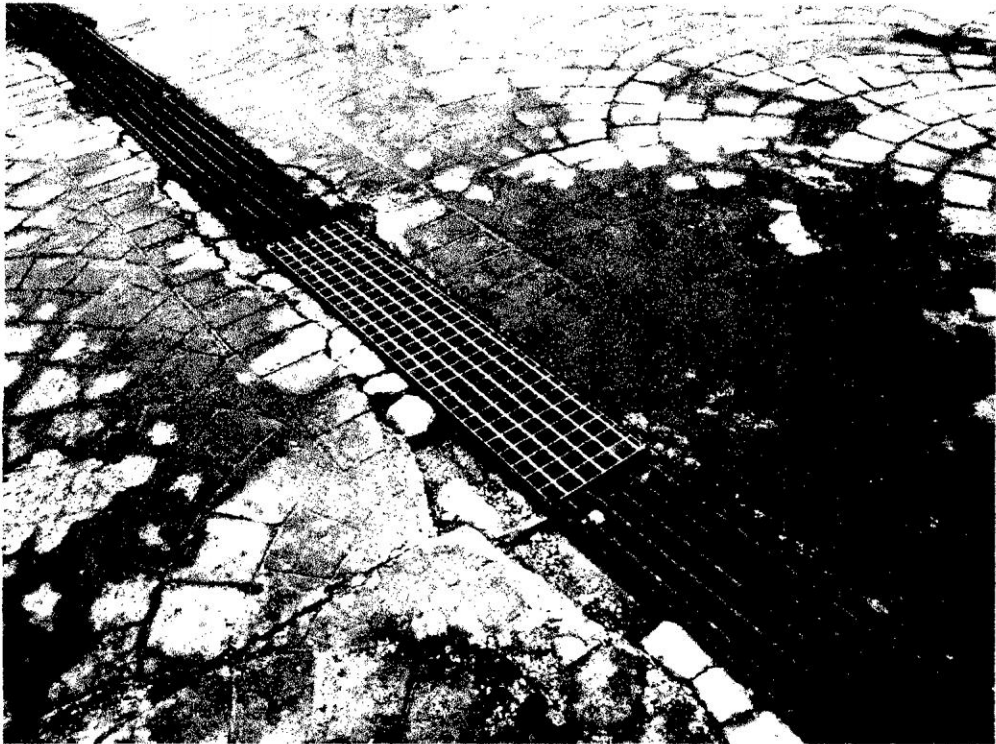


Figura 2.1: Imbornal en medio urbano: Fuente: *Internet*

En la actualidad se está entrando en una serie de consideraciones a la hora de elegir los tipos de sumideros a ubicar que no son las más adecuadas desde el punto de vista del drenaje urbano. Se eligen elementos por consideraciones estéticas en primer orden y si además captan un poco de agua pues bienvenido sea, pero imponer criterios tales como que el sumidero sea del mismo ancho que la *rigola* de la calle (pieza de tipo cerámico junto al bordillo, mas lisa y que favorece la circulación del agua) sin ninguna otra consideración es un enfoque dudoso. Se descartan sumideros de mejor comportamiento porque no cumplen esos criterios estéticos.

2.2.2.3. Cálculo hidráulico de las redes de drenaje urbano

El tercero de los subproblemas se refiere al cálculo hidráulico de la red de alcantarillado. Y este es uno de los temas que se encuentran aún en la actualidad peor tratados. En relación

a los métodos de cálculo, se debe indicar que se usa demasiado el cálculo en régimen permanente uniforme, el del llamado tirante normal. Y esta es una mala aproximación para el cálculo de la red. Se puede utilizar como elemento de predimensionamiento o para tener una idea aproximada del orden de magnitud de los tamaños de conducto necesarios, pero quedarse en este punto de cálculo es totalmente inadecuado. Podemos indicar algunas consideraciones sobre este método de cálculo:

- Es un método que calcula uno a uno los colectores, sin tener en cuenta el concepto red de drenaje, concepto que supone la existencia de interacciones entre los conductos de la red. Dado un caudal de paso, una pendiente, una tipología de conducto y un material tipo para las paredes, queda fijado el nivel de agua y el tamaño del colector sin tener en cuenta lo que hay aguas arriba o aguas abajo.
- No considera la longitud del colector, de manera que sea el conducto de 2 metros de largo o de 2000 metros, el nivel de agua y el tamaño de colector en consecuencia es el mismo, lo que no parece muy lógico.
- Es un tipo de flujo que podemos denominar raro, pues no se suele dar en la naturaleza más que como situación de tipo asintótico en conductos muy largos, mientras que los colectores de una red de drenaje suelen ser cortos.
- Lo mejor que podemos decir es que es fácil de calcular y existen una serie de nomogramas, gráficos, etc. que hacen muy sencillo el proceso de cálculo

Ni siquiera podemos asegurar que los resultados de cálculo nos pongan del lado de la seguridad, pues pueden suponer que en ocasiones colectores que están en presión, según el cálculo deberán estar en lámina libre. El empleo de aproximaciones mejores, como sea el uso de la curva de remanso o mejor todavía, una aproximación de flujo gradualmente variable es deseable y tenemos alternativas de cálculo económicas como *HEC-RAS* o



Figura 2.2: Inundación superficial por insuficiencia de la red de drenaje. Fuente: *Elaboración propia*

SWMM 5.0. Por consiguiente, parece que ha llegado la hora de desterrar los procesos de diseño realizados tan solo con régimen permanente uniforme, reemplazándolos con mejores aproximaciones de cálculo.

2.3. Drenaje Urbano

Sistemas de drenaje son necesarios en las zonas urbanas desarrolladas debido a la interacción entre la actividad humana y el ciclo natural del agua. Esta interacción tiene dos formas principales: la captación de agua del ciclo natural para proporcionar un suministro de agua para la vida humana y la cubierta de tierra con superficies impermeables que desviar el agua de lluvia del sistema natural local de drenaje. Estos dos tipos de interacción dan lugar a dos tipos de agua que requieren drenaje.

El primer tipo, aguas residuales, agua que se suministra para sostener la vida, mantener un nivel de vida y satisfacer las necesidades de la industria. Después de su uso, si no se drena correctamente, podría causar contaminación y crear riesgos para la salud. Aguas residuales contienen material disuelto, sólidos finos y grandes sólidos, originario por diversos factores y tipos de la industria y de otros usos del agua.

El segundo tipo de agua que requieran drenaje, aguas pluviales, es agua de lluvia (o resultante de cualquier tipo de precipitación de agua) que ha caído en una zona urbanizada. Si las aguas pluviales no se drena correctamente, podría causar molestias, daños, inundaciones y más riesgos para la salud. Contiene algunos contaminantes, procedentes de la lluvia, el aire o la superficie de captación [15].

Sistemas de drenaje urbano manejan estos dos tipos de agua con el objetivo de minimizar los problemas causados a la vida humana y el medio ambiente. Así el drenaje urbano tiene dos interfaces principales: con el público y con el medio ambiente (Fig. 2.3). El público suele ser en la que se transmite en lugar de la recepción final de los servicios de drenaje urbano (ras y olvidar), y esto podría explicar en parte la falta de conciencia pública y la apreciación de un vital servicio urbano.



Figura 2.3: Interfaces con el público y el medio ambiente [15]

En muchas zonas urbanas, el drenaje se basa en un sistema totalmente artificial de alcantarillas: tuberías y estructuras que recogen y tiran esta agua. En contraste, las comunidades aisladas o de bajos ingresos no tienen normalmente drenaje principal. Las aguas residuales es tratada localmente (o no) y las aguas pluviales se drena naturalmente en el suelo. Este tipo de arreglos ha existido generalmente cuando el grado de urbanización ha sido limitado. Sin embargo, como se expondrá más adelante en el libro, pensamiento reciente

hacia prácticas más sostenibles-capaces de drenaje es fomentar la utilización de mecanismos de drenaje más naturales siempre que sea posible.

En este sentido el drenaje pluvial es mucho más que transportar el flujo de agua de un lugar a otro a través de un sistema de alcantarillado. Por ejemplo, existe una relación compleja y fascinante entre aguas residuales y aguas pluviales cuando pasan a través del sistema, en parte como resultado de la evolución histórica de drenaje urbano. Cuando se mezclan aguas residuales y aguas pluviales, en lo que se denomina “alcantarillas combinadas”, la disposición de ninguno de los dos es “eficiente” en términos de impacto ambiental o sostenibilidad. Además, mientras el flujo está siendo conducido en alcantarillas, sufre una transformación de muchas formas. Otro aspecto crítico es el hecho de que los sistemas de alcantarillado pueden aliviar ciertos problemas, por ejemplo, riesgos para la salud o inundaciones o perturbación ambiental a cursos de agua naturales [15].

En general el drenaje urbano clásico presenta un conjunto de retos ambientales modernos. La necesidad de mejoras técnicas rentables y socialmente aceptables en los sistemas existentes, la necesidad de evaluar el impacto de esos sistemas y la necesidad de buscar soluciones sostenibles. Estos desafíos no pueden considerarse solamente como la responsabilidad de una especialidad de manera aislada. La responsabilidad es compartida, por ejemplo de los políticos, ingenieros, especialistas en medio ambiente, junto con todos los ciudadanos, tienen un papel fundamental en la concepción, planificación y solución de los sistemas de drenaje pluvial. Y cualquier responsabilidad o rol debe estar asociado a un compromiso en conjunto de los diferentes actores en el tema. Los ingenieros deben entender las cuestiones más amplias, mientras que aquellos que buscan influir en la política deben tener cierta comprensión de los problemas técnicos. Este es el razonamiento que los profesionales y la sociedad civil debe entender y tener un interés serio en el entorno urbano.

2.3.1. Efectos de la urbanización sobre el drenaje

Consideremos más los efectos del desarrollo humano en el paso del agua de lluvia. El drenaje urbano reemplaza una parte del ciclo natural del agua y, al igual que cualquier sistema artificial que toma el lugar de natural, es importante que se entiendan todos los efectos.

En la naturaleza, cuando la lluvia cae sobre una superficie natural, algo de agua vuelve a la atmósfera por evaporación o transpiración por las plantas; Algunos se infiltra en la superficie y se convierte en agua subterránea; y algunos se ejecuta fuera de la superficie (Figura 2.4(a)). Las proporciones relativas dependen de la naturaleza de la superficie y pueden variar con el tiempo durante la tormenta. El escurrimiento superficial tiende a aumentar a medida que el suelo se satura). Las aguas subterráneas y el escurrimiento superficial tienden a encontrar su camino a un río, pero el escurrimiento superficial llega mucho más rápido. El agua subterránea se convertirá en una contribución más para el río en general como parte del aumento en el flujo debido a cualquier precipitación particular [15].

El desarrollo de un área urbana, que implican cubrir el suelo con superficies artificiales, tiene un efecto significativo en estos procesos. Las superficies artificiales aumentan la cantidad de escorrentía superficial en relación con la infiltración y por lo tanto aumentan el volumen total de agua que llega al río durante o poco después de la lluvia (Figura 2.4(b)). La escorrentía superficial viaja más rápido sobre superficies duras y a través de alcantarillas que sobre superficies naturales y a lo largo de arroyos naturales. Esto significa que ambos flujos llegan, pero el flujo sobre superficies modificadas o artifices de lejos llega más rápido, y por lo tanto el flujo pico será mayor (ver Figura 2.5).

Obviamente, esto aumenta el peligro de inundación repentina del río. También tiene fuertes implicaciones para la calidad del agua. La escorrentía de aguas pluviales es probable que cause contaminaciones y sedimento la superficie o limpiada por el río. En un entorno

artificial, hay probablemente más contaminantes en la superficie de captación y en el aire que pueda haber en un entorno natural. Además, los sistemas de drenaje en donde hay mezcla de aguas residuales y aguas pluviales pueden permitir contaminantes de las aguas residuales para entrar en el río [15].

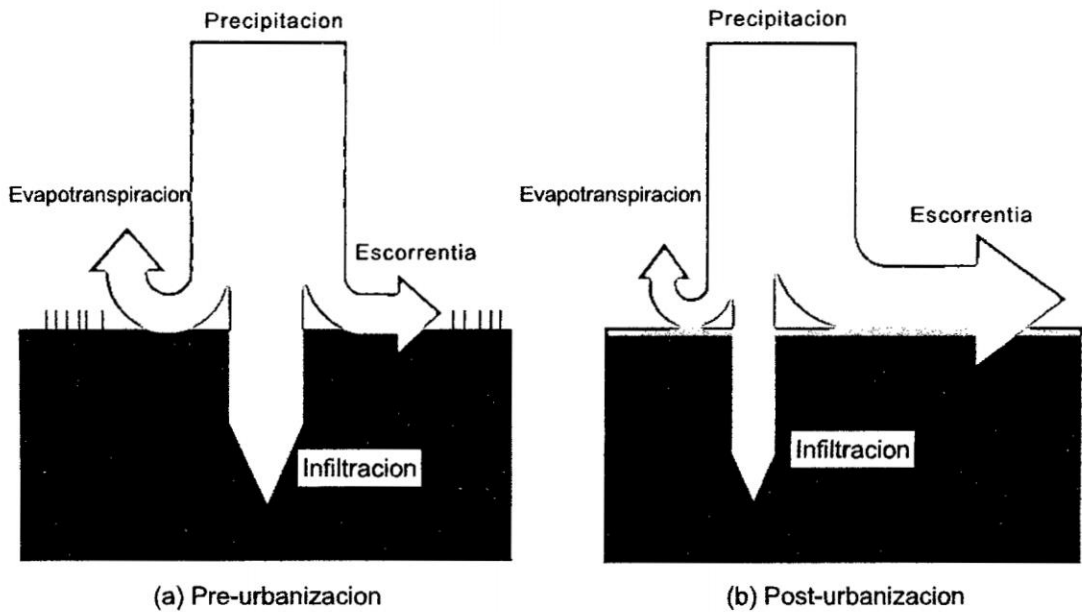


Figura 2.4: Efecto de la urbanización sobre el destino de lluvia [15]

La existencia de aguas residuales en cantidades significativas sí es una consecuencia de la urbanización. Gran parte de esta agua es particularmente “sucia” por su uso. Es una conveniencia estándar en un país desarrollado para abrir un grifo para llenar una bañera, es una conveniencia estándar para sacar el enchufe para permitir que el agua *desaparesca*”. El agua también se utiliza como el medio principal para la eliminación de desechos corporales y cantidades variables de desechos.

En un sistema desarrollado, gran parte del material que se agrega al agua mientras se está convirtiéndose en aguas residuales se quita en una planta de tratamiento de aguas residuales antes de su retorno al ciclo del agua urbano. La misma naturaleza sería capaz de tratar a algunos tipos de residuos de material, corporal, pero no en las cantidades

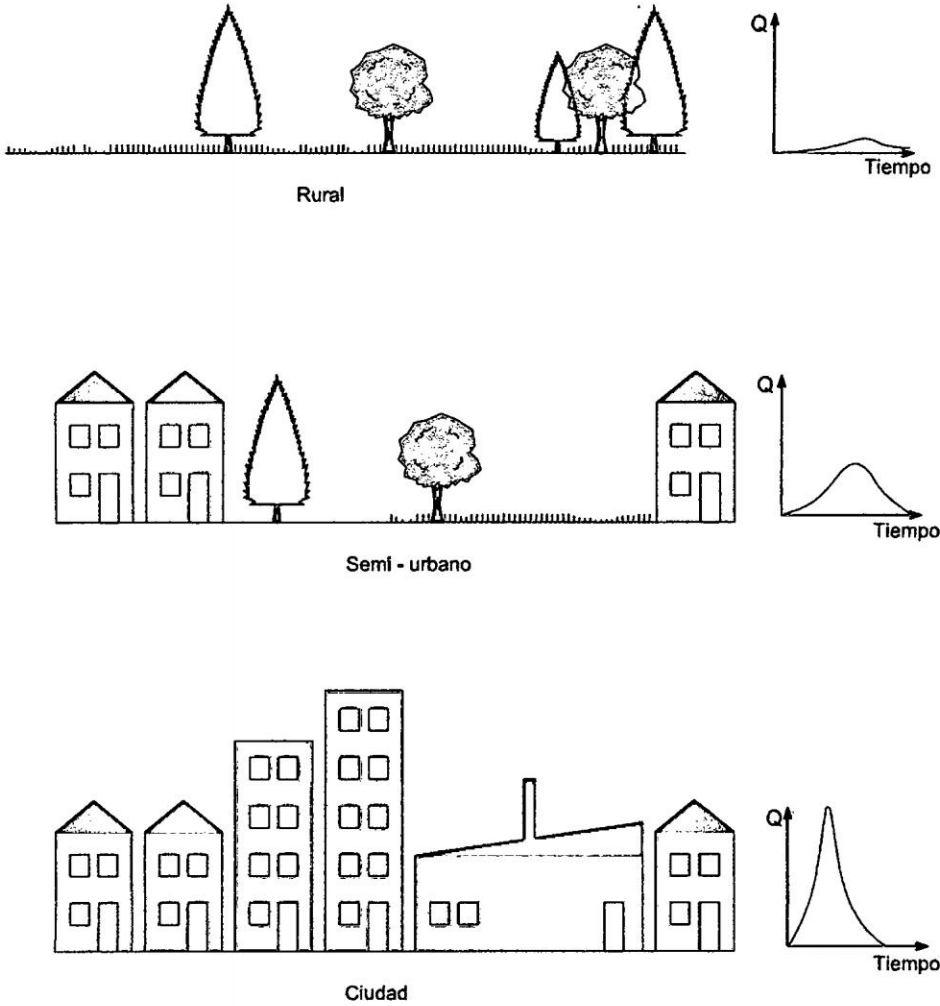


Figura 2.5: Efecto de la urbanización en la tasa máxima de escurrimiento [15]

semejantes a la urbanización. La proporción de material que debe eliminarse dependerá en parte de la capacidad de asimilar lo que queda del río [15].

Así, los efectos generales de urbanización en el drenaje, o los efectos de la sustitución de drenaje natural por drenaje urbano, son para producir picos más altos y más repentinas en el caudal del río, introducir contaminantes y la necesidad de tratamiento de aguas residuales artificiales. Mientras que en cierta medida dejar pasar por la naturaleza, drenaje urbano también impone fuertemente sobre él.

2.3.2. Drenaje urbano y salud pública

En términos humanos, el beneficio más valioso de un sistema de drenaje urbano eficaz es el mantenimiento de la salud pública. Este objetivo particular es a menudo pasado por alto en la práctica moderna y sin embargo, es de suma importancia, especialmente en la protección contra la propagación de enfermedades.

A pesar de que se asocia la enfermedad y el agua desde hace siglos, sólo recientemente (1855), se demostró un vínculo preciso. Esto ocurrió como resultado de los estudios clásicos del *Dr. John Snow* en Londres sobre la epidemia de cólera que exterminaba la ciudad en ese momento. Enfermedades como el cólera son casi desconocidas en el mundo industrializado hoy es en gran parte debido a la disposición de drenaje urbano centralizado (junto con la prestación de suministro de agua potable, microbiológicamente segura).

Drenaje urbano tiene una serie de papeles importantes en el mantenimiento de la salud pública y seguridad. Los excrementos humanos (particularmente las heces) son el principal vector de transmisión de muchas enfermedades transmisibles. Drenaje urbano tiene un papel directo en eliminar con efectividad las excretas en las inmediaciones de la vivienda. Sin embargo, existen otros problemas potenciales en grandes cuencas en la que las descargas de aguas abajo de un asentamiento pueden convertirse en la abstracción aguas arriba de la otra. En el *Reino Unido*, un 30% de los suministros de agua son afectados. Esto indica claramente la importancia vital de la desinfección de los suministros de agua como una medida de salud pública.

También es de particular importancia en los países tropicales, el agua estancada después de las lluvias puede en gran medida evitar drenajes eficaces. Esto reduce el hábitat del mosquito y por lo tanto la propagación de la malaria y otras enfermedades.

Al parecer muchos de estos problemas se han resuelto, es esencial en los países industrializados, mientras miramos siempre más técnicas de saneamiento innovador, nosotros

no perdemos terreno en el control de enfermedades graves. Lamentablemente, mientras podemos saber mucho acerca de las enfermedades transmitidas por el agua y relacionadas con el agua, algunos figuran entre los mayores asesinos en las sociedades donde la pobreza y la desnutrición son generalizados. Millones de personas alrededor del mundo siguen careciendo de cualquier método higiénico y aceptable de disposición de excretas.

2.3.3. Geografía de drenaje urbano

Los principales factores que determinan la magnitud y naturaleza de la disposición de drenaje urbano de una región en particular son:

- Riqueza
- Clima y otras características naturales
- Intensidad de urbanización
- Historia y políticas.

Las mayores diferencias son generalmente las diferencias de la riqueza. Los países donde las lluvias tienden a ser ocasionales e intensos naturalmente han adoptado prácticas diferentes de aquellos en los que es frecuente y generalmente ligero. Por ejemplo, es común que en Australia para proporcionar sistemas (subterráneos) “*menores*” puede hacerse con bajas cantidades de agua de lluvia, junto con sistemas para grandes cantidades “*mayor*”. Otras características naturales tienen un efecto significativo. Alcantarillas en los países Bajos, por ejemplo, a menudo deben colocarse en áreas planas, bajas y, por lo tanto, deben estar diseñados para ejecutar con frecuencia en condiciones de presión. La intensidad de la urbanización tiene una fuerte influencia sobre el porcentaje de la población conectada a un sistema de desagüe principal. Cuadro 2.1 da porcentajes en varios países europeos.

Cuadro 2.1: Porcentaje de población conectada al alcantarillado principal en ciertos países de Europa (cifras de 1997) [15]

Pais	% Población conectada a la alcantarilla
Alemania	92
Grecia	58
Italia	82
Holanda	97
Portugal	62
UK	96

2.4. Ecuaciones Gobernantes

El comportamiento hidráulico de *redes de alcantarillado* operando bajo condiciones de flujo no permanente está descrito por las ecuaciones desarrolladas por *Barré de Saint Venant*. Estas ecuaciones son el resultado de la aplicación de los principios de *continuidad* y de *conservación de momentum* lineal sobre un volumen de control definido. Estas ecuaciones pueden ser expresadas bajo ciertas suposiciones como veremos en la siguiente sección:

2.4.1. Ecuaciones de Saint-Venant

Las siguientes suposiciones son necesarias para la deducción de las ecuaciones de *Saint-Venant*:

1. El flujo es unidimensional; la profundidad y la velocidad varían solamente en la dirección longitudinal del canal. Esto implica que la velocidad del agua es constante y que la superficie del agua es horizontal en cualquier sección transversal perpendicular al eje longitudinal del canal.

2. Se supone que el flujo varía gradualmente a lo largo del canal de tal manera que la presión hidrostática prevalece y las aceleraciones verticales pueden despreciarse (Chow, 1959).
3. El eje longitudinal del canal es aproximadamente una línea recta.
4. La pendiente del fondo del canal es pequeña y el lecho es fijo; es decir, los efectos de socavación y deposición son despreciables.
5. Los coeficientes de resistencia para flujo uniforme permanente turbulento son aplicables de tal forma que relaciones tales como la ecuación de Manning pueden utilizarse para describir los efectos de resistencia.
6. El fluido es incompresible y de densidad constante a lo largo del flujo.

2.4.2. Ecuación de continuidad

La *ecuación de continuidad* para un flujo no permanente de densidad variable a través de un volumen de control puede escribirse como en la ecuación 2.4.1:

$$0 = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C} \rho V dA \quad (2.4.1)$$

Considérese un volumen de control elemental de longitud dx en un canal. La Figura 2.6 muestra tres vistas del volumen de control:

- a) Una vista en alzada desde el lado (corte longitudinal)
- b) Una vista en planta desde arriba, y
- c) Una sección transversal del canal

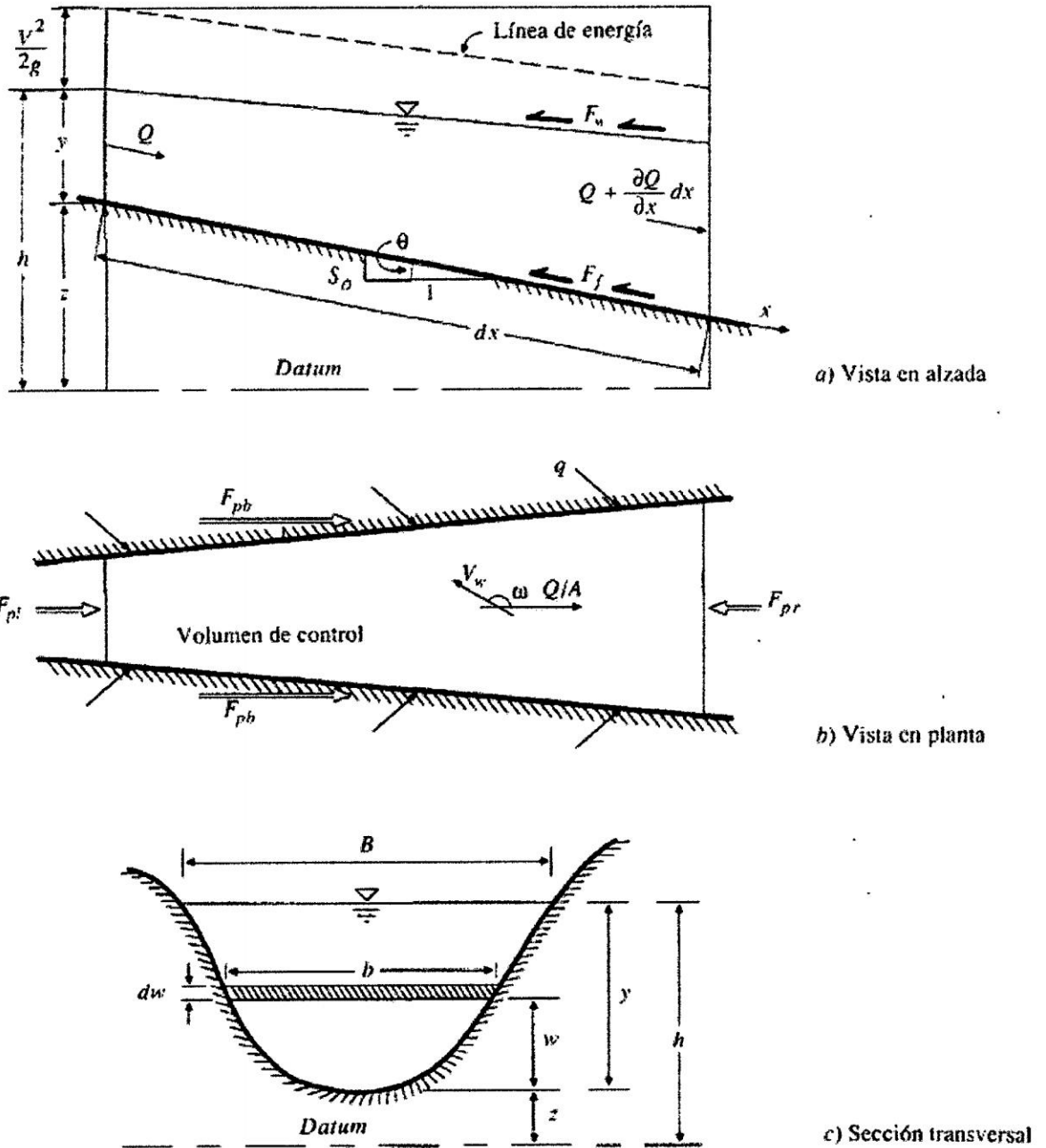


Figura 2.6: Tramo elemental de un canal para la deducción de las ecuaciones de Saint-Venant: Fuente [14]

El caudal de entrada en el volumen de control es la suma del caudal Q que entra en el volumen de control desde el extremo de aguas arriba del canal y del caudal de entrada lateral q que entra en el volumen de control como flujo distribuido a lo largo de los lados

del canal. Las dimensiones de q son las de caudal por unidad de longitud de canal, de tal manera que el caudal de entrada lateral es qdx y la tasa de entrada de masa es

$$\iint_{\text{entrada}} \rho V dA = -\rho(Q + qdx) \quad (2.4.2)$$

Es negativa porque los flujos de entrada se consideran como negativos en el teorema de transporte de Reynolds. El flujo de masa hacia afuera del volumen de control es

$$\iint_{\text{salida}} \rho V dA = \rho \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) \quad (2.4.3)$$

donde $\partial Q/\partial x$ es la tasa de cambio del flujo en el canal con respecto a la distancia. El volumen del elemento de canal es $A dx$, donde A es el área promedio de la sección transversal, luego la tasa de cambio de la masa almacenada dentro del volumen de control es

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C} \rho dV = \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} \quad (2.4.4)$$

donde se usa la derivada parcial porque el volumen de control se define con un tamaño fijo (a pesar de que el nivel del agua puede variar dentro de el). El flujo neto de salida de masa del volumen de control se encuentra al sustituir las ecuaciones (2.4.2) a (2.4.4) en (2.4.1):

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} - \rho(Q + qdx) + \rho \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) = 0 \quad (2.4.5)$$

Suponiendo que la densidad del fluido ρ es constante, la ecuación (2.4.5) se simplifica dividiéndola por ρdx y reordenando para producir la *forma conservativa* de la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \quad (2.4.6)$$

la cual es aplicable a una sección transversal del canal. Esta ecuación es válida para canales *prismáticos o no prismáticos*; un canal prismático es aquel en el cual la forma de la sección transversal no varía a lo largo del canal y la pendiente del lecho es constante.

Para algunos métodos de solución de las ecuaciones de Saint-Venant, se usa la forma no conservativa de la ecuación de continuidad, en la cual la velocidad de flujo promedio V es una variable independiente, en lugar de Q . Esta forma de la ecuación de continuidad puede deducirse para un ancho unitario de flujo dentro del canal, despreciando el flujo de entrada lateral, tal como sigue. Para un ancho unitario de flujo $A = y \times 1 = y$ y $Q = VA = Vy$. Sustituyendo en (2.4.6),

$$\frac{\partial Vy}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2.4.7)$$

o

$$V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (2.4.8)$$

2.4.3. Ecuación de momentum

La segunda ley de Newton se escribe de acuerdo con el teorema de transporte de Reynolds como en la ecuación 2.4.9:

$$\sum F = \frac{d}{dt} \iiint_{V.C} V \rho dV + \iint_{S.C} V \rho V dA \quad (2.4.9)$$

Esta ecuación establece que la suma de las fuerzas aplicadas es igual a la tasa de cambio del *momentum* almacenado dentro del volumen de control más el flujo de salida neto de *momentum* a través de la superficie de control. Esta ecuación, en la forma $\sum F = 0$,

se puede aplicar al flujo uniforme permanente en un canal abierto, así como al flujo no uniforme no permanente.

2.4.3.1. Fuerzas

Existen cinco fuerzas que actúan en el volumen de control:

$$\sum F = F_g + F_f + F_e + F_w + F_p \quad (2.4.10)$$

donde:

$F_g =$ Fuerza gravitacional a lo largo del canal debida al peso del agua en el volumen de control

$F_f =$ Fuerza de fricción a lo largo del lecho y de los lados del volumen de control

$F_e =$ Fuerza de contracción/expansión producida por cambios abruptos en la sección transversal del canal

$F_w =$ Fuerza cortante del viento en la superficie de agua y

$F_p =$ Fuerza de desbalance de presiones

Véase la Figura 2.6b. Cada una de estas cinco fuerzas se evalúa en los siguientes párrafos.

Gravedad

El volumen de fluido dentro del volumen de control es $A dx$ y su peso es $\rho g A dx$. Para un ángulo de inclinación del canal pequeño, $S_o \approx \sin \theta$ y la fuerza de gravedad está dada por

$$F_g = \rho g A dx \sin \theta \approx \rho g A S_o dx \quad (2.4.11)$$

Donde la pendiente del fondo del canal S_o es igual a $-\partial z / \partial x$.

Fricción

Las fuerzas de fricción producidas por el esfuerzo cortante a lo largo del lecho y de los lados del volumen de control están dadas por $-\tau_o P dx$, donde τ_o es el esfuerzo cortante en el lecho y P es el perímetro mojado. De la ecuación (2.4.9), $\tau_o = \gamma R S_f = \rho g (A/P) S_f$, luego la fuerza de fricción se escribe como

$$F_f = -\rho g A S_f dx \quad (2.4.12)$$

donde la pendiente de fricción S_f se deduce de las ecuaciones de resistencia tales como la ecuación de *Manning*.

Contracción/expansión

Las contracciones o expansiones bruscas del canal causan pérdidas de energía a través de corrientes de *eddy* (flujo circulatorio). Tales pérdidas son similares a las pérdidas menores en un sistema de tuberías. La magnitud de las pérdidas de *eddy* se relacionan con el cambio en la cabeza de velocidad $V^2/2g = (Q/A)^2/2g$ a través de la longitud del canal donde se causan las pérdidas. Las fuerzas de arrastre creadas por estas pérdidas de *eddy* están dadas por

$$F_e = -\rho g A S_e dx \quad (2.4.13)$$

donde S_e es la pendiente de pérdidas de *eddy*

$$S_e = \frac{K_e}{2g} \frac{\partial(Q/A)^2}{\partial x} \quad (2.4.14)$$

en la cual K_e es un coeficiente de expansión o contracción adimensional, negativo para una expansión del canal [donde $\partial(Q/A)^2/\partial x$ es negativo] y positivo para una contracción del canal.

Fuerza cortante por viento

La fuerza cortante por viento es causada por la resistencia de fricción entre el viento y la superficie libre del agua y está dada por

$$F_w = \tau_w B dx \quad (2.4.15)$$

Donde τ_w es el esfuerzo cortante del viento. El esfuerzo cortante en una frontera de un fluido puede escribirse en forma general como

$$\tau_w = \frac{-\rho C_f |V_r| V_r}{2} \quad (2.4.16)$$

donde V_r es la velocidad del fluido relativa a la frontera, la notación $|V_r|V_r$, se usa para que t_w actúe en forma opuesta a la dirección de V_r y C_f es el coeficiente de esfuerzo cortante. Tal como se muestra en la Figura (2.4.1)b, la velocidad promedio en el agua es Q/A y la velocidad del viento es V_w en una dirección que subtiende un ángulo w con la velocidad del agua, de tal manera que la velocidad del agua relativa a la del aire es

$$V_r = \frac{Q}{A} - V_w \cos w \quad (2.4.17)$$

La fuerza del viento es, teniendo en cuenta lo anterior,

$$F_w = \frac{-\rho C_f |V_r| V_r B dx}{2} = -W_f B \rho dx \quad (2.4.18)$$

donde el factor de corte del viento W_f es igual a $C_f|V_r|V_r/2$. Nótese de esta ecuación que la dirección de la fuerza del viento se opondrá a la dirección de flujo del agua.

Presión

Con referencia a la Figura 2.6b), la fuerza de desbalance de presión es la resultante de la fuerza hidrostática en el lado izquierdo del volumen de control, F_{pl} , la fuerza hidrostática en el lado derecho del volumen de control, F_{pr} , y la fuerza de presión ejercida por las bancas (taludes) sobre el volumen de control, F_{pb} :

$$F_p = F_{pl} - F_{pr} + F_{pb} \quad (2.4.19)$$

Tal como se muestra en la figura 2.6c), un elemento de fluido de espesor dw con una elevación w medida desde el fondo del canal está sumergido a la profundidad $y - w$, luego la presión hidrostática en el elemento es $\rho g(y - w)$ y la fuerza hidrostática es $\rho g(y - w)bdw$, donde b es el ancho del elemento a través del canal. Por tanto la fuerza hidrostática total en el extremo izquierdo del volumen de control es

$$F_{pl} = \int_0^y \rho g(y - w)bdw \quad (2.4.20)$$

La fuerza hidrostática en el extremo derecho del volumen de control es:

$$F_{pr} = \left(F_{pl} + \frac{\partial F_{pl}}{\partial x} dx \right) \quad (2.4.21)$$

Donde $\partial F_{pl}/\partial x$ se determina usando la regla de Leibniz para la diferenciación de una integral (Abramowitz y Stegun, 1972):

$$\frac{\partial F_{pl}}{\partial x} = \int_0^y \rho g \frac{\partial y}{\partial x} b dw + \int_0^y \rho g (y - w) \frac{\partial b}{\partial x} dw = \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} + \int_0^y \rho g (y - w) \frac{\partial b}{\partial x} dw \quad (2.4.22)$$

porque $A = \int_0^y b dw$. La fuerza debida a las bancas del canal se relaciona con la tasa de cambio en el ancho del canal, $\partial b / \partial x$, a través del elemento dx como

$$F_{pb} = \left[\int_0^y \rho g (y - w) \frac{\partial b}{\partial x} dw \right] dx \quad (2.4.23)$$

Sustituyendo la ecuación (2.4.21) en (2.4.19) resulta

$$F_p = F_{pl} - \left(F_{pl} + \frac{\partial F_{pl}}{\partial x} dx \right) + F_{pb} = -\frac{\partial F_{pl}}{\partial x} dx + F_{pb} \quad (2.4.24)$$

Ahora, sustituyendo las ecuaciones (2.4.22) y (2.4.23) en (2.4.24) y simplificando, resulta

$$F_p = -\rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx \quad (2.4.25)$$

La suma de las cinco fuerzas en la ecuación (2.4.10) puede expresarse, después de sustituir las ecuaciones (2.4.11), (2.4.12), (2.4.13), (2.4.18) y (2.4.25), como

$$\sum F = \rho g A S_o dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx \quad (2.4.26)$$

2.4.3.2. Momentum

Los dos términos de momentum en la parte derecha de la ecuación (2.4.9) representan la tasa de cambio de almacenamiento de momentum en el volumen de control y el flujo neto de Salida de momentum a través de la superficie de control, respectivamente.

Flujo neto de salida de momentum

La tasa de entrada de masa en el volumen de control [ecuación (2.4.2)] es $-\rho(Q + qdx)$, en donde se representa tanto el flujo de entrada de la corriente principal como el flujo de entrada lateral. El *momentum* correspondiente se calcula multiplicando las dos tasas de entrada de masa por sus velocidades respectivas y por un factor de corrección de *momentum* β :

$$\iint_{salida} = V\rho VdA = -\rho(\beta VQ + \beta v_x qdx) \quad (2.4.27)$$

donde $\rho\beta VQ$ es el momentum que entra desde el extremo aguas arriba del canal, y $\rho\beta v_x q/dx$ es el momentum que entra en el canal principal con el flujo lateral, que tiene una velocidad v_x en la dirección x . El termino β se conoce como el *coeficiente de momentum* o *coeficiente de Boussinesq*; este tiene en cuenta la no-uniformidad en la distribución de velocidad en la sección transversal del canal al calcular el *momentum*. El valor de β está dado por

$$\beta = \frac{1}{V^2 A} \iint v^2 dA \quad (2.4.28)$$

donde v es la velocidad a través de un pequeño elemento de área dA en la sección transversal del canal. El valor de β varía desde 1.01 para canales prismáticos rectos hasta 1.33 para ríos que fluyen en valles con llanuras de inundación (Chow, 1959; Henderson, 1966).

El *momentum* que sale del volumen de control es

$$\iint_{salida} = V\rho VdA = \rho \left[\beta VQ + \frac{\partial(\beta VQ)}{\partial x} dx \right] \quad (2.4.29)$$

El flujo neto de salida de momentum a través de la superficie las ecuaciones (2.4.27) y (2.4.29):

$$\iint_{S.C} V \rho V dA = -\rho[\beta V Q + \beta v_x q dx] + \rho \left[\beta V Q + \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} dx \right] = -\rho \left[\beta v_x q - \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} dx \right] \quad (2.4.30)$$

Almacenamiento de momentum

La tasa de cambio del *momentum* almacenado en el volumen de control se calcula utilizando el hecho de que el volumen de canal elemental es Adx , luego su *momentum* es $\rho AdxV$, o $\rho Q dx$, y por consiguiente

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V.C} V \rho dV = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx \quad (2.4.31)$$

Después de sustituir los términos de las fuerzas de (2.4.26) y los términos de momentum de (2.4.30) y (2.4.31) en la ecuación de momentum (2.4.9), se obtiene

$$\rho g A S_o dx - \rho g A S_f dx - \rho g A S_e dx - W_f B \rho dx - \rho g A \frac{\partial y}{\partial x} dx = -\rho \left[\beta v_x + \frac{\partial(\beta V Q)}{\partial x} dx \right] + \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx \quad (2.4.32)$$

Dividiendo esta ecuación por ρdx , reemplazando V por Q/A y reordenando se obtiene la forma conservativa de la ecuación de *momentum*:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta Q^2/A)}{\partial x} + gA \left(\frac{\partial y}{\partial x} - S_o + S_f + S_e \right) - \beta q v_x + W_f B = 0 \quad (2.4.33)$$

La profundidad y en la ecuación (2.4.33) puede reemplazarse por la elevación h de la superficie de agua, usando [véase la Figura 2.6a)]:

$$h = y + z \quad (2.4.34)$$

donde z es la elevación del fondo del canal por encima de un datum tal como el nivel medio del mar. La derivada de la ecuación (2.4.34) con respecto a la distancia longitudinal a lo largo del canal x es

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \quad (2.4.35)$$

Pero $\partial z/\partial x = -S_o$, luego

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - S_o \quad (2.4.36)$$

La ecuación de momentum puede expresarse ahora en términos de h usando (2.4.36) en (2.4.33).

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(\beta Q^2/A)}{\partial x} + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} + S_f + S_e \right) - \beta qv_x + W_f B = 0 \quad (2.4.37)$$

Las ecuaciones de *Saint-Venant* (2.4.6) para continuidad y (2.4.37) para momentum, son las que rigen el flujo unidimensional no permanente en un canal abierto. El uso de los términos S_f y S_e en (2.4.37), que representan la tasa de pérdida de energía a medida que el flujo pasa a lo largo del canal, ilustra la relación tan cercana entre las consideraciones de energía y *momentum* en la descripción del flujo. Strelkoff (1969) demostró que la ecuación de momentum para las ecuaciones de Saint-Venant también podría deducirse de los principios de energía, en lugar de usar la segunda ley de Newton como se hizo aquí.

La forma no conservativa de la ecuación de *momentum* puede deducirse de una manera muy similar a la forma no conservativa de la ecuación de continuidad.

Despreciando las pérdidas de *eddy*, los efectos del esfuerzo cortante por viento y el flujo lateral, la forma no conservativa de la ecuación de momentum para un ancho unitario en el flujo es

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \left(\frac{\partial y}{\partial x} - S_o + S_f \right) = 0 \tag{2.4.38}$$

2.4.4. Formas de la ecuación de Saint-Venant

Las ecuaciones de *Saint-Venant* tienen varias formas simplificadas, cada una de las cuales define un modelo de tránsito distribuido unidimensional. Las variaciones de las ecuaciones (2.4.6) y (2.4.37) en sus formas conservativas y no conservativas, despreciando flujo lateral, corte por viento y pérdidas de *eddy*, se usan para definir varios modelos de tránsito distribuido de flujos unidimensionales, tal como se muestra en la Tabla 2.2.

Cuadro 2.2: Resumen de las ecuaciones de Saint- Venant*. Fuente [14]

<i>Ecuación de continuidad</i>				
Forma conservativa		$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$		
Forma no conservativa		$V \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$		
<i>Ecuación de momentum</i>				
Forma conservativa				
$\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$				
Término de aceleración local	Término de aceleración convectiva	Término de fuerza de presión	Término de fuerza gravitacional	Término de fuerza de fricción
Forma no conservativa (elemento de ancho unitario)				
$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_o - S_f) = 0$				
			Onda cinemática	
		Onda de difusión		
Onda dinámica				

* Despreciando flujo lateral, cortante por viento, pérdidas por corrientes de *eddy* y suponiendo que $\beta = 1$

La ecuación de *momentum* consta de términos para los procesos físicos que gobiernan el flujo de *momentum*. Estos términos son: el termino de *aceleración local*, el cual describe el

cambio en el momentum debido al cambio de la velocidad con el tiempo; el término de la *aceleración convectiva*, el cual describe el cambio en el *momentum* debido al cambio de la velocidad a lo largo del canal; el término de *fuerza de presión*, proporcional al cambio en la profundidad del agua; el término de *fuerza gravitacional*, proporcional a la pendiente del lecho S_o y el término de *fuerza de fricción*, proporcional a la pendiente de fricción S_f . Los términos de aceleración local y convectiva representan el efecto de las fuerzas de inercia en el flujo.

Cuando el nivel del agua o el caudal se cambia en un punto particular de un canal con flujo subcrítico, los efectos de estos cambios se propagan aguas arriba. Estos *efectos de remanso* pueden incorporarse en los métodos de tránsito distribuido a través de la aceleración local, la aceleración convectiva y los términos de presión. Los métodos de tránsito agregado no se comportan muy bien en la simulación de condiciones de flujo cuando los efectos de curvas de remanso son importantes y la pendiente del río es pequeña, porque estos métodos no tienen mecanismos hidráulicos para describir la propagación aguas arriba de los cambios en el flujo de *momentum*.

Tal como se observa en la Tabla 2.2, se producen modelos de tránsito distribuido alternativos al utilizar la ecuación de continuidad completa y al eliminar algunos términos de la ecuación de *momentum*. El modelo distribuido más simple es el *modelo de onda cinemática*, el cual no tiene en cuenta los términos de aceleración local, aceleración convectiva y presión en la ecuación de *momentum*; es decir, supone que $S_o = S_f$ y que las fuerzas de fricción y las fuerzas gravitacionales se balancean unas con otras. El *modelo de onda de difusión* desprecia los términos de aceleración local y aceleración convectiva, pero incorpora el término de presión. El *modelo de onda dinámica* considera todos los términos de aceleración y de presión en la ecuación de *momentum*.

La ecuación de *momentum* también puede escribirse en formas que tienen en cuenta si el flujo es permanente o no permanente y uniforme o no uniforme, tal como se muestra en las

ecuaciones (2.4.39). En la ecuación de continuidad $\partial A/\partial t = 0$ para un flujo permanente y el flujo lateral q es cero para un flujo uniforme.

Forma conservativa

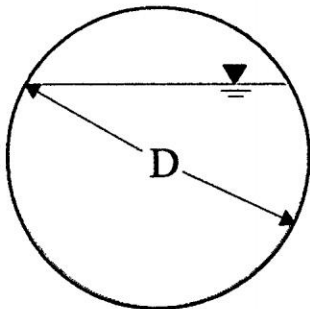
$$-\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{gA} \frac{\partial(Q^2/A)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x} + S_o = S_f$$

Forma no conservativa

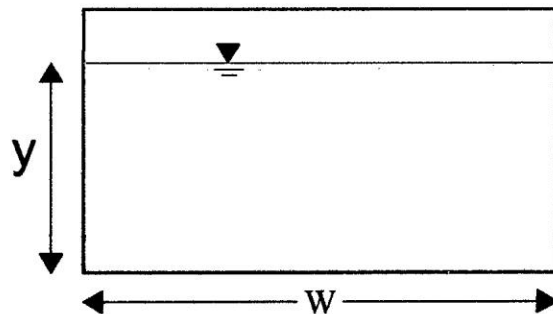
$$\underbrace{\underbrace{-\frac{1}{g} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{V}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}}_{\text{Flujo no-uniforme, permanente}} + S_o}_{\text{Flujo no-uniforme, no-permanente}} = S_f \quad (2.4.39)$$

2.5. Hidráulica de alcantarillas

Un análisis teórico completo de la *hidráulica de alcantarillas* es sumamente complejo. Las condiciones de flujo varían de alcantarilla a alcantarilla y ellos también varían en el tiempo determinado para cualquier alcantarilla dada. La sección de la alcantarilla puede fluir lleno o parcialmente lleno dependiendo del flujo de aguas arriba y aguas abajo de la alcantarilla, características de la sección y la geometría de ingreso.



a) Sección Circular



b) Sección Rectangular

Figura 2.7: Secciones mas comunes de alcantarillas en sistemas de drenaje pluvial. Fuente: *Elaboración propia*

El objetivo de la *hidráulica de alcantarillas* es proporcionar la información para la planificación y mejorar el diseño hidráulico del sistema de drenaje. Los métodos de diseño son incluidos para formas especiales incluyendo alcantarillas de secciones especiales, las consideraciones básicas son de tipo ambiental, seguridad, estructural, económico, y otros.

2.5.1. Descripción de Alcantarillas

Una alcantarilla es un conducto hidráulicamente corto, el cual conduce flujo a través del terraplén de una carretera. Las alcantarillas son construidas de una variedad de materiales y están disponibles en muchas formas y configuraciones de ingreso diferentes. Para la selección de la alcantarilla incluyen los factores tales como: perfiles de calzada, características del canal, evaluaciones de daños de inundación, construcción y costos de mantenimiento, y las estimaciones de vida útil.

2.5.1.1. Formas

Existen numerosas formas de alcantarillas, los mas comunes son de forma *circular* y *rectangular*, pero existe otras formas especiales como la forma de *abovedado*, *elipse*, *arco*, *arco de perfil alto*, *arco de perfil bajo*, y otros, véase las Figuras 2.8, 2.9, 2.10, 2.11, 2.12, 2.13 y 2.14.

La selección de forma está basada en el costo de construcción, la limitación sobre la elevación superficial aguas arriba, la altura de terraplén de calzada, y el rendimiento hidráulico.

2.5.2. Diseño de Alcantarillas

Un análisis teórico exacto del flujo de agua en alcantarillas es sumamente complejo, por lo general presenta *flujo no permanente* en todo el sistema de drenaje pluvial. El modelo

SMAP V2015 desarrollado en esta tesis, resuelve las ecuaciones de *continuidad* y de *momentum* dependiendo de la sección elegida por el usuario al definir las secciones de cada conducto. A continuación presentaremos algunas formulaciones generales del tirante normal y crítico para diferentes secciones.

2.5.2.1. Cálculo de tirante normal y tirante crítico

Los diferentes formas de alcantarillas están compuestas figuras conocidas como rectángulos y por circunferencias de diferentes radios de curvatura para lo cual es necesario conocer las siguientes ecuaciones por medio de la integración:

Área mojada esta definida por:

$$A = 2 \int_0^y f(y) dy \quad (2.5.1)$$

Perímetro mojado esta definida por:

$$P = 2 \int_0^y \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy \quad (2.5.2)$$

Donde $f'(y)$, es la primera derivada de la función $f(y)$. Además se debe tener en cuenta los siguientes

$$f(y) = \sqrt[n]{g(y)} \Rightarrow f'(y) = \frac{g'(y)}{n \left[\sqrt[n]{g(y)} \right]^{n-1}} \quad (2.5.3)$$

$$f(y) = g(y) \Rightarrow f'(y) = n (g'(y)) [g(y)]^{n-1} \quad (2.5.4)$$

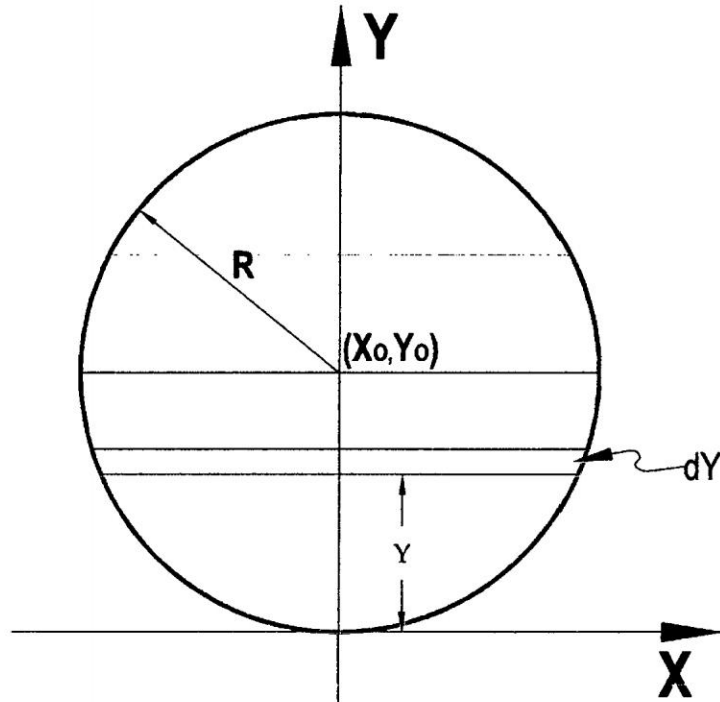


Figura 2.8: Alcantarilla de sección *circular*. Fuente: *Elaboración propia*

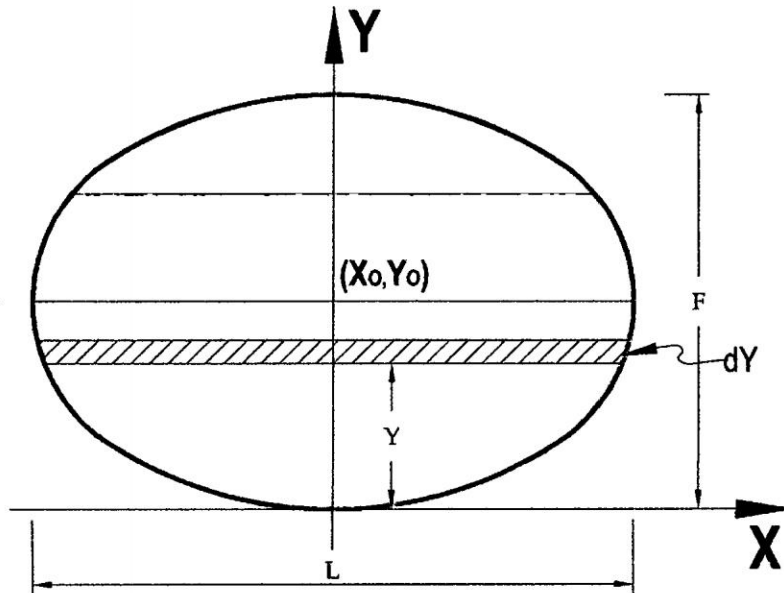


Figura 2.9: Alcantarilla de sección *elíptica horizontal*. Fuente: *Elaboración propia*

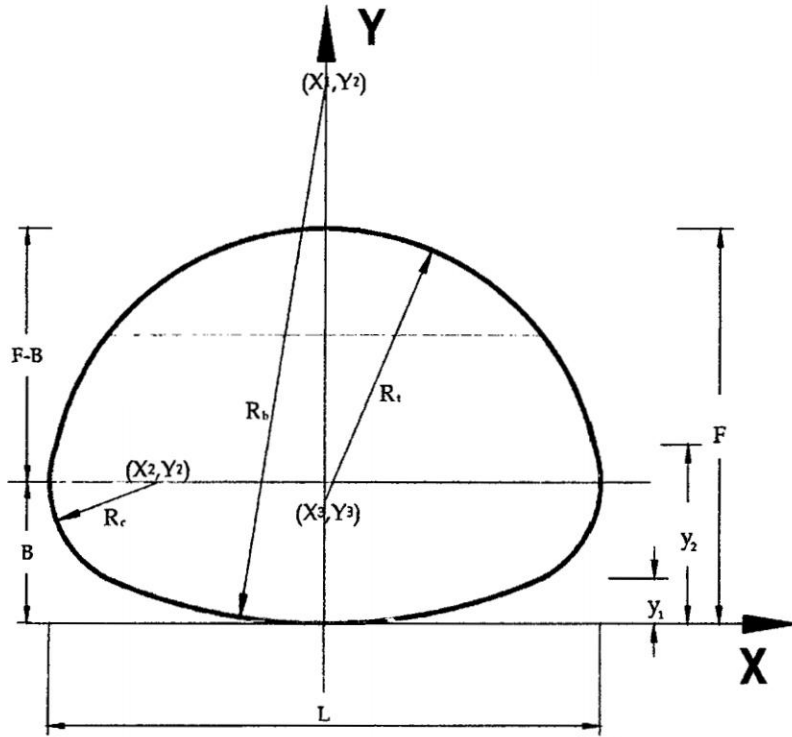


Figura 2.10: Alcantarilla de sección *abovedado*. Fuente: *Elaboración propia*

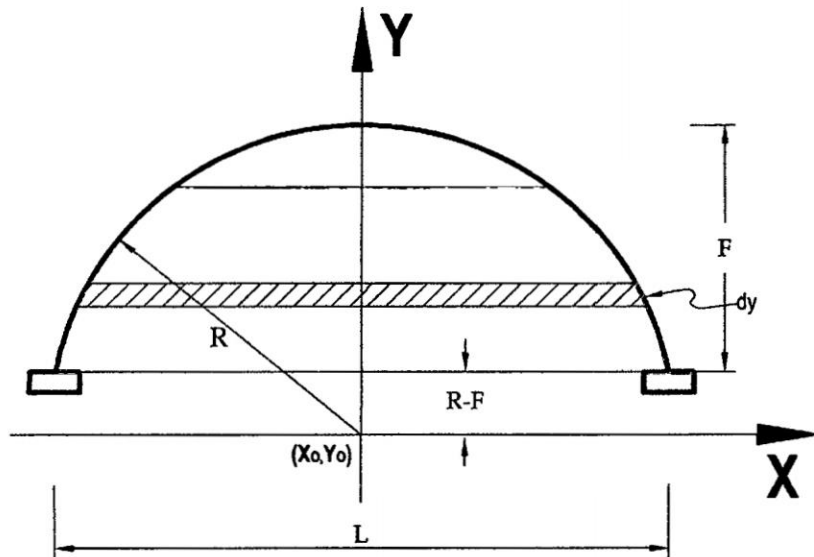


Figura 2.11: Alcantarilla de sección *arco*. Fuente: *Elaboración propia*

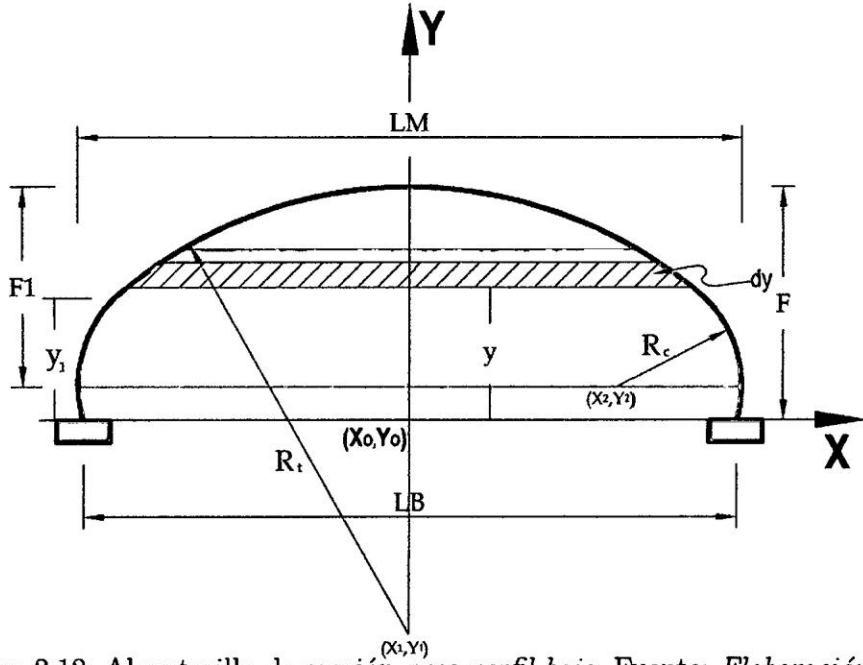


Figura 2.12: Alcantarilla de sección arco perfil bajo. Fuente: *Elaboración propia*

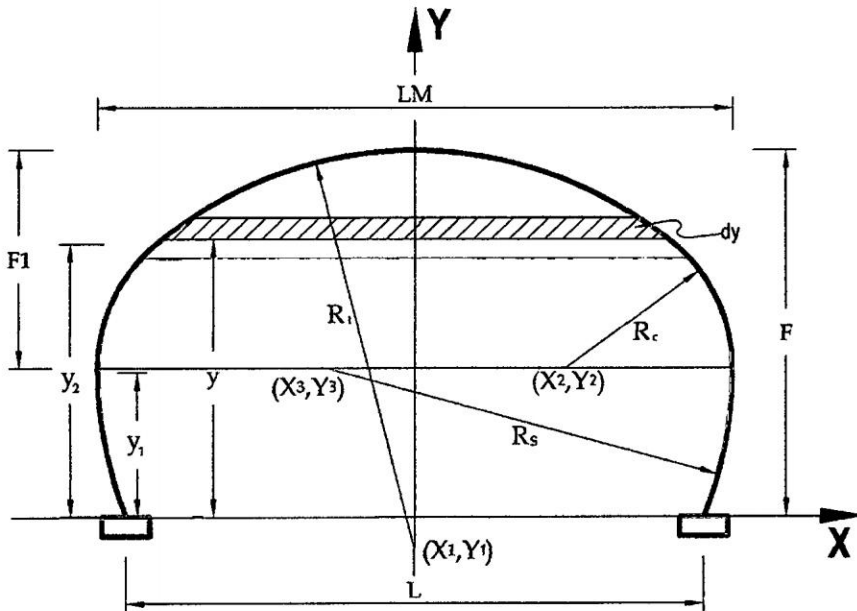


Figura 2.13: Alcantarilla de sección arco perfil alto. Fuente: *Elaboración propia*

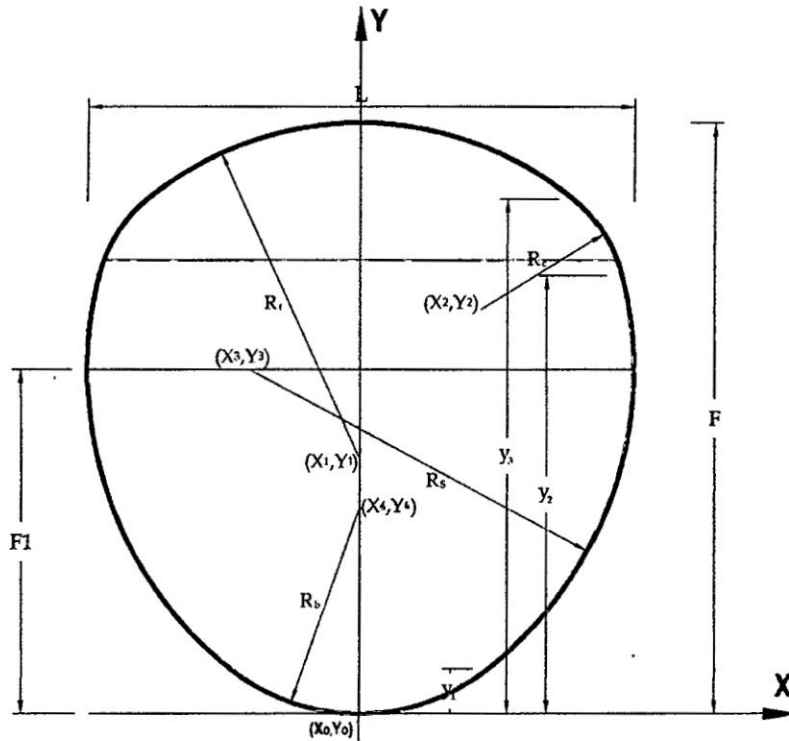


Figura 2.14: Alcantarilla de sección pera. Fuente: *Elaboración propia*

El tirante normal se calcula a partir de la solución de la ecuación de *continuidad* (2.5.5) y de *momentum* (2.5.6). El modelo *SMAP V2015*, incluye el código de cálculo de los parámetros geométricos de la sección elegida en el ingreso de datos al programa.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \quad (2.5.5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (2.5.6)$$

Donde x = distancia longitudinal; t = tiempo; Q = caudal en la sección; q = caudal lateral; A = área sección transversal; H = nivel del agua; S_f = pendiente de fricción; β = factor de conversión de momentum; y g = aceleración de la gravedad.

El término correspondiente a la *pendiente de fricción* se determina mediante la aplicación de alguna de las ecuaciones de resistencia fluida como puede ser la ecuación de *Gauckler*

- *Manning*:

$$S_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R^{4/3}} \quad (2.5.7)$$

Donde R = radio hidráulico; y n = coeficiente de rugosidad de *Gauckler-Manning*.

2.6. Métodos Numéricos

La mayoría de los problemas de la *Hidráulica* se formulan sobre la hipótesis de que el sistema es continuo, es decir, sus propiedades (densidad, presión, velocidad, etc.) se especifican a través de funciones continuas. La aplicación de las leyes de la Física (en general, en la forma de teoremas de conservación) a un tal modelo teórico requiere, en general, la utilización de procesos de paso al límite, que conducen a expresiones diferenciales y/o integrales (que constituyen el modelo teórico matemático). Estas Ecuaciones gobernantes de cualquier fenómeno físico requiere la utilización de los *Métodos Numéricos* para su solución.

2.6.1. Método de Diferencias Finitas

El *MDF*, es el clásico método numérico, utilizados desde los tiempos de Euler en el siglo *XVII*, desde entonces la aplicación en problemas específicos de la *Ingeniería Civil* fue amplia; sin embargo en las últimas décadas fue reduciéndose su uso por la aparición de nuevos métodos como *MEF*, *emph MVF* y otros.

2.6.1.1. Derivada de una función

Sin más preámbulos, la derivada de una función se define:

Primera derivada

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.6.1)$$

Segunda derivada

$$\begin{aligned} \frac{df^2(x)}{dx^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} f(x + \Delta x) - \frac{d}{dx} f(x)}{\Delta x} \\ \frac{df^2(x)}{dx^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x + \Delta x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} - \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{\Delta x} \\ \frac{df^2(x)}{dx^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

2.6.1.2. Diferencias finitas

Las aproximaciones por diferencias finitas pueden deducirse para una función $u(x)$ tal como se muestra en la Figura 2.15. Una expansión en series de Taylor de $u(x)$ en $x + \Delta x$ produce

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 u''(x) + \frac{1}{6} \Delta x^3 u''' + \dots \quad (2.6.3)$$

donde $u'(x) = \partial u / \partial x$, $u''(x) = \partial^2 u / \partial x^2, \dots$, y así sucesivamente. La expansión en series de Taylor en $x - \Delta x$ es

$$u(x - \Delta x) = u(x) - \Delta x u'(x) + \frac{1}{2} \Delta x^2 u''(x) - \frac{1}{6} \Delta x^3 u''' + \dots \quad (2.6.4)$$

Una aproximación de diferencia central usa la diferencia definida restando la ecuación (2.6.4) de (2.6.3).

$$u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x) = 2\Delta x u'(x) + O(\Delta x^3) \quad (2.6.5)$$

donde $O(\Delta x^3)$ representa un residuo que contiene los términos de tercer orden y superiores. Resolviendo para $u'(x)$ y suponiendo que $O(\Delta x^3)$ se obtiene

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.6.6)$$

la cual tiene un error de aproximación del orden de Δx^2 . Este error de aproximación, debido a que se ignoran los términos de orden superior, también se conoce como el *error de truncamiento*.

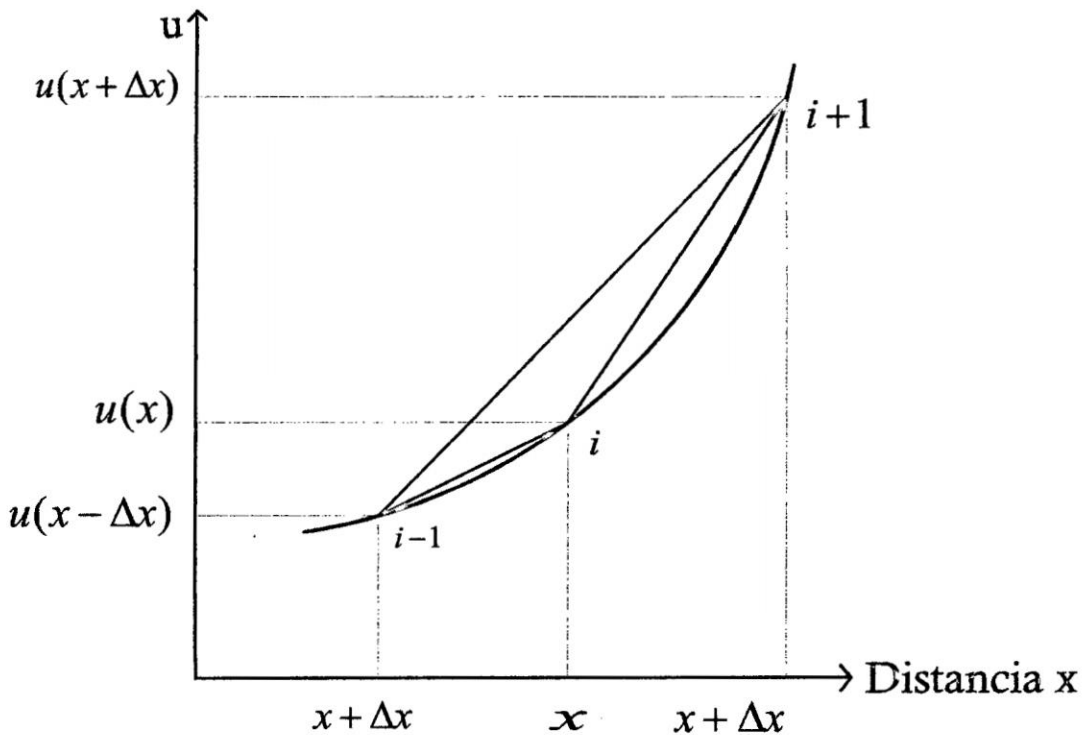


Figura 2.15: Aproximación por diferencias finitas para la función $u(x)$. Fuente: *Elaboración propia*

Una aproximación por *diferencia hacia adelante* (progresiva) se define sustrayendo $u(x)$ de (2.6.3):

$$u(x + \Delta x) - u(x) = \Delta x u'(x) + O(\Delta x^2) \quad (2.6.7)$$

Suponiendo que los términos de segundo orden y órdenes superiores son despreciables, y resolviendo para $u'(x)$ se obtiene

$$u'(x) \approx \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (2.6.8)$$

lo cual tiene un error de aproximación del orden de Δx .

Una aproximación por *diferencia hacia atrás* (regresiva) usa la diferencia definida mediante la resta de ((2.6.4) de $u(x)$),

$$u(x) - u(x - \Delta x) = \Delta x u'(x) + O(\Delta x^2) \quad (2.6.9)$$

y resolviendo para $u'(x)$ se obtiene

$$u'(x) \approx \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.6.10)$$

Un método de diferencias finitas puede emplear ya sea un *esquema explícito* o un *esquema implícito* para su solución. La diferencia principal entre estos dos esquemas es que en el método explícito los valores desconocidos se resuelven secuencialmente a lo largo de la línea de tiempo desde un punto de distancia hasta el siguiente, mientras que en el método implícito los valores desconocidos en una línea de tiempo dada se determinan *simultáneamente*. El método explícito es más simple pero puede ser inestable, lo cual significa que se requieren valores pequeños de Δx y Δt para la convergencia del procedimiento numérico.

El método explícito es conveniente porque sus resultados están dados en los puntos de la malla y pueden tener en cuenta variaciones pequeñas en la geometría del canal de una sección a otra, pero es menos eficiente que el método implícito y por consiguiente no es apropiado para transitar flujos de crecientes en periodos largos. El método implícito es más complejo desde el punto de vista matemático, pero con el uso de computadores esto no es un problema serio una vez que el método ha sido programado. El método es estable para pasos de computación grandes con pequeñas perdidas de exactitud y por consiguiente trabaja en forma más rápida que el método explícito. El método implícito también puede manejar cambios grandes en la geometría del canal de una sección transversal a la siguiente.

2.6.1.3. Esquema explícito

La representación de diferencias finitas se establece en la malla de puntos en el plano tiempo-distancia mostrado en la Figura 2.16. Suponiendo que en el tiempo t (línea de tiempo j) las cantidades hidráulicas u se conocen, el problema es determinar la cantidad desconocida en el punto $(i, j+1)$ en el tiempo $t+\Delta t$, es decir, u_i^{j+1} . El esquema más simple determina las derivadas parciales en el punto $(i, j+1)$ en términos de las cantidades en puntos adyacentes $(i-1, j)$, (i, j) y $(i+1, j)$ usando.

$$\frac{\partial u_i^{j+1}}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t} \quad (2.6.11)$$

$$\frac{\partial u_i^j}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x} \quad (2.6.12)$$

Se utiliza un esquema de diferencias hacia adelante para la derivada temporal y un esquema de diferencias centrales para la derivada espacial. Nótese que la derivada espacial se escribe utilizando términos conocidos en la línea de tiempo j . Los esquemas implícitos,

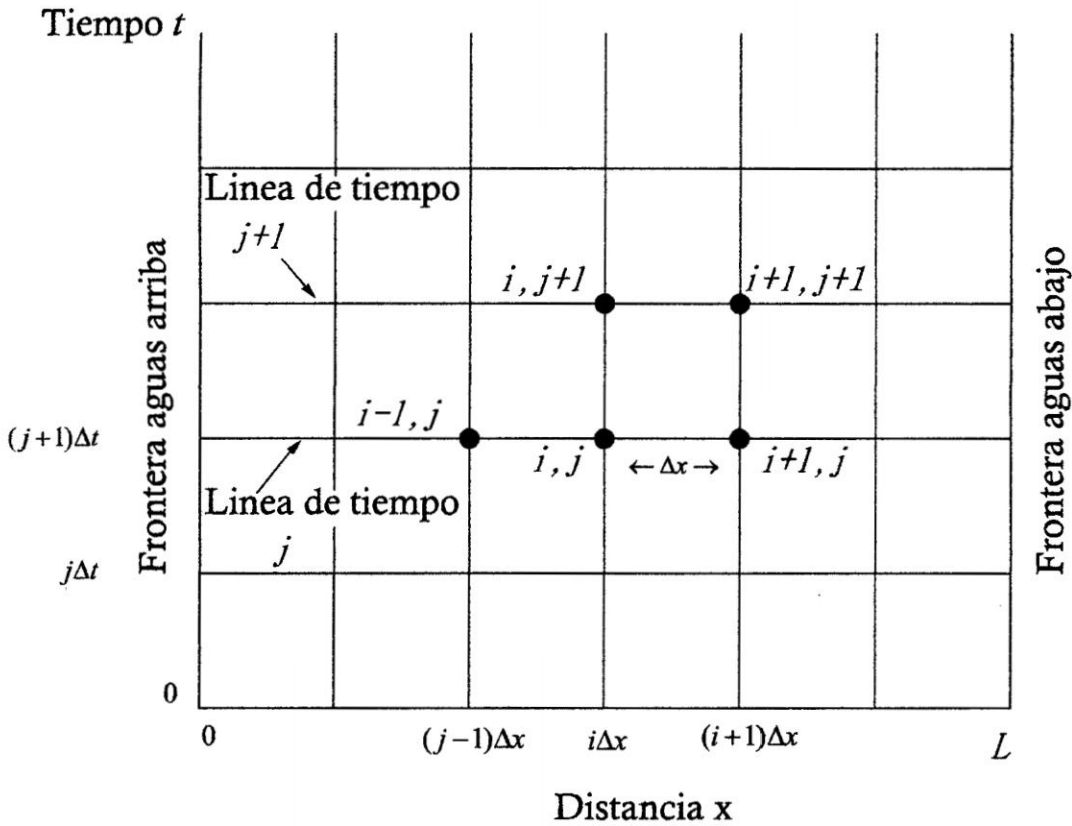


Figura 2.16: Malla en el plano $x-t$ utilizada para la solución numérica de las ecuaciones de *Saint-Venant* mediante Diferencias Finitas. Fuente: *Elaboración propia*

por otro lado, usan aproximaciones de diferencias finitas para las derivadas temporal y espacial en términos de la línea de tiempo desconocida $j + 1$. La discretización del plano $x - t$ en una malla para la integración de las ecuaciones de diferencias finitas introduce errores numéricos en los cálculos. Un esquema de diferencias finitas es estable si tales errores no se amplifican durante cálculos sucesivos desde una línea de tiempo hasta la siguiente. La estabilidad numérica de los cálculos depende del tamaño relativo de la red. Una condición necesaria pero no suficiente para la estabilidad de un esquema explícito es la *condición de Courant* (Courant y Friedrichs, 1948). Para las ecuaciones de onda cinemática la condición de Courant es

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x_i}{c_k} \quad (2.6.13)$$

donde c_k es la celeridad de onda cinemática. Para ecuaciones de onda dinámica, c_k se reemplaza por $V + c_d$ en (2.6.13). La condición de Courant requiere que el intervalo de tiempo para cálculo sea menor que el tiempo de tránsito de una onda a lo largo de la distancia Δx_i . Si Δt es muy grande de tal manera que no se satisface la condición de Courant, entonces existe, en efecto, una acumulación o amontonamiento de agua. La condición de Courant no se aplica al esquema implícito. Con propósitos computacionales en un esquema explícito, Δx se especifica y se mantiene fijo a través de los cálculos, mientras que Δt se determina en cada intervalo de tiempo. Para hacer esto, se calcula un Δt_i , que cumpla justamente la condición de Courant en cada punto de la red i en la línea de tiempo j , y se utiliza el menor Δt_i . Debido a que el método explícito es inestable a menos que Δt sea pequeño, algunas veces es aconsejable determinar el mínimo Δt_i en una línea de tiempo j y luego reducirlo en un porcentaje. La condición de Courant no garantiza la estabilidad, y por consiguiente es solo una guía.

2.6.1.4. Esquema implícito

Los esquemas implícitos utilizan aproximaciones de diferencias finitas tanto para la derivada temporal como para la espacial en términos de la variable dependiente en la línea de tiempo desconocida. Como un ejemplo simple las derivadas espaciales y temporales pueden escribirse para el punto desconocido $(i + 1, j + 1)$ como

$$\frac{\partial w_{i+1}^{j+1}}{\partial x} = \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_i^{j+1}}{\Delta x} \quad (2.6.14)$$

$$\frac{\partial w_{i+1}^{j+1}}{\partial t} = \frac{w_{i+1}^{j+1} - w_{i+1}^j}{\Delta t} \quad (2.6.15)$$

Este esquema se puede utilizar para la solución del modelo de onda cinemática. Aunque hay esquemas implícitos más complejos, conocido como el esquema implícito ponderado de 4 puntos o el *esquema de Preissmann* para el modelo completo de onda dinámica.

2.6.1.5. Representación general del método de diferencias finitas

La idea de MDF nace directamente de la definición matemática de la derivada, ecuación (2.6.1) y (2.6.2), como una aproximación para encontrar la solución numérica de las ecuaciones diferenciales.

Por tanto la discretización de una ecuación diferencial $\frac{df(x)}{dx}$ y $\frac{df^2(x)}{dx^2}$ mediante el MDF será una ecuación algebraica (2.6.16)-(2.6.21), la cual en términos físicos está aplicado a un punto nodal, es decir el dominio de solución está cubierto por un punto nodal de una malla estructurada que puede ser una discretización del dominio de un medio físico, como el suelo, una placa metálica, etc.

2.6.1.5.1. Aproximación hacia adelante

Para la primera derivada

$$\underbrace{\frac{df(x)}{dx}}_{\text{Modelo matemático}} \approx \underbrace{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\text{Modelo numérico (MDF)}} \quad (2.6.16)$$

Para la segunda derivada

$$\frac{df^2(x)}{dx^2} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{\Delta x^2} \quad (2.6.17)$$

2.6.1.5.2. Aproximación hacia atrás

Para la primera derivada

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.6.18)$$

Para la segunda derivada

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x) - 2f(x - \Delta x) + f(x - 2\Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.6.19)$$

2.6.1.5.3. Aproximación por diferencias centrales

sumando las aproximaciones hacia adelante y hacia atrás, se deduce las aproximaciones por diferencias centrales tal como sigue.

Para la primera derivada

Sumando las ecuaciones (2.6.16) y (2.6.18)

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.6.20)$$

Para la segunda derivada

Se deduce análogamente con las expresiones (2.6.17) y (2.6.19), considerando como término central la función $f(x)$.

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.6.21)$$

Los términos matemáticos $\left(\frac{df(x)}{dx} \text{ y } \frac{d^2f(x)}{dx^2}\right)$, en una aplicación real son términos que forma parte de las ecuaciones gobernantes de algún problema físico, y están sujetos a las condiciones de contorno y condiciones iniciales del problema.

2.6.2. Método de Elementos Finitos

2.6.2.1. Perspectiva histórica

Los métodos de elementos finitos constituyen hoy en día el procedimiento habitual de cálculo en Mecánica Estructural y Mecánica de Sólidos en general. Su uso está también muy extendido en la resolución de problemas de *Transferencia de Calor*, y empieza a cobrar importancia en otras áreas, como la Mecánica de Fluidos o el Electromagnetismo.

El conocimiento de estas técnicas numéricas resulta actualmente casi imprescindible para aquellos que se desenvuelven en el ámbito de la Ingeniería Civil y la Ingeniería Mecánica, ya que la mayor parte de los análisis de tensiones que se llevan a cabo en la industria están basados en ellas.

A pesar de su gran difusión actual, los procedimientos de elementos finitos tal y como los entendemos hoy en día son relativamente modernos. Su nacimiento y desarrollo es una consecuencia de la disponibilidad de herramientas electrónicas de cálculo cada vez más potentes. Puede decirse, por tanto, que estas técnicas son un resultado más de la revolución informática de finales del siglo XX.

2.6.2.2. Orígenes

La reseña histórica del método de los elementos finitos (MEF) hay que iniciarla en la década de los cincuenta, cuando el recién nacido ordenador digital hacía por fin posible el cálculo automático de estructuras de barras sin recurrir a tediosos procedimientos de relajación, como el de Cross o el de Kani. Se concibió entonces una nueva técnica de

cálculo, inabordable sin la ayuda del ordenador, que fue bautizada con el nombre de “cálculo matricial de estructuras”, en reconocimiento del papel que desempeña el álgebra matricial en su formalismo matemático.

Recordemos que el cálculo matricial de estructuras se basa en la idea de dividir la estructura en barras, dentro de las cuales se conoce la solución exacta en función de ciertos coeficientes que se hacen coincidir con los movimientos de los nodos extremos. Dichos coeficientes se obtienen planteando el equilibrio de todos los nodos de la estructura y resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta. De esta manera, conocidos los coeficientes o movimientos nodales, se desciende de nuevo al nivel local de cada barra y se obtiene la solución de esfuerzos y movimientos en el conjunto de la estructura por agregación de soluciones locales.

El MEF nació como una generalización de esta idea básica del cálculo matricial. Alguien que trabajaba con sistemas estructurales complejos, que no se idealizaban bien mediante entramados de barras, pensó que podía dividir su estructura en zonas o “elementos” más complejos que una simple barra. Estos elementos estarían conectados entre sí también en nodos pero, a diferencia con el cálculo matricial, dentro de ellos sólo conocía la solución de manera aproximada en función de los movimientos nodales. Al igual que en el cálculo matricial, a partir de las soluciones locales se podía plantear el equilibrio de los nodos y obtener los movimientos nodales resolviendo un sistema de ecuaciones. Estos movimientos nodales definían la solución dentro de cada uno de los “*elementos*” en que se había dividido la estructura y, por agregación, la solución en toda ella. Lo que ocurría es que, ahora, esta solución no era la exacta, sino una aproximación.

La partida de nacimiento del MEF, en la que se publica por primera vez la idea anterior, está fechada en 1956. Se trata de un artículo histórico aparecido en una revista relacionada con la industria aeronáutica.

Esta generalidad empezó a atraer el interés de los matemáticos, los cuales contribuyeron decisivamente a explicar con rigor las bases del MEF. Sin embargo, debe hacerse notar que la contribución de los matemáticos al MEF ha ido siempre muy por detrás de las aplicaciones prácticas. El MEF nació como una herramienta ingenieril y sus líneas básicas de desarrollo han estado siempre muy vinculadas a la presión de la industria por resolver problemas. En muchas etapas de su evolución se ha concebido y aplicado con éxito una determinada técnica numérica antes de encontrar su justificación matemática rigurosa. De hecho, es sintomático que el primer libro importante en que se analiza el MEF desde el punto de vista matemático se publicara en 1973, cuando el método llevaba al menos quince años empleándose en la industria y había alcanzado una gran madurez en su aplicación a problemas lineales.

2.6.2.3. Definición

El Método de los Elementos Finitos, es uno de los procedimientos que existen para aproximar el comportamiento de una estructura con infinitos grados de libertad por el de otra, con aproximadamente las mismas propiedades físicas y geométricas, pero con un número finito de grados de libertad, cuyas ecuaciones de equilibrio pueden expresarse por un sistema algebraico de ecuaciones simultáneas con un número limitado de incógnitas.

2.6.2.4. Presente del MEF

Se está viviendo una época de grandes avances en cuanto a las técnicas de cálculo por el método de los elementos finitos. Se sigue investigando, pero el MEF ha alcanzado ya un grado de madurez que no se presta a progresos espectaculares como los vividos en las décadas anteriores. Desde el punto de vista del que redacta estas notas son cuatro las líneas de investigación a lo largo de las cuales se está desarrollando el MEF en la actualidad:

1. Adaptación de algoritmos de cálculo a las nuevas arquitecturas de ordenadores, con objeto de aumentar la velocidad de cálculo y, por tanto, el tamaño máximo de los problemas abordables.
2. Desarrollo de medidas error, mallados autoadaptativos y elementos de altas prestaciones, con objeto de aumentar la precisión y fiabilidad de los resultados obtenidos por usuarios inexpertos en entornos de cálculo integrados con el CAD.
3. Desarrollo de nuevos elementos y técnicas de solución encaminados a aumentar la eficiencia, robustez y fiabilidad de los cálculos en el ámbito no lineal.
4. Modelos numéricos de leyes de comportamiento de materiales, sobre todo para la predicción del fallo y para la representación del comportamiento de nuevos materiales.

2.6.2.5. Fundamentos matemáticos

Desde el punto de vista matemático, el *MEF* puede entenderse como un procedimiento para resolver numéricamente problemas planteados mediante ecuaciones diferenciales. En esto es similar a otros procedimientos, como el *MEF* o el *MEC*.

La forma más elegante de explicar los fundamentos matemáticos del MEF parte de la teoría de espacios normados y utiliza los conceptos del análisis funcional. Este es el marco en el que hay que situarse si se quieren estudiar con rigor las bases del MEF e investigar sobre sus propiedades matemáticas.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) puede entenderse como un procedimiento para resolver numéricamente problemas planteados mediante ecuaciones diferenciales. La forma más elegante [7, página 8] de explicar los fundamentos matemáticos del *método de los elementos finitos* parte de la *Teoría de Espacios Normados* y utiliza los conceptos del

Análisis Funcional.

Desde el punto de vista matemático, disponemos de tres alternativas [7, página 19] para entender el Método de los Elementos Finitos:

1. Por un lado, el MEF puede considerarse como un procedimiento de *Residuos Ponderados de tipo Galerkin*
2. Puede ser entendido como un medio de obtener una solución aproximada a un problema de campo formulado de manera débil
3. El MEF puede también interpretarse como un caso de aplicación del método de Ritz, es decir, como una forma aproximada de obtener la solución de problemas de campo que responden a un principio variacional

Sin embargo, no se debe perder de vista que la sistemática del MEF, fue previa a sus interpretaciones o justificaciones matemáticas.

2.6.3. El Método de los Residuos Ponderados

En la década de los cincuenta surge el método clásico de los residuos ponderados (pero anterior al MEF). En este método la ecuación original que se desea resolver de manera aproximada no se toma tal cual es, sino que se multiplica por alguna función de ponderación y se integra. A los efectos de la ponderación se puede tomar cualquier conjunto de funciones dadas globalmente, en el sentido de que se extienden a todo el dominio donde se busca la solución aproximada. Esto constituye el mayor defecto de este método.

Fue por eso que al método de los residuos ponderados se le hizo algunas modificaciones esenciales con relación a su forma original, que condujeron a la creación del método de los elementos finitos, en el cual las funciones de ponderación están definidas de forma local, es decir, en subdominios del dominio general.

Consideremos la ecuación diferencial:

$$Lu - f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.6.22)$$

Sujeta a condiciones de contorno sobre la frontera $\partial\Omega$ de la forma:

$$Mu - g = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.6.23)$$

Siendo L y M operadores diferenciales. Reemplazando la solución exacta $u(x)$ por una solución aproximada $u_A(x)$ se genera un residuo R_Ω en el dominio y un residuo $R_{\partial\Omega}$ en el contorno, esto es:

$$\begin{aligned} R_\Omega(u_A) &= Lu_A - F \neq 0 \quad \text{en } \Omega \\ R_{\partial\Omega}(u_A) &= Mu_A - g \neq 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

En el método de los residuos ponderados la idea central consiste en buscar una aproximación $u_A(x)$ de la solución $u(x)$ de la forma

$$u_A(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x) \quad (2.6.24)$$

Los a_i son parámetros a determinar imponiendo las n condiciones:

$$\int_{\Omega} \psi_i R_\Omega(u_A) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \psi_i R_{\partial\Omega}(u_A) ds = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.6.25)$$

Donde los ψ_i son llamadas *funciones de ponderación o de peso*. En otras palabras, se busca que el residuo ponderado por estas funciones sea igual a cero en algún sentido integral o lo que es lo mismo:

$$\int_{\Omega} Lu_A \psi_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} (Mu_A - g) \psi_i ds = \int_{\Omega} F \psi_i d\Omega \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6.26)$$

$$\int_{\Omega} Lu_A \psi_i d\Omega = \int_{\partial\Omega} (g - M_{\varphi_0}) \psi_i ds + \int_{\Omega} F \psi_i d\Omega \quad (2.6.27)$$

El sistema de n ecuaciones con n incógnitas a_i puede ser resuelto si las funciones φ_i y los pesos ψ_i son linealmente independientes.

Desde el punto de vista de la ponderación, casi es posible utilizar cualquier conjunto de funciones linealmente independientes $\psi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, dando un nombre diferente a cada método de acuerdo con la función escogida.

Las funciones más frecuentemente utilizadas se indican a continuación:

- El método por colocación por puntos
- El método por colocación por sub dominios
- El método de los mínimos cuadrados
- El método de Galerkin (Bubnov - Galerkin)

2.6.3.1. El Método de Galerkin (Bubnov - Galerkin)

En este caso, las funciones de ponderación (test) ψ_i se toman iguales a las funciones de prueba (funciones bases) ψ_i . De esta manera se obtiene:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega}(u_A)\varphi_i(x)d\Omega + \int_{\partial\Omega} R_{\partial\Omega}(u_A)\varphi_i(x)d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

es decir, el sistema de ecuaciones:

$$\int_{\Omega} R_{\Omega} \left[\varphi_0 + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \right] \varphi_i(x) d\Omega + \int_{\partial\Omega} R_{\partial\Omega} \left[\varphi_0 + \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j(x) \right] \varphi_i(x) d\Omega = 0$$

Con $i = 1, 2, \dots, n$. El ingeniero ruso *B. G. Glerkin* introdujo su método en 1915, pero esencialmente el mismo concepto fue introducido por *Bubnov* en 1913. Es por eso que algunos autores, se refieren a este esquema como el método de *Bubnov-Galerkin*. Este método, es actualmente un caso especial del enfoque más general llamado el *método de los residuos ponderados*.

2.6.4. Métodos Variaciones

El planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de una estructura puede realizarse no solo por medio de la aplicación directa de las ecuaciones de equilibrio, una vía más expedita la proveen los llamados métodos variacionales [12, página 26] que, como se verá a continuación, tienen la ventaja de no requerir la partición de la estructura ni la formulación de ecuaciones de equilibrio de cuerpo libre. Por este motivo son de gran utilidad en la deducción de ecuaciones de estructuras complejas, como las discretizadas por el método de elementos finitos. A continuación se estudian dos principios variacionales: el de la energía potencial mínima y el trabajo virtual. El primero es válido sólo para el caso de estructuras lineales, mientras que el segundo es de validez general para sólidos con comportamiento lineal o no lineal.

2.6.4.1. Notación Variacional

El cálculo variacional es una rama de la matemática que busca la solución de los llamados problemas extremales, esto es, la búsqueda de puntos donde una función tiene una variación nula. Estos puntos pueden corresponder a tres clases de valores de la función: máximos, mínimos o puntos de ensilladura. Los primeros corresponden a valores de la función para los cuales, tanto la derecha como a la izquierda del punto de función presenta descenso; los segundos a lo contrario y los terceros a valores para los cuales se presenta descenso de la función por un lado y ascenso por el otro. Se dice que la función en el punto de valor nulo presenta un valor estacionario. Por tanto, el cálculo variacional (llamado también extremal o de valores extremos) consiste tanto en la búsqueda de los valores de las variables independientes asociados al valor estacionario de una función como al cálculo de este valor mismo.

Consideremos una función de variables independientes u_1, u_2, \dots, u_n . Se define la variación de la función $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ en un punto como un cambio posible o virtual de función que no es consecuencia cambio real en las variables independientes. Por ello se adopta la notación δf para significar que el cambio en la función no es real sino virtual y con ella la distingue del diferencial df . Esto quiere decir que, mientras el diferencial de una función df es el resultado de un cambio real en los valores de las variables independientes du_1, du_2, \dots, du_n , la variación de la función δf surge de un experimento matemático en que se varían artificialmente los valores de las variables independientes en las cantidades $\delta u_1, \delta u_2, \dots, \delta u_n$. Aunque el cálculo de ambas cantidades es similar:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n$$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \delta u_n$$

Su interpretación es totalmente distinta, de acuerdo con lo dicho anteriormente.

2.6.4.2. Principio de la Energía Potencial Mínima

El principio de la Energía Potencial Mínima, establece: *De todas las posibles configuraciones compatibles de la estructura deformada, la correcta es aquella que hace estacionaria la energía potencial. Si el valor estacionario es un mínimo, entonces la estructura es estable. Si es un máximo, la estructura es inestable.*

Se comprende que este principio se plantee matemáticamente [32, página 25] en términos del cálculo variacional, pues las diversas configuraciones posibles que me mencionan en el principio no son otra cosa que experimentos matemáticos virtuales que no aplican cambios en la energía potencial real de la estructura, la cual sólo es función de los desplazamientos reales que sufra. Por otra parte, la Figura 2.17 ilustra lo que se entiende por configuración de deformación compatible.

En general, una configuración compatible es la que preserva las condiciones de apoyo de la estructura y no presenta discontinuidades ni interrupciones. Como la energía potencial es función de los desplazamientos u_1, u_2, \dots, u_n , se tiene que éstos pueden obtenerse a partir de la ecuación:

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial u_1} \delta u_1 + \frac{\partial P}{\partial u_2} \delta u_2 + \dots + \frac{\partial P}{\partial u_n} \delta u_n = 0$$

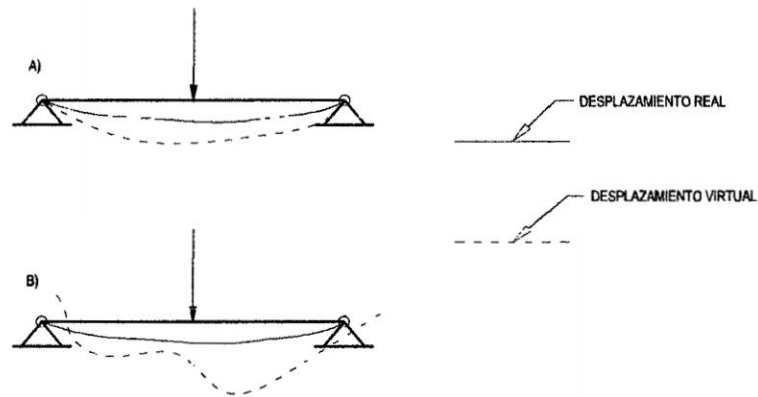


Figura 2.17: Desplazamientos virtuales. a)- compatibles con las condiciones de apoyo. b)- incompatibles con las condiciones de apoyo

La energía potencial como tal se define como la suma de la energía de deformación, que es la energía almacenada en los elementos estructurales deformados P_i , más la energía de las cargas externas P_e :

$$P = P_i + P_e$$

La validez del principio está limitada al caso de estructuras lineales, es decir, a aquellas para las cuales es válida la ley de Hooke sobre proporcionalidad entre tensiones y deformaciones.

2.6.4.3. Principio del trabajo Virtual

De manera semejante al principio de la energía potencial mínima, el principio del trabajo virtual se formula en términos variacionales. Sin embargo, su rango de aplicación es mayor, ya que es válido tanto para estructuras con comportamiento lineal como no lineal. El principio establece: *Si se somete un cuerpo deformable a desplazamientos virtuales arbitrarios compatibles, el trabajo de las fuerzas externas realizadas a través de tales desplazamientos es igual al trabajo de las tensiones internas a través de las deformaciones*

virtuales que ellos impliquen.

Dado un sólido deformable [23, página 53] impedido hacer movimientos de sólido rígido, es decir, con un número de grados de libertad no positivo, el principio de los trabajos virtuales establece que si inventamos un campo de desplazamientos $u(x)$, llamado campo de desplazamientos virtual, compatible con los enlaces existentes que impiden el movimiento de sólido rígido se cumplirá que el trabajo virtual externo W_e y el trabajo virtual interno W_i serán iguales:

$$W_e = \sum_{i=1}^n F_i \delta i = W_i = \int_V \left(\sum_{i,j} \sigma_{i,j} \varepsilon_{i,j} \right) dV$$

Donde las deformaciones ε y tensiones σ en la ecuación anterior deben calcularse a partir del campo de desplazamientos virtual:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{ij} = f(\varepsilon_{kl})$$

Parte III

MATERIALES Y MÉTODOS

Capítulo 3

Análisis de la red de drenaje

3.1. Descripción del problema

Diferentes autores suelen distinguir 4 subproblemas principales dentro del llamado Problema general del Drenaje Urbano. Podemos enumerarlos según su secuencia física como:

- Determinar la cantidad de agua con la que debemos tratar
- Introducir el agua en la red
- Diseñar una red de conductos suficiente para transportar los caudales de calculo
- Verter dichos caudales a un medio receptor

De los cuatro *subproblemas* del drenaje urbano, el primero de ellos es el problema hidrológico, es decir, determinar la cantidad de agua que debemos evacuar desde la superficie de la ciudad. El segundo se refiere a que el agua de escorrentía que se genera en superficie, sea recogida e introducida en la red de alcantarillado subterránea. El tercer problema es el llamado problema hidráulico: diseñar una red con capacidad suficiente para que los

caudales captados circulen sin problemas hasta el punto de desagüe, mientras que el cuarto de los subproblemas se refiere a estudiar las consecuencias desde el punto de vista de cantidad y calidad sobre el medio receptor. Vamos a revisar someramente estos cuatro subproblemas.

3.1.1. Nivel de seguridad de la red y caudales de proyecto

Para el diseño de un colector o de la red en su totalidad, necesitamos definir un nivel de seguridad y unos caudales de paso, asociados a ese nivel de seguridad. Los niveles de seguridad se podrán intentar estimar a partir de una relación C/B , evaluando los costos de construcción de una red para diferentes periodos de retorno, comparándolos con los costos de los daños esperables durante un horizonte de tiempo asociado a la vida útil de la infraestructura. La suma de ambas componentes deberá dar un mínimo para el periodo de retorno óptimo. Sin embargo, este proceso se puede frustrar por la dificultad en la estimación de los daños asociados. Si bien la curva de los costos de construcción se podrá considerar más o menos objetiva, la de daños presenta el problema de su cuantificación y sobre todo el de la estimación de esos daños en una cierta zona de la ciudad dentro de 15 a 20 años. No sabemos con certeza como se va a desarrollar el crecimiento urbano, ni que zonas de una ciudad se pondrán de moda o caerán en desgracia, con la consiguiente repercusión sobre los costos de una inundación en un barrio de los llamados de alto standing o en un barrio semiabandonado por problemas diversos.

Debido a ello, se suele recurrir a fijar unos periodos de retorno de referencia. En general nos encontramos con valores en la mayoría de ciudades de España en torno a los 10 años, si bien en alguna ciudad se ha optado por 25 años. Recordemos que una lluvia es de periodo de retorno T años si la probabilidad de ser igualada o superada a lo largo de un determinado año es $1/T$. Por tanto el nivel de seguridad en la capacidad del colector está asociado al periodo de retorno considerado.

3.1. Descripción del problema

Fijado el nivel de seguridad, queda evaluar los caudales asociados a ese periodo de retorno y debemos utilizar alguna metodología que permita estimar dichos caudales. En este campo hay que indicar que en general se abusa del empleo del método racional. Este procedimiento que si bien fue inicialmente deducido observando en algunos casos cuencas de tipo urbano, tiene el inconveniente de dar poca información sobre el modo de comportarse de la cuenca. Nos da tan solo un valor de caudal máximo a la salida de la cuenca, pero no el cómo se comporta o cual es la dinámica de la zona urbana frente a la lluvia. No sabemos si el caudal punta se dará al inicio del suceso de lluvia, al final, si la subida de caudales es rápida o lenta, o mucho más interesante, cual es la evolución del volumen de escorrentía a lo largo del tiempo, parámetro de vital importancia por ejemplo para concebir cierto tipo de soluciones anti-inundación.

Existen otras opciones de cálculo, como los modelos de depósitos o las aproximaciones de onda cinemática sobre planos inclinados, que dan respuesta a la pregunta de cuál es la historia temporal de caudales en una cuenca urbana ante un determinado suceso de lluvia. Modelos comerciales de dominio público como *SWMM 5.0* o *HEC-HMS* incluyen estas opciones por lo que el no utilizarlas es más atribuible a falta de interés por el problema, y no un problema de costo de compra de una licencia y del mantenimiento de la misma.

3.1.2. Captación de las aguas en superficie

De los 4 subproblemas enunciados, el primero es el de tipo hidrológico mientras que el tercero es el problema hidráulico. Entre estos pasos, existe uno que con frecuencia solemos olvidar: los caudales de escorrentía deben introducirse en la red de drenaje y en los puntos previstos, para que el agua no circule descontrolada por la superficie de la ciudad.

En numerosas ciudades algunas superficies, por ejemplo los tejados, suelen estar directamente conectados a la red de drenaje, asegurando así la captación de la escorrentía en la



Figura 3.1: Registro de precipitaciones: Estación meteorológica Teresita. Fuente: *Elaboración propia*

misma zona en que cae. Para la lluvia sobre aceras, viales, plazas y espacios abiertos contamos en superficie con rejillas de captación, también denominadas *sumideros* o *imbornales*, que tienen la responsabilidad de recoger el caudal, fruto del proceso de transformación de la lluvia en escorrentía, que circula por la calle y aceras, e introducirlo en la red de drenaje.

En el proceso de diseño de una red de drenaje, estamos haciendo siempre la hipótesis implícita de que la lluvia cada que se transforma en escorrentía superficial, entra en la red de drenaje en la misma zona en que cae. Definimos en base a esa hipótesis una serie de subcuencas hidrológicas cuyos límites están fijados en el supuesto que el agua superficial no los supera. Cuando esto no se cumple, el esquema hidrológico e hidráulico que hemos

supuesto en la ciudad puede saltar en pedazos.

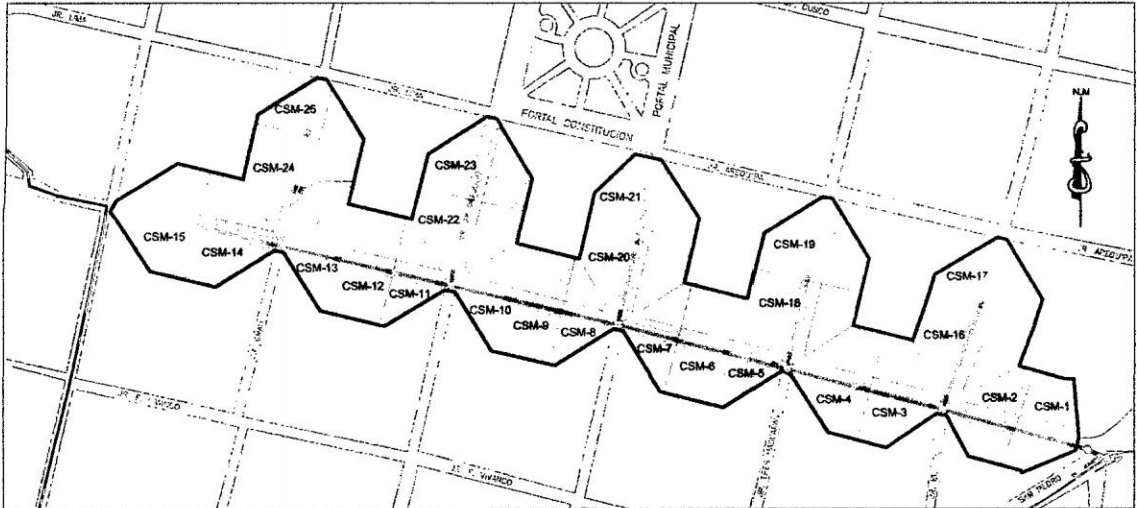


Figura 3.2: Colector Jirón San Martín Ayacucho: Fuente [16]

Los elementos de captación que ofrecen las diferentes empresas suministradoras cuentan con una información en general escasa, cuando no nula, sobre la capacidad del sumidero o imbornal para recoger agua. Podemos encontrarnos con numerosos datos de su capacidad resistente, dimensiones, etc. pero raramente se encuentran datos de capacidad de recogida de aguas, por sorprendente que parezca. Si bien estos elementos deben resistir por ejemplo las cargas del tráfico y no será bueno que en cuanto pasara un camión u otro vehículo pesado, se rompieran, pero no debemos olvidar que la razón primera de su existencia es captar agua, y que la capacidad resistente debe ser un valor adicional.

En la actualidad se está entrando en una serie de consideraciones a la hora de elegir los tipos de sumideros a ubicar que no son las más adecuadas desde el punto de vista del drenaje urbano. Se eligen elementos por consideraciones estéticas en primer orden y si además captan un poco de agua pues bienvenido sea, pero imponer criterios tales como que el sumidero sea del mismo ancho que la *rigola* de la calle (pieza de tipo cerámico junto al bordillo, mas lisa y que favorece la circulación del agua) sin ninguna otra consideración es un enfoque dudoso. Se descartan sumideros de mejor comportamiento porque no cumplen

3.1. Descripción del problema

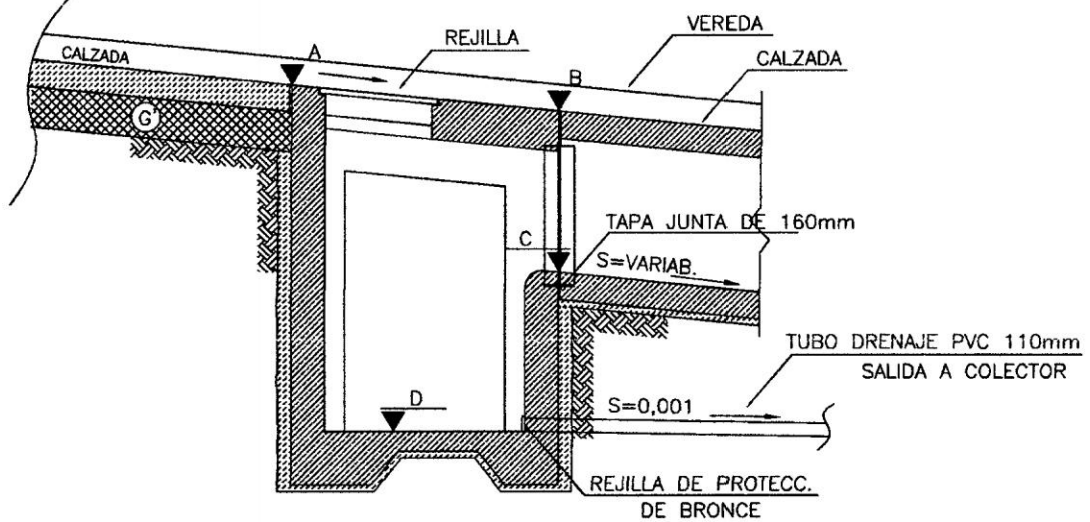


Figura 3.3: Ejemplo de una rejilla en medio urbano: Fuente: *Elaboración propia*

esos criterios estéticos. Es un claro ejemplo de la falta de una cultura del agua en la ciudad por parte de nuestros diseñadores urbanos. Se está olvidando que nuestro clima mediterráneo por ejemplo, seco, de vez en cuando nos lanza unos avisos en forma de tormentas de corta duración y alta intensidad, a las que debemos dar respuesta.

3.1.3. Cálculo hidráulico de las redes de drenaje urbano

El tercero de los subproblemas se refiere al cálculo hidráulico de la red de alcantarillado. Y este es uno de los temas que se encuentran aún en la actualidad peor tratados. En relación a los métodos de cálculo, se debe indicar que se usa demasiado el cálculo en régimen permanente uniforme, el del llamado calado normal. Y esta es una mala aproximación para el cálculo de la red. Se puede utilizar como elemento de predimensionamiento o para tener una idea aproximada del orden de magnitud de los tamaños de conducto necesarios, pero quedarse en este punto de cálculo es totalmente inadecuado. Podemos indicar algunas consideraciones sobre este método de cálculo:

3.1. Descripción del problema

- Es un método que calcula uno a uno los colectores, sin tener en cuenta el concepto red de drenaje, concepto que supone la existencia de interacciones entre los conductos de la red. Dado un caudal de paso, una pendiente, una tipología de conducto y un material tipo para las paredes, queda fijado el nivel de agua y el tamaño del colector sin tener en cuenta lo que hay aguas arriba o aguas abajo.
- No considera la longitud del colector, de manera que el conducto tenga 2 metros de largo o 2000 metros, en consecuencia el nivel de agua y el tamaño de colector es el mismo, lo que no parece muy lógico.
- Es un tipo de flujo que podemos denominar raro, pues no se suele dar en la naturaleza mas que como situación de tipo asintótico en conductos muy largos, mientras que los colectores de una red de drenaje suelen ser cortos.
- Lo mejor que podemos decir es que es fácil de calcular y existen una serie de nomogramas, gráficos, etc. que hacen muy sencillo el proceso de cálculo

Ni siquiera podemos asegurar que los resultados de cálculo nos pongan del lado de la seguridad, pues pueden suponer que en ocasiones colectores que están en presión, según el cálculo deberán estar en lámina libre. El empleo de aproximaciones mejores, como sea el uso de la curva de remanso o mejor todavía, una aproximación de flujo gradualmente variable es deseable y tenemos alternativas de cálculo económicas como *HEC-RAS* o *SWMM 5.0*. Por consiguiente, parece que ha llegado la hora de desterrar los procesos de diseño realizados tan solo con régimen permanente uniforme, reemplazándolos con mejores aproximaciones de cálculo.



Figura 3.4: Inundación superficial por insuficiencia de la red de alcantarillado: Fuente: *Elaboración propia*

3.1.4. Vertido al medio receptor

Hasta finales de la década de los 70, el vertido desde la red al medio exterior se consideraba como un hecho sin trascendencia, y tan solo se consideraba un problema cuando la cota final del colector estaba por debajo de la cota del río o del nivel del mar, y debía preverse alguna estación de bombeo al final de la red para asegurar el correcto vertido final. Este es un problema que podemos calificar de tipo cuantitativo. Pero en los últimos años se ha empezado a descubrir un segundo problema: el de la calidad de esa agua de escorrentía producida sobre un medio urbano, con una carga contaminante no despreciable y los problemas de su vertido a un medio natural. Es sobre las características de esta agua de escorrentía y algunas de sus consecuencias sobre lo que báscula el denominado cuarto de los subproblemas del drenaje urbano.

3.1. Descripción del problema

Este fenómeno de vertido es conocido con las siglas CSO (*Combined Sewer Overflows* en inglés), lo que en castellano serán los vertidos procedentes de una red de alcantarillado de tipo unitario en tiempo de lluvia. En tiempo seco, en la superficie de nuestras ciudades se acumula una cantidad no despreciable de materias contaminantes, a pesar de los esfuerzos de nuestros equipos de limpieza. Esa carga contaminante puede ser arrastrada por la escorrentía de un suceso de lluvia y cuando se supera la capacidad de tratamiento de la planta depuradora, se produce un vertido al exterior. En caso de redes unitarias como las nuestras, el vertido incluye una fracción de agua residual doméstica, que agrava el problema.

El mayor peligro se produce cuando una lluvia de tipo medio, provoca un caudal ligeramente superior pero no mucho mayor a la capacidad de la planta de tratamiento. En esas condiciones el grado de dilución del vertido al medio receptor es mucho menor que el de una lluvia intensa, y por tanto las concentraciones de materias contaminantes mucho más elevadas y potencialmente más peligrosas. Si a ello sumamos el hecho que, por ejemplo, una gran parte de nuestros ríos presenta un caudal circulante bajo, la capacidad de dilución del medio receptor es reducida, acentuándose los problemas de contaminación en los cauces. Cuando la zona de vertido se encuentra junto a un espacio de uso público, por ejemplo una playa, este lugar puede quedar gravemente afectado por el arrastre de residuos, contaminación de las aguas, etc. inutilizando la capacidad del mismo para usos recreativos durante varios días. El efecto del vertido de materia orgánica tiene también consecuencias negativas para la fauna piscícola, pues en su proceso de oxidación esta materia orgánica consume el oxígeno disuelto del agua, lo que puede provocar la mortandad de los peces en un entorno de la zona de vertido. Según se ha observado en otros países, la mayor carga contaminante está asociada a los primeros minutos de lluvia.

Quiere ello decir que muchas veces, los primeros caudales transportan concentraciones más altas y por tanto con un riesgo contaminante mucho mayor que por ejemplo los cau-



Figura 3.5: Vertido a un cauce y mortandad de peces. Fuente: *Internet*

dales máximos, donde dado el gran volumen de agua circulante por unidad de tiempo, se produce una dilución mayor de las sustancias que transporta. Si podemos determinar relaciones entre el *hidrograma* de caudal circulante por la red de alcantarillado y la evolución temporal de la carga contaminante, el denominado *polutograma*, podrá darse el caso de que almacenando una pequeña porción de las primeras aguas de esorrentía se redujera de una forma notable la carga contaminante vertida al medio receptor. Este análisis conjunto de los aspectos de cantidad y calidad del agua de esorrentía, deberá verificarse de forma experimental.

Finalmente, y tal y como se ha indicado con anterioridad, en el caso de vertido a un río los reducidos caudales habituales de muchos ríos españoles presentan un inconveniente añadido al no poder diluir los efectos del vertido procedente de una red de alcantarillado. Aquellas cantidades de sustancias que vertidas en un río con un caudal alto supondrán unas concentraciones pequeñas, en el caso contrario se incrementan sencillamente por el hecho de circular un reducido caudal por el río. El régimen hidráulico de circulación

del río supone también una evolución a lo largo del mismo de esa carga contaminante, mediante procesos de transporte. Cuando aguas abajo existen otros usos para el agua del río, recreativos, de abastecimiento, etc. es necesario poder predecir las consecuencias de estos vertidos, evaluando las variaciones en el tiempo y en el espacio de la concentración de sustancias contaminantes, verificando que sus valores se encuentren dentro de los límites admisibles para cada uso. Además no hay que perder de vista que en estos momentos los planes de saneamiento de las cuencas españolas tienden a reducir o eliminar los vertidos de aguas residuales sin tratar a los cauces naturales. Quiere ello decir que una vez logrado el objetivo del tratamiento integral, los únicos puntos de vertido a un río serán en muchos casos los procedentes de redes de alcantarillado unitario.

3.2. Riesgos geológico-climatológicos

Los fenómenos de origen *geológico-climáticos* de mayor incidencia en el Distrito de *Kim-biri* son los fenómenos de ladera o movimientos de ladera que son desplazamientos de masas de tierra con el agua en épocas de lluvia generalmente que conforman un fluido no newtoniano. Se deben a la inestabilidad de los materiales que forman la ladera. Estos desplazamientos se producen en el sentido de la pendiente como consecuencia de la fuerza de la gravedad.

Los fenómenos de origen geológico-climático que se presentan con mayor frecuencia en el área de estudio son los siguientes:

3.2.1. Deslizamientos recientes

Se producen en el material suelto de cobertura y en algunos casos dejan al descubierto la roca base de las laderas, ocurren principalmente en taludes de quebradas con pendientes

pronunciadas. Son fenómenos muy localizados y no dan lugar a mayores estragos que el de acumular abundante material suelto en el fondo del cauce de las quebradas.

3.2.2. Deslizamientos potenciales

Todos los cortes, ya sean producidos por quebradas o por carreteras en material suelto de cobertura, sobre todo los que tienen alto grado de inclinación, están sujetos a deslizamientos, o sea que se les puede considerar potencialmente deslizables. Los factores que pueden incrementarlos son: material de baja consistencia, taludes pronunciados, lluvias que producen socavamiento y erosión, viento, etc.

3.2.3. Socavamiento y cárcavas

Originados solamente en época de lluvias, especialmente en taludes constituidos por material de cobertura y en menor grado en rocas de baja a mediana consistencia, sobre todo en las de origen sedimentario como areniscas y conglomerados.

El sucesivo progreso de socavamiento y cárcavas producen mayor inestabilidad en los taludes favoreciendo sus deslizamientos y hundimientos, con la consiguiente acumulación de material en el fondo de quebradas y arrastre hacia las partes bajas por acción de torrentes de agua.

3.2.4. Desprendimiento de rocas y derrumbe de suelos

Tienen lugar en cortes de quebradas con taludes de fuerte inclinación, conformadas por suelos de estructura granular poco consolidada y por rocas de alto grado de fracturamiento capaces de liberar fragmentos de diferente tamaño por acción de la gravedad y otros factores como la lluvia y el viento. Éste fenómeno tiene carácter localizado sin mayores

3.2. Riesgos geológico-climatológicos

consecuencias que el de acumular material al pie de taludes, contribuyendo al transporte de sólidos hacia las partes bajas por acción del agua.

En consecuencia, se puede mencionar que los factores que inciden en la actividad de los fenómenos de origen geológico-climático son las condiciones geomecánicas de las rocas y suelos, la pendiente pronunciada de laderas y taludes de quebradas, erosión y transporte del agua y en menor grado, la acción del viento.

Capítulo 4

Modelamiento del Problema

4.1. Introducción

A lo largo de la historia de la *Ingeniería Hidráulica* se han desarrollado ecuaciones empíricas y numéricas que rigen el comportamiento hidráulico de los flujos gradualmente variados y de los flujos no permanentes, que son los más comunes en la naturaleza por la variación temporal y espacial. A su vez, en el proceso evolutivo de la ciencia matemática se han encontrado diferentes métodos para la solución numérica de dichas ecuaciones. Los métodos más utilizados en la modelación de sistemas de alcantarillado de drenaje pluvial son: el *Método de las Características*, el *Método de Diferencias Finitas* y el *Método de Elementos Finitos*.

En cada uno de estos métodos de solución diferentes autores han desarrollado esquemas de solución para resolver las ecuaciones de *Saint Venant*, que son las ecuaciones que rigen el comportamiento hidráulico de los flujos en las redes de los sistemas de alcantarillado de drenaje pluvial. A continuación se describe la solución con el *Método de Diferencias Finitas* y el *Método de Elementos Finitos*, este último se desarrollara ampliamente dado que es el método de solución planteada en la tesis.

4.2. Modelamiento con Diferencias Finitas

Se presenta la solución por tres esquemas de las ecuaciones de *Saint-Venant* para simular el comportamiento hidráulico de las redes de drenaje pluvial operando bajo condiciones de flujo no permanente. El esquema de solución de *Preissman* es implícito en donde se calcula el nivel del agua y el caudal en cada tramo del conducto. El esquema de solución de *Abbott & Ionescu* es implícito que calcula los niveles de agua y el caudal de una manera intercalada en los puntos internos del conducto. El esquema de solución desarrollado por la *EPA* es explícito en donde se calcula el caudal en el conducto y los niveles de agua en los nodos de unión.

4.2.1. Esquema de solución de Preissmann

El esquema de solución propuesto por Preissmann o de cuatro puntos discretiza las ecuaciones de continuidad y momentum como se muestra a continuación.

4.2.1.1. Ecuación de continuidad

Aplicando la solución del esquema de Preissmann a cada uno de los términos de la ecuación de continuidad.

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= \theta \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{Q_{i+1}^j - Q_i^j}{\Delta x} \\ \frac{dA}{dt} &= \left(\frac{A_{i+1}^{j+1} + A_i^{j+1}}{2\Delta t} \right) - \left(\frac{A_{i+1}^j + A_i^j}{2\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Reorganizando los términos de la ecuación de continuidad se llega a la siguiente expresión:

$$\theta (Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}) + (1 - \theta) (Q_{i+1}^j - Q_i^j) + \frac{\Delta x}{2\Delta t} [(A_{i+1}^{j+1} + A_i^{j+1}) - (A_{i+1}^j + A_i^j)] = 0 \quad (4.2.2)$$

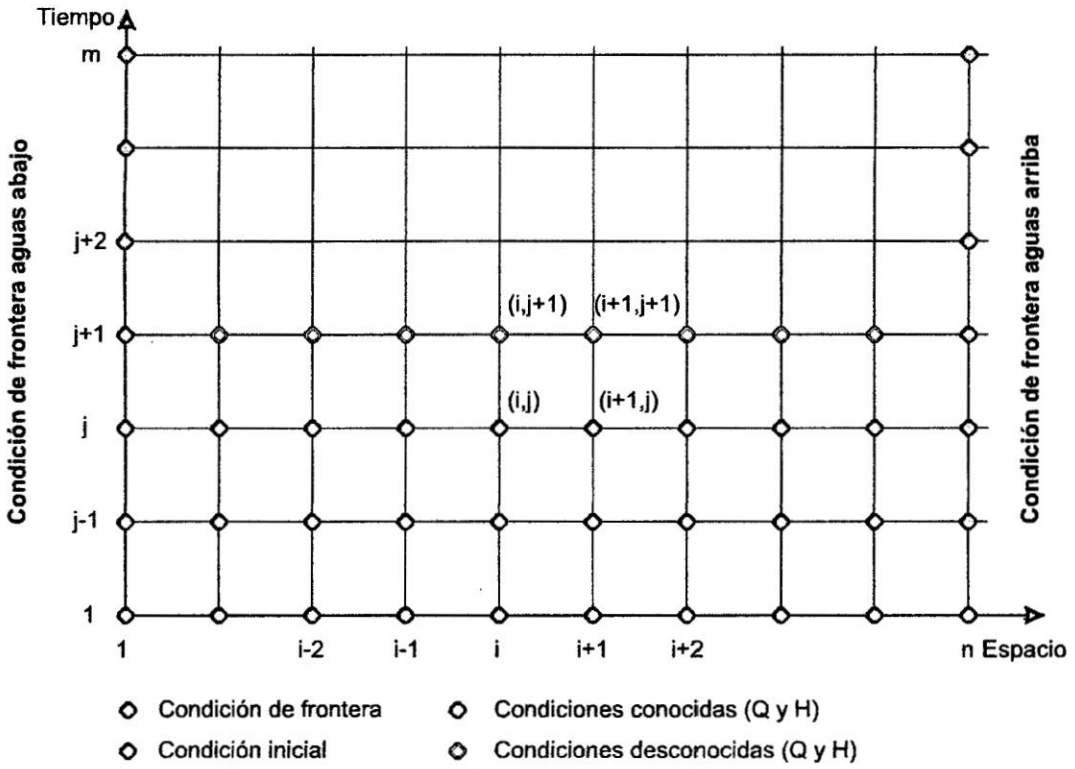


Figura 4.1: Esquema de solución de *Preissmann*. Fuente: *Elaboración propia*

4.2.1.2. Ecuación de momentum

La discretización del término de aceleración local es:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left(\frac{Q_{i+1}^{j+1} + Q_i^{j+1}}{2\Delta t} \right) - \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^j}{2\Delta t} \right) \quad (4.2.3)$$

La discretización del término de aceleración convectiva corresponde a:

$$\frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^{j+1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^{j+1} \right] + \frac{(1-\theta)}{\Delta x} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{i+1}^j - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_i^j \right] \quad (4.2.4)$$

La discretización del término de variación espacial de la elevación de la superficie del agua esta dado por:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \theta \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta x} + (1-\theta) \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta x} \quad (4.2.5)$$

El término de la pendiente de fricción es expresado mediante:

$$S_f = \frac{\theta (Q_{i+1}^{j+1} |Q_{i+1}^{j+1}| + Q_i^{j+1} |Q_i^{j+1}|) + (1 - \theta) (Q_{i+1}^j |Q_{i+1}^j| + Q_i^j |Q_i^j|)}{\theta \left([K_{i+1}^{j+1}]^2 + [K_i^{j+1}]^2 \right) + (1 - \theta) \left([K_{i+1}^j]^2 + [K_i^j]^2 \right)} \quad (4.2.6)$$

De la ecuación anterior se puede observar que el término K es la capacidad de transporte, siendo el término que tiene incluido el coeficiente de *rugosidad de Manning*, que es el factor que influye en las pérdidas por fricción en los conductos del sistema de alcantarillado de drenaje pluvial. El término K se puede expresar como:

$$K = \frac{AR^{2/3}}{n} \quad (4.2.7)$$

El término de área que acompaña a los términos de la variación espacial del nivel del agua y la pendiente de fricción, se discretiza de la siguiente manera:

$$A = \theta \left[\frac{A_{i+1}^{j+1} + A_i^{j+1}}{2} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{A_{i+1}^j + A_i^j}{2} \right] \quad (4.2.8)$$

Al reorganizar los términos de la ecuación de momentum se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta x}{2\Delta t} \right) (Q_{i+1}^{j+1} + Q_i^{j+1} - Q_{i+1}^j - Q_i^j) + \theta \left[\frac{(Q_{i+1}^{j+1})^2}{A_{i+1}^{j+1}} - \frac{(Q_i^{j+1})^2}{A_i^{j+1}} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{(Q_{i+1}^j)^2}{A_{i+1}^j} - \frac{(Q_i^j)^2}{A_i^j} \right] \\ & + g\Delta x \left(\theta \left[\frac{A_{i+1}^{j+1} + A_i^{j+1}}{2} \right] + (1 - \theta) \left[\frac{A_{i+1}^j + A_i^j}{2} \right] \right) \left\{ \left[\theta \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta x} \right] + \right. \\ & \left. \left[\frac{\theta (Q_{i+1}^{j+1} |Q_{i+1}^{j+1}| + Q_i^{j+1} |Q_i^{j+1}|) + (1 - \theta) (Q_{i+1}^j |Q_{i+1}^j| + Q_i^j |Q_i^j|)}{\theta \left([K_{i+1}^{j+1}]^2 + [K_i^{j+1}]^2 \right) + (1 - \theta) \left([K_{i+1}^j]^2 + [K_i^j]^2 \right)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Los términos que tienen el superíndice j en las ecuaciones anteriores se conocen ya sea de las condiciones iniciales o de una solución del sistema de ecuaciones de Saint Venant en una línea de tiempo previa, por lo tanto las incógnitas serían: Q_i^{j+1} , Q_{i+1}^{j+1} , h_i^{j+1} , h_{i+1}^{j+1} .

Como hay algunos de los términos que se encuentran elevados a potencias diferentes a 1, el sistema de ecuaciones no es lineal por lo tanto se debe utilizar un método de solución no lineal.

4.2.1.3. Solución del sistema de ecuaciones

Las ecuaciones (4.2.2) y (4.2.9) se caracterizan por tener cuatro incógnitas y por ser ecuaciones no lineales para éstas. Para poder resolverlas se utiliza un esquema implícito que considera las ecuaciones de continuidad (4.2.2) y de conservación de momentum (4.2.9) en todos los puntos del intervalo de tiempo desconocido en forma simultánea; teniendo en cuenta el esquema de la Figura 4.1.

Las ecuaciones de continuidad y momentum se consideran para cada una de las $N - 1$ celdas rectangulares de la Figura 4.1, entre la frontera aguas arriba (*hidrograma*) y la frontera aguas abajo (*limnigrama* o *curva de calibración*).

Teniendo en cuenta lo anterior el sistema de ecuaciones no lineales puede expresarse en forma funcional en términos de las incógnitas h y Q en el nivel de tiempo $j + 1$, como se presenta a continuación:

4.2. Modelamiento con Diferencias Finitas

$$\begin{array}{llll}
 CF_1(h_1, Q_1) & = & 0 & CFAAr \\
 C_1(h_1, Q_1, h_2, Q_2) & = & 0 & C_1 \\
 M_1(h_1, Q_1, h_2, Q_2) & = & 0 & M_1 \\
 \vdots & & & \vdots \\
 C_i(h_i, Q_i, h_{i+1}, Q_{i+1}) & = & 0 & C_i \\
 M_i(h_i, Q_i, h_{i+1}, Q_{i+1}) & = & 0 & M_i \\
 \vdots & & & \vdots \\
 C_{N-1}(h_{N-1}, Q_{N-1}, h_N, Q_N) & = & 0 & C_{N-1} \\
 M_{N-1}(h_{N-1}, Q_{N-1}, h_N, Q_N) & = & 0 & M_{N-1} \\
 CF_N(h_N, Q_N) & = & 0 & CFAAb
 \end{array} \tag{4.2.10}$$

Para poder calcular las $2N$ incógnitas en el tiempo j se utiliza un proceso de *ensayo y error*, como lo sería el método de *Newton-Raphson*. Es decir, se deben probar valores de h y Q para todos los tramos en cada instante de tiempo y comprobar si las ecuaciones son iguales a cero; si no lo son, es necesario probar otros valores de las incógnitas. El sistema de ecuaciones resultantes en forma matricial al utilizar el método de solución de Newton-Raphson para un conducto sencillo de una red de alcantarillado de drenaje pluvial es:

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial CF_1}{\partial h_1} & \frac{\partial CF_1}{\partial Q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial C_1}{\partial h_1} & \frac{\partial C_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial C_1}{\partial h_2} & \frac{\partial C_1}{\partial Q_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\partial M_1}{\partial h_1} & \frac{\partial M_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial M_1}{\partial h_2} & \frac{\partial M_1}{\partial Q_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_i}{\partial h_i} & \frac{\partial C_i}{\partial Q_i} & \frac{\partial C_i}{\partial h_{i+1}} & \frac{\partial C_i}{\partial Q_{i+1}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{\partial M_i}{\partial h_i} & \frac{\partial M_i}{\partial Q_i} & \frac{\partial M_i}{\partial h_{i+1}} & \frac{\partial M_i}{\partial Q_{i+1}} & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \Delta h_1 \\
 \Delta Q_1 \\
 \Delta h_2 \\
 \vdots \\
 \Delta h_i \\
 \Delta Q_i \\
 \vdots \\
 \Delta Q_{N-1} \\
 \Delta h_N \\
 \Delta Q_N
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -EC_{F1} \\
 -EC_1 \\
 -EM_1 \\
 \vdots \\
 -EM_{i-1} \\
 -EC_i \\
 \vdots \\
 -EC_{N-1} \\
 -EM_N \\
 -EC_{FN}
 \end{bmatrix} \tag{4.2.11}$$

La solución de la ecuación (4.2.10) arroja valores de Δh_i y ΔQ_i . Los valores para las incógnitas en la iteración $(k + 1)$ están dados por las siguientes ecuaciones:

$$h_i^{k+1} = h_i^k + \Delta h_i \quad (4.2.12)$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k + \Delta Q_i \quad (4.2.13)$$

Cada uno de los términos de la matriz izquierda de la ecuación (4.2.11) corresponde a los términos del jacobiano de las ecuaciones de continuidad y momentum, en donde los únicos términos que contribuyen a las derivadas son los del tiempo $j + 1$, mientras que la matriz de resultados corresponde a los residuos de las ecuaciones de continuidad y momentum cuando se evalúan cada uno de los valores de nivel y caudal en cada uno de los tramos del conducto para cada iteración del método de solución de *Newton-Raphson*.

4.2.2. Esquema de solución de Abbott & Ionescu

Interpretación gráfica del esquema de solución de Abbott & Ionescu

4.2.2.1. Ecuación de continuidad

Al discretizar las ecuaciones de continuidad en forma de diferencias finitas se obtienen la la ecuación (4.2.14) se presenta la discretización de cada uno de los términos.

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j}{2\Delta x} + \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} \right] \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \left(\frac{B_i^j + B_i^{j+1}}{2} \right) \left(\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

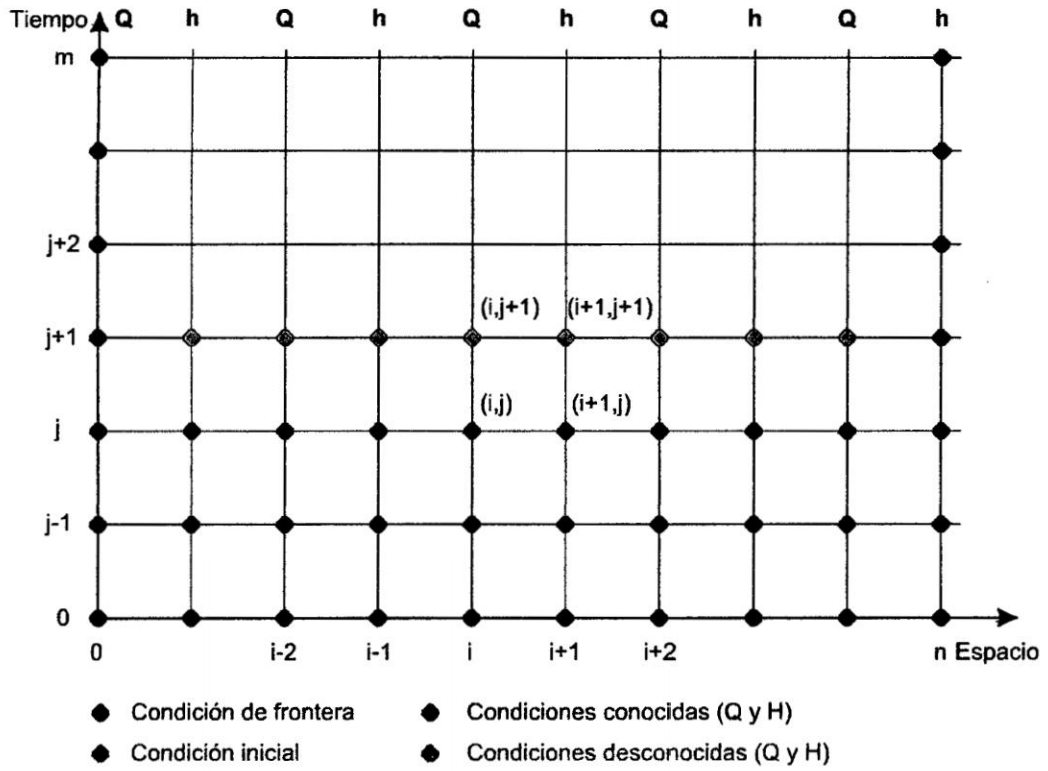


Figura 4.2: Esquema de solución de Abbott & Ionescu. Fuente: *Elaboración propia*

Reordenando los términos de la ecuación de continuidad se llega a la siguiente expresión:

$$-\frac{\Delta t}{4\Delta x} [Q_{i-1}^{j+1}] + \left(\frac{B_i^j + B_i^{j+1}}{2}\right) [h_i^{j+1}] + \frac{\Delta t}{4\Delta x} [Q_{i+1}^{j+1}] = \left(\frac{B_i^j + B_i^{j+1}}{2}\right) [h_i^j] - \frac{\Delta t}{4\Delta x} [Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j] \quad (4.2.15)$$

4.2.2.2. Ecuación de momentum

En la Ecuación (4.2.16) se presenta la discretización de cada uno de los términos de la ecuación de momentum.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{Q_i^{j+1} - Q_i^j}{\Delta t} \\
 \frac{\partial (Q^2/A)}{\partial x} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{Q_{i+1}^{j+1} \times Q_{i+1}^j}{A_{i+1}^{j+1/2}} - \frac{Q_{i-1}^{j+1} \times Q_{i-1}^j}{A_{i+1}^{j+1/2}} \right] \\
 gA \frac{\partial h}{\partial x} &= gA_{i+1}^{j+1/2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i-1}^{j+1}}{2\Delta x} + \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) \\
 gAS_f &= g \left(\frac{A}{K^2} \right)_i^{j+1/2} \bar{Q}_*^2 \\
 \bar{Q}_*^2 &= [f \times Q_i^{j+1} |Q_i^{j+1}| + (1-f) \times Q_i^j |Q_i^j|]
 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

En el último término de la ecuación (4.2.16), f es un coeficiente de resistencia que busca minimizar cualquier efecto negativo que introduzca un eventual cambio brusco de caudal. El valor de f puede calcularse de la siguiente manera:

$$f = \left(\frac{Q_{i-1}^{j+1/2} Q_{i-1}^{j+1/2} - Q_{i-1}^j Q_{i-1}^j}{[Q_{i-1}^j (Q_{i-1}^{j+1/2} Q_{i-1}^j)]} \right) \tag{4.2.17}$$

Reordenando los términos de la ecuación de momentum se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 -g \times A_{i+1}^{j+1/2} \times \frac{\Delta t}{4\Delta x} [h_{i-1}^{j+1}] + \left(1 + g \times A_{i+1}^{j+1/2} \times \frac{Q_i^j}{(K^2)_i^{j+1/2}} \times \Delta t \right) [Q_i^{j+1}] \\
 +g \times A_{i+1}^{j+1/2} \times \frac{\Delta t}{4\Delta x} [h_{i+1}^{j+1}] = Q_i^j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[\frac{Q_{i+1}^{j+1} \times Q_{i+1}^j}{A_{i+1}^{j+1/2}} - \frac{Q_{i-1}^{j+1} \times Q_{i-1}^j}{A_{i+1}^{j+1/2}} \right] \\
 -g \times A_{i+1}^{j+1/2} \times \frac{\Delta t}{4\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j)
 \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

4.2.2.3. Solución del sistema de ecuaciones

En la Figura 4.2 se observa que la condición de frontera aguas arriba son caudales (*hidrograma*) y la de aguas abajo niveles (*limnógrama* o *curva de aforo*). Esto implica que las

4.2. Modelamiento con Diferencias Finitas

series de tiempo $Q(x = 0, t)$ y $h(x = n\Delta x, t)$ se deben conocer desde antes de ejecutar el módulo de cálculo hidráulico.

Una consecuencia de esta estructura en la malla de cálculo, es que todas los puntos con valores pares de $i(0, 2, 4, \dots, n - 1)$ contienen los “puntos de Q ” mientras que todos los puntos con valores impares de $i(1, 3, 5, \dots, n)$ contienen los “puntos de h ”. Esto implica que el valor de n sea impar

La ecuación (4.2.15) y la ecuación (4.2.18) constituyen un sistema de $n - 1$ ecuaciones lineales. Cuando los valores de caudal y nivel de agua en la condición de frontera aguas arriba y aguas abajo son conocidas para todo tiempo t , es evidente que se tendrán $n - 1$ términos desconocidos de:

$$\begin{aligned} h_i^{j+1}, i = 1, 3, 5, \dots, n - 2, \quad y \\ Q_i^{j+1}, i = 2, 4, 6, \dots, n - 1 \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Para las $n - 1$ ecuaciones lineales, se empieza en orden con una ecuación de continuidad (EC) seguida por una ecuación de momentum (EM) y así hasta llegar a las $n - 1$ ecuaciones. Teniendo en cuenta lo anterior el sistema de ecuaciones lineales puede expresarse en términos de las incógnitas h y Q en el nivel de tiempo $j + 1$, como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 EC : B1_1h_1 + C1_1Q_2 &= D1_1 - A1_1Q_o \\
 EM : bA2_2h_1 + B2_2Q_2 + C2_2h_3 &= D2_2 \\
 EC : A1_3Q_2 + B1_3h_3 + C1_3Q_4 &= D1_3 \\
 EM : A2_4h_3 + B2_4Q_4 + C2_4h_5 &= D2_4 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 EC : A1_{n-2}Q_{n-3} + B1_{n-2}h_{n-2} + C1_{n-2}Q_{n-1} &= D1_{n-2} \\
 EM : A2_{n-1}h_{n-2} + B2_{n-1}Q_{n-1} &= D2_{n-1} - C2_{n-1}h_n
 \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

El anterior sistema de ecuaciones se puede plantear matricialmente (4.2.21) y posteriormente ser resuelto mediante reducción Gaussiana en donde se encuentran los valores de caudal y nivel para cada uno de los puntos internos de los conductos.

Para dar solución al sistema matricial de la ecuación (4.2.21) para el segundo paso de tiempo, se requiere introducir como valores semilla los valores de caudal y profundidad de flujo de la condición inicial. Mientras que para los otros tiempos de solución se utilizan los mismos valores del tiempo anterior.

$$\begin{bmatrix}
 B1_1 & C1_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A2_2 & B2_2 & C2_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & A1_3 & B1_3 & C1_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & A1_i & B1_i & C1_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & A2_i & B2_i & C2_i & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A1_{n-2} & B1_{n-2} & C1_{n-2} & h_{n-2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A2_{n-1} & B2_{n-1} & Q_{n-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 h_1 \\
 Q_2 \\
 h_3 \\
 \vdots \\
 h_i \\
 Q_i \\
 \vdots \\
 h_{n-2} \\
 Q_{n-1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 D1_1 - A1_1 Q_o \\
 D2_2 \\
 D1_3 \\
 \vdots \\
 D1_i \\
 D2_i \\
 \vdots \\
 D1_{n-2} \\
 D2_{n-1} - C2_{n-1} h_n
 \end{bmatrix}
 \tag{4.2.21}$$

4.2.3. Esquema de solución de EPA-SWMM

En el módulo *EXTRAN* del programa *EPA-SWMM*, la ecuación de *momentum* es combinada con la ecuación de *continuidad* para obtener una ecuación que sirve para determinar el caudal en todos los conductos de la red para cualquier intervalo de tiempo. De la ecuación de *momentum* no se tienen en cuenta los términos de fricción del aire, de pérdidas menores y el caudal lateral a lo largo del conducto.

Mientras que para calcular los niveles de agua en los nodos de la red se tiene en cuenta la ecuación de conservación de la masa en donde interviene el área de almacenamiento del nodo y el conducto para un determinado intervalo de tiempo, como se muestra en el siguiente esquema:

Al diferenciar el término de aceleración convectiva en la ecuación de *momentum* se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial A}{\partial x} + gA \left(S_f + \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 \tag{4.2.22}$$

Y al reordenar la ecuación de *continuidad* se obtiene la siguiente expresión:

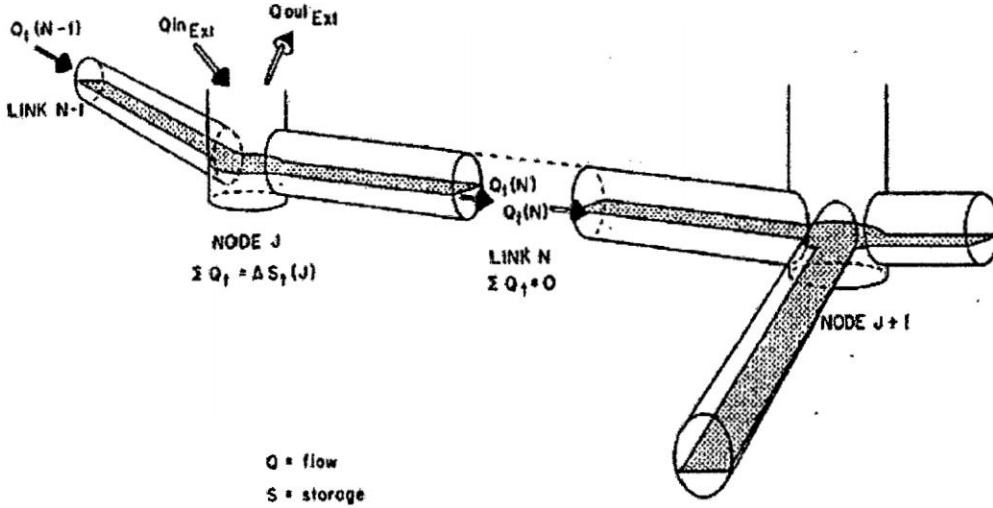


Figura 4.3: Esquema de solución del módulo EXTRAN del programa EPA-SWMM. Fuente: *Manual de SWMM*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial t} + q \quad (4.2.23)$$

Ahora, reemplazando la ecuación (4.2.23) en el segundo término de la ecuación (4.2.22) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -2\nu \left(\frac{\partial A}{\partial t} - q \right) - \nu^2 \frac{\partial A}{\partial x} + gA \left(S_f + \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 \quad (4.2.24)$$

4.2.3.1. Método de solución

La anterior ecuación se puede resolver numéricamente mediante un método iterativo en el cual se emplea un adecuado factor de ponderación (w) obteniendo la siguiente expresión:

$$Q_{t+\Delta t} = \frac{T1}{1 + w \left[\frac{gn^2 \Delta t}{R^{4/3}} |V| + \left(\frac{Q}{A_2} - \frac{Q}{A_1} \right) \frac{\Delta t}{L} \right]_{t+\Delta t}} \quad (4.2.25)$$

Donde:

$$T1 = Q_t - (1 - w) g \left[\bar{A} \frac{(H_2 - H_1)}{L} \Delta t \right]_t - (1 - w) Q_t \left[\frac{gn^2 \Delta t}{R^{4/3}} |V| + \left(\frac{Q}{A_2} - \frac{Q}{A_1} \right) \frac{\Delta t}{L} \right]_t + w \left[-g \bar{A} \frac{(H_2 - H_1)}{L} \Delta t \right]_{t+\Delta t} + V \Delta A \quad (4.2.26)$$

En esta ecuación los valores de V , A , y R son un resultado de la ponderación de dichos valores en el inicio, la mitad y el final del conducto. Para el primer paso de tiempo estos valores son iguales a los del paso inmediatamente anterior. El valor que se adopta para w es de 0,55. Los únicos datos desconocidos en la ecuación son $Q_{t+\Delta t}$ son, H_2 y H_1 , ya que las variables V , R , A , A_1 y A_2 se pueden expresar en función de Q y H . Para relacionar Q y H se utiliza la ecuación de continuidad en el nodo, como se muestra en la siguiente expresión:

$$H_{n+1} = H_n + \Delta t \frac{\sum [Q_t + Q_{t+\Delta t}]}{[AS_t + AS_{t+\Delta t}]} \quad (4.2.27)$$

4.3. Modelamiento con Elementos Finitos

En esta sección de la tesis se presentan la solución de las ecuaciones de *Saint Venant* unidimensionales que representan el flujo no permanente en redes de alcantarillado de sistemas de drenaje pluvial y su transformación a ecuaciones algebraicas utilizando el *Método de Elementos Finitos (FEM)*. Este método, desarrollado y aplicado principalmente para problemas estructurales, da óptimos resultados para ecuaciones elípticas o parabólicas e hiperbólicas, como son las ecuaciones de Saint Venant. Tanto la integración espacial y temporal en su totalidad se hace mediante el Método de Elementos Finitos.

4.3.1. Descripción de los elementos Finitos

El *Método de Elementos Finitos* consiste en dividir uno o varios cuerpos (continuos) en una serie de subelementos que no se intercepten entre si. Estos subdominios se conocen como elementos finitos y en cada uno se encuentran definidas ecuaciones que caracterizan la naturaleza del problema que se requiere resolver en el continuo. El método de elementos finitos se basa en resolver simultáneamente una serie de ecuaciones parciales que se originan en los subdominios y que describen el comportamiento físico del problema. El *MEF* es un método numérico de aproximación de la realidad y no lleva a la solución exacta de todas las ecuaciones que describen el problema, como si lo hace la física tradicional. Por esta razón se debe tomar en cuenta que entre más se discretice el continuo (i.e. más pequeña sea la malla de subconjuntos o elementos) se lleva a una mejor aproximación a la realidad logrando que la solución numérica converja con esta.

Al dividir un continuo en elementos de menor tamaño se genera una red de puntos conocidos como puntos concatenados por una malla programada de acuerdo al material y a las propiedades del conducto. Esta malla logra definir en cada nodo todas las características necesarias para el análisis como las propiedades del fluido y del conducto de drenaje. La definición de estas propiedades se realiza en la primera etapa de los programas especializados en el manejo de elementos finitos. Esta etapa se conoce como *Pre-proceso* y va acompañada por la etapa de *Cálculo* y del *Post-proceso*.

En la etapa de *Pre-proceso*, además de las propiedades de los materiales se deben definir la geometría, las condiciones de carga y de frontera que aplican así como las interacciones de los entre los objetos (o superficies) si el algoritmo de solución lo permite. En la etapa del cálculo, el programa recibe la información consignada por el usuario en la etapa del *Pre-proceso* y ejecuta todos los algoritmos propios de cada software. Esta etapa es donde el verdadero valor de los programas especializados se encuentra. Por último la etapa de *Post-proceso* recibe los datos de salida del Cálculo y por medio de una interfase gráfica

facilita la observación y comparación de los resultados. Entre los datos de los resultados que la etapa de Cálculo entrega al Post-proceso se encuentran los niveles de agua y los caudales de la red de drenaje.

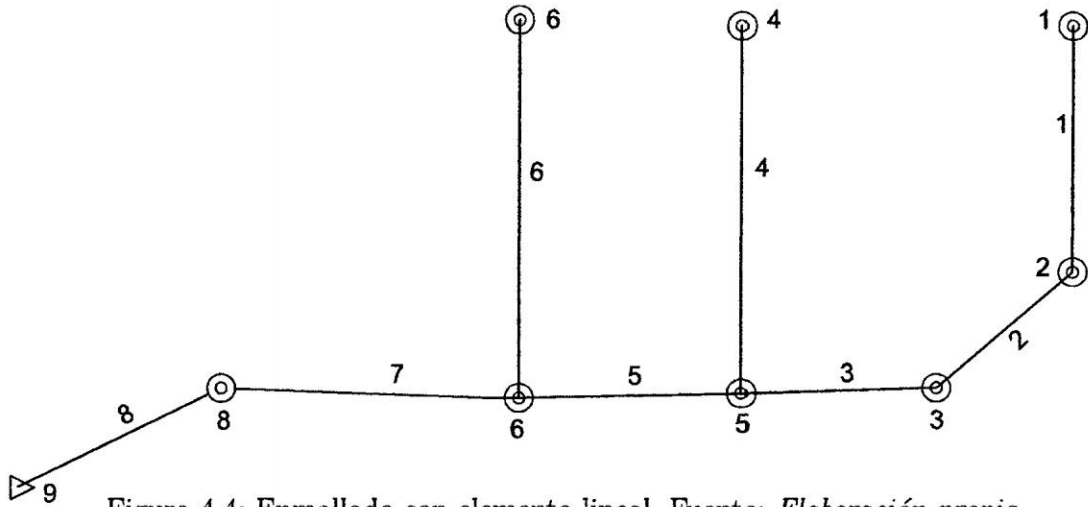


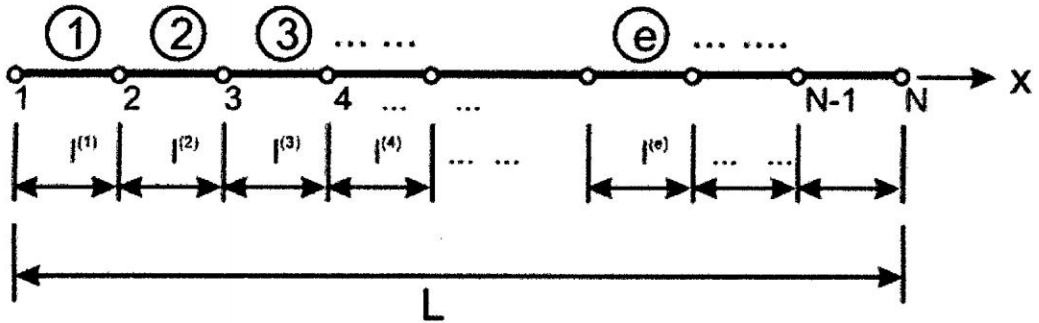
Figura 4.4: Enmallado con elemento lineal. Fuente: *Elaboración propia*

El sistema físico se divide en series de elementos que están conectados por un número discreto de puntos nodales; este proceso se denomina “*discretización*”. Discretización típica de un sistema de conductos de drenaje se muestran en la Figura 4.4. En estos casos se identifican los elementos por medio de números. El problema de la red de alcantarillado contiene *8 elementos y 9 nodos*.

4.3.1.1. Elemento unidimensional

Se supone que los elementos (*conductos*) están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos en adelante nodos, situados en sus contornos como se muestra en la Figura 4.5. El nivel de agua de estos nodos son las incógnitas fundamentales del problema.

El continuo se divide, mediante líneas imaginarias, en un número de “*elementos finitos*”. En todos los casos, el número de interconexiones entre un “*elemento finito*” cualquiera

Figura 4.5: Elemento tubería 1D. Fuente: *Elaboración propia*

rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito. Es difícil, por consiguiente, ver a primera vista como pueden discretizarse problemas de este tipo. Al discretizar una tubería se obtiene varios tramos o elementos como se muestra en la Figura 4.6, donde los nodos de color rojo representan el inicio y final de cada tubería, mientras los nodos de color negro son los nodos internos generados.

Figura 4.6: Malla de elementos finitos 1D. Fuente: *Elaboración propia*

4.3.1.2. Condiciones de contorno

Para solucionar el modelo matemático de las ecuaciones de *Saint - Venant* se requiere de la formulación de las condiciones de contorno en diferentes puntos de la red de alcantarillado de drenaje pluvial. Las condiciones de contorno para los nodos externos de la red son generalmente *hidrogramas* (*aguas arriba*) y *limnigramas* (*aguas abajo*). Para los nodos internos de la red, se permite la inclusión de *hidrogramas*; en el esquema de solución se debe contar con otras condiciones de contorno que permitan una conectividad coherente entre los conductos que convergen en estos nodos.

En el caso de las condiciones de contorno en los nodos internos, se requiere una ecuación de *continuidad de masa* y otra de *conservación de energía* que correlacione los niveles de agua al interior del nodo en cuestión, en donde se tiene en cuenta la pérdida menor en la cámara de inspección.

La calidad de los resultados del modelo depende altamente de los valores impuestos como *condiciones de contorno*; si estos no representan el fenómeno real correctamente los resultados del modelo nunca serán correctos.

4.3.1.3. Condiciones iniciales

El cálculo hidrodinámico parte de las condiciones de flujo en el sistema para el tiempo $t = 0$. La forma de establecer las condiciones iniciales adecuadas es encontrar las condiciones de flujo en todos los conductos de la red de alcantarillado por medio de la *ecuación de flujo gradualmente variado*:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o \cos \theta - S_f}{\cos \theta - Fr^2} \quad (4.3.1)$$

Esta ecuación describe los diferentes perfiles de la superficie del agua para flujo gradualmente variado. Esta ecuación tiene las siguientes restricciones:

- El flujo debe ser permanente.
- La rugosidad del conducto debe ser constante a lo largo del perímetro mojado.
- El canal es prismático; es decir, el canal tiene alineamiento y sección transversal constante.

4.3.1.4. Modelo general de Elementos Finitos

Aquí se resuelve las ecuaciones de *Saint Venant unidimensionales* y su transformación a ecuaciones algebraicas utilizando el *Método Elementos Finitos*.

4.3.1.4.1. Ecuaciones gobernantes

El comportamiento hidráulico de *redes de alcantarillado de drenaje pluvial* operando bajo condiciones de flujo no permanente está descrito por las ecuaciones desarrolladas por *Barré de Saint Venant*. Estas ecuaciones son el resultado de la aplicación de los principios de *continuidad* y de *conservación de momentum* lineal sobre un volumen de control definido. Estas ecuaciones son: *Ecuación de continuidad* y *ecuación de momentum*.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \quad (4.3.2)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (4.3.3)$$

Las ecuaciones (4.3.2) y (4.3.3), se resolverán utilizando el Método de Elementos Finitos como veremos a continuación.

4.3.1.4.2. Formulación con el Método de Elementos Finitos

Se inicia el estudio con la discretización del dominio (*conductos*) en elementos finitos lineales de longitud constante, unidos por nodos en sus extremos. En cada elemento, las variables dependientes se interpolan según las ecuaciones siguientes:

$$H(x) = \sum_{i=1}^M N_i(x) H_i = [N][H] \quad (4.3.4)$$

$$Q(x) = \sum_{i=1}^M N_i(x)Q_i = [N][Q] \quad (4.3.5)$$

Donde M es el número de nodos por elemento. Aplicando en *método de Galerkin* a la ecuación (4.3.2) y (4.3.3) se tiene:

$$\int_{\Omega} N^T \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q \right] d\Omega = 0 \quad (4.3.6)$$

$$\int_{\Omega} N^T \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f \right) \right] d\Omega = 0 \quad (4.3.7)$$

Desarrollando

$$\int_{\Omega} N^T \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} N^T \frac{\partial Q}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} N^T q d\Omega = 0 \quad (4.3.8)$$

$$\int_{\Omega} N^T \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} N^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) d\Omega + \int_{\Omega} gN^T A \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} gN^T A (S_f) d\Omega = 0 \quad (4.3.9)$$

Se sabe que las derivadas espaciales de H y Q , están dadas por.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \{H\} = [B]\{H\}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \{Q\} = [B]\{Q\} \quad (4.3.10)$$

Reemplazando las ecuaciones 4.3.4, 4.3.5 y 4.3.10 en 4.3.8 y 4.3.9 y reordenando convenientemente

$$\int_{\Omega} \{N^T\} [N] \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \{N^T\} [B] \{Q\} d\Omega - \int_{\Omega} \{N^T\} q d\Omega = 0 \quad (4.3.11)$$

$$\int_{\Omega} \{N^T\} [N] \frac{\partial Q}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\beta Q}{A} \right) \{N^T\} [B] \{Q\} d\Omega + \int_{\Omega} gA \{N^T\} [B] \{H\} d\Omega + \int_{\Omega} gS_f \{N^T\} A d\Omega = 0 \quad (4.3.12)$$

La ecuación 4.3.11 y 4.3.12 se puede escribir mas convenientemente como

$$[C] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} + [K] \{Q\} - q\{f\} = 0 \quad (4.3.13)$$

$$[C] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} + \left(\frac{\beta Q}{A} \right) [K] \{Q\} + gA[K1] \{H\} + gS_f A \{f\} = 0 \quad (4.3.14)$$

Donde:

$$\begin{aligned} [C] &= \int_{\Omega} \{N^T\} \{N\} d\Omega \\ [K] &= \int_{\Omega} \{N^T\} [B] d\Omega \\ \{f\} &= \int_{\Omega} \{N^T\} d\Omega \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Para la obtención de las matrices $[C]$ y $[K]$ se modelará el problema considerando un *elemento lineal unidimensional*, tanto para la solución espacial como temporal.

4.3.1.4.3. Elemento lineal unidimensional

El proceso de modelización es dividirlo un continuo en un sistema equivalente de pequeños cuerpos o unidades (*elementos finitos*) interconectados en los puntos comunes a dos o más elementos (puntos nodales o nodos. En la presente tesis se tomara con un elemento a un conducto de la red de alcantarillado del drenaje pluvial y se modelara con un esquema de elemento finito unidimensional.

Consideremos un elemento lineal típico con nodos inicial y final i y j con los niveles de agua y caudales correspondiente denotados por H_i , H_j y Q_i , Q_j respectivamente.

La variación de la altura de presión y la velocidad lineal en el elemento es representado por:

$$\begin{aligned} H(x) &= a_1 + a_2x \\ Q(x) &= b_1 + b_2x \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Donde H , es el nivel de agua en el conducto y Q es el caudal, en cualquier posición x y los parámetros a y b son constantes. Puesto que hay dos constantes arbitrarias en la representación lineal, exige solamente dos nodos para determinar los valores de a y b

Niveles de agua nodales

$$\begin{aligned} H_i &= a_1 + a_2x_i \\ H_j &= a_1 + a_2x_j \end{aligned} \tag{4.3.17}$$

Caudales nodales

$$\begin{aligned} Q_i &= b_1 + b_2x_i \\ Q_j &= b_1 + b_2x_j \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Representando en forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \tag{4.3.19}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i \\ 1 & x_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.20)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 4.3.19 y 4.3.20 se obtiene

$$a_1 = \frac{H_i x_j - H_j x_i}{x_j - x_i} \quad a_2 = \frac{H_j - H_i}{x_j - x_i} \quad (4.3.21)$$

$$b_1 = \frac{Q_i x_j - Q_j x_i}{x_j - x_i} \quad b_2 = \frac{Q_j - Q_i}{x_j - x_i} \quad (4.3.22)$$

Sustituyendo los valores de a_1 , a_2 , b_1 y b_2 en la ecuación 4.3.16 y simplificando los coeficientes de H_i , H_j , Q_i y Q_j .

$$H = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] H_i + \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] H_j \quad (4.3.23)$$

$$Q = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] Q_i + \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] Q_j \quad (4.3.24)$$

Obsérvese las funciones de forma tanto para los niveles de agua como para los caudales son las mismas, por lo tanto a partir de la ecuación 4.3.23 y 4.3.24, las funciones de forma en coordenadas globales serán

$$N_i = \left[\frac{x_j - x}{x_j - x_i} \right] \quad N_j = \left[\frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right] \quad (4.3.25)$$

Las funciones de forma también se pueden representar en coordenadas locales de la siguiente manera:

$$N_i = \left[\frac{L - x}{L} \right] \quad N_j = \left[\frac{x}{L} \right] \quad (4.3.26)$$

La variación del nivel de agua y los caudales en el elemento podemos escribir de la siguiente manera

$$H = N_i H_i + N_j H_j = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.27)$$

$$Q = N_i Q_i + N_j Q_j = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.28)$$

Las ecuaciones 4.3.27 y 4.3.28 se pueden reescribir como

$$H = [N]\{H\} \quad Q = [N]\{Q\} \quad (4.3.29)$$

Donde:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix}, \quad \{H\} = \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix}, \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.30)$$

En elementos finitos, la interpolación dentro de cada elemento se plantea mediante las *funciones de forma*. Así, si queremos interpolar la función H en función del valor de dicha función en los nodos que definen el elemento (H_i), tendremos que buscar las funciones de forma N_i y N_j , donde $[N]$ es la matriz de funciones de forma y $\{H^e\}$ es el vector que contiene el valor de la función incógnita H en los nodos del elemento. Las funciones de interpolación, y en consecuencia las funciones de forma, no pueden elegirse arbitrariamente. Existen ciertos criterios derivados de orden polinómico, completitud y de continuidad entre elementos que deben cumplirse para asegurar la convergencia a la solución exacta a medida que el tamaño de los elementos tiende a cero. La figura 4.7 muestra la variación de las funciones de forma y su derivadas en un elemento lineal. También se muestra

una variación lineal típica de los niveles de agua y los caudales. Como hemos visto, las derivadas de las funciones de forma es constante en un elemento.

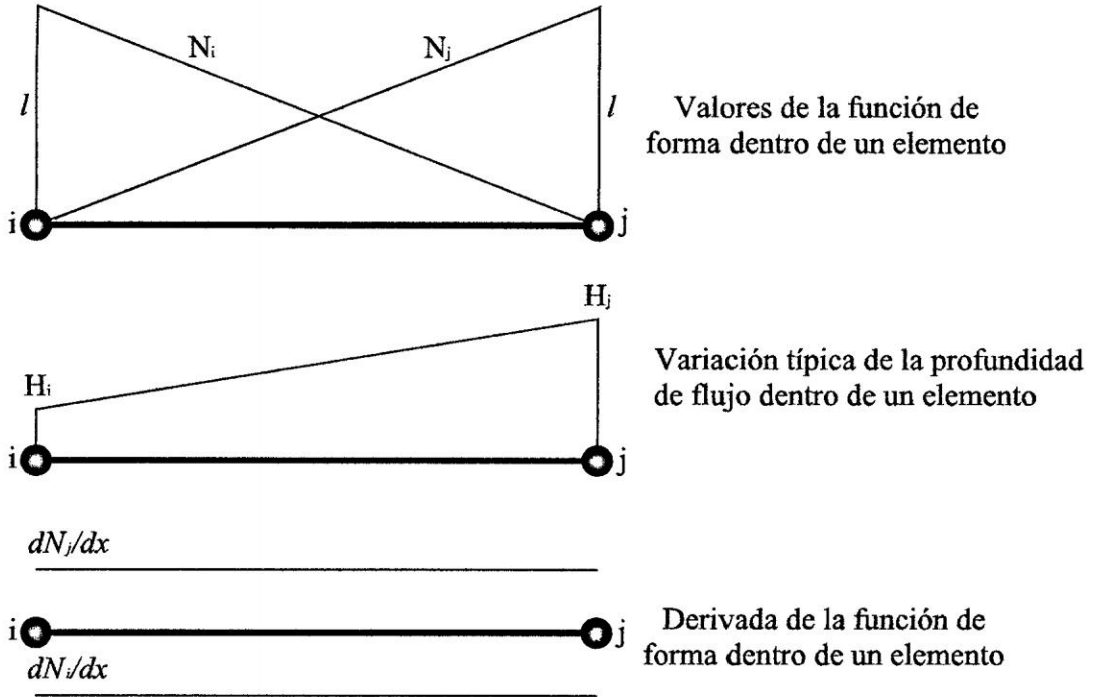


Figura 4.7: Variación de las funciones de forma, profundidad de flujo, velocidades y sus derivadas en un elemento lineal. Fuente: *Elaboración propia*

De la ecuación 4.3.27, el gradiente del nivel de agua es calculada como

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} H_j = -\frac{1}{x_j - x_i} H_i + \frac{1}{x_j - x_i} H_j \quad (4.3.31)$$

ó

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_j - x_i} & \frac{1}{x_j - x_i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.32)$$

Pero se sabe que la longitud del elemento es $L = x_j - x_i$, entonces la ecuación (4.3.32) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.33)$$

De manera análoga el gradiente del caudal se deriva de la ecuación (4.3.24):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_i \\ Q_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.34)$$

Como las funciones de forma tanto para los niveles de agua y los caudales en la red de alcantarillado de drenaje pluvial son las mismas, las derivadas de estas también serán lo mismo, como se puede apreciar en las ecuaciones (4.3.33) y (4.3.34). Precisaremos la matriz $[B]$, como la matriz de derivadas, así:

$$[B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.35)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = [B]\{H\} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = [B]\{Q\} \quad (4.3.36)$$

4.3.1.4.4. Obtención de las matrices

Consecuentemente obtendremos las matrices $[C]$, $[K]$ y $\{f\}$ para cada elemento, es decir la solución de las ecuaciones (4.3.15) de la siguiente manera:

Para $[C]$

$$[C] = \int_{\Omega} \{N^T\}[N]d\Omega = \int_0^L \{N^T\}[N]dx = \int_0^L \begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j \\ N_i N_j & N_j^2 \end{bmatrix} dx \quad (4.3.37)$$

Integrando se tiene.

$$[C] = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.3.38)$$

Para $[K]$

$$[K] = \int_{\Omega} \{N^T\}[B]d\Omega = \int_0^L \{N^T\}[B]dx \int_0^L \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx \quad (4.3.39)$$

Integrando se tiene.

$$[K] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.40)$$

Para $\{f\}$

$$\{f\} = \int_{\Omega} \{N^T\}d\Omega = \int_0^L \{N^T\}dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} dx \quad (4.3.41)$$

Integrando espacialmente se tiene:

$$\{f\} = \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.42)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.38), (4.3.40) y (4.3.42) en (4.3.13) y (4.3.14) se tiene la solución espacial de las ecuaciones diferenciales que gobierna el fenómeno del flujo no permanente en redes de drenaje pluvial.

$$\frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\} - \frac{Lq}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.3.43)$$

$$\frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta Q}{A} \right) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{Q\} + \frac{gA}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \{H\} + \frac{gS_f AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.3.44)$$

Hasta aquí se ha desarrollado la *solución espacial* de la ecuación de *Saint Venant unidimensional* que gobierna el flujo de agua en una red de alcantarillado de drenaje pluvial, sin embargo el comportamiento del flujo no permanente en este tipo de sistemas amerita la *solución temporal*, para tal fin se utilizará el *Método de Diferencias Finitas (MDF)* y el *Método De elementos Finitos (MEF)*, la solution temporal por ambos métodos son similares cuando se trata de problemas unidimensionales.

4.3.1.4.5. Solución temporal con Elementos Finitos (MEF)

Como el dominio del tiempo es infinito, inevitablemente lo restringiremos a un incremento de tiempo finito Δt y relacionaremos las condiciones iniciales en t_n (antes) con aquellas en el tiempo $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, obteniendo lo que se llama *relaciones de recurrencia*. La discretización del dominio *tiempo-espacio* podría ser considerada simultáneamente. Esto, sin embargo, no ofrece en general ventaja alguna, ya que debido a la regularidad del dominio temporal no se precisan elementos irregulares tiempo-espacio. De hecho si se utilizan funciones de forma tipo producto, el proceso sería naturalmente idéntico al obtenido usando primero una semidiscretización en el espacio seguida por la discretización en el tiempo. Una excepción a esto se da en los problemas predominantemente convectivos, donde discretizaciones simultaneas pueden ser deseables.

Algoritmos de paso único

a). Método de Galerkin (Residuos ponderados)

Consideremos las ecuaciones (4.3.13) y (4.3.14) que pueden representar una aproximación semidistancia al problema de flujo no permanente en redes de tuberías, o de hecho ser en si misma un sistema discreto. El objetivo es obtener una aproximación para H_{n+1} , dados el valor de H_n y el vector de cargas $\{f_i\}$ actuando en el intervalo de tiempo Δt . De la forma usada en todas las aproximaciones de elementos finitos, suponemos que H varia en el intervalo de forma polinómica y tomamos aquí la serie de mas bajo orden (lineal), tal como se muestra en la Figura 4.8, y escribimos

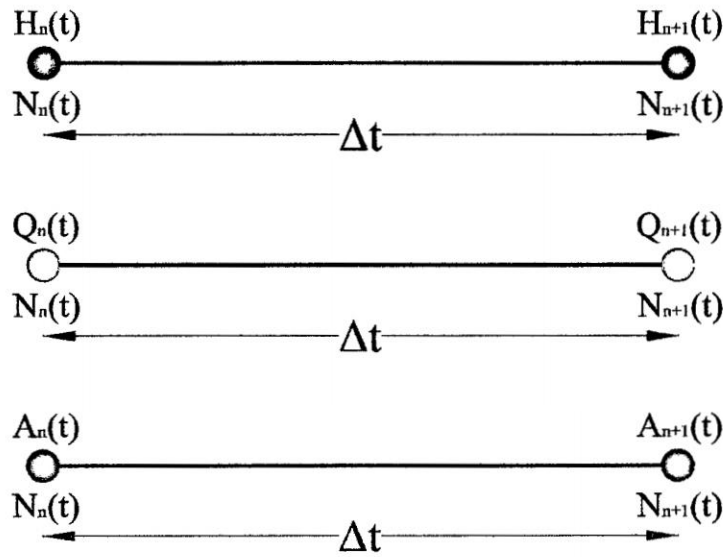


Figura 4.8: Discretización del tiempo en el intervalo n y $n + 1$. Fuente: *Elaboración propia*

$$\begin{aligned}
 H(t) &= N_n(t)H_n(t) + N_{n+1}(t)H_{n+1}(t) \\
 Q(t) &= N_n(t)Q_n(t) + N_{n+1}(t)Q_{n+1}(t) \\
 A(t) &= N_n(t)A_n(t) + N_{n+1}(t)A_{n+1}(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.3.45}$$

Para deducir las *funciones de forma* para la solución temporal se ha planteado una *función de interpolación lineal* como se vé en la ecuación (4.3.46).

$$\begin{aligned} H_n &= a + bt_n \\ H_{n+1} &= a + bt_{n+1} \end{aligned} \quad (4.3.46)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & t_n \\ 1 & t_{n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.47)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones y reordenando y de manera análoga para el caudal

$$\begin{aligned} H(t) &= \left[\frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} \right] H_n + \left[\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \right] H_{n+1} \\ Q(t) &= \left[\frac{t_{n+1} - t}{t_{n+1} - t_n} \right] Q_n + \left[\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \right] Q_{n+1} \end{aligned} \quad (4.3.48)$$

Obviamente la simulación del flujo no permanente en una red de alcantarillado comienza en $t = \Delta t$, sobre el analisis estacionario realizado previamente para $t = 0$. por lo tanto el tiempo incisal es *cero*. Teniendo esta consideración las funciones de forma se puede expresar en función de Δt .

$$\begin{aligned} H(t) &= \left[1 - \frac{t}{\Delta t} \right] H_n + \left[\frac{t}{\Delta t} \right] H_{n+1} = \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \\ Q(t) &= \left[1 - \frac{t}{\Delta t} \right] Q_n + \left[\frac{t}{\Delta t} \right] Q_{n+1} = \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.49)$$

Por lo tanto la función de forma para solución temporal con el FEM será:

$$N = \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{t}{\Delta t} & \frac{t}{\Delta t} \end{bmatrix} \quad (4.3.50)$$

De manera más compacta se puede expresar de la siguiente manera:

$$[H] = [N]\{H\} \quad [Q] = [N]\{Q\} \quad (4.3.51)$$

Las derivadas de H y Q con respecto al tiempo serán:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \\ \frac{\partial Q(t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} N_n(t) & N_{n+1}(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.52)$$

Denotando la matriz G como la derivada de la función de forma con respecto al tiempo se tiene:

$$[G] = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.53)$$

En consecuencia la ecuación (4.3.52) se puede expresar de manera más compacta así.

$$\frac{\partial H}{\partial t} = [G]\{H\} \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = [G]\{Q\} \quad (4.3.54)$$

Aplicando el método de Galerkin a la ecuación (4.3.13)

$$\int_0^{\Delta t} [N]^T \left[[C] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} + [K] \{Q\} - q \{f\} \right] dt = 0 \quad (4.3.55)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.51) y (4.3.54) en (4.3.55) y desarrollando

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} [N]^T [C] \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} dt + \int_0^{\Delta t} [N]^T [K] \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} [N]^T q \{f\} dt &= 0 \\ \int_0^{\Delta t} [C] [N]^T \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} \right\} dt + \int_0^{\Delta t} [K] [N]^T \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} q [N]^T \{f\} dt &= 0 \\ \int_0^{\Delta t} [C] [N]^T [G] \{A\} dt + \int_0^{\Delta t} [K] [N]^T [N] \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} q [N]^T \{f\} dt &= 0 \end{aligned}$$

Integrando cada término con respecto al tiempo se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} [C] [N]^T [G] \{A\} dt &= \frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} \\ \int_0^{\Delta t} [K] [N]^T [N] \{Q\} dt &= \frac{\Delta t}{6} [K] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} \\ \int_0^{\Delta t} q [N]^T \{f\} dt &= \frac{\Delta t q}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Finalmente la solución espacial y temporal (solución completa) de la ecuación de continuidad con el *Método de Elementos Finitos* se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t [K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t q}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.3.57)$$

De la misma forma para la ecuación de momentum, aplicando el *método de Galerkin* a la ecuación (4.3.14), se tendrá la solución temporal para finalmente obtener la solución completa con el Método de Elementos Finitos.

$$\int_0^{\Delta t} [N]^T \left[[C] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} + \left(\frac{\beta Q}{A} \right) [K] \{Q\} + gA[K1] \{H\} + gS_f A \{f\} \right] dt = 0 \quad (4.3.58)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.3.51) y (4.3.54) en (4.3.58) y desarrollando se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\Delta t} [N]^T [C] \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} dt + \int_0^{\Delta t} [N]^T \left(\frac{\beta Q}{A} \right) [K] \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} [N]^T gA[K] \{H\} dt \\ + \int_0^{\Delta t} [N]^T gS_f A \{f\} dt = 0 \\ \int_0^{\Delta t} [C][N]^T \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} \right\} dt + \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\beta Q}{A} \right) [K][N]^T \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} gA[K][N]^T \{H\} dt \\ + \int_0^{\Delta t} gS_f A [N]^T \{f\} dt = 0 \\ \int_0^{\Delta t} [C][N]^T [G] \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} \left(\frac{\beta Q}{A} \right) [K][N]^T [N] \{Q\} dt + \int_0^{\Delta t} gA[K][N]^T [N] \{H\} dt \\ + \int_0^{\Delta t} gS_f A [N]^T \{f\} dt = 0 \end{aligned}$$

Integrando cada término de la *ecuación de momentum* con respecto al tiempo se obtiene:

$$\int_0^{\Delta t} [C][N]^T [G] \{Q\} dt = \frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.59)$$

$$\int_0^{\Delta t} \left(\frac{\beta Q}{A} \right) [K][N]^T [N] \{Q\} dt = \left(\frac{\beta Q}{A} \right) \frac{[K] \Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.60)$$

$$\int_0^{\Delta t} gA[K][N]^T[N]\{H\}dt = \frac{gA\Delta t[K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.61)$$

$$\int_0^{\Delta t} gS_f A[N]^T\{f\}dt = \frac{gS_f A}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (4.3.62)$$

Reemplazando los resultados de las ecuaciones (4.3.59),(4.3.60), (4.3.61) y (4.3.62) en (4.3.14) y reordenando convenientemente obtenemos la solución espacial y temporal de la *ecuación de momentum* de Saint Venant por el Método de Elementos Finitos.

$$\begin{aligned} \frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \left(\frac{\beta Q}{A}\right) \frac{[K]\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \\ \frac{gA\Delta t[K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{gS_f A}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.63)$$

A partir de las ecuaciones (4.3.57) y (4.3.63) podemos establecer ecuaciones de recurrencia para la solución de las variables de H_{n+1} y Q_{n+1} , teniendo como solución previa a H_n y Q_n . Los valores del area A , depende del tipo de sección adoptado para cada conducto de la red de alcantarillado de drenaje pluvial, pudiendo ser tipo circular, rectangular, trapezoidal, caja, herradura, etc. El program **SMAP V2015** como resultado computacional del presente trabajo de investigación incluye diferentes tipos de secciones para solución del sistema de drenaje.

4.4. Programación en MATLAB

En este trabajo de investigación se presenta un programa informático sencillo y eficiente que permite el análisis y la simulación hidráulica de redes de alcantarillado de drenaje

pluvial con el *Método de Elementos Finitos*, bajo el sistema de organización mostrada en el diagrama de flujo (Figura 4.9). Aquí presentamos los alcances generales del programa que hemos elaborado con la denominación *SMAP v2015*¹. El programa *SMAP v2015* se ha desarrollado en el interfaz gráfica de usuario *GUIDE*² de *MATLAB*³, principalmente para la validación del modelo con el Método de Elementos Finitos para el problema desarrollado en este trabajo.

4.4.1. Modelo matemático

Para la codificación computacional y la solución ordenada, aquí se resumirá el modelo matemático expresado en Elementos Finitos para la solución del problema de flujo no permanente en redes de drenaje pluvial. Las ecuaciones (4.4.1) y (4.4.2), representan la solución de las ecuaciones gobernantes del problema abordado.

$$\frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t[K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t q}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \left(\frac{\beta Q}{A}\right) \frac{[K]\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \\ \frac{gA\Delta t[K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{gS_f A}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

¹*SMAP* es la sigla adoptada en la presente tesis de la expresión *Sistema de Modelamiento de Aguas Pluviales*

²*GUIDE* es un entorno de programación gráfica que ofrece Matlab para poder realizar y ejecutar programas de simulación a medida de forma simple, tiene las características básicas de todos los programas visuales como Visual Basic o Visual C++.

³*MATLAB* (abreviatura de *MATrix LABORatory*, "Laboratorio de Matrices") es una herramienta de software matemático que ofrece un entorno de desarrollo integrado (IDE) con un lenguaje de programación propio (lenguaje M). Está disponible para las plataformas Unix, Windows, Mac OS X y GNU/Linux.

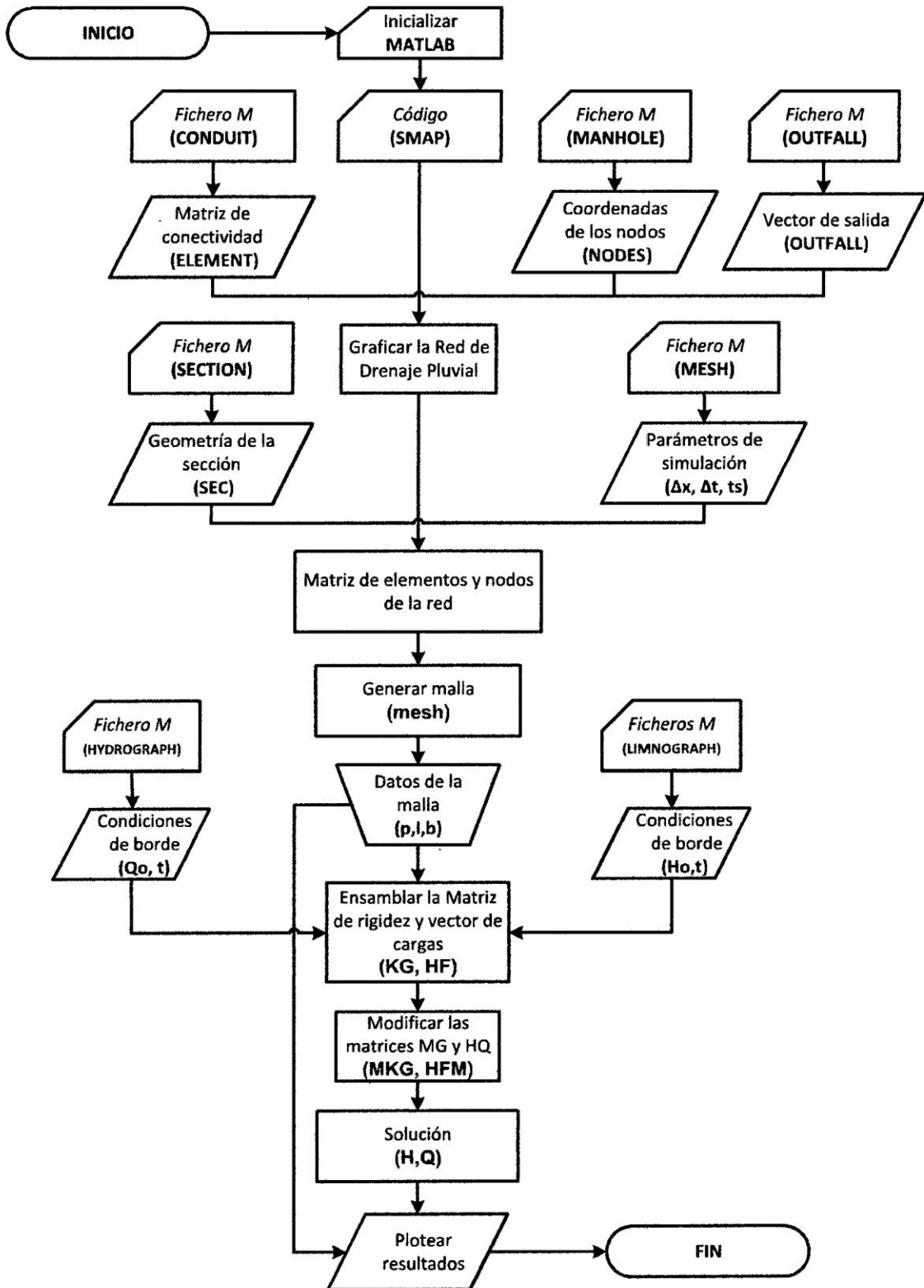


Figura 4.9: Diagrama de flujo general del código *SMAP-V2015* en MATLAB. Fuente: *Elaboración propia*

Aplicando estas ecuaciones para cada tramo de la red de drenaje se obtiene la matriz global del sistema y con respecto al tiempo se soluciona de manera recursiva has obtener la solución final o completa en todos lo nodos del sistema.

4.4.2. Descripción del programa *SMAP V2015*

En el Apéndice A, se presenta un pequeño manual de este programa; sin embargo en esta sección describimos sus alcances generales y sus limitaciones respectivas.

En la Figura 4.11 se muestra la ventana principal del programa *SMAP V2015*, los menús, barra de herramientas y las funciones de control se describen de manera general.

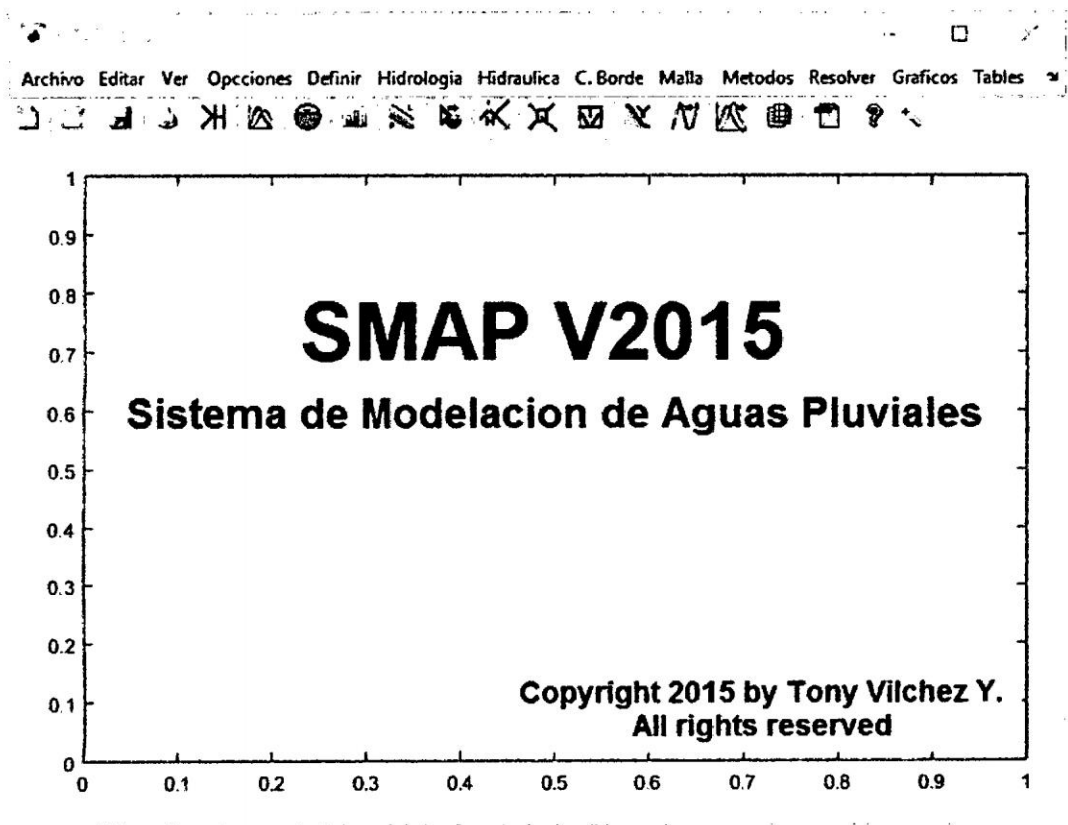


Figura 4.10: Portada principal del programa *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*.

- Interfaz de usuario y edición gráfica

- Interfaz gráfica autónoma incluida.
 - Modificación de la geometría.
 - Zoom dinámico.
- **Interoperabilidad y conexión a datos externos**
 - Importa y exporta bases de datos (Excel, blog de notas)

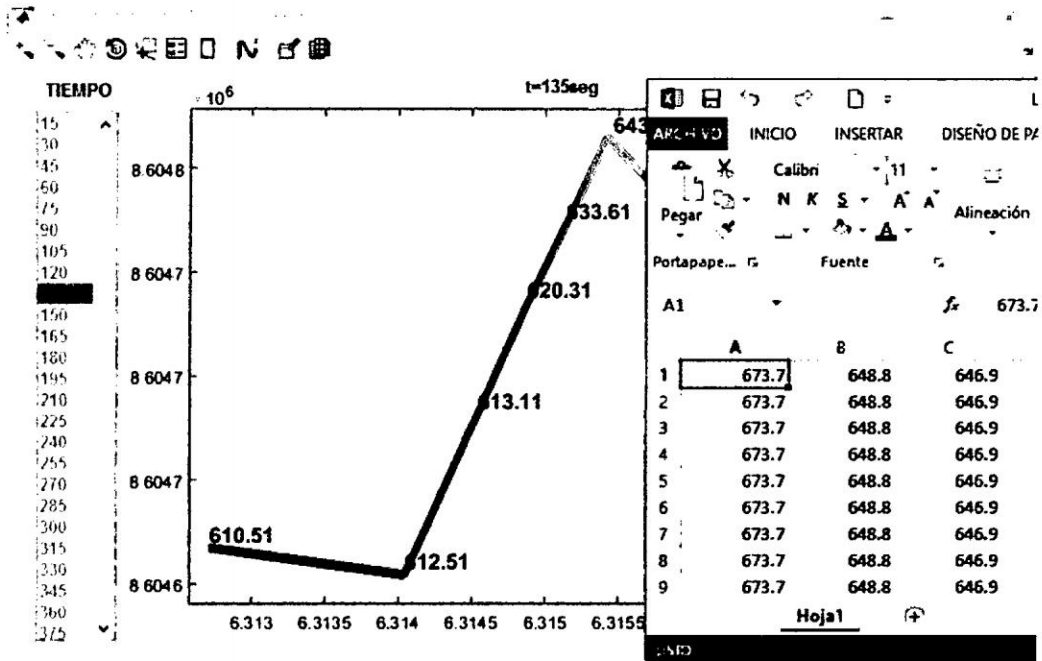


Figura 4.11: Integración del programa *SMAP V2015* con con Excel. Fuente: *Elaboración propia*

- **Administración del Modelo**
 - Reportes tabulares.
 - Bibliotecas de ingeniería personalizada.
 - Revisión automática de topología de red.
 - Total flexibilidad con las opciones de proyecto.
- **Hidráulica**

- Método de Elementos Finitos para solución del flujo no permanente.
- Motor de cálculo ecuaciones no lineales (Newton Raphson)

- **Presentación de Resultados**
 - Gráficos estáticos y dinámicos con historial.
 - Reportes tabulares avanzados con Excel.
 - Generación de archivos de salida.

- **Elementos Hidráulicos**
 - Conductos
 - Pozos de visita.
 - Estructuras de vertido.

4.4.2.1. Ingreso de datos

El ingreso de datos de la geometría de la red de drenaje pluvial en el programa *SMAP V2015* se hace importando datos de los conductos, pozos de visita y estructuras de vertido a partir de archivos de bloc de nota o Excel, donde se ordenada adecuadamente estos datos. Así mismo el programa cuenta con una base de datos de los tipo de secciones que alternativamente se puede escoger para cada conducto.

4.4.2.2. Discretización o enmallado

Dado que la solución de la ecuaciones gobernantes del flujo de agua en una red de drenaje pluvial se hace en una una dimension (1D), el program *SMAP V2015*, asume automáticamente como la malla inicial los elementos y nodos ingresados en la etapa de pre-proceso,

es decir un conducto es considerado como un elemento y los de este son los nodos. Considerando esta discretización el programa obtiene las matrices y vectores representativos para cada elemento y el sistema total.

4.4.2.3. Solución

Desde la portada principal del programa se accede a las funciones de la solución numérica programada en procedimientos *m.File* (Archivos varios), que son los encargados de solucionar el problema del flujo no permanente de la red de drenaje pluvial.

4.4.2.4. Visualización de los resultados

Del mismo modo que en el caso anterior, desde la ventana principal se accede a las funciones de la visualización gráfica en instrucciones *m.File*, que son los encargados de mostrar la red de drenaje pluvial, el enmallado, nodos y elementos de la red de drenaje, niveles de agua y cuadales en cada nodo de la malla. También se puede acceder a los reportes numéricos clasificados y ordenados según nodos y elementos y a la vez exportar a *Excel* para usos diferentes.

4.4.2.5. Alcances y limitaciones del programa

El programa aborda la solución numérica del flujo no permanente en sistemas de drenaje pluvial con el *Método de Elementos Finitos*. En la presente tesis las condiciones de borde que se implementaron en el software son:

- Hidrogramas (aguas arriba)
- Linnigramas (aguas abajo)

SMAP V2015 en su primera versión contiene la barra de menú, situada en la parte superior con una serie de menús despegables que contiene la mayoría de los comandos de *SMAP*, la barra de herramientas, situada por debajo de la barra de menú, incluye una serie de botones con comandos y procesos generales: gestión de archivos, opciones de zoom y desplazamiento y la zona de dibujo, que nos permite la visualización de la topología de la red.

4.4.3. Modelado de una red de drenaje pluvial

Con fines didácticos para esta presentación modelaremos una red de drenaje pluvial típico de 4 pozos de visita, 4 conductos y 1 estructura de salida como se muestra en la Figura 4.12.

Para este caso se pretende determinar en cualquier de los (nodos y conductos), niveles de agua y los caudales.

4.4.3.1. Construcción del modelo

El dominio de la red de drenaje pluvial se define mediante tres bloques de datos, es decir datos de los conductos o elementos, datos de los pozos de visita o nodos y de la estructura de salida.

La preparación y configuración de los datos de entrada al programa *SMAP v2015*, debe ser estrictamente en la forma como se indica, en caso contrario el programa no podrá procesar la información o se obtendrá resultados incorrectos.

Los datos de los *conductos* o elementos contienen la numeración de las conductos, la conectividad de las conductos (N_i =Nodo inicial, N_j =Nodo final), el diámetros de los conductos(D) y las pérdidas locales si es que hubiera en el tramo.

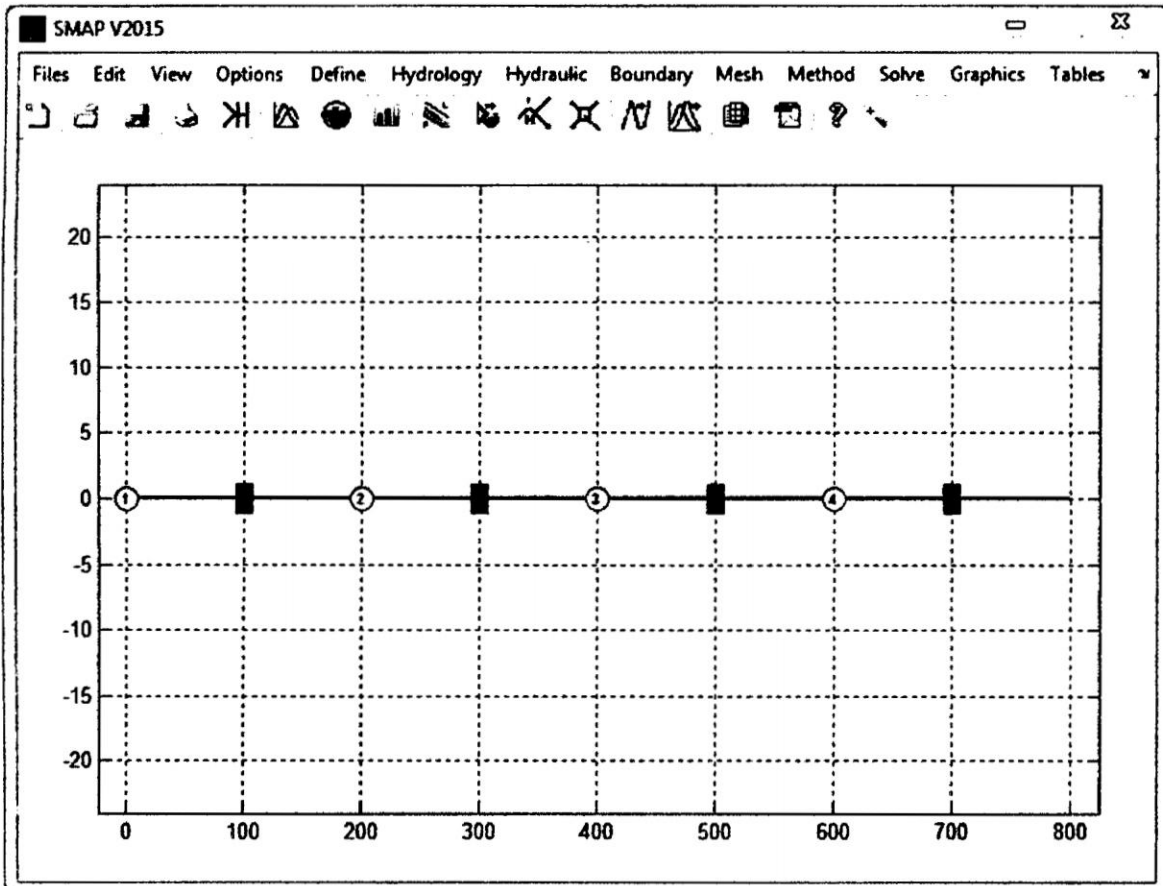


Figura 4.12: Modelo de red de drenaje pluvial. Fuente: *Elaboración propia*.

Los datos de los *nodos* generalmente contienen las coordenadas X , Y y Z de los nodos y así mismo los caudales de entrada como condiciones de borde relacionadas a estos nodos.

Los datos de las estructuras de salida o desagüe incluyen solamente la cota total de agua en ese nodo, el programa esta elaborado para multiples desagües.

4.4.3.2. Solución con *SMAP v2015*

El cálculo hidrodinámico parte de las condiciones de flujo en el sistema para el tiempo $t = 0$. La forma de establecer las condiciones iniciales adecuadas es encontrar las condiciones de flujo en todos los conductos de la red de alcantarillado por medio de la ecuación de *flujo gradualmente variado*:

	Conduit	Ni	Nj	Diameter (m)	nk
1	1	1	2	32	1.4900
2	2	2	3	32	1.4900
3	3	3	4	32	1.4900
4	4	4	5	32	1.4900

ACEPTAR SALIR

Figura 4.13: Datos de los conductos. Fuente: *Elaboración propia*.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o \cos \theta - S_f}{\cos \theta - Fr^2} \quad (4.4.3)$$

El Programa *SMAP V2015*, inicialmente calcula H y Q por medio de la ecuación de flujo gradualmente variado y luego aplica las ecuaciones discretizadas del Método de Elementos Finitos para la solución hidrodinámica de la red de drenaje pluvial.

MANHOLE

Nodo	X (m)	Y (m)	Z (m)	q (L/s)
1	0	0	0.4000	0
2	200	0	0.3000	0
3	400	0	0.2000	0
4	600	0	0.1000	0
5	800	0	0	0

ACEPTAR SALIR

Figura 4.14: Datos de los nodos o pozos de visita. Fuente: *Elaboración propia*

OUTFALL

Nodo	Cota (m)
5	0

ACEPTAR SALIR

Figura 4.15: Datos de las estructuras de salida o desagüe. Fuente: *Elaboración propia*

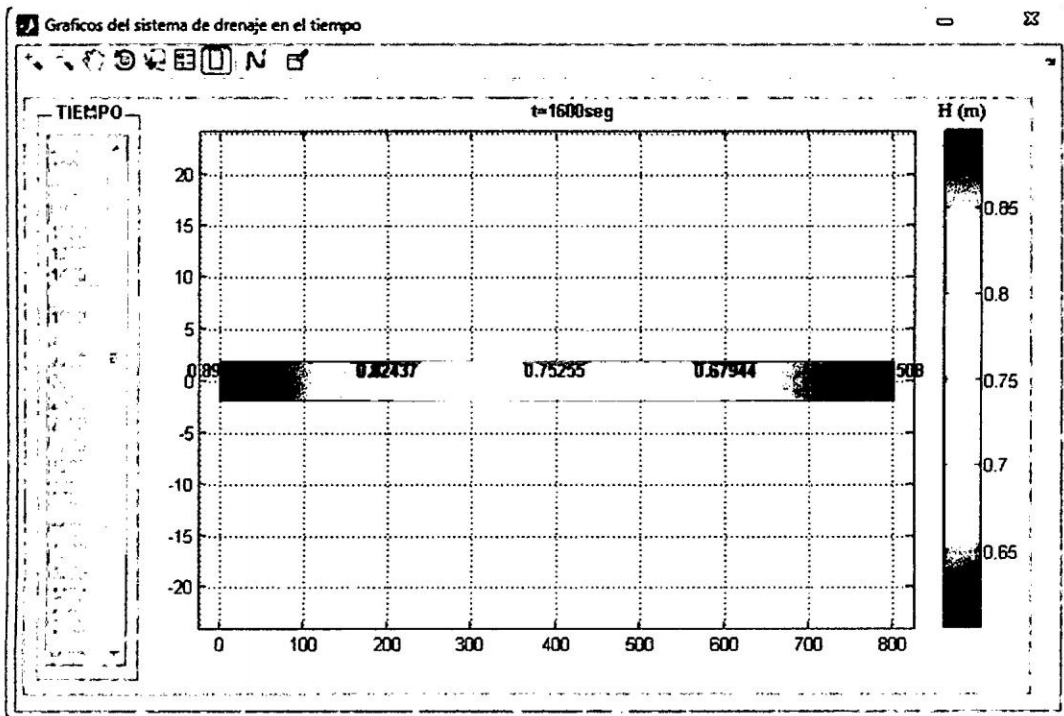


Figura 4.16: Niveles de agua en todos los nodos de la red para $t=1600\text{seg}$ SMAP V2015.
Fuente: *Elaboración propia*

4.4. Programación en MATLAB

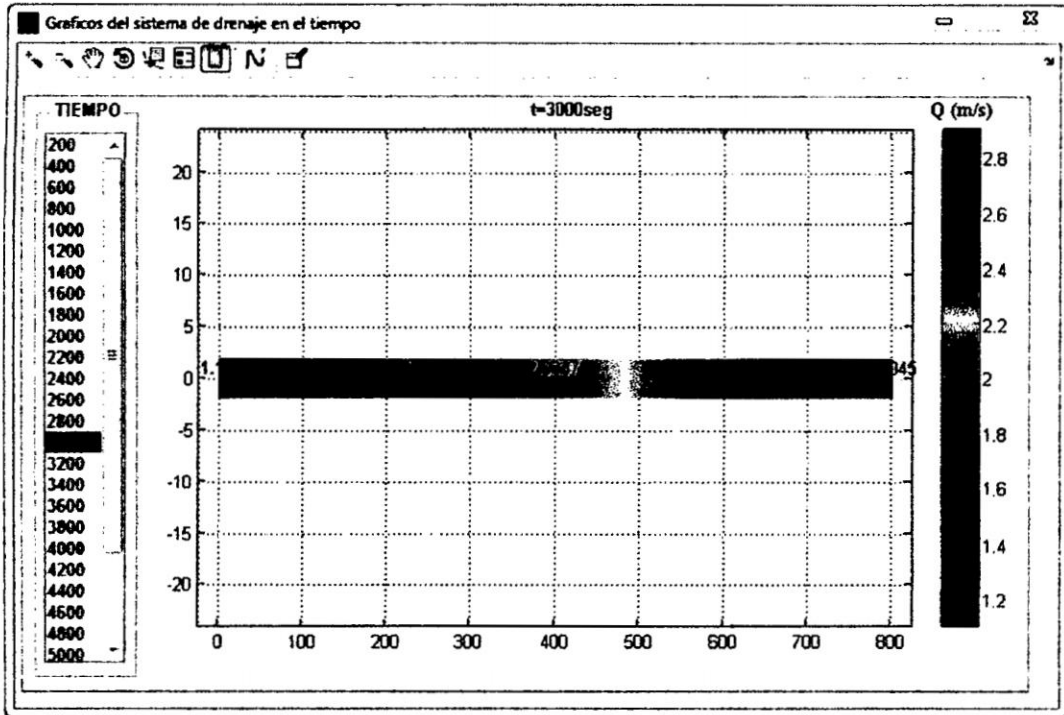


Figura 4.17: Caudales en todos los nodos de la red para $t=3000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

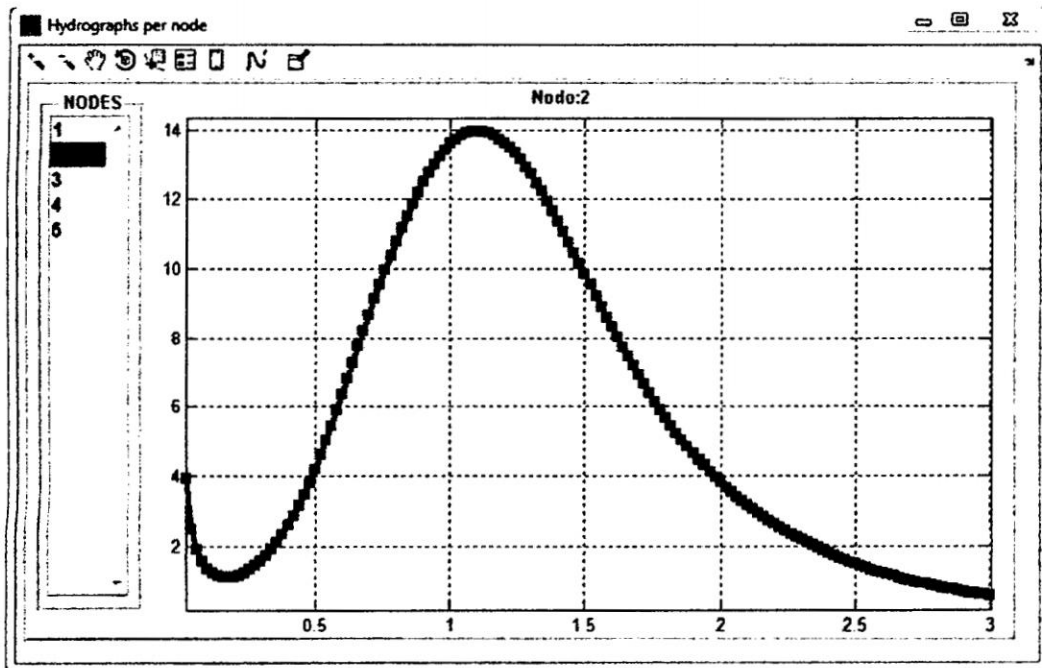


Figura 4.18: Hidrograma de salida en el nodo 2 para SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

Capítulo 5

Caso de estudio

5.1. Generalidades

La *Municipalidad Distrital de Kimbiri*, dentro su Plan de Desarrollo Concertado ha priorizado el proyecto de Drenaje Pluvial con la finalidad de proteger las viviendas del área urbana de la ciudad de Kimbiri.

Con el objetivo de dar seguridad y protección a los habitantes de este sector de la ciudad, frente a las cada vez más frecuentes lluvias torrenciales, que ocasiona cuantiosas pérdidas en la actividad económica, la propiedad y grandes riesgos en la salud, la Municipalidad Distrital de Kimbiri, ha considerado en su programación del año 2012, continuar con la fase del Estudio Definitivo del Proyecto: “*Instalación del sistema de drenaje pluvial en la ciudad de Kimbiri, Distrito de Kimbiri, Provincia de la Convención - Cusco*”.

Para la elaboración del proyecto se ha realizado los diferentes estudios básicos como el estudio topográfico, Mecánica de suelos, Geotecnia, Hidrología, Hidráulica, Hidráulica Fluvial del área para finalmente hacer el diseño de las estructuras del Drenaje Pluvial.

5.2. Información básica del proyecto

5.2.1. Ubicación

El distrito de *Kimbiri* es uno de los diez distritos de la provincia de *La Convención*, ubicada en el departamento del *Cusco*, bajo la administración del *Gobierno regional del Cusco*, Perú. Limita por el norte con el Distrito de *Pichari*, por el nor este y por el este con el Distrito de *Echarate*; por el sur con el Distrito de *Vilcabamba*; y por el oeste con el distrito de *Sivia*, *Ayna* y *Santa Rosa*.

Sector : Área Urbana de la Ciudad de Kimbiri
Región : Cusco
Provincia : La Convención
Distrito : Kimbiri

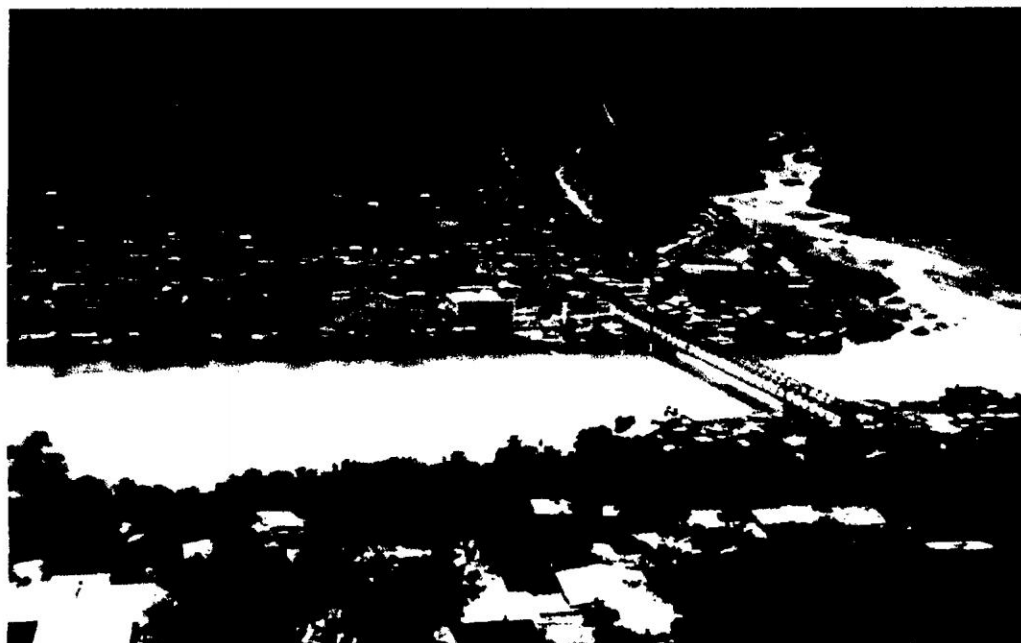


Figura 5.1: Distrito de Kimbiri. Fuente: *Elaboración propia*

El departamento de *Cuzco* está ubicado en la región sur oriental del Perú, comprende zonas andinas y parte de la selva alta. Limita al norte con Ucayali, al sur con Arequipa y

Puno, al este con Madre de Dios y Puno y al oeste con Arequipa, Apurímac, Ayacucho y Junín.



Figura 5.2: Región Cuzco. Fuente: *Elaboración propia*.

5.2.2. Cuencas de interés

La cuenca de interés comprende el área urbana de la ciudad de Kimbiri y sus afluentes hasta el lugar donde se ubican los puntos de evacuación.

La información con la que se realizó el trabajo fue el levantamiento topográfico de la zona apoyándonos también en Cartas Nacionales a escala 1 : 100, 000 y Planos Departamentales del Atlas Geográfico del Perú, ambos del IGN.

La zona en estudio se encuentra en la denominada “*ceja de selva*”. El clima en la zona es cálido y húmedo. Según los registros de la estación Sivia, lugar próximo a la zona en estudio, el promedio anual de temperatura es de 25°C. Si se infiere la información pluvial de la estación Machente se puede decir que la precipitación es abundante desde octubre a abril, con el 81 % de la precipitación anual; y el período mayo a septiembre, con el 19 % de la lluvia anual. El mes de mínimos valores de precipitación es junio. El promedio anual de precipitación es de 2,321 mm.

La geología superficial existente ha originado que en casi la totalidad de la cuenca se tenga suelos denominados finos: arcillas y limos que producen un efecto impermeabilizante bastante importante, puesto que influyen básicamente en el valor de la esorrentía de la cuenca y en la inexistencia de aguas subterráneas.

5.3. Hidrología del proyecto

La *hidrología* tiene un papel muy importante en el planeamiento del uso de los *Recursos Hidráulicos*, y ha llegado a convertirse en parte fundamental de los proyectos de ingeniería que tienen que ver con suministro de agua, disposición de aguas servidas, drenaje, protección contra la acción de ríos y recreación. De otro lado, la integración de la hidrología con la *Geografía matemática* en especial a través de los *Sistemas de Información Geográfica* ha conducido al uso imprescindible del computador en el procesamiento de información existente y en la simulación de ocurrencia de eventos futuros.

5.3.1. Estaciones hidrometeorológicas

El estudio hidrológico se basará en el análisis de los aspectos vinculados a la climatología del área del Proyecto específicamente de la *precipitación*, de donde se debe de obtener el hietograma de diseño para calcular el caudal de máximas avenidas.

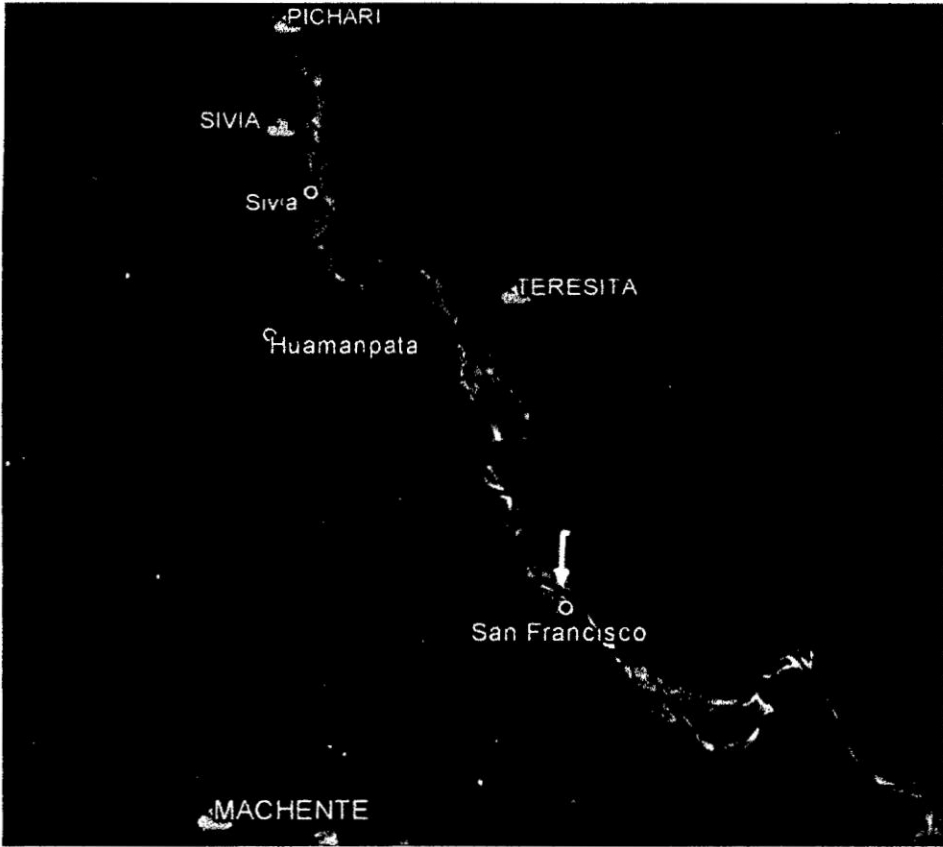


Figura 5.3: Mapa de estaciones hidrometeorológicas próximas a la Ciudad de Kimbiri.
Fuente: *Elaboración propia*

La inexistencia y/o insuficiente información hidrometeorológica en los puntos de interés, me ha obligado al empleo de metodologías que apoyándome lo máximo posible en la información existente en la cuenca y zona de influencia del proyecto y en los factores físicos, ecológicos e hidrológicos que afectan al clima y la producción de *escorrentía* permitan determinar en forma indirecta los diversos parámetros hidrológicos. En la Figura 5.3 se muestra las estaciones *Pichari*, *Sivia*, *Teresita* y *Machente* consideradas para la aplicación de la presente tesis.

5.3.1.1. Análisis de la información pluviométrica

La cuenca de la Ciudad de Kimbiri no tiene estudio a detalle del comportamiento Hidrológico tal como se aprecia en la revisión de información existente. Las estaciones *Pichari*, *Sivia*, *Teresita* y *Machente* definen un registro en la mayoría de las estaciones de 17 años, habiéndose seleccionado por su localización geográfica y por encontrarse dentro de la zona de influencia del proyecto. Se han registrado para nuestro interés, únicamente *precipitaciones máximas para 24 horas*. Para el presente estudio definitivo se ha tomado referencia las mediciones administradas por *SENAMHI* y el Gobierno Regional de *Ayacucho* y *Cuzco*.

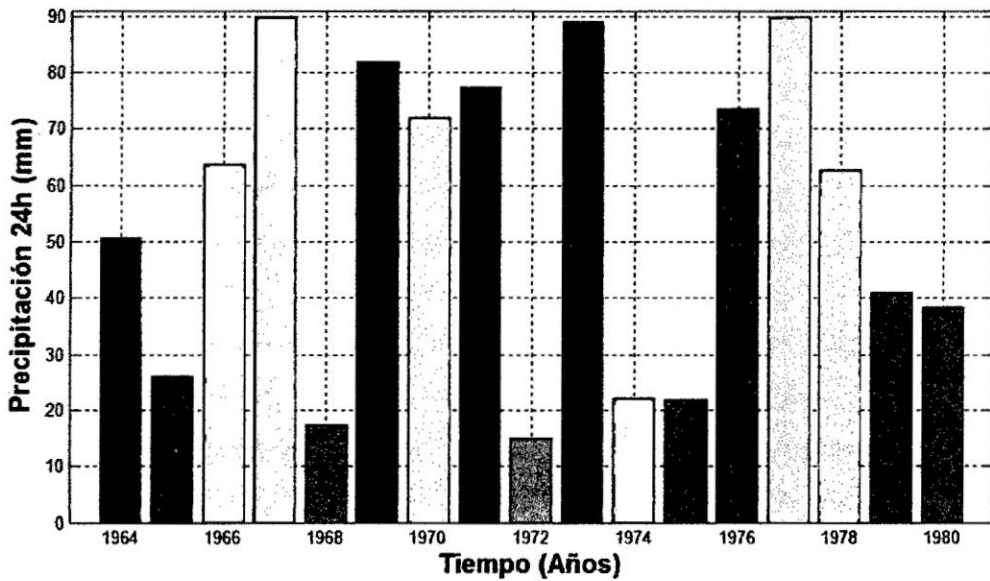


Figura 5.4: Registro histórico de *precipitaciones máximas en 24 horas* en la estación de Pichari. Fuente: *Elaboración propia*

El objeto de la presente sección es la estimación de la precipitación en puntos específicos de interés y determinar las tormentas de diseño para la cuenca de la Ciudad de Kimbiri para un determinado *periodo de retorno* y calcular el caudal de máximas avenidas y finalmente aplicar el modelo desarrollado para la simulación hidráulica de la Red de Drenaje Pluvial con el Método de Elementos Finitos y el aplicativo *SMAP V2015*.

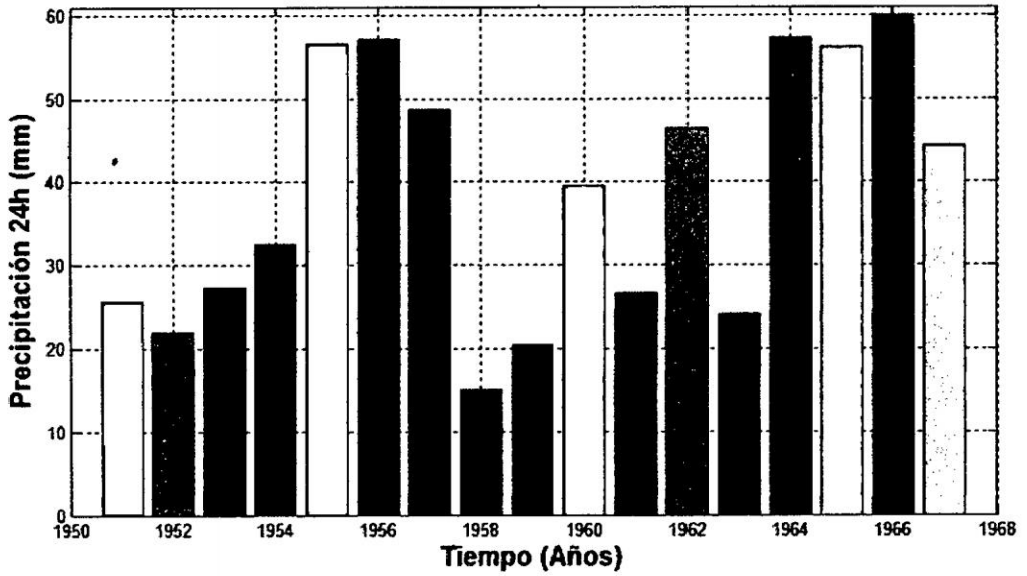


Figura 5.5: Registro histórico de *precipitaciones máximas en 24 horas* en la estación de Sivia. Fuente: *Elaboración propia*

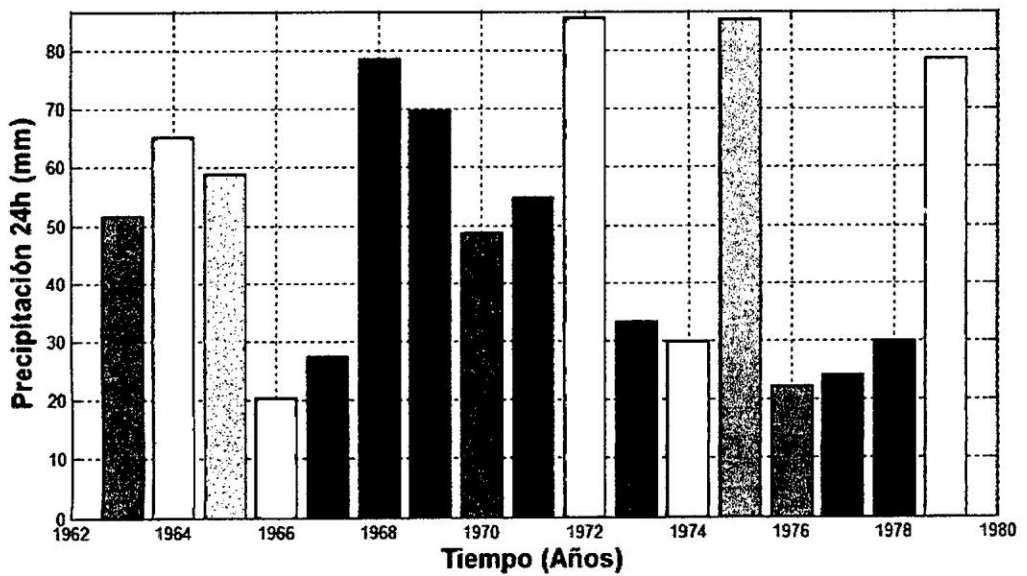


Figura 5.6: Registro histórico de *precipitaciones máximas en 24 horas* en la estación de Teresita. Fuente: *Elaboración propia*

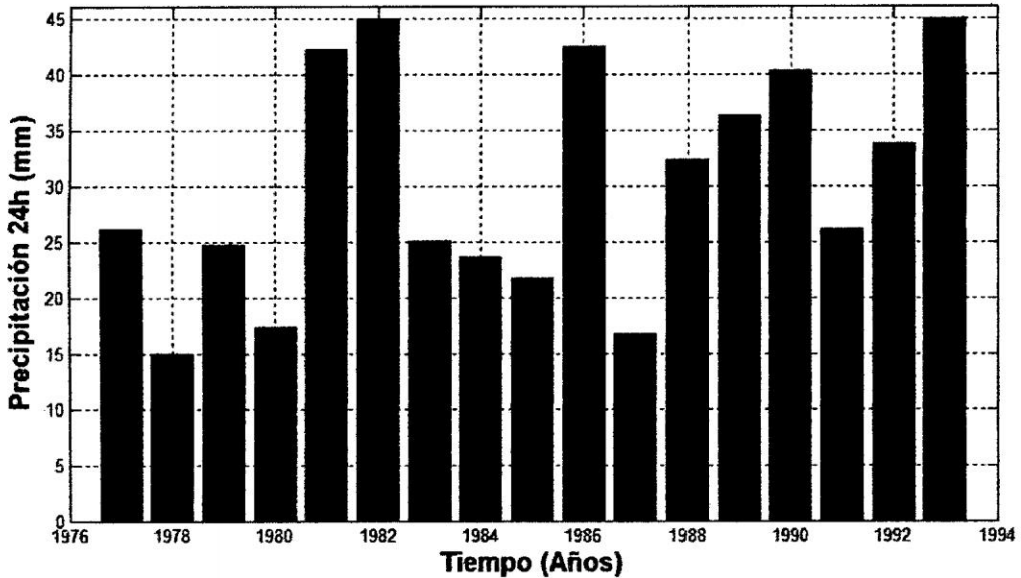


Figura 5.7: Registro histórico de *precipitaciones máximas en 24 horas* en la estación de Machente. Fuente: *Elaboración propia*

5.3.1.1.1. Selección del Período de Retorno

El periodo de retorno se ha seleccionado según el *manual de hidrología, hidráulica y drenaje del Ministerio de Transportes y Comunicaciones- Perú*. El riesgo de falla admisible en función del período de retorno y vida útil de la obra está dado por:

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right) \quad (5.3.1)$$

Si la obra tiene una vida útil de n años, la fórmula anterior permite calcular el período de retorno T , fijando el riesgo de falla admisible R , el cual es la probabilidad de ocurrencia del pico de la creciente estudiada, durante la vida útil de la obra. (Ver Figura 5.8)

En el Cuadro 5.1 se presenta el valor T para varios riesgos permisibles R y para la vida útil n de la obra.

Para proyectos de *Drenaje Pluvial* se recomienda como máximo, un valor de riesgo admisible de 22.3%, por lo tanto para la modelación de aguas máximas extraordinarias y la

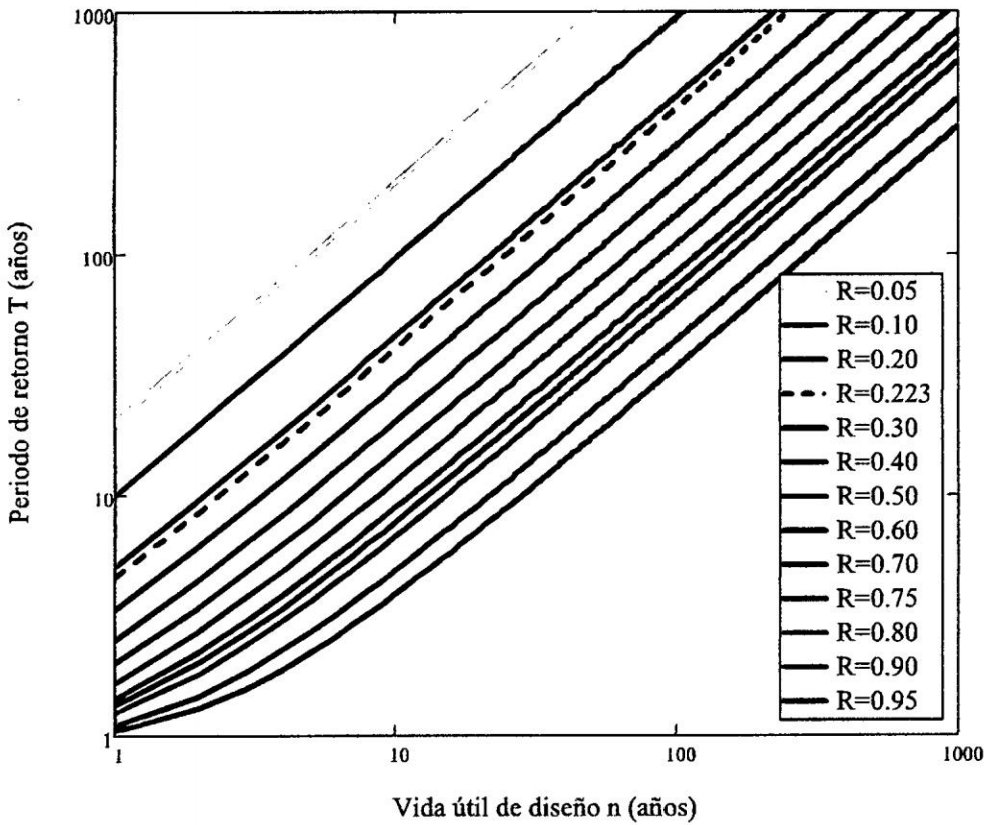


Figura 5.8: Riesgo de por lo menos una excedencia del evento de diseño durante la vida útil. Fuente: *Elaboración propia*

Cuadro 5.1: Valores de Período de Retorno T (Años). Fuente: *Elaboración propia*

Riesgo Admisible R	Vida útil de las obras (n) años							
	1	10	25	50	75	100	124	150
0.05	20	195	488	975	1463	1950	2418	2925
0.1	10	95	238	475	712	950	1177	1424
0.2	5	45	113	225	337	449	556	673
0.223	5	41	101	202	302	403	500	604
0.3	3	29	71	141	211	281	348	421
0.4	3	20	49	98	147	196	243	294
0.5	2	15	37	73	109	145	179	217
0.6	2	11	28	55	82	110	136	164
0.7	1	9	21	42	63	84	103	125
0.75	1	8	19	37	55	73	90	109
0.8	1	7	16	32	47	63	78	94
0.9	1	5	11	22	33	44	54	66
0.95	1	4	9	17	26	34	42	51

transformación *lluvia-escorrentía*, de acuerdo al Cuadro 5.1 se recomienda un período de retorno $T = 100$ años para una vida útil de la estructura de *25 años*.

5.3.1.1.2. Análisis de frecuencias y pruebas de consistencia

Para la ejecución del estudio hidrológico se ha recurrido a la información de *precipitaciones máximas en 24 horas* registradas en cuatro estaciones pluviométricas, ubicadas en diferentes partes de la cuenca del río Apurímac, siendo estas escogidas porque incluye registros de aproximadamente de 17 años a más.

Se realizó el análisis estadístico a través de las pruebas de consistencia mediante las distribuciones *Normal*, *Log Normal*, *Log Pearson III* y *Valor Extremo Tipo I* (Gumbel) correspondientes a los periodos de retorno de 100 y 500 años, con lo cual se determinará si la distribución se ajusta o no a una determinada distribución. La prueba de *Smirnov-Kolmogorov* se realizó para todas las distribuciones usadas y se escogió la que produce valores más cercanos a los datos registrados.

Cuadro 5.2: Precipitaciones máximas de 24 horas ajustadas con las distribuciones teóricas de la estación *Pichari*. Fuente: *Elaboración propia*

T Años	Normal	Log Normal 2 Parámetros	Log Normal 3 Parámetros	Gumbel	Log Gumbel	Gamma 2 Parámetros	Pearson Tipo III	Log-Pearson Tipo III
2	54.88	46.87	54.16	50.33	42.73	49.49	54.14	43.87
5	78.05	79.25	77.25	77.91	85.66	77.33	77.81	77.02
10	90.16	104.29	89.75	96.16	135.75	95.24	90.61	107.52
20	100.17	130.83	100.30	113.67	211.14	111.86	101.40	144.66
25	103.08	139.76	103.41	119.23	242.89	117.03	104.58	158.29
50	111.42	168.86	112.43	136.34	373.99	132.63	113.79	206.79
75	115.90	186.90	117.32	146.29	480.64	141.51	118.79	240.05
100	118.93	200.18	120.66	153.32	574.02	147.71	122.19	266.14
200	125.80	233.90	128.30	170.25	879.66	162.40	129.99	338.63
500	134.12	282.47	137.70	192.57	1544.88	181.34	139.56	459.34
1000	139.96	322.44	144.39	209.45	2364.52	195.39	146.36	573.77
Máximo Registrado:			90.0					

Cuadro 5.3: Precipitaciones máximas de 24 horas ajustadas con las distribuciones teóricas de la estación *Sivia*. Fuente: *Elaboración propia*

T Años	Normal	Log Normal 2 Parámetros	Log Normal 3 Parámetros	Gumbel	Log Gumbel	Gamma 2 Parámetros	Pearson Tipo III	Log-Pearson Tipo III
2	38.82	35.66	38.18	36.21	33.43	36.70	38.78	34.65
5	51.84	51.61	51.27	51.13	53.90	51.10	51.83	51.05
10	58.65	62.61	58.50	61.01	73.94	59.90	58.67	63.58
20	64.27	73.44	64.68	70.49	100.13	67.86	64.33	76.89
25	65.90	76.93	66.51	73.50	110.25	70.30	65.98	81.40
50	70.59	87.89	71.86	82.76	148.27	77.59	70.72	96.19
75	73.11	94.39	74.79	88.14	176.15	81.70	73.26	105.46
100	74.81	99.06	76.79	91.95	198.98	84.54	74.98	112.33
200	78.67	110.54	81.41	101.11	266.75	91.24	78.89	130.01
500	83.35	126.23	87.13	113.20	392.68	99.77	83.63	156.04
1000	86.63	138.55	91.24	122.33	525.96	106.04	86.96	177.98
Máximo Registrado:			60.0					

Se realizó el análisis estadístico a través de las pruebas de consistencia mediante las distribuciones *Normal*, *Log Normal*, *Log Pearson III* y *Valor Extremo Tipo I*

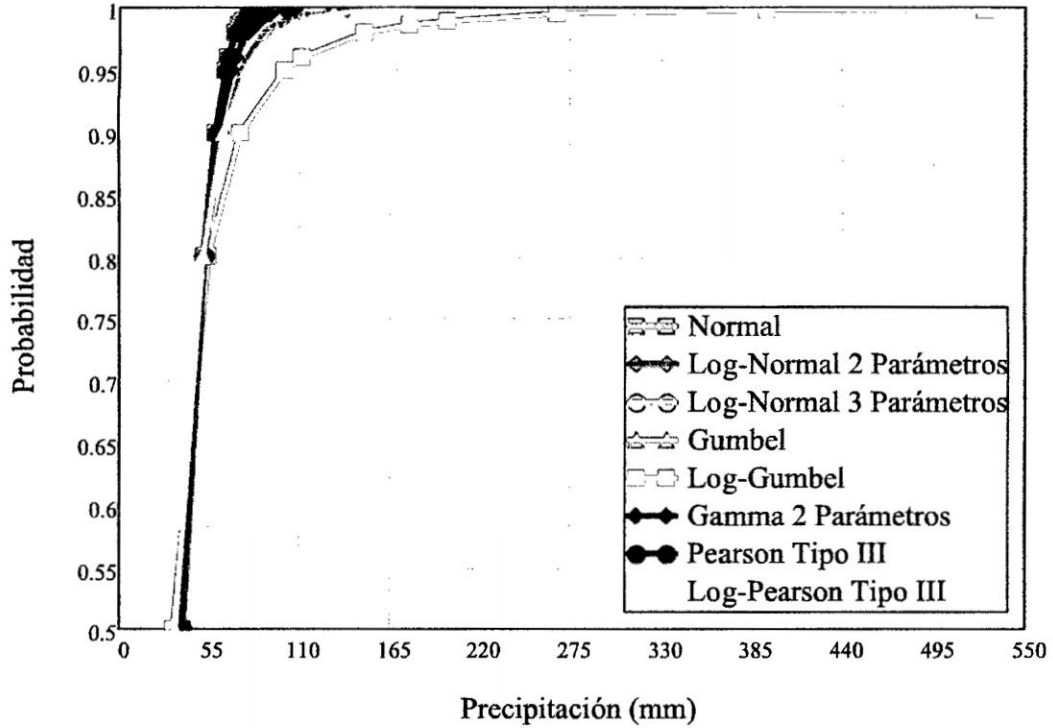


Figura 5.9: Funciones de frecuencia ajustada a la precipitación máxima en 24h de la estación Pichari. Fuente: *Elaboración propia*

Para determinar la precipitación de diseño para los diferentes periodos de retorno se hizo la verificación de los modelos de distribuciones a través de las pruebas de bondad de ajuste *Chi-Cuadrado*, método de *Smirnov-Kolmogorov* y el método de *mínimos cuadrados*, La distribución con el mejor ajuste se tomará como la precipitación de diseño.

La obtención de la precipitación de diseño para la cuenca de la ciudad de Kimbiri ha requerido la generación de los polígonos de Thiessen para los tiempos de retorno de 100 y 500 años. Esta información ha sido utilizada para obtener la precipitación máxima de 24 horas correspondiente a la cuenca de la ciudad de Kimbiri. La información pluviométrica que se utilizó en ese estudio fueron registros históricos de precipitación máxima de 24 horas, pertenecientes al Gobierno Regional de *Ayacucho* y *Cuzco*. Para la utilización de

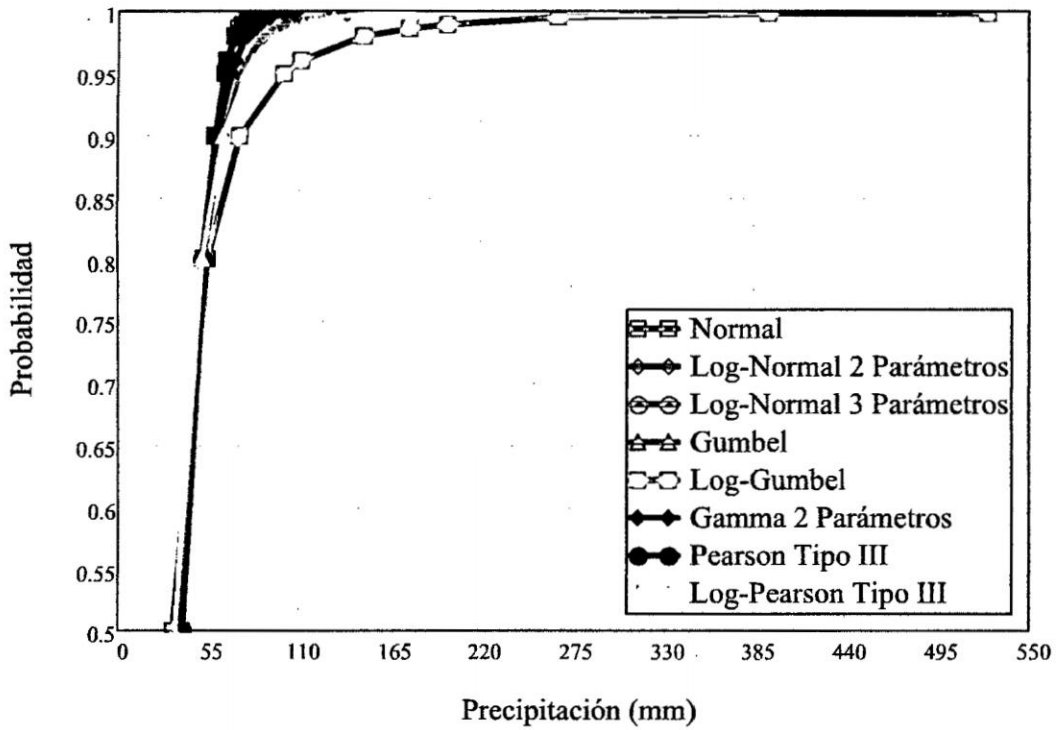


Figura 5.10: Funciones de frecuencia ajustada a la precipitación máxima en 24h de la estación Sivia. Fuente: *Elaboración propia*

este método se requirió la ubicación de cada estación dentro o en la periferia de la cuenca, identificando el área de influencia de cada pluviómetro.

5.3.1.1.3. Hietogramas de diseño

Para generar los hietogramas de diseño se ha utilizado el *Método de bloques alternos* los resultados se presentan en los Cuadros 5.4 y 5.5 y las Figuras 5.11 y 5.12. Una vez generada los hietogramas de diseño para el proyecto de aplicación estamos en condiciones de realizar la Transformación Lluvia-Escorrentía para finalmente hacer la modelación y simulación hidráulica de la red de Drenaje Pluvial de la Ciudad de Kimbiri.

5.3. Hidrología del proyecto

Cuadro 5.4: Precipitación de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación Pichari. Fuente: *Elaboración propia*

Duración (hr)	Intensidad (mm/hr)	Profundidad acumulada (mm)	Profundidad incremental (mm)	Tiempo (hr)	Precipitación (mm)
1.00	55.21	55.21	55.21	0-1	1.34
2.00	32.83	65.65	10.45	1-2	1.43
3.00	24.22	72.66	7.00	2-3	1.55
4.00	19.52	78.08	5.42	3-4	1.69
5.00	16.51	82.55	4.48	4-5	1.86
6.00	14.40	86.40	3.85	5-6	2.08
7.00	12.83	89.80	3.39	6-7	2.37
8.00	11.61	92.85	3.05	7-8	2.77
9.00	10.62	95.62	2.77	8-9	3.39
10.00	9.82	98.17	2.55	9-10	4.48
11.00	9.14	100.54	2.37	10-11	7.00
12.00	8.56	102.75	2.21	11-12	55.21
13.00	8.06	104.83	2.08	12-13	10.45
14.00	7.63	106.79	1.96	13-14	5.42
15.00	7.24	108.65	1.86	14-15	3.85
16.00	6.90	110.41	1.77	15-16	3.05
17.00	6.59	112.10	1.69	16-17	2.55
18.00	6.32	113.71	1.61	17-18	2.21
19.00	6.07	115.26	1.55	18-19	1.96
20.00	5.84	116.75	1.49	19-20	1.77
21.00	5.63	118.18	1.43	20-21	1.61
22.00	5.43	119.56	1.38	21-22	1.49
23.00	5.26	120.90	1.34	22-23	1.38
24.00	5.09	122.19	1.29	23-24	1.29

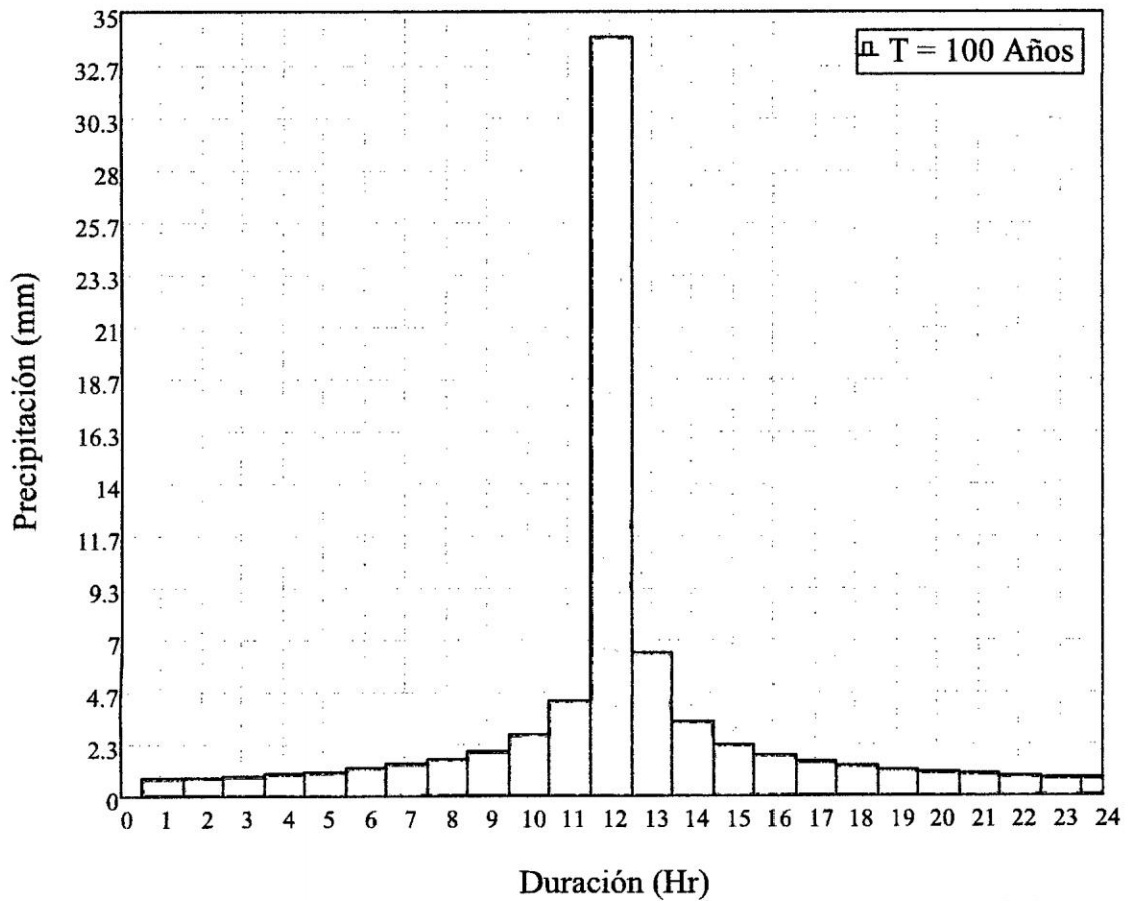


Figura 5.11: Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación Pichari. Fuente: *Elaboración propia*

5.3. Hidrología del proyecto

Cuadro 5.5: Precipitación de diseño para un periodo de retorno de 500 años de la estación Pichari. Fuente: *Elaboración propia*

Duración (hr)	Intensidad (mm/hr)	Profundidad acumulada (mm)	Profundidad incremental (mm)	Tiempo (hr)	Precipitación (mm)
1.00	63.05	63.05	63.05	0-1	1.53
2.00	37.49	74.98	11.93	1-2	1.64
3.00	27.66	82.98	8.00	2-3	1.77
4.00	22.29	89.17	6.19	3-4	1.93
5.00	18.86	94.29	5.12	4-5	2.12
6.00	16.45	98.68	4.40	5-6	2.37
7.00	14.65	102.56	3.88	6-7	2.70
8.00	13.26	106.04	3.48	7-8	3.17
9.00	12.13	109.21	3.17	8-9	3.88
10.00	11.21	112.13	2.91	9-10	5.12
11.00	10.44	114.83	2.70	10-11	8.00
12.00	9.78	117.36	2.53	11-12	63.05
13.00	9.21	119.73	2.37	12-13	11.93
14.00	8.71	121.97	2.24	13-14	6.19
15.00	8.27	124.09	2.12	14-15	4.40
16.00	7.88	126.11	2.02	15-16	3.48
17.00	7.53	128.03	1.93	16-17	2.91
18.00	7.22	129.88	1.84	17-18	2.53
19.00	6.93	131.64	1.77	18-19	2.24
20.00	6.67	133.34	1.70	19-20	2.02
21.00	6.43	134.98	1.64	20-21	1.84
22.00	6.21	136.56	1.58	21-22	1.70
23.00	6.00	138.08	1.53	22-23	1.58
24.00	5.81	139.56	1.48	23-24	1.48

5.3. Hidrología del proyecto

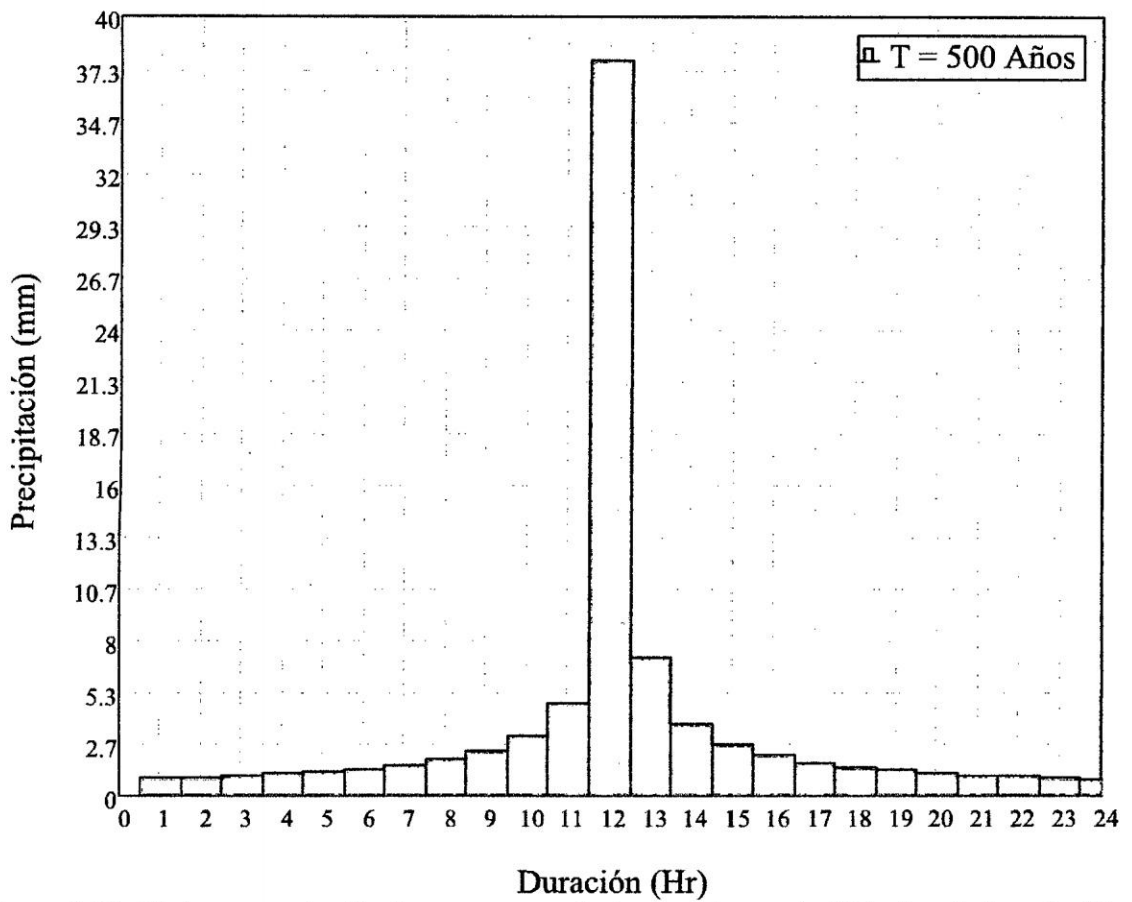


Figura 5.12: Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 500 años de la estación Pichari. Fuente: *Elaboración propia*

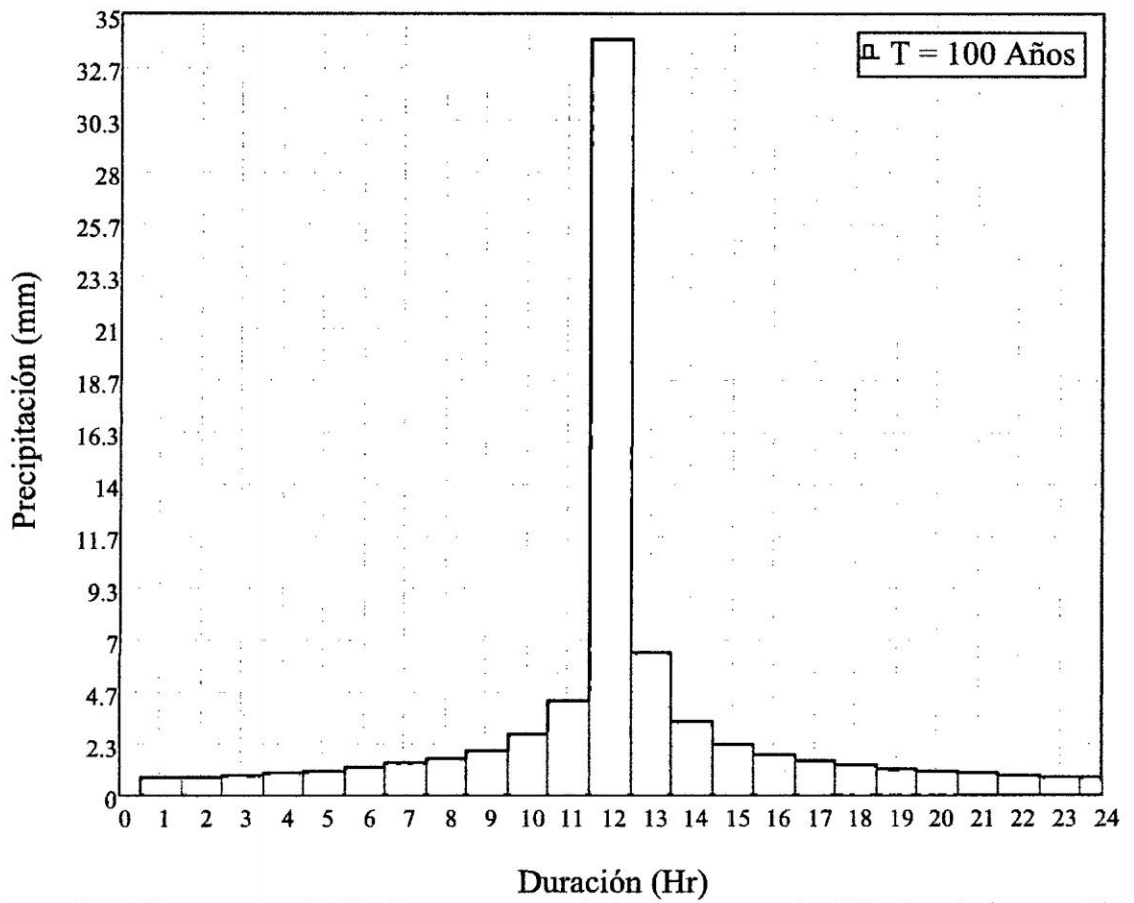


Figura 5.13: Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación Sivia. Fuente: *Elaboración propia*

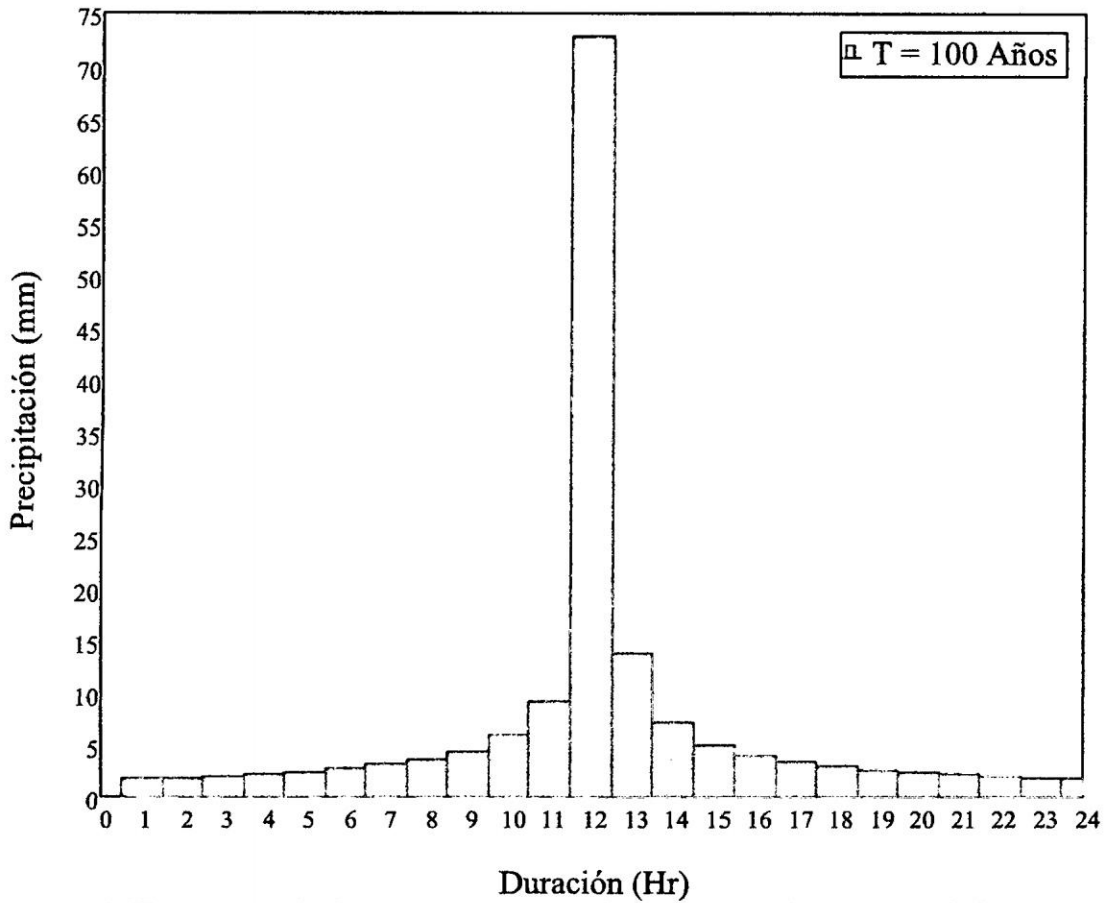


Figura 5.14: Hietograma de diseño para un periodo de retorno de 100 años de la estación Teresita. Fuente: *Elaboración propia*

5.4. Red de Drenaje de la Ciudad de Kimbiri

Cuadro 5.6: Resumen de Hietogramas de diseño para todas las estaciones del proyecto (mm). Fuente: *Elaboración propia*

Duración (hr)	Pichari		Sivia		Teresita		Machente	
	100	500	100	500	100	500	100	500
1	1.34	1.53	0.82	0.91	1.76	2.47	0.72	0.87
2	1.43	1.64	0.88	0.98	1.89	2.65	0.77	0.94
3	1.55	1.77	0.95	1.06	2.04	2.86	0.83	1.01
4	1.69	1.93	1.03	1.15	2.22	3.12	0.91	1.10
5	1.86	2.12	1.14	1.27	2.45	3.44	1.00	1.22
6	2.08	2.37	1.27	1.42	2.74	3.84	1.12	1.36
7	2.37	2.70	1.45	1.62	3.12	4.38	1.27	1.55
8	2.77	3.17	1.70	1.90	3.66	5.13	1.49	1.82
9	3.39	3.88	2.08	2.32	4.47	6.28	1.82	2.22
10	4.48	5.12	2.75	3.07	5.90	8.29	2.41	2.93
11	7.00	8.00	4.30	4.79	9.23	12.96	3.76	4.59
12	55.21	63.05	33.88	37.79	72.73	102.13	29.67	36.15
13	10.45	11.93	6.41	7.15	13.76	19.32	5.61	6.84
14	5.42	6.19	3.32	3.71	7.14	10.02	2.91	3.55
15	3.85	4.40	2.36	2.64	5.07	7.12	2.07	2.52
16	3.05	3.48	1.87	2.09	4.02	5.64	1.64	2.00
17	2.55	2.91	1.57	1.75	3.36	4.72	1.37	1.67
18	2.21	2.53	1.36	1.51	2.91	4.09	1.19	1.45
19	1.96	2.24	1.20	1.34	2.58	3.63	1.05	1.28
20	1.77	2.02	1.08	1.21	2.33	3.27	0.95	1.16
21	1.61	1.84	0.99	1.10	2.13	2.98	0.87	1.06
22	1.49	1.70	0.91	1.02	1.96	2.75	0.80	0.97
23	1.38	1.58	0.85	0.95	1.82	2.56	0.74	0.91
24	1.29	1.48	0.79	0.89	1.70	2.39	0.69	0.85

5.4. Red de Drenaje de la Ciudad de Kimbiri

5.4.1. Configuración del modelo

Para la construcción del modelo de la Red de Drenaje de la Ciudad de *Kimbiri*, en principio se ha tenido en cuenta los estudios relacionados principalmente a la *Hidrología e Hidráulica*. En este caso nos basamos en las documentaciones obtenidas de La *Municipalidad Distrital de Kimbiri*, además de resultados obtenidos propios obtenidos en esta tesis con fines de modelación hidráulica con el *Método de Elementos Finitos*.

5.4.2. Topología de la red

La red de drenaje Pluvial de la ciudad de Kimbiri en el marco del proyecto “*Instalación del sistema de drenaje pluvial en la ciudad de Kimbiri, Distrito de Kimbiri, Provincia de La Convención - Cusco*”, consiste en la construcción de un sistema de drenaje pluvial, compuesto por canales de concreto, con una longitud total de 771,68 m de sección rectangular de sección variable. La presente tesis aborda la modelación hidráulica del *Jr. S/N, Av. La Convención, Jr. Mozombit* hasta la evacuación en el *Río Apurímac* de las aguas pluviales.

5.4. Red de Drenaje de la Ciudad de Kimbiri

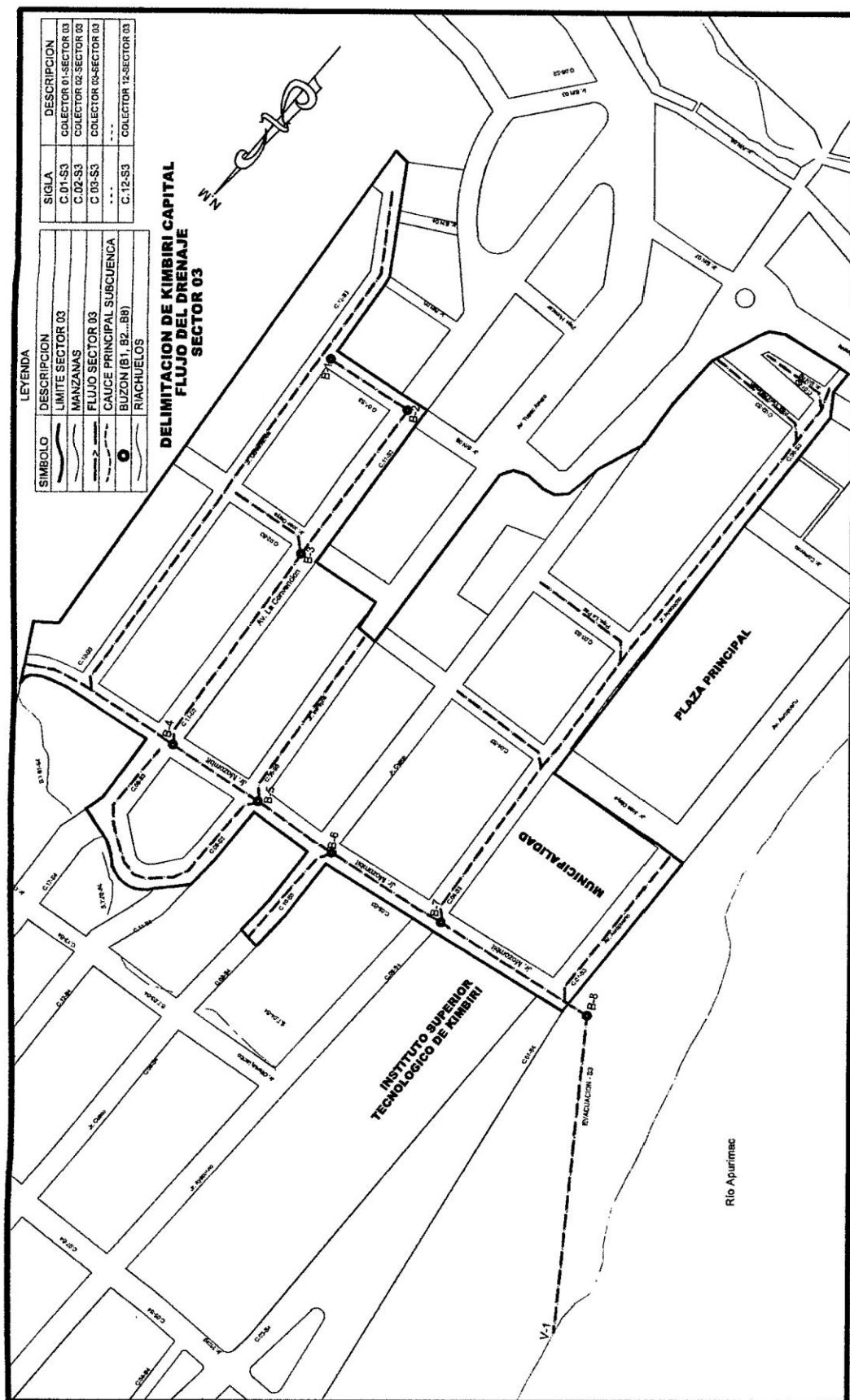


Figura 5.15: Red de Drenaje Pluvial proyectado inicialmente de la ciudad de Kimbiri. Fuente: *Elaboración propia*

5.4. Red de Drenaje de la Ciudad de Kimbiri

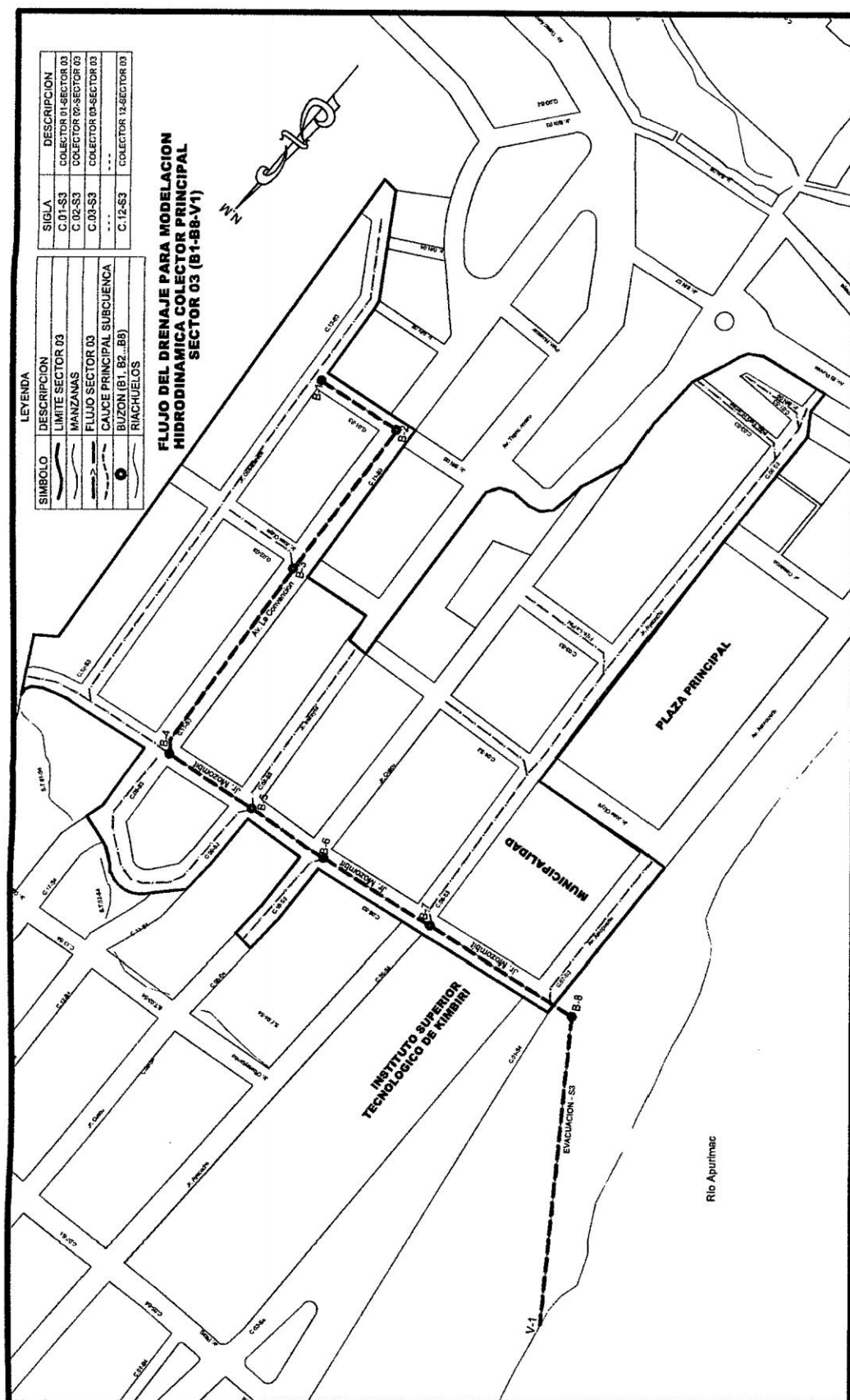


Figura 5.16: Red de Drenaje Pluvial final de la ciudad de Kimbiri. Fuente: Elaboración propia

Parte IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Capítulo 6

Resultados y Discusión

Este capítulo presenta los resultados del trabajo de investigación usando el programa *SMAP V2015* desarrollado en *Matlab*, basado en el *Método de Elementos Finitos* y consecuentemente se hará una comparación de resultados obtenidos con el programa comercial *SWMM*. Así mismo usando la estadística no paramétrica, en específico la prueba de bondad de *Chi-Cuadrado* χ^2 se validará el modelo propuesto en esta tesis para finalmente hacer la discusión de resultados.

6.1. Resultados de la investigación

6.1.1. Solución con el programa *SMAP V2015*

La simulación hidráulica de la red de drenaje de la ciudad de *Kimbiri* en esta sección se hará en su totalidad con el programa *SMAP V2015*, Previamente se hace la configuración topológica de la red de drenaje.

6.1.1.1. Geometría de la red

Esta red de drenaje pluvial de la Ciudad de de Kimbiri está conformado por 8 *buzones*, 8 *conductos* y un *desagüe*, que están proyectados a instalarse en el *Jr. S/N, Av. La Convención* y el *Jr. Mozombit* hasta desaguar las aguas pluviales en el *rio Apurímac* como puede observarse en la Figura 6.1.

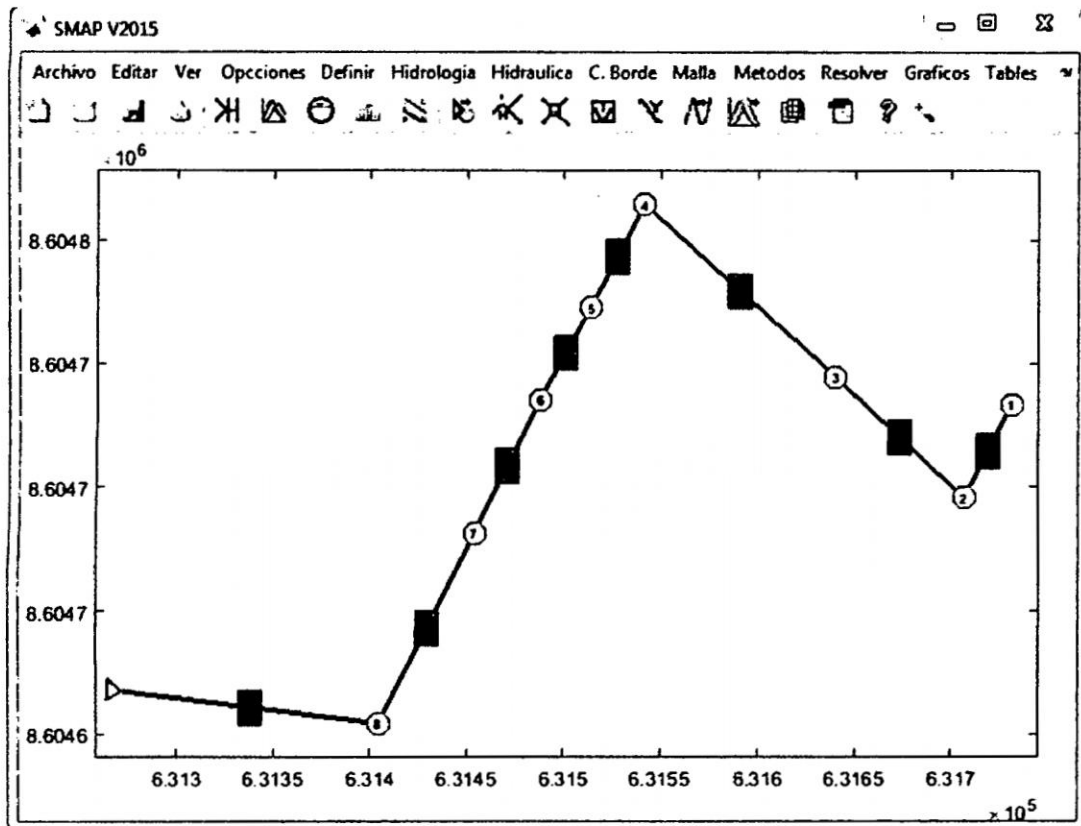


Figura 6.1: Elementos y nodos del sistema de drenaje de la ciudad de Kimbiri *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.1.2. Tipo de sección y materiales

En el programa *SMAP V2015* se cuenta con una librería de tipo de secciones y materiales con sus respectivos propiedades. Para la red de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri*

6.1. Resultados de la investigación

se tiene una sección rectangular de $0,80 \times 1,0m$ de concreto armado con un coeficiente de rugosidad de Manning de 0,013, como se puede ver en la Figura 6.2.

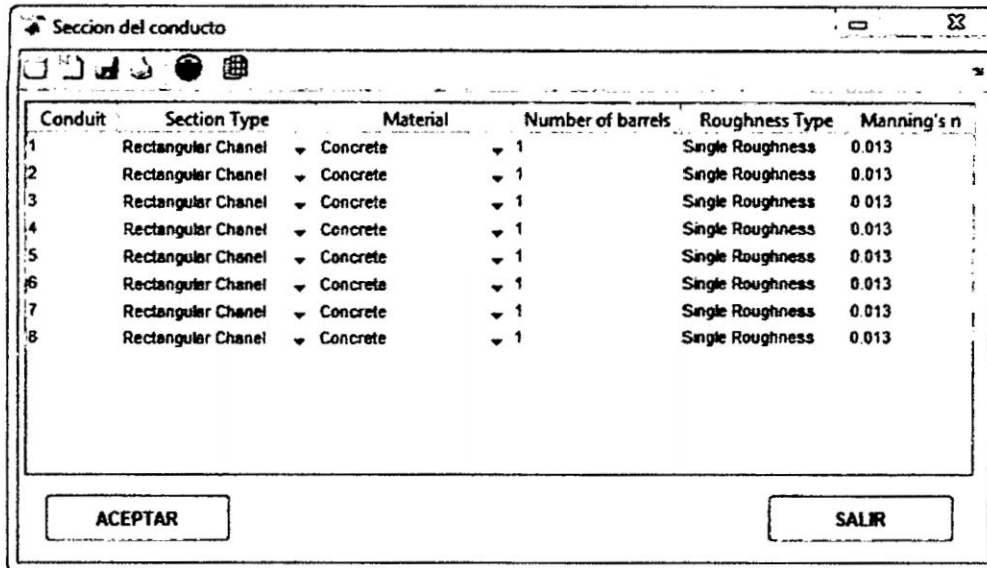


Figura 6.2: Selección del tipo de sección y material *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

En la Figura 6.2 se especifican las características geométricas de los conductos de la red de drenaje pluvial, el tipo de material, número de barriles y tipo de rugosidad. Una vez escogido el tipo de material el programa automáticamente asignará y mostrara el coeficiente de Manning en la última columna.

6.1.1.3. Condiciones de borde

Con la numeración de nodos, conductos y el vertido, el programa *SMAP V2015*, hace en forma automática la configuración topológica para la asignación de las condiciones de borde en una tabla con su respectivo gráfico que se encuentra integrado en el interfaz del programa.

En el caso del programa *SMAP V2015*, las condiciones de borde pueden ser aguas arriba un *hidrograma* o *hietograma* y aguas abajo un *limnigrama*. Para la red de drenaje pluvial

6.1. Resultados de la investigación

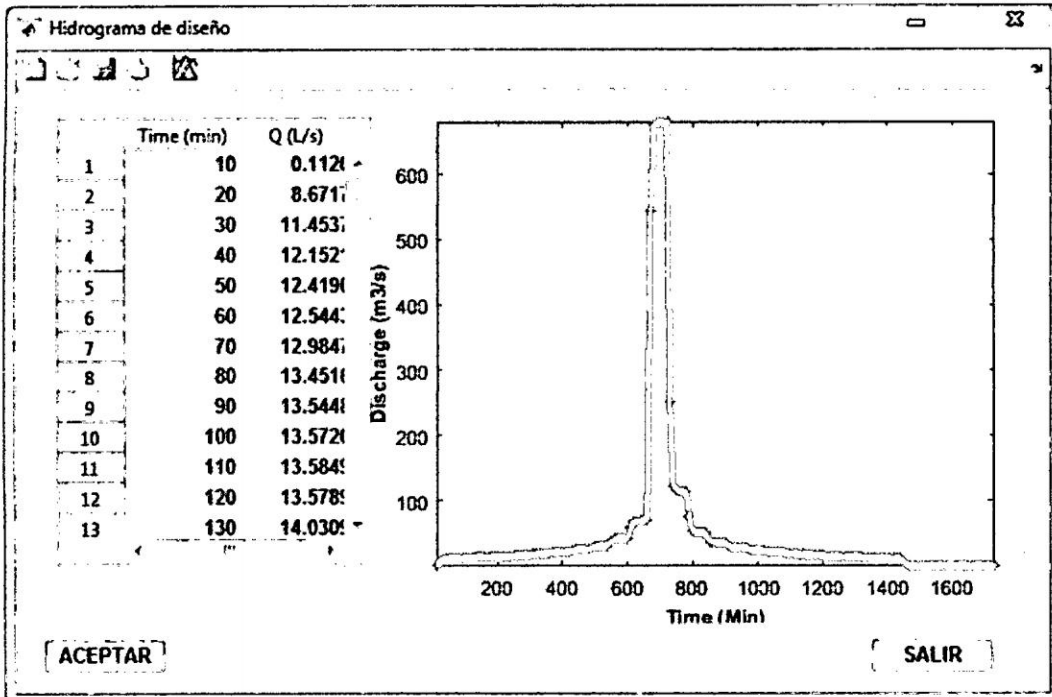


Figura 6.3: Hidrograma de entrada aguas arriba *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

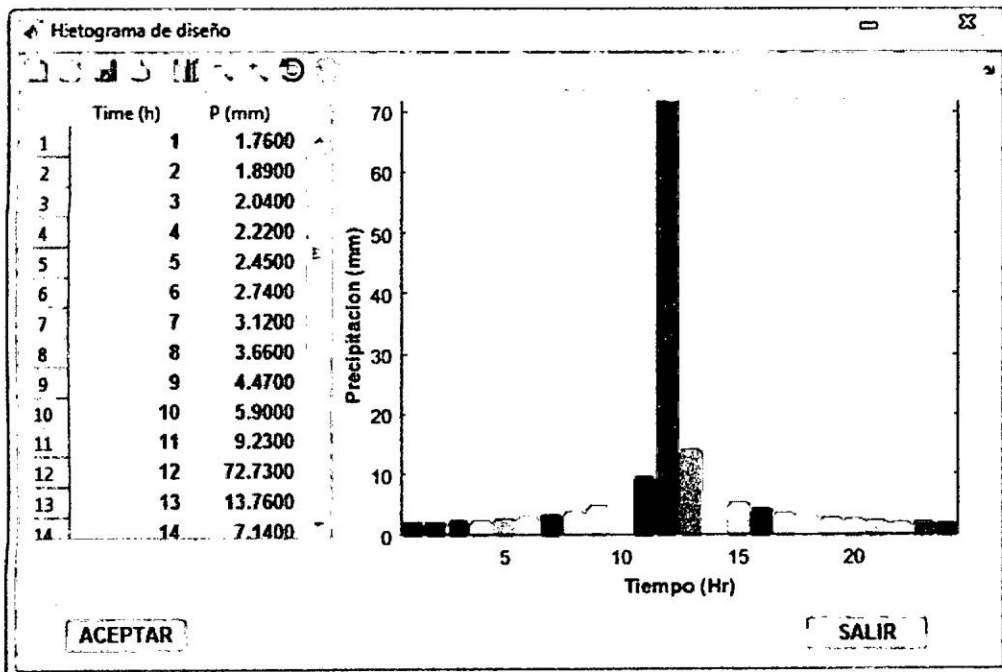


Figura 6.4: Hietograma de diseño para la red de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

de la ciudad de *Kimbiri*, solamente se tiene condición es de borde aguas arriba como se muestra en las Figuras 6.3 y 6.4.

El hidrograma de entrada es una condición de contorno aguas arriba, es decir en los buzones 1, 2, 3, 4, 4, 6, 7, 8. La Figura 6.3 corresponde a un hidrograma de caudales que representa la cantidad de agua residual o pluvial que está entrando al conducto asociado. En este caso no se tiene otro tipo de condición de borde.

6.1.1.4. Datos de simulación

Aquí se especifica los tiempos de simulación, es decir cada cuanto tiempo queremos obtener los resultados y el tiempo total de simulación. El programa *SMAP V2015*, teniendo como dato esta información resolverá el problema y mostrara los resultados para las condiciones dadas.

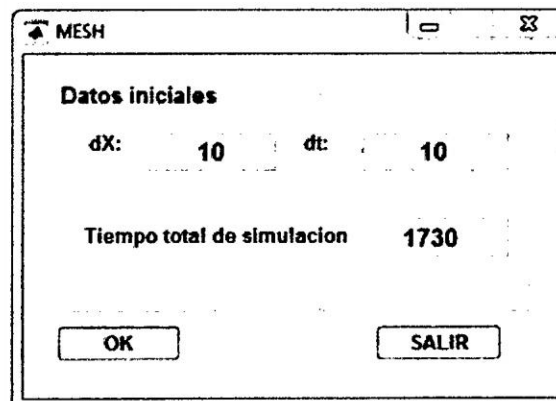


Figura 6.5: Datos de simulación *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.1.5. Resultados con el programa *SMAP V2015*

En el flujo permanente se asume que las todas las magnitudes hidráulicas son constantes en el tiempo. Esta es la opción por defecto de todos los modelos numéricos. En el flujo no permanente o transitorio las magnitudes como tirantes o velocidades pueden cambiar con

el tiempo, como en el caso del tránsito de una onda de avenidas a través de una estructura de drenaje pluvial.

El programa *SMAP V2015* tiene la capacidad para realizar la simulación hidráulica de sistemas de drenaje pluvial en régimen *no permanente* y es aplicable para estudiar sistemas de drenaje urbano en cualquier parte del mundo con topografías distintas y heterogéneas, ya que las características requeridas por el modelo para representar el comportamiento hidráulico del sistema de drenaje son consistentes con la respuesta de los mismos ante eventos de comportamiento conocido.

6.1.1.5.1. Niveles de agua

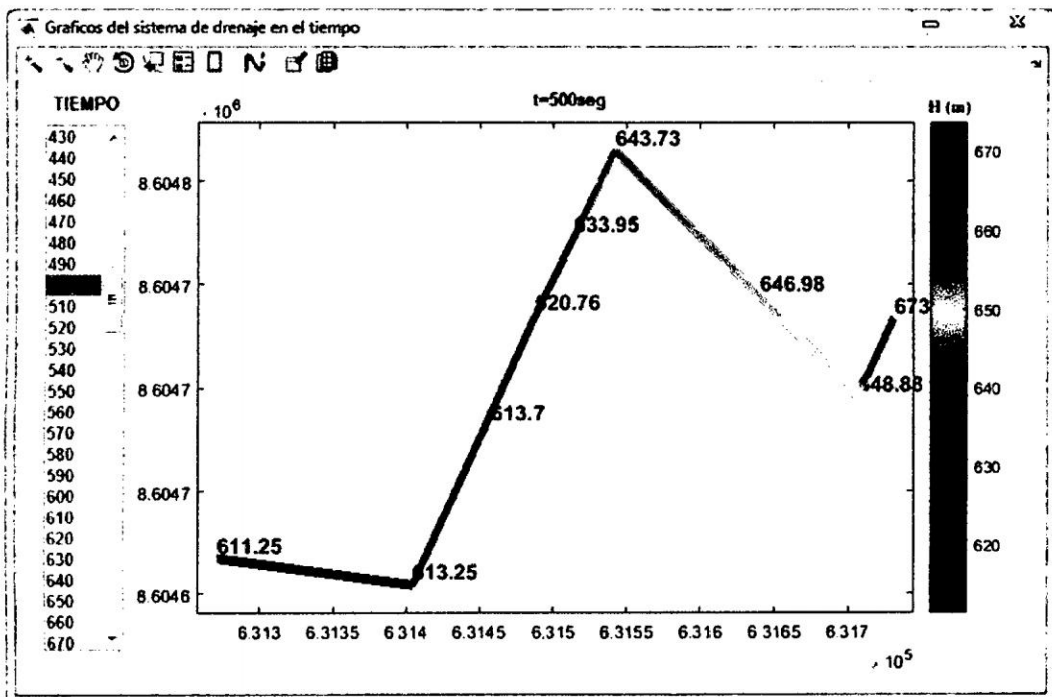


Figura 6.6: Niveles de agua en todo los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

En la Figura 6.6 se observa los valores de los niveles de agua en los diferentes nodos del sistema de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimiri*. La variación de estos niveles se observa

en código de colores a los largo de una tubería y para todo el sistema.

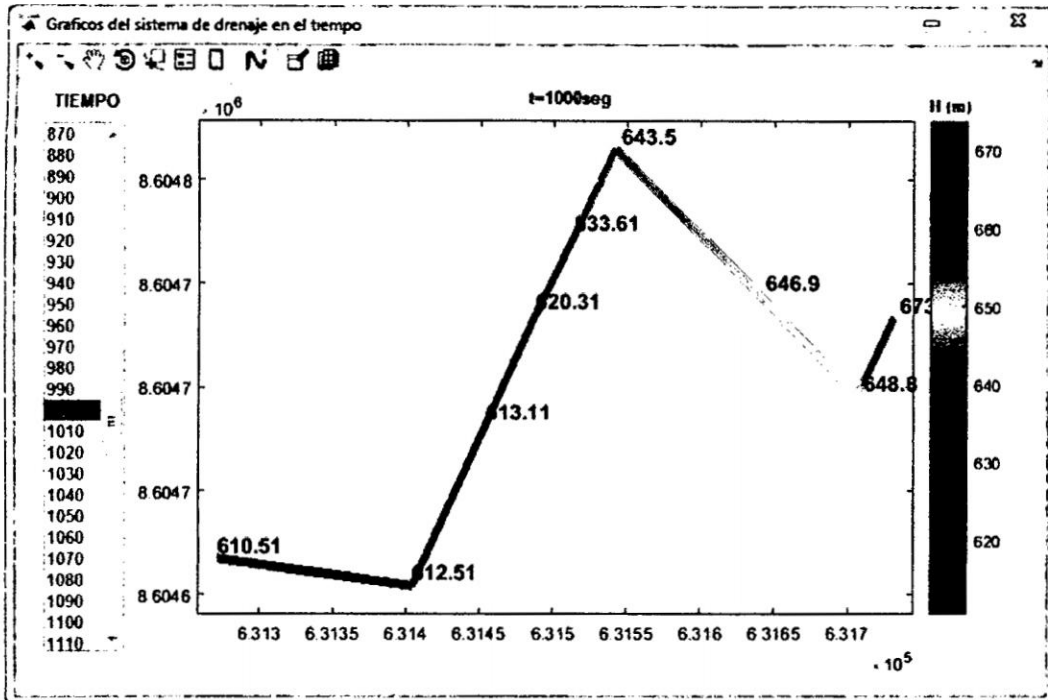


Figura 6.7: Niveles de agua en todo los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

Los niveles de agua corresponden a la altura total de agua en todos los conductos de la red de drenaje pluvial, estos son representados en forma de *altitudes* (cotas). Las Figuras 6.6 y 6.7 muestran la variación de los niveles de agua a través de código de colores para diferentes tiempos.

6.1.1.5.2. Caudales

Obviamente los caudales tendrán un comportamiento creciente, uno por la topografía del terreno y el otro por que siempre el caudal es acumulativo hacia el vertido, como se puede ver en las Figuras 6.8 y 6.9.

6.1. Resultados de la investigación

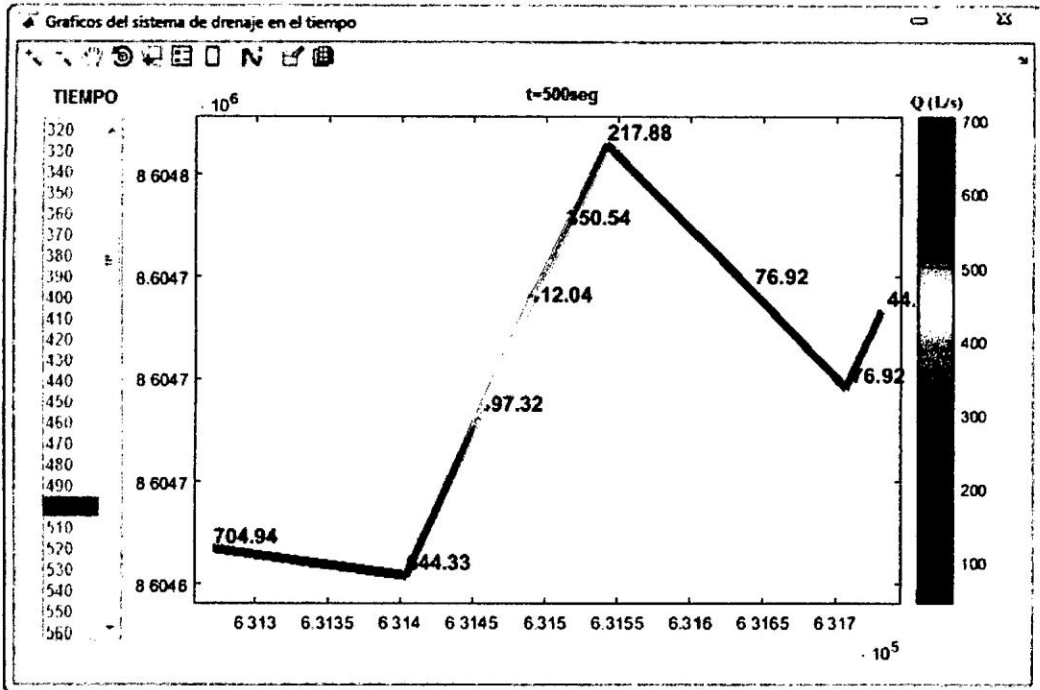


Figura 6.8: Caudales en todos los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

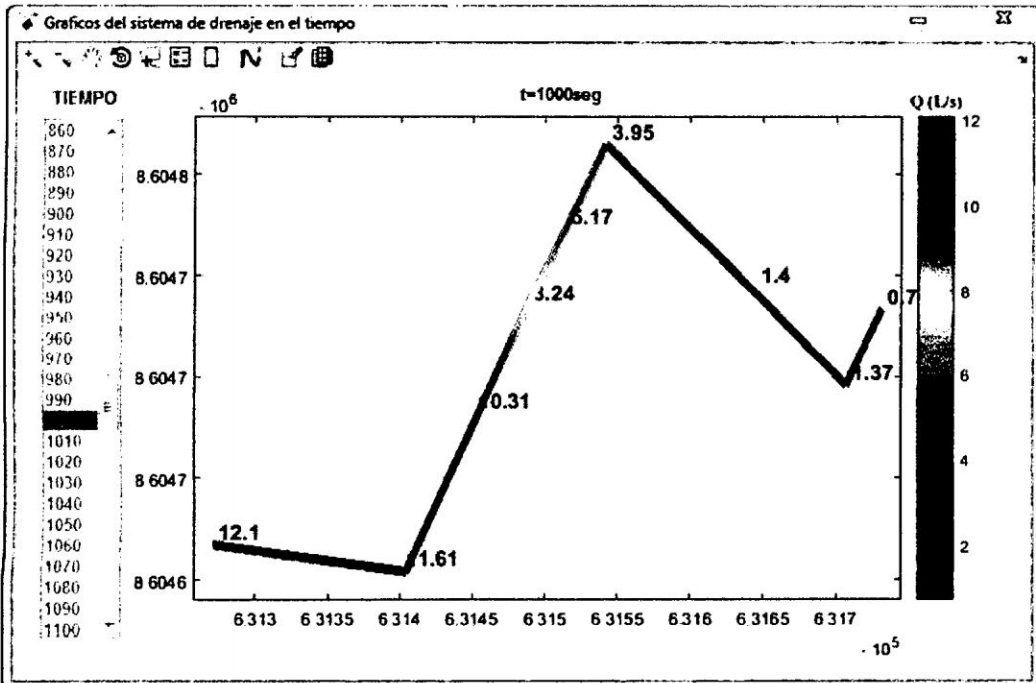


Figura 6.9: Caudales en todos los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.1.5.3. Velocidades

Las velocidades son variables secundarias que se obtiene a partir de los caudales en todos los conductos. Lo más importante en este parámetro es que se debe presentar una velocidad de flujo mínima requerida que garantice el arrastre hidráulico de los materiales sólidos en los conductos evitando su sedimentación de las partículas que como las arenas y gravas que acarrea el agua de lluvia.

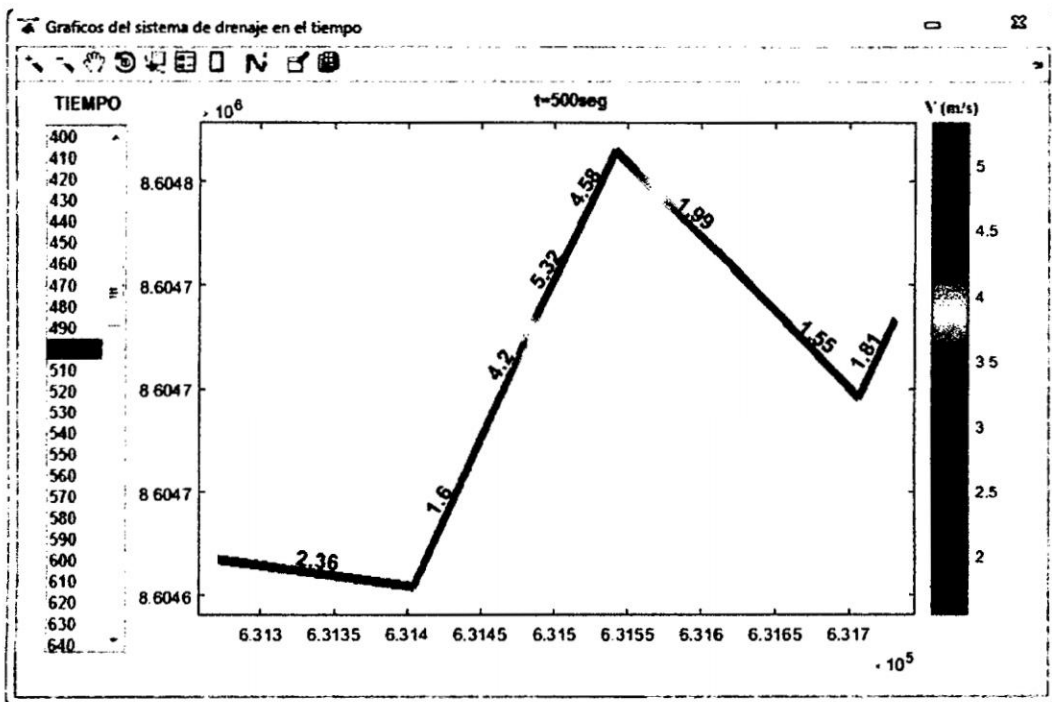


Figura 6.10: Velocidades en todos los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

La *velocidad mínima* y *máxima* está sujeta a las pendientes mínimas de diseño. Por este propósito, la pendiente de la tubería algunas veces incrementa en exceso la pendiente de la superficie del terreno o los conductos se adecuan a la topografía del terreno.

Los resultados de las velocidades se pueden observar en las Figuras 6.10 y 6.11 en mapa de colores. El programa SMAP V2015 permita al usuario visualizar los resultados para el intervalo de tiempo de análisis dentro del tiempo total de simulación.

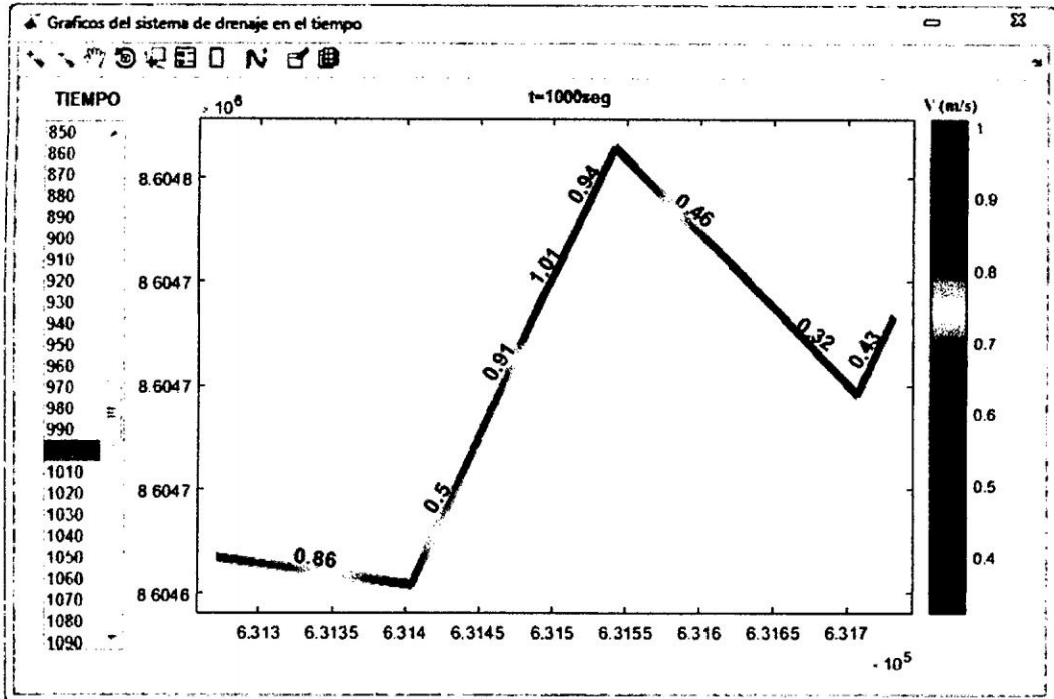


Figura 6.11: Velocidades en todos los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.1.5.4. Tirantes

Los tirantes son los niveles de agua con respecto a la base del conducto. Estos valores nos permiten determinar las dimensiones geométricas del canal de manera recursiva. Para el caso de la red de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri* por la misma topografía variable de sus calles se tendrá diferentes altura de agua (*tirante*) para cada conducto. Sin embargo por cuestiones de diseño y homogenizar las dimensiones de la estructura de drenaje (*conducto*) se asume un valor único para todas las calles. Para la red de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri* se tiene los resultados de las velocidades y pueden verse en las Figuras 6.12 y 6.13. En la mapa de colores se observa de color *azul* las velocidades de menor valor, mientras las velocidades mas altas están representadas de color *rojo oscuro*.

6.1. Resultados de la investigación

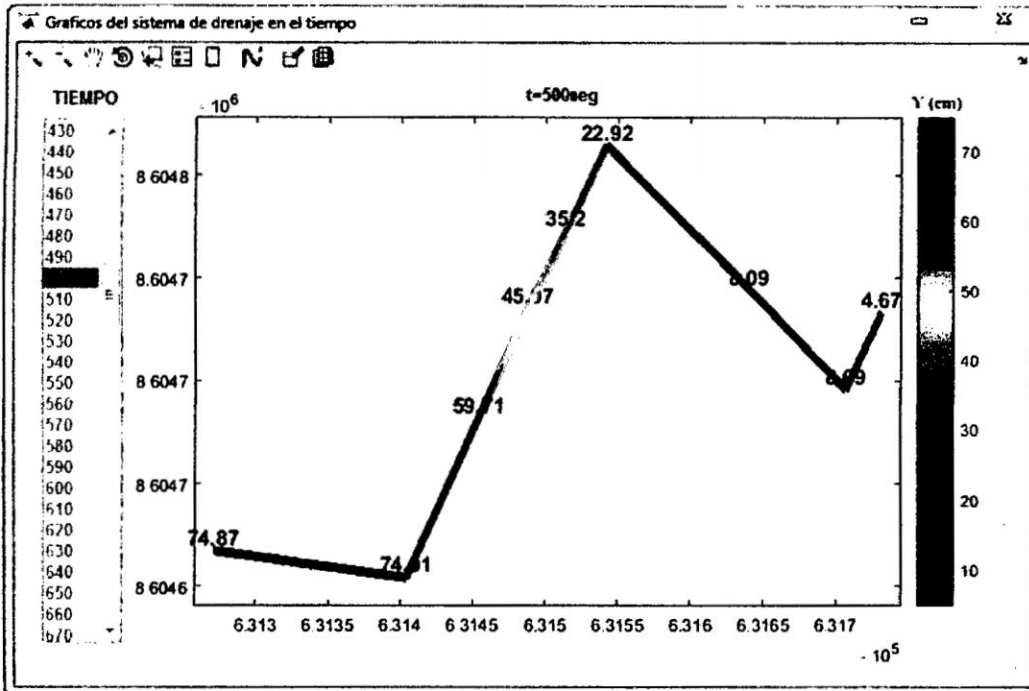


Figura 6.12: Tirantes en todos los nodos de la red para $t=500\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

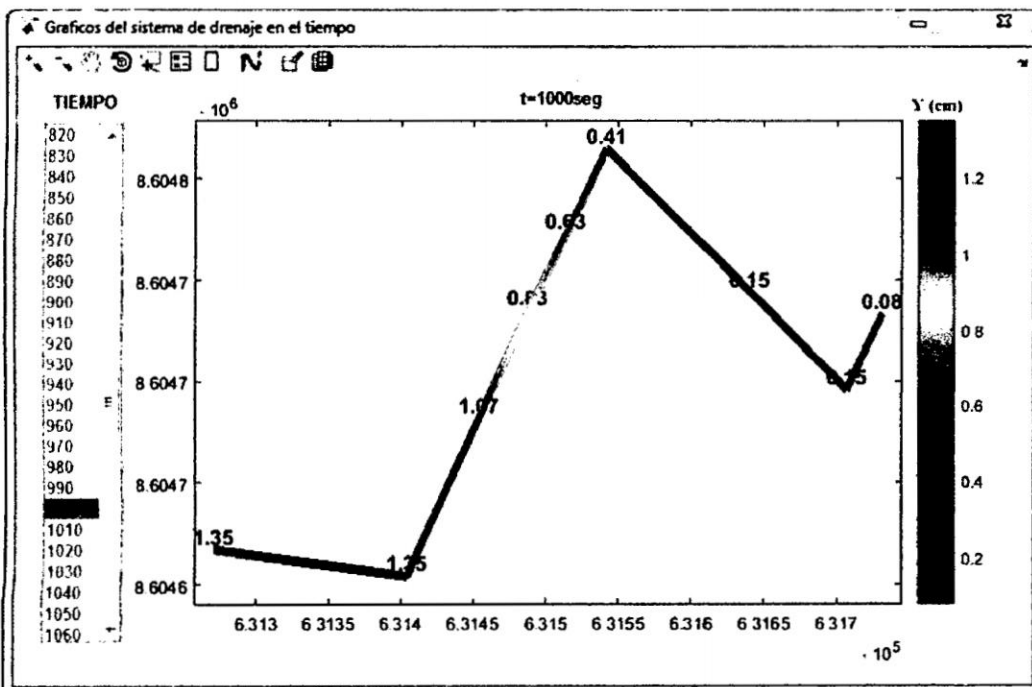


Figura 6.13: Tirantes en todos los nodos de la red para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.1.5.5. Hidrograma de salida en los nodos

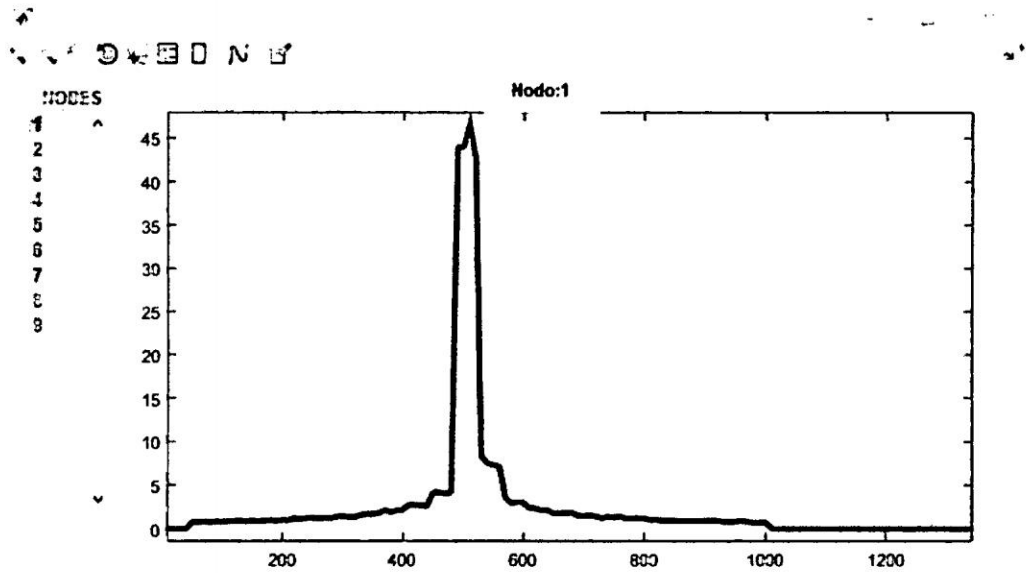


Figura 6.14: Hidrograma de salida en el *nodo 1* *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

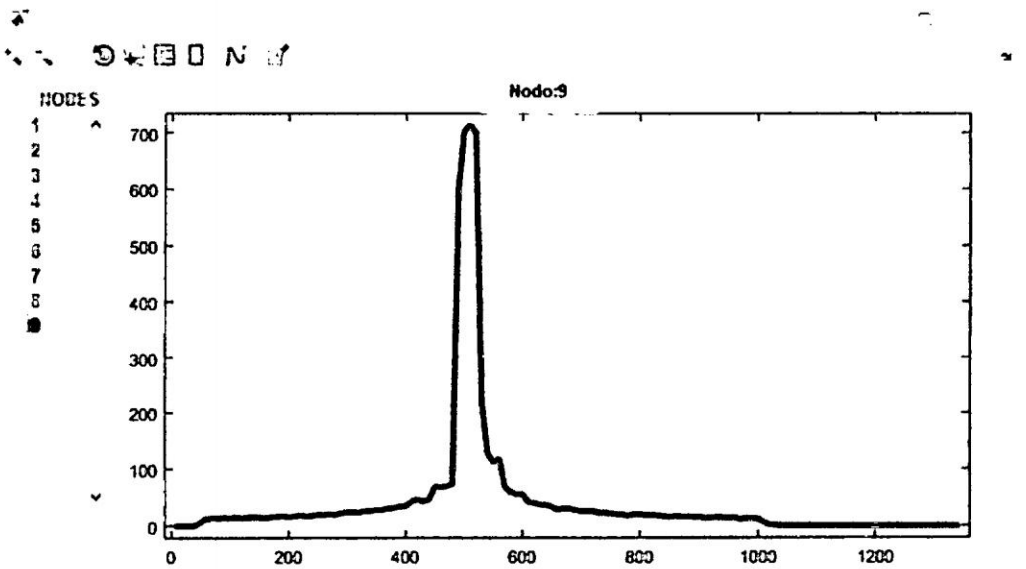


Figura 6.15: Hidrograma de salida en el *nodo 9* (vertido) *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.2. Solución de la Red Kimbiri con SWMM

El *Storm Water Management Model* (modelo de gestión de aguas pluviales) de la EPA¹ (SWMM) es un modelo dinámico de simulación de precipitaciones, que se puede utilizar para un único acontecimiento o para realizar una simulación continua en periodo extendido. El programa permite simular tanto la cantidad como la calidad del agua evacuada, especialmente en alcantarillados urbanos. El *módulo de escorrentía o hidrológico* de SWMM funciona con una serie de cuencas en las cuales cae el agua de lluvia y se genera la escorrentía. El *módulo de transporte o hidráulico* de SWMM analiza el recorrido de estas aguas a través de un sistema compuesto por tuberías, canales, dispositivos de almacenamiento y tratamiento, bombas y elementos reguladores. Asimismo, SWMM es capaz de seguir la evolución de la cantidad y la calidad del agua de escorrentía de cada cuenca, así como el caudal, el nivel de agua en los pozos o la calidad del agua en cada tubería y canal durante una simulación compuesta por múltiples intervalos de tiempo [18].

6.1.2.1. Configuración del Proyecto

La primera tarea consiste en crear un nuevo proyecto SWMM y asegurar que ciertas opciones por defecto han sido establecidas. El uso de estas opciones por defecto puede simplificar notablemente la posterior tarea de introducción de datos.

1. En la pestaña correspondiente a las *Etiquetas ID*, deben fijarse prefijos deseados, tal y como muestra en la Figura 6.16. Esto hará que SWMM etiquete automáticamente todos los objetos nuevos con números consecutivos después del prefijo correspondiente especificado.

¹*Agencia de Protección del Medio Ambiente* (en inglés: *Environmental Protection Agency*; más conocida por las siglas **EPA**) es una agencia del gobierno federal de *Estados Unidos* encargada de proteger la *salud* humana y proteger el *medio ambiente*: aire, agua y suelo.

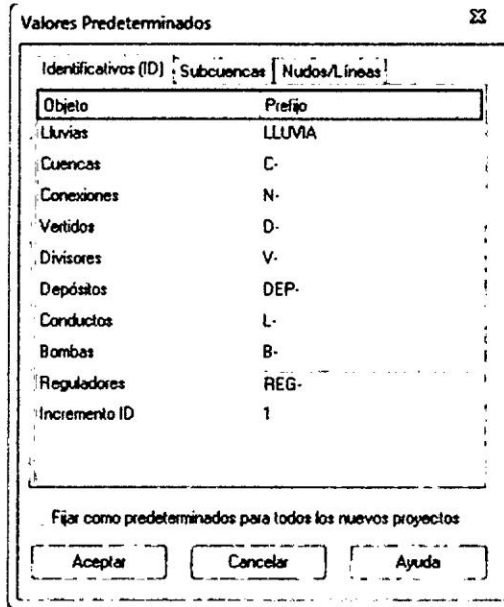


Figura 6.16: Etiquetado por defecto del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

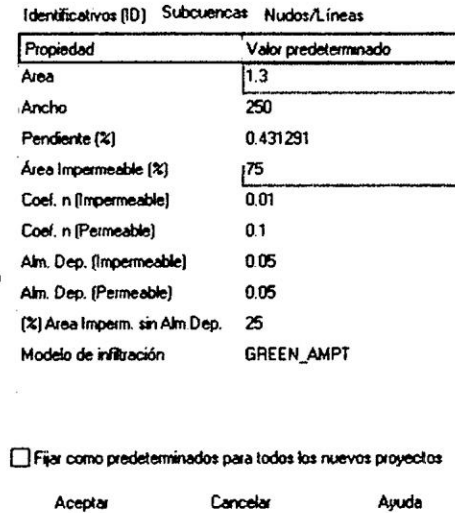


Figura 6.17: Valores por defecto de las subcuencas del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

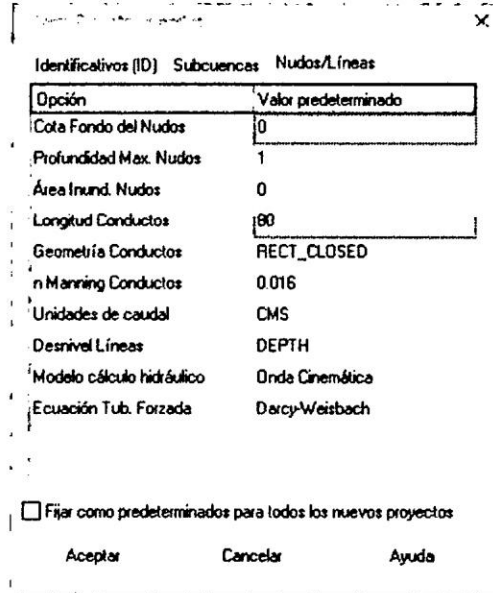


Figura 6.18: Valores por defecto de los nudos y líneas del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

2. En la pestaña correspondiente a las *Subcuencas* fijar los valores que se muestran en la Figura 6.17.
3. En la pestaña de opciones *Nudos/Líneas* fijar los valores por defecto que se muestran en la Figura 6.18.

6.1.2.2. Esquematización de la red de drenaje Kimbiri

Una vez hecha la configuración por defecto se seleccionan las opciones para empezar a añadir los *componentes* de la red en el plano del área de estudio. Para ello en primer lugar se importa una mapa de fondo luego se añaden los *conductos* del sistema de drenaje que conectan entre sí los diferentes nudos del sistema. (Antes de crear cualquier línea es necesario tener creados previamente los nudos extremos de la misma). Para ello se comienza con el conducto $C - 1$ que conecta los nudos $J - 1$ y $J - 2$, finalmente se dibujan las subcuencas y el pluviómetro, como se puede observar en la Figura 6.19.

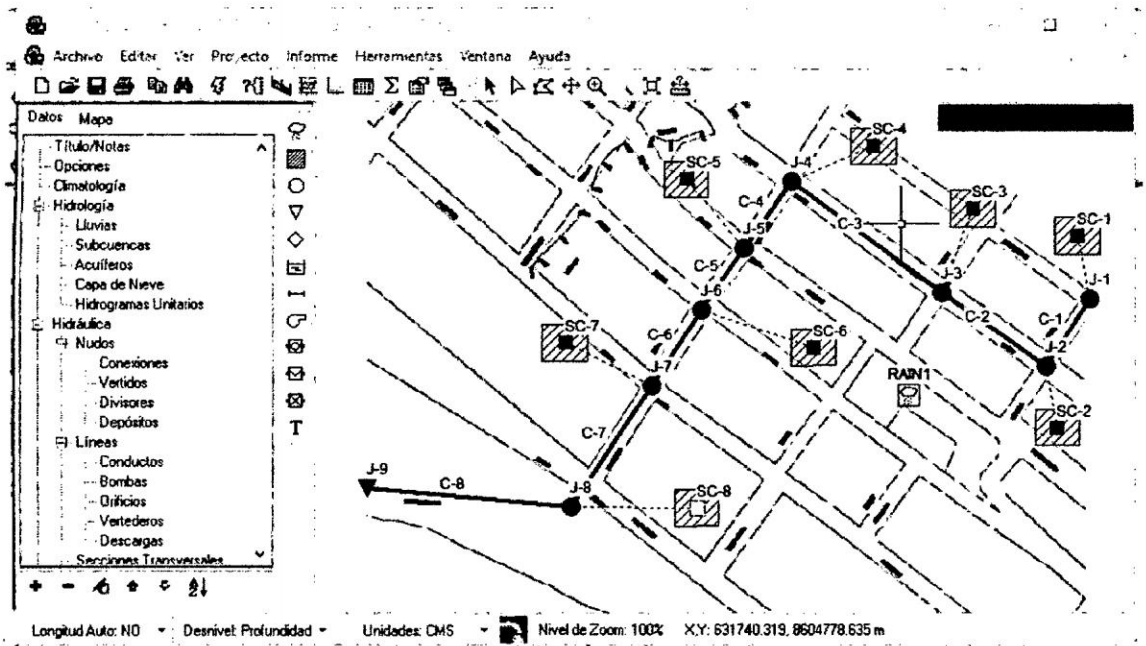


Figura 6.19: Red de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

Hasta aquí se dispone de un dibujo completo de la red de Kimbiri. El programa debe tener un esquema como el mostrado en la Figura 6.19. Si el pluviómetro, o cualquiera de los nudos o cuencas se encuentran fuera de su lugar, pueden desplazarse de sitio mediante la selección de objetos.

6.1.2.3. Asignación de un pluviómetro

Para que el modelo SWMM se ejecute correctamente, es necesario asignar *pluviómetros* con sus respectivos *hietogramas* para un periodo de retorno de 100 años. Estos valores se han determinado en la sección 5.3.1.1.3.

El gráfico del *hietograma* en realidad es un diagrama de barras que representa las variaciones de altura de precipitación pluvial, sin embargo el modelo *SWMM* no dibuja como diagrama de barras como se puede ver en el gráfico 6.21, pero esto no invalida la naturaleza de la modelación ni de los resultados obtenidos.

Nombre de la Serie Temporal
 HIETOGRAMA=100

Descripción:

Usar archivo externo (especifique el nombre abajo)

Introducir datos de la serie temporal en la tabla inferior
 Sin fecha implica tiempos desde el comienzo de la simulación

Fecha (M/D/Y)	Hora (H:M)	Valor
	0	0
	1	1.76
	2	1.89
	3	2.04
	4	2.22
	5	2.45
	6	2.74
	7	3.12
	8	3.66

Ver
 Aceptar
 Cancelar
 Ayuda

Figura 6.20: Ventana de diálogo del editor de series temporales del programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

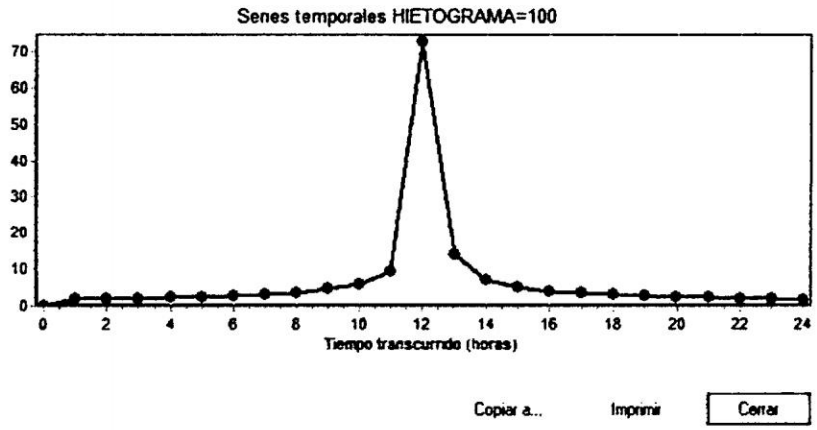


Figura 6.21: Hietograma de diseño ingresado al programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

El *hietograma* de diseño corresponde a los valores extremos de precipitación en el Distrito de *Kimbiri*, para la época donde se presentan máximas intensidades.

6.1.2.4. Propiedades de las cuencas

Conforme se van añadiendo los objetos visuales en *SWMM* el programa les asigna una serie de propiedades y valores por defecto. Por ejemplo para modificar las propiedades de las subcuencas se debe seleccionar el editor de propiedades de este objeto (ver Figura 6.22). Aquí se debe asignar el pluviómetro, área de la cuenca, pendiente y otras propiedades para cada de las subcuencas que están involucrados en toda la red de drenaje pluvial.

Propiedad	Valor
Nombre	SC-6
Coordenada X	631552.256
Coordenada Y	8604715.396
Descripción	
Marca	
Pluviómetro	RAIN1
Descarga	J-6
Área	0.495514
Ancho	250
Pendiente (%)	0.26350
Área impermeable (%)	75
Coef. n (Impermeable)	0.01
Coef. n (Permeable)	0.1
Alm. Dep. (Impermeable)	0.05
Alm. Dep. (Permeable)	0.05
(%) Área Imperm. sin Alm. Dep.	25
Flujo entre subáreas	OUTLET
(%) escorrentía transportada	100
Infiltración	GREEN_AMPT
Aguas Subterráneas	NO
Pluviómetro asignado a la cuenca	

Figura 6.22: Ventana del editor de propiedades de las subcuencas en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

Para la determinación de las áreas de las cuencas aportantes de cada nodo (*buzon*) se puede utilizar diferentes metodologías o softwares. En esta caso para la red de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri* he utilizado los *Polígonos de Thiessen*.

6.1.2.5. Resultados de la simulación con *SWMM 5 vE*

Una vez que se completa de forma exitosa el ingreso de datos y la simulación con el *SWMM 5*, existen multitud de formas de visualizar los resultados de la simulación como las mapas de contorno o isolíneas para el área de drenaje, gráficos y tablas de evolución a lo largo del tiempo, diagramas de perfil y análisis estadísticos de frecuencia. Aquí mostraremos los gráficos y tablas de los resultados de la *Red de Drenaje Pluvial de la Ciudad de Kimbiri*.

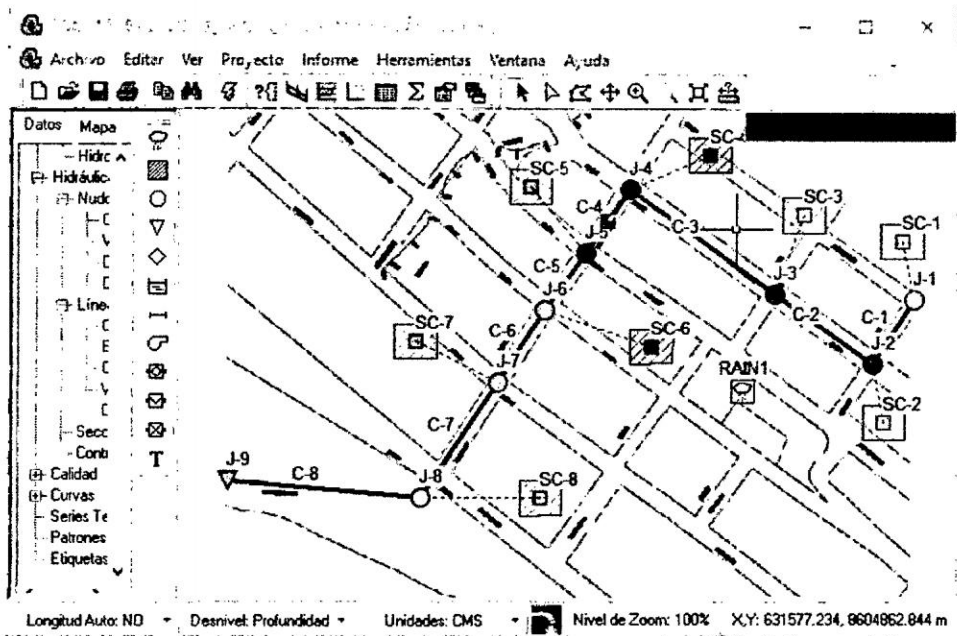


Figura 6.23: Esquema final de la simulación de la red de drenaje de Kimbiri *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.2.5.1. Resultados nodales

SWMM puede generar gráficos para los nodos mostrando cómo evoluciona el nivel de agua y el mismo caudal de aporte total en todos los nodos de la red de drenaje pluvial. A continuación se muestran las Figuras 6.24, 6.25 y 6.26, correspondientes al tirante, altura total y el caudal de aporte total en el *nodo 8*.

6.1. Resultados de la investigación

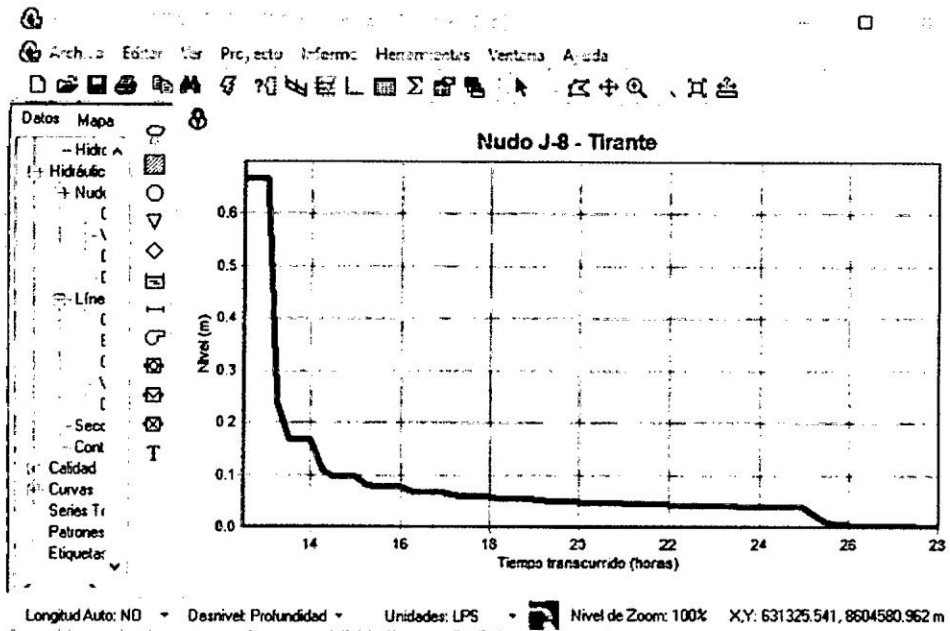


Figura 6.24: Tirante de agua del nodo 8 en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

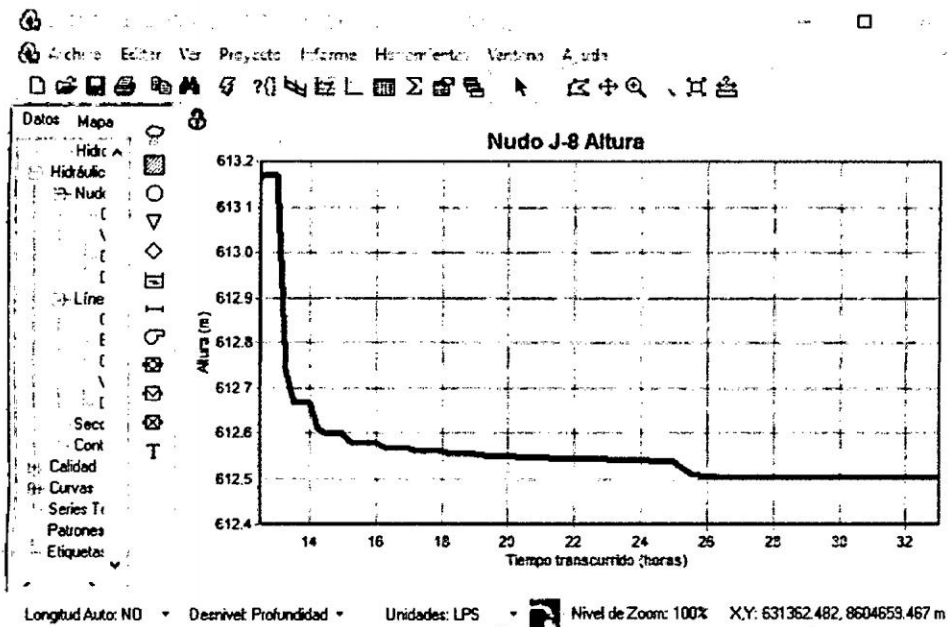


Figura 6.25: Altura de agua del nodo 8 en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

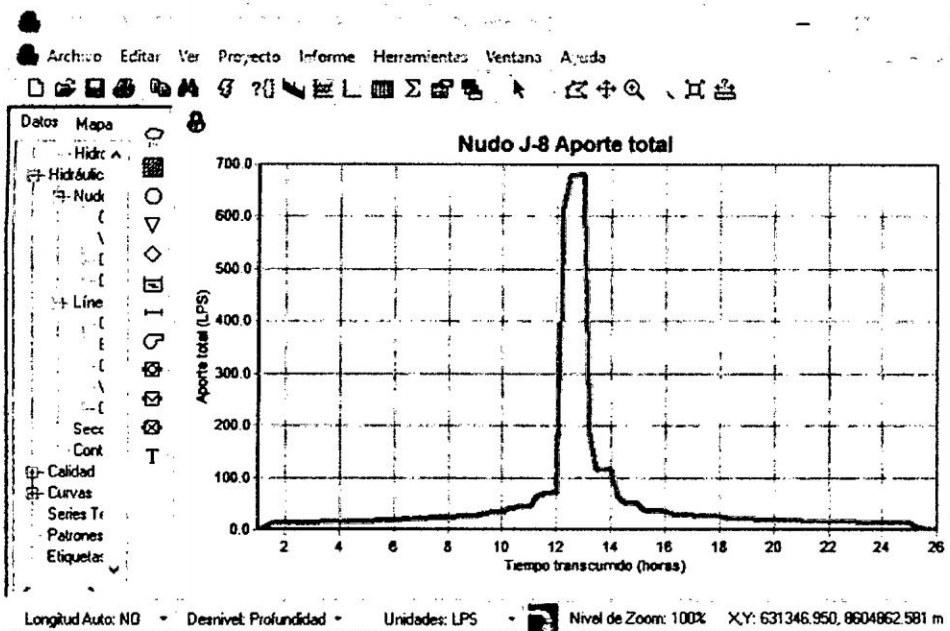


Figura 6.26: Caudal de aporte del nodo 8 en el programa *SWMM 5 vE*. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.2.5.2. Resultados de los conductos

En un análisis en régimen *no permanente* como en este trabajo de investigación el *SWMM* utiliza como módulo de cálculo hidráulico el método de la *onda cinemática* por lo que los resultados arrojados es el en el tiempo total de simulación asignado al programa.

Tanto el modelo *SWMM 5 vE* como el modelo *SMAP V2015*, ambos resuelven la ecuación de la *onda cinemática*, pero con diferentes metodologías. En el caso del modelo *SMAP V2015* utiliza el Método de Elementos Finitos y *SWMM 5 vE* utiliza su propio método del EPA.

Los valores en los conductos están relacionados a los *caudales*, *velocidades* y los *tirantes* de agua en toda la red de drenaje pluvial. Aquí presentaré solamente lo que corresponde al conducto 8. Las Figuras 6.27, 6.28 y 6.29 muestran estos parámetros.

Al solucionar la misma ecuación de onda cinemática para problemas de drenaje pluvial ambos modelos son similares y de ahí la elección para la comparación de los resultados.

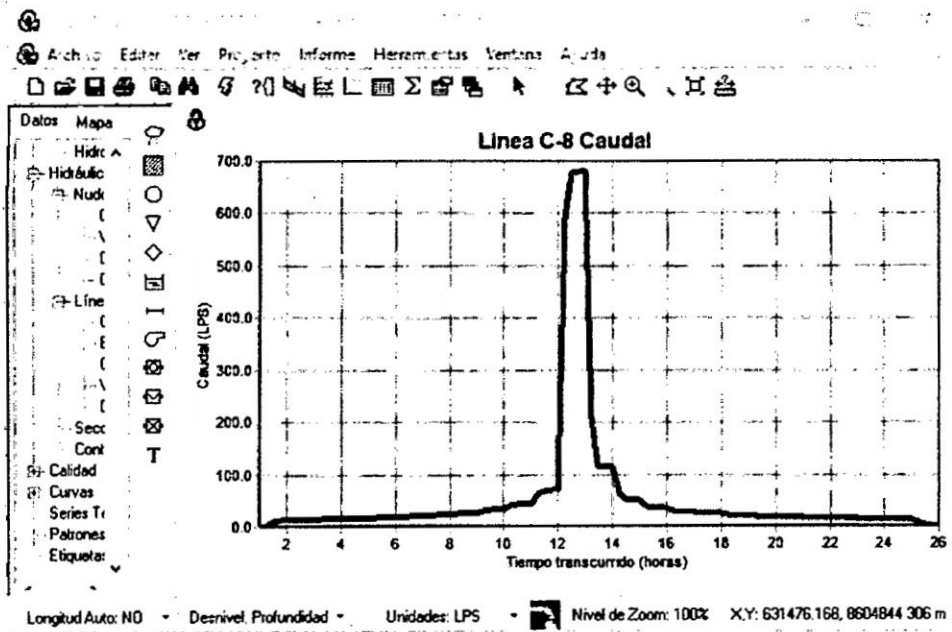


Figura 6.27: Caudales en el conducto 8 SWMM 5 vE. Fuente: *Elaboración propia*

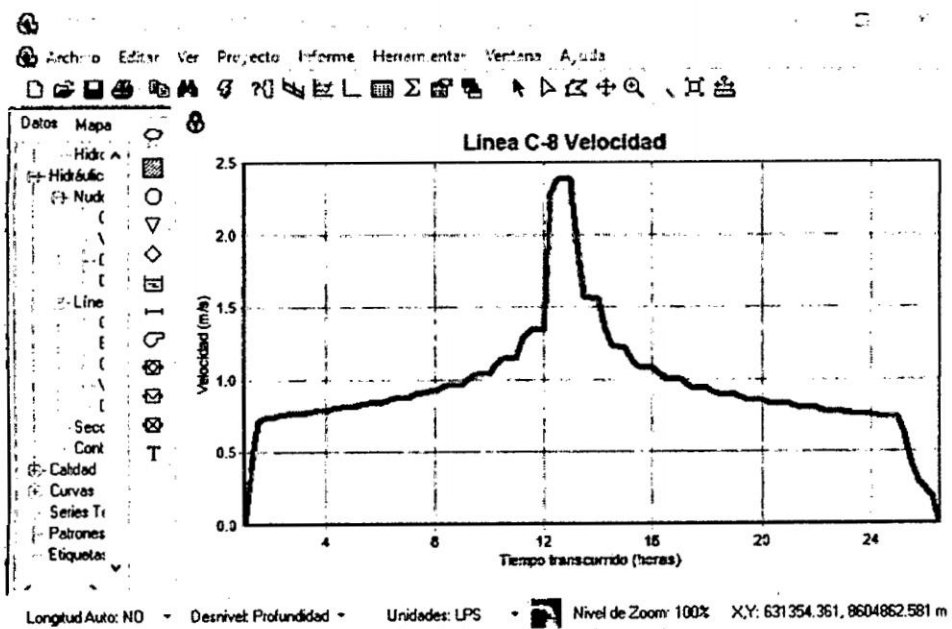


Figura 6.28: Velocidades de agua en el conducto 8 SWMM 5 vE. Fuente: *Elaboración propia*

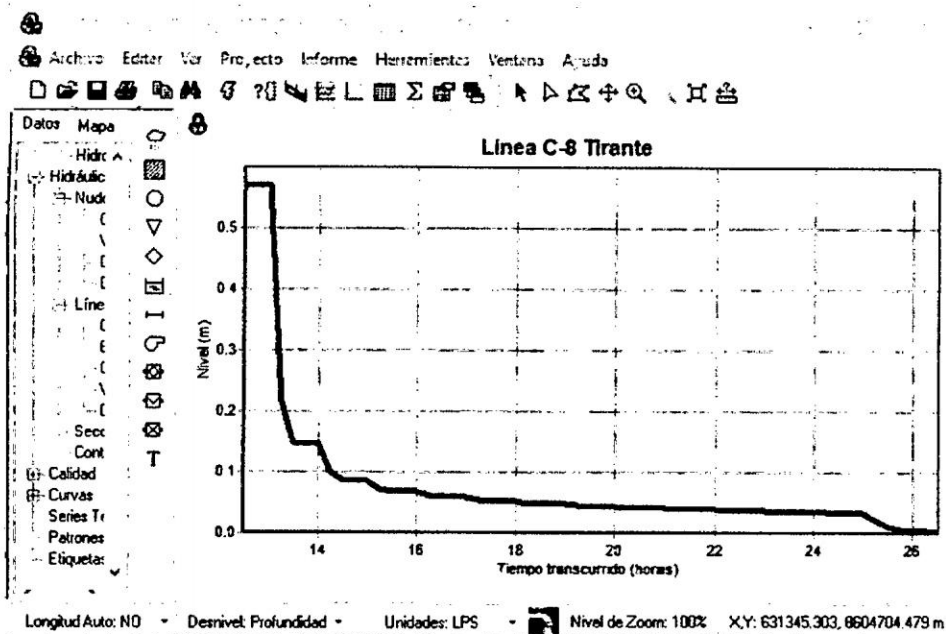


Figura 6.29: Tirantes de agua en el conducto 8 SWMM 5 vE. Fuente: *Elaboración propia*

6.1.3. Diseño de la sección de los conductos

A partir de la modelación hidráulica con el programa *SMAP V2015*, se ha determinado los niveles de agua, caudales, tirantes y velocidades, estos parámetros son resultados que sirven para el diseño de la sección del conducto, especialmente los tirantes y velocidades.

Cuadro 6.1: Tirantes y alturas del conducto calculadas y adoptadas

Conducto	Ancho (m)	Tirante (m)	Borde libre (m)	Altura total (m)	Altura adoptada (m)
1	0.5	0.54	0.18	0.72	1.0
2	0.5	0.59	0.20	0.79	1.0
3	0.5	0.6	0.20	0.80	1.0
4	0.5	0.61	0.20	0.81	1.0
5	0.8	0.63	0.21	0.84	1.0
6	0.8	0.63	0.21	0.84	1.0
7	0.8	0.65	0.22	0.87	1.0
8	0.8	0.75	0.25	1.00	1.0

Una que se tenga los tirantes en todos los conductos, se aumenta un borde libre, por lo menos $b_L = y/3$ y se calcula la altura total del conducto. Para la red de drenaje de la

ciudad de *Kimberi* los resultados se presentan en el Cuadro 6.1.

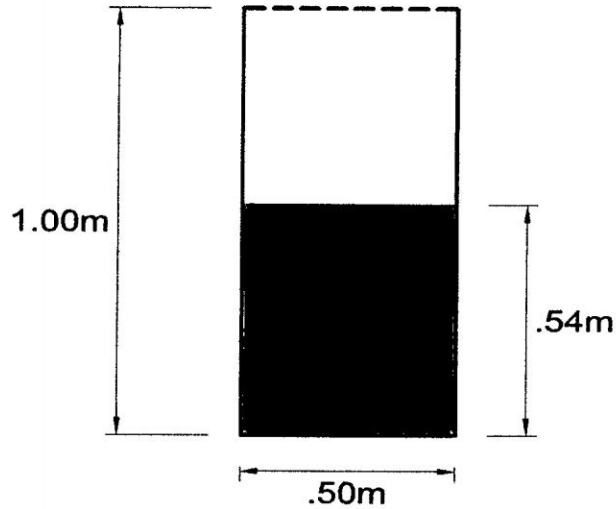


Figura 6.30: Tirante y sección del conducto 1. Fuente: *Elaboración propia*

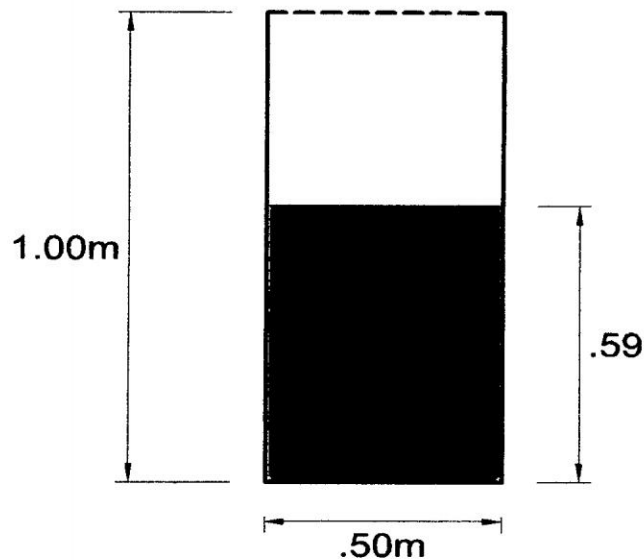


Figura 6.31: Tirante y sección del conducto 2. Fuente: *Elaboración propia*

Por cuestiones de construcción las dimensiones de las alcantarillas de la ciudad de *Kimberi* de homogenizan, es decir basándome en los resultados mostrados en el Cuadro 6.1 se resume de la siguiente manera: Los conductos de 1 al 4 tendrán una base de **0,5m** con una altura total de **1,0m**, mientras los conductos del 4 al 8 sera de un ancho de **0,8m** y una altura total de **1,0m**.

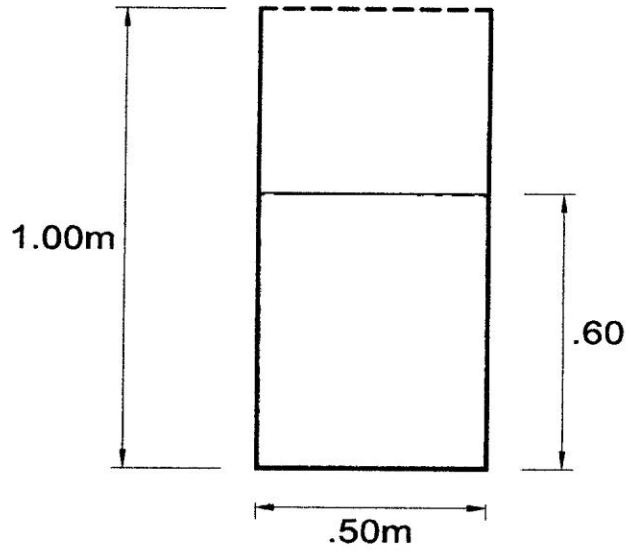


Figura 6.32: Tirante y sección del conducto 3. Fuente: *Elaboración propia*

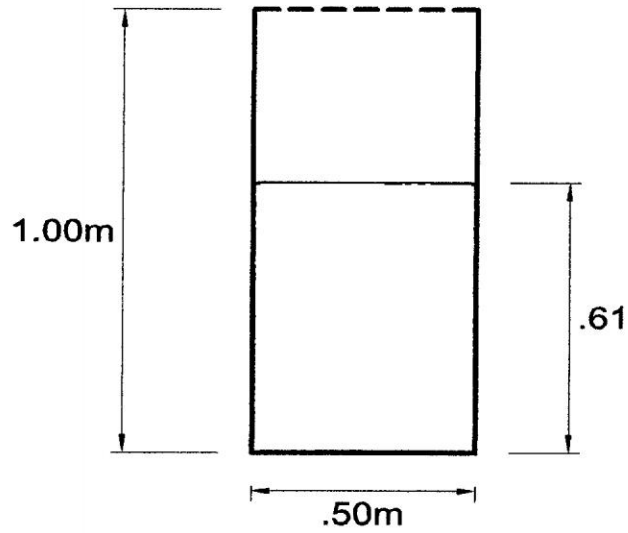


Figura 6.33: Tirante y sección del conducto 4. Fuente: *Elaboración propia*

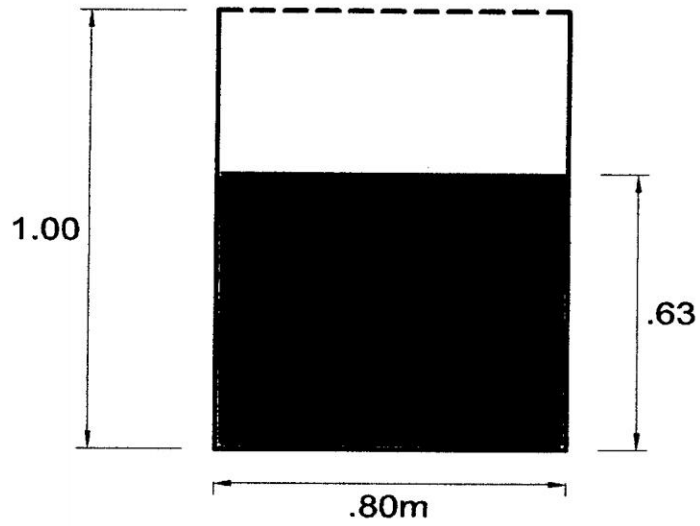


Figura 6.34: Tirante y sección del conducto 5. Fuente: *Elaboración propia*

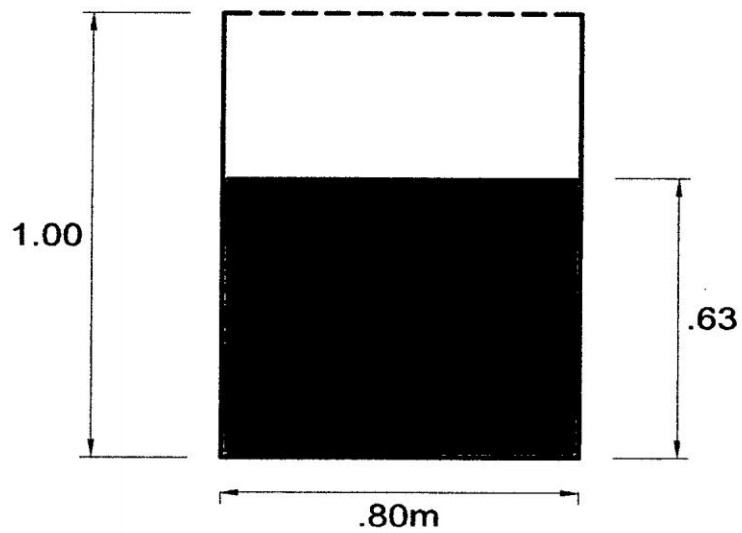


Figura 6.35: Tirante y sección del conducto 6. Fuente: *Elaboración propia*

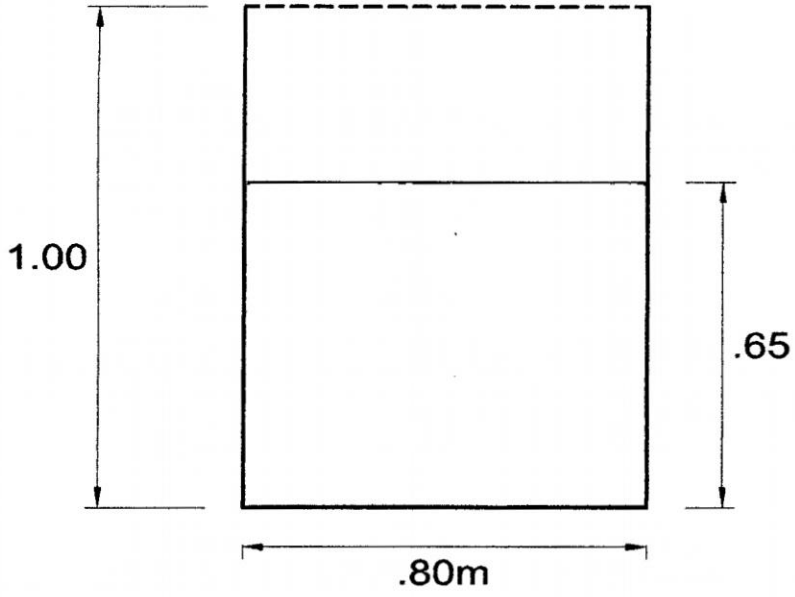


Figura 6.36: Tirante y sección del conducto 7. Fuente: *Elaboración propia*

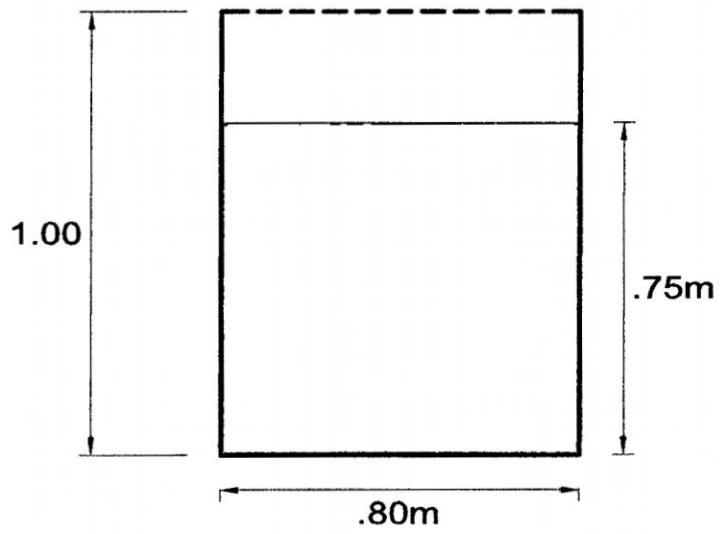


Figura 6.37: Tirante y sección del conducto 8. Fuente: *Elaboración propia*

6.2. Validación del modelo

6.2.1. Pruebas de bondad de ajuste

Las pruebas estadísticas, tienen por objeto medir la incertidumbre que se obtiene al hacer una hipótesis estadística sobre un resultado, es decir, calificar el hecho de suponer que una variable aleatoria, se distribuya según una cierta función de probabilidades. En el presente trabajo de investigación utilizaremos la prueba de bondad de ajuste χ^2 -Cuadrado para validar los resultados obtenidos en la *modelación hidrodinámica* de sistemas de drenaje pluvial con el *Método de Elementos Finitos*. Las variables a estimarse y validarse son las variables primarias como son los tirantes y los caudales, dado que las variables secundarias dependen directamente de estas primeras.

6.2.1.1. Prueba Chi-Cuadrado χ^2

La prueba *Chi – Cuadrado* se basa en el cálculo de frecuencias, tanto de valores observados, como valores esperados, para un número determinado de intervalos. Esta prueba es comúnmente usada, para verificar la bondad de ajuste de la distribución empírica a una distribución teórica conocida, fue propuesta por *Karl Pearson* en 1900 [5].

La expresión general de la prueba *Chi-Cuadrado* está dada por:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(\theta_i - e_i)^2}{e_i} \quad (6.2.1)$$

Donde:

$$\sum_{i=1}^k \theta_i = \sum_{i=1}^k e_i = N$$

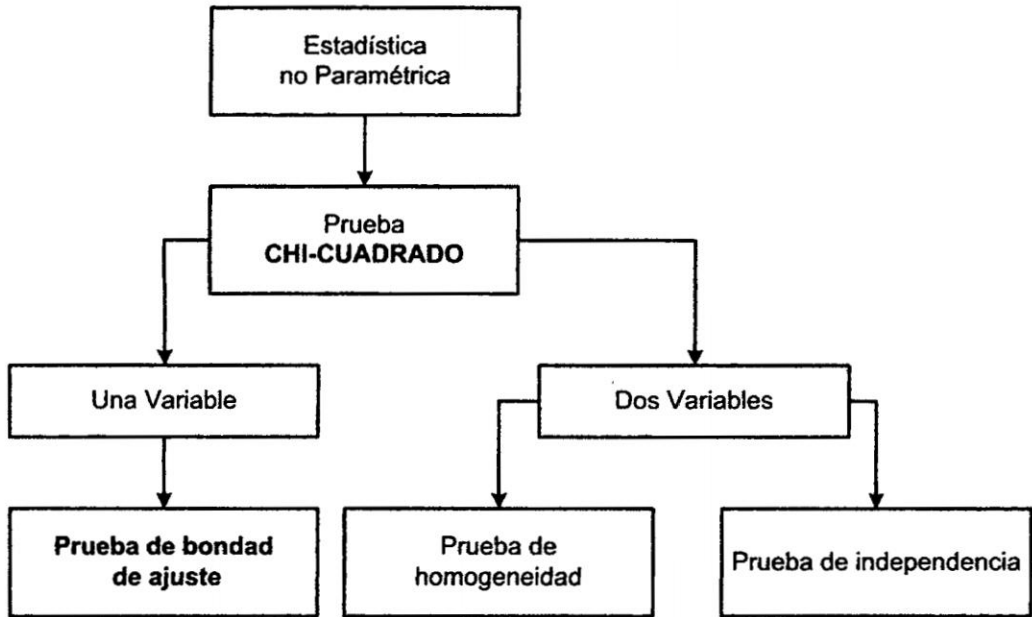


Figura 6.38: Estadística no paramétrica: prueba Chi-Cuadrado χ^2

χ_c^2 = Valor calculado de Chi-Cuadrado, a partir de los resultados.

θ_i = Numero de valores observados en el intervalo de clase i .

e_i = Numero de valores esperados en el intervalo de clase i .

k = Numero de intervalos de clase.

Asignando probabilidades a la ecuación (6.2.1) es decir, asignando igual probabilidad de ocurrencia a cada intervalo de clase, se tiene:

$$\chi_c^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(N_i - NP_i)^2}{NP_i} \quad (6.2.2)$$

Donde:

N_i = Numero de observaciones que caen dentro de los límites de clases ajustadas del intervalo i .

N = Tamaño muestral.

P_i = Probabilidad igual para todos los intervalos de clases.

$$P_i = \frac{1}{k} \quad e_i = P_i N \quad (6.2.3)$$

Simplificando la ecuación (6.2.2), se obtiene la formula computacional desarrollada por *Markovic* (1965)

$$\chi_c^2 = \frac{K}{N} \sum_{i=1}^K N_i^2 - N \quad (6.2.4)$$

El valor de χ_c^2 obtenido por la ecuación (6.2.4) se compara con el χ_t^2 que se obtiene de las tablas, es este caso he utilizado las funciones de *Matlab* y *Mathcad*, cuyo valor se determina con:

Nivel de significación : $\alpha = 0,05$ ó $\alpha = 0,01$

Grados de libertad : $g.l. = k - 1 - h$

Donde:

$h =$ Es el número de parámetros a estimarse

$h = 2$, Para la distribución Normal

$h = 3$, Para la distribución Log-Normal de 3 Parámetros.

6.2.1.1.1. Criterios de decision

El criterio de decisión se fundamenta en la comparación del valor calculado de *Chi-Cuadrado* con el valor tabular encontrado, esto es:

- Si el *Chi-Cuadrado* calculado es menor o igual que el valor tabular, es decir:

$$\chi_c^2 \leq \chi_t^2$$

entonces, se acepta la hipótesis que el ajuste es bueno al nivel de significación seleccionado.

- Si el *Chi-Cuadrado* calculado es mayor que el valor tabular, es decir:

$$\chi_c^2 > \chi_t^2$$

entonces, el ajuste es malo y se rechaza la hipótesis, siendo necesario probar con otra distribución teórica [5].

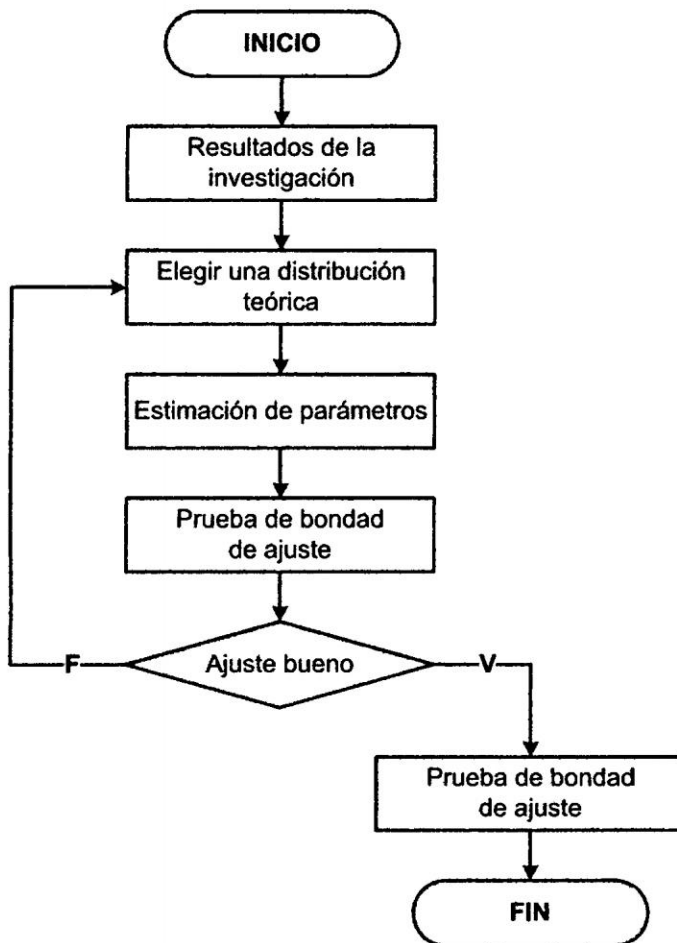


Figura 6.39: Selección de una distribución teórica

6.2.2. Validación de resultados: Caudales del sistema de drenaje

En este ítem se hará la validación de los resultados obtenidos con el programa *SMAP V2015* utilizando técnicas estadísticas de estimación de parámetros, intervalos de confianza y prueba de hipótesis, denominadas ***Estadística No Paramétrica***. Estas técnicas se basan en especificar una forma de distribución de la variable aleatoria y de los estadísticos derivados de los datos.

6.2.2.1. Prueba de bondad de ajuste de Chi-Cuadrado

Cálculo del número de intervalos de clase, según *Yevjevich*

$$N_C = 1 + 1,33 \ln(N) \quad (6.2.5)$$

Amplitud interválica

$$\Delta Q = \frac{\max(Q) - \min(Q)}{N_C - 1} \quad (6.2.6)$$

Luego calculamos la variable cuantitativa inferior y superior de la siguiente manera:

$$VCI = \min(Q) - \frac{\Delta Q}{2} \quad VCS = \max(Q) + \frac{\Delta Q}{2} \quad (6.2.7)$$

Utilizaremos las distribuciones teóricas de *Distribución Normal*, *Distribución Log Normal de 2 Parámetros* y *Distribución Log Normal de 3 Parámetros*, dado que la prueba de Chi-Cuadrado χ^2 es aplicable solo para ajustes a la distribución normal, puesto que ha sido desarrollado con base en los datos *normales e independientes*.

6.2.2.1.1. Distribución normal

Las distribución χ^2 -Cuadrado, se derivan de la *distribución Normal* y están relacionadas con la teoría del muestreo pequeño $n < 30$. Son muy importantes pues son la base de metodologías inferenciales, tales como *Intervalos de Confianza* y *Pruebas de Hipótesis*. En otros estudios se les define como la suma de diferencias cuadráticas relativas entre valores experimentales (*observados*) y valores teóricos (*esperados*). Aplicando las ecuaciones (6.2.5), (6.2.6) y (6.2.7) y reordenando adecuadamente se tiene el Cuadro 6.2 y la Figura 6.40, donde se puede ver los resultados numéricos de la prueba de bondad de χ^2 -Cuadrado.

Cuadro 6.2: Cálculo de la frecuencia acumulada (Distribución Normal)

Intervalos de clase		Marcas de clase		Z1	Z2	F(Z)	Valor esperado (e _i)	Valor observado (θ _i)
1.02857	1.37143	1.20000	-1.63152	-1.24763	0.05469	1	1	
1.37143	1.71429	1.54286	-1.24763	-0.86374	0.08778	1	0	
1.71429	2.05714	1.88571	-0.86374	-0.47986	0.12180	1	2	
2.05714	2.40000	2.22857	-0.47986	-0.09597	0.14611	1	2	
2.40000	2.74286	2.57143	-0.09597	0.28791	0.15152	1	0	
2.74286	3.08571	2.91429	0.28791	0.67180	0.13585	1	0	
3.08571	3.42857	3.25714	0.67180	1.05569	0.10530	1	1	
3.42857	3.77143	3.60000	1.05569	1.43957	0.07056	1	2	
							8	8

6.2.2.1.2. Distribución Log Normal de 2 Parámetros

Las distribuciones logarítmicas mas conocidas en *Hidrología* para el caso de la prueba de *Chi-Cuadrado* χ^2 son la distribución *Log Normal de 2 Parámetros* y la distribución *Log Normal de 3 Parámetros*.

Es decir los datos o resultados de *caudales* o *profundidades de agua* en la red de alcantari-llado $y = \ln(Q, H)$, tienen una distribución normal. A continuación se presenta el cálculo

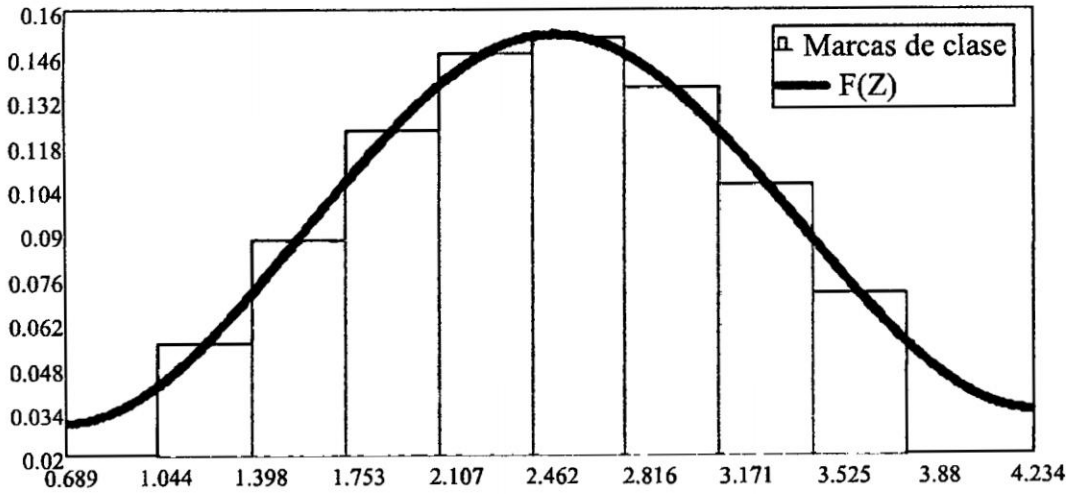


Figura 6.40: Marcas de clase y función de densidad (Distribución Normal)

Cuadro 6.3: Cálculo de la frecuencia acumulada (Distribución LN2P)

Intervalos de clase		Marcas de clase	Z1	Z2	F(Z)	Valor esperado (e _i)	Valor observado (θ _i)
1.02857	1.37143	1.20000	-1.63152	-1.24763	0.05469	1	1
1.37143	1.71429	1.54286	-1.24763	-0.86374	0.08778	1	0
1.71429	2.05714	1.88571	-0.86374	-0.47986	0.12180	1	2
2.05714	2.40000	2.22857	-0.47986	-0.09597	0.14611	1	2
2.40000	2.74286	2.57143	-0.09597	0.28791	0.15152	1	0
2.74286	3.08571	2.91429	0.28791	0.67180	0.13585	1	0
3.08571	3.42857	3.25714	0.67180	1.05569	0.10530	1	1
3.42857	3.77143	3.60000	1.05569	1.43957	0.07056	1	2
						8	8

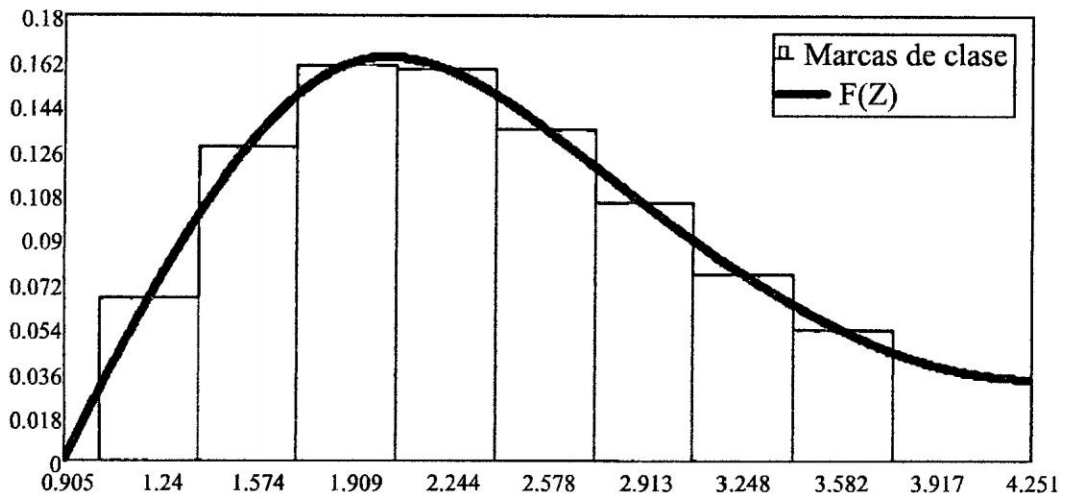


Figura 6.41: Marcas de clase y función de densidad (Distribución LN2P)

de las marcas de clase, función de distribución para la distribución de *Log Normal de 2 Parámetros*, como puede observarse en el cuadro 6.3 y la figura 6.41.

6.2.2.1.3. Distribución Log Normal de 3 Parámetros

De manera análoga se hace la prueba de *Chi-Cuadrado* χ^2 para la distribución *Log Normal de 3 Parámetros* como puede verse en el cuadro 6.4 y la figura 6.42.

Cuadro 6.4: Cálculo de la frecuencia acumulada (Distribución LN3P)

Intervalos de clase	Marcas de clase	Z1	Z2	F(Z)	Valor esperado (e _i)	Valor observado (θ _i)	
1.02857	1.37143	1.20000	-1.63152	-1.24763	0.05469	1	1
1.37143	1.71429	1.54286	-1.24763	-0.86374	0.08778	1	0
1.71429	2.05714	1.88571	-0.86374	-0.47986	0.12180	1	2
2.05714	2.40000	2.22857	-0.47986	-0.09597	0.14611	1	2
2.40000	2.74286	2.57143	-0.09597	0.28791	0.15152	1	0
2.74286	3.08571	2.91429	0.28791	0.67180	0.13585	1	0
3.08571	3.42857	3.25714	0.67180	1.05569	0.10530	1	1
3.42857	3.77143	3.60000	1.05569	1.43957	0.07056	1	2
					8	8	

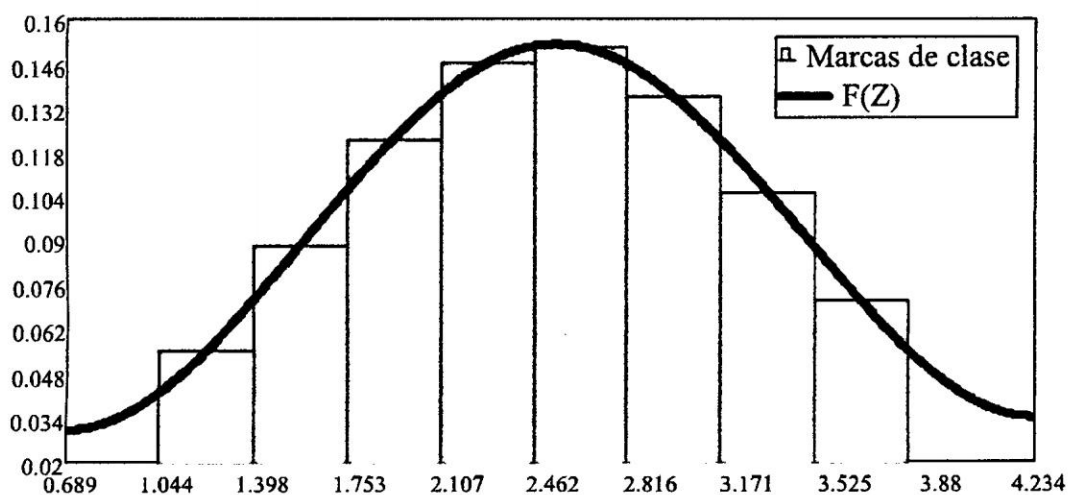


Figura 6.42: Marcas de clase y función de densidad (Distribución LN3P)

A partir de las 3 distribuciones se escoge la mejor distribución que se ajusta a los resultados. En este caso luego de realizar la prueba de análisis estadístico por *Chi Cuadrado* χ^2 , podemos concluir que la distribución que mejor se ajusta es la distribución *Log Normal de 3 Parámetros* como puede observarse en el cuadro 6.5.

Cuadro 6.5: Selección de la mejor distribución

Método Estadístico	Chi Cuadrado				Puntuación
	h	v	χ_c^2	χ_t^2	
Distribución Log Normal de 3 Parámetros	3	4	6.00	9.49	1
Distribución Log Normal de 2 Parámetros	2	5	6.00	11.07	2
Distribución Normal	2	5	6.00	11.07	3

A partir del cuadro 6.5 podemos afirmar que los resultados de caudales se ajustan a la distribución *Log normal de 3P* con $\alpha = 0,05$ ó 95% de probabilidad, dado que $\chi_c^2 < \chi_t^2$. Por lo tanto el modelo matemático propuesto para la simulación dinámica de redes de drenaje pluvial con el *Método de Elementos Finitos* **ES VÁLIDO**.

6.3. Discusión de resultados

6.3.1. Comparación de resultados

El conocimiento de los resultados y su aproximación entre dos modelos matemáticos de análisis y simulación numérica de sistemas de drenaje pluvial es tan crucial e importante en este trabajo de investigación porque por un lado se utiliza un software comercial ampliamente utilizado a nivel mundial que el *Storm Water Management Model (SWMM)* y por el otro lado tenemos el software desarrollado en esta tesis llamado *Sistema de Modelamiento de Aguas Pluviales SMAP V2015*.

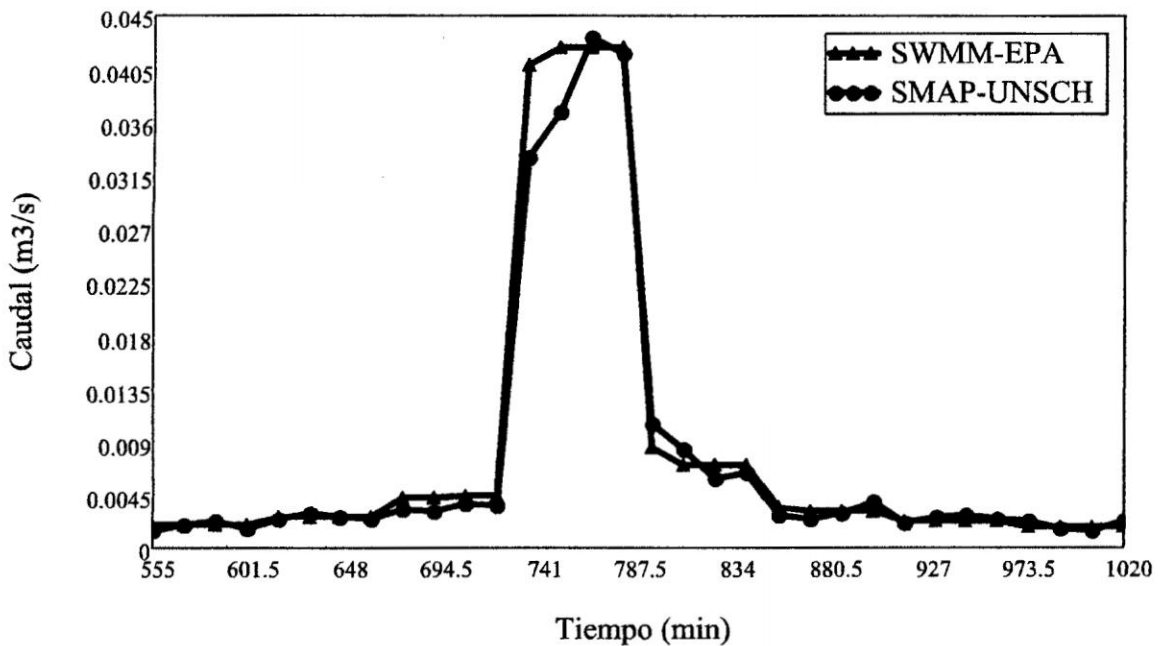


Figura 6.43: Comparación de caudales de salida en el *conducto 1* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

El objetivo es comparar los resultados numéricos mediante gráficos y cuadros obtenidos por ambos modelos que utilizan diferentes formulaciones matemáticas, en el caso de *SWMM* su esquema de solución es el módulo *EXTRAN* que se obtuvo a través de la

6.3. Discusión de resultados

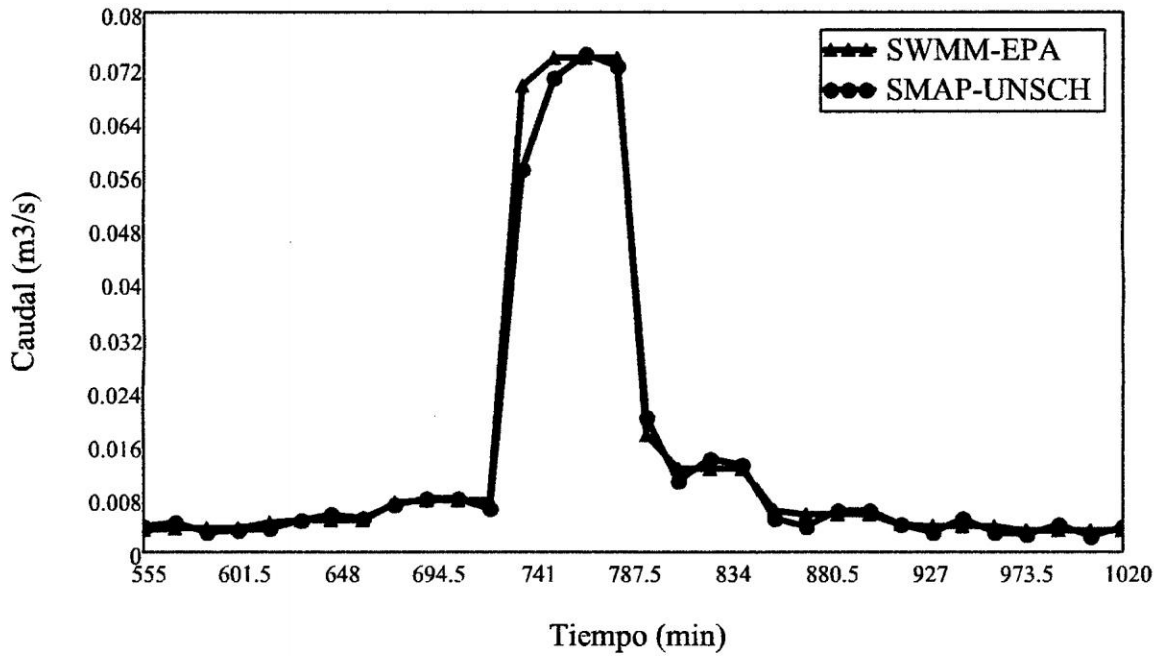


Figura 6.44: Comparación de caudales de salida en el *conducto 2* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

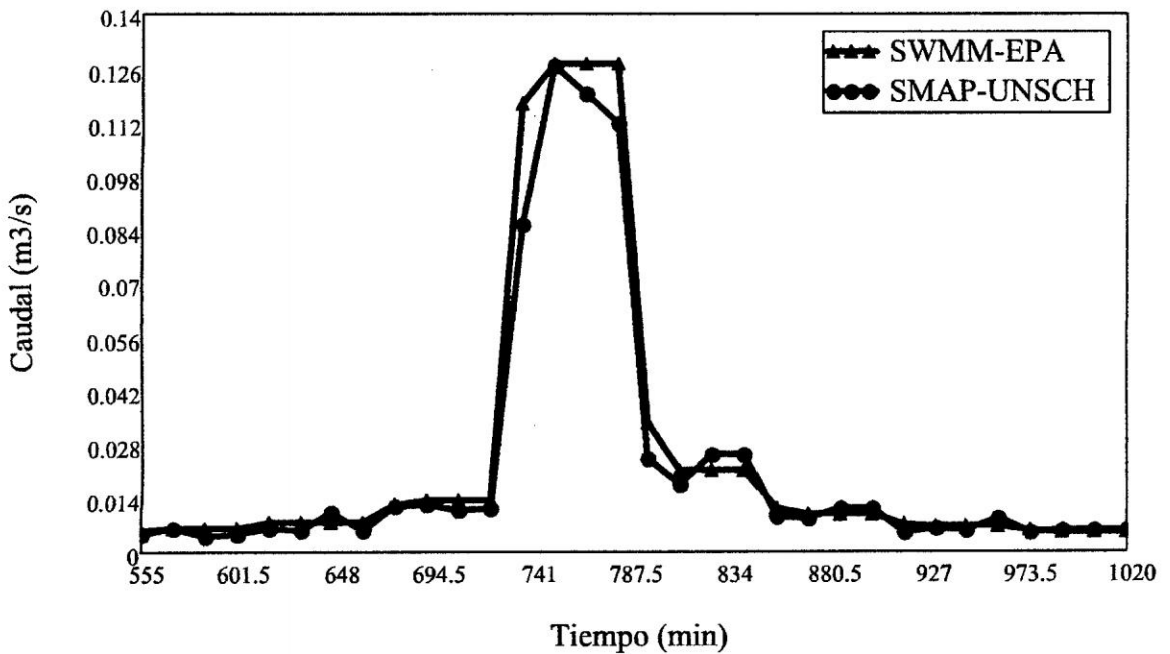


Figura 6.45: Comparación de caudales de salida en el *conducto 3* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

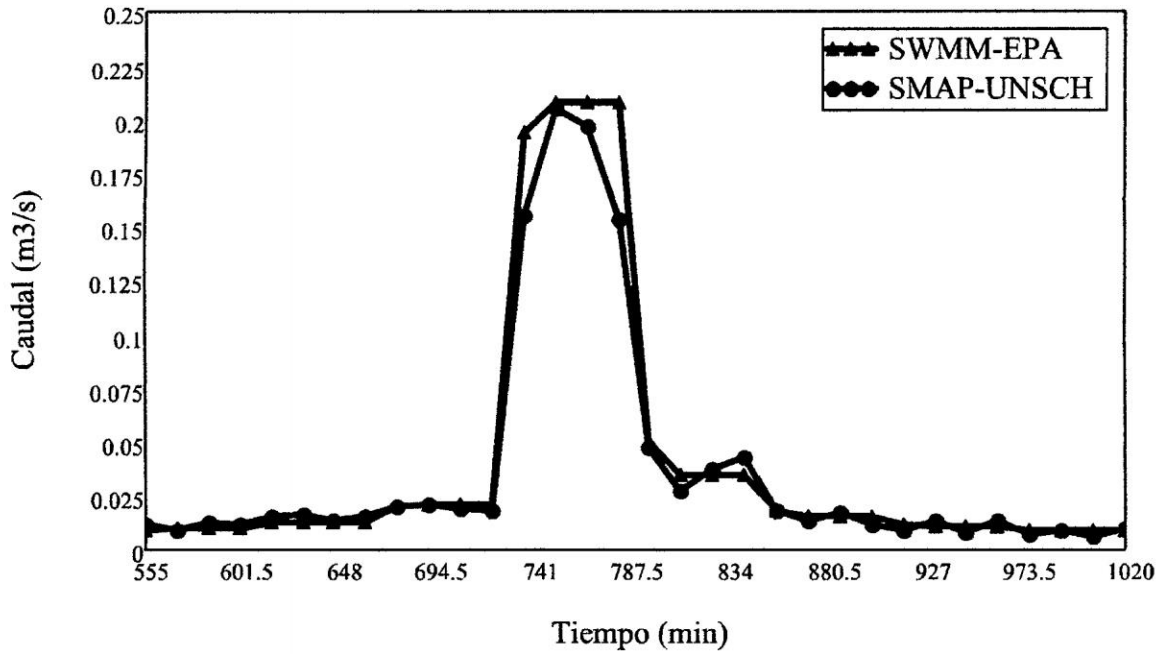


Figura 6.46: Comparación de caudales de salida en el *conducto 4* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

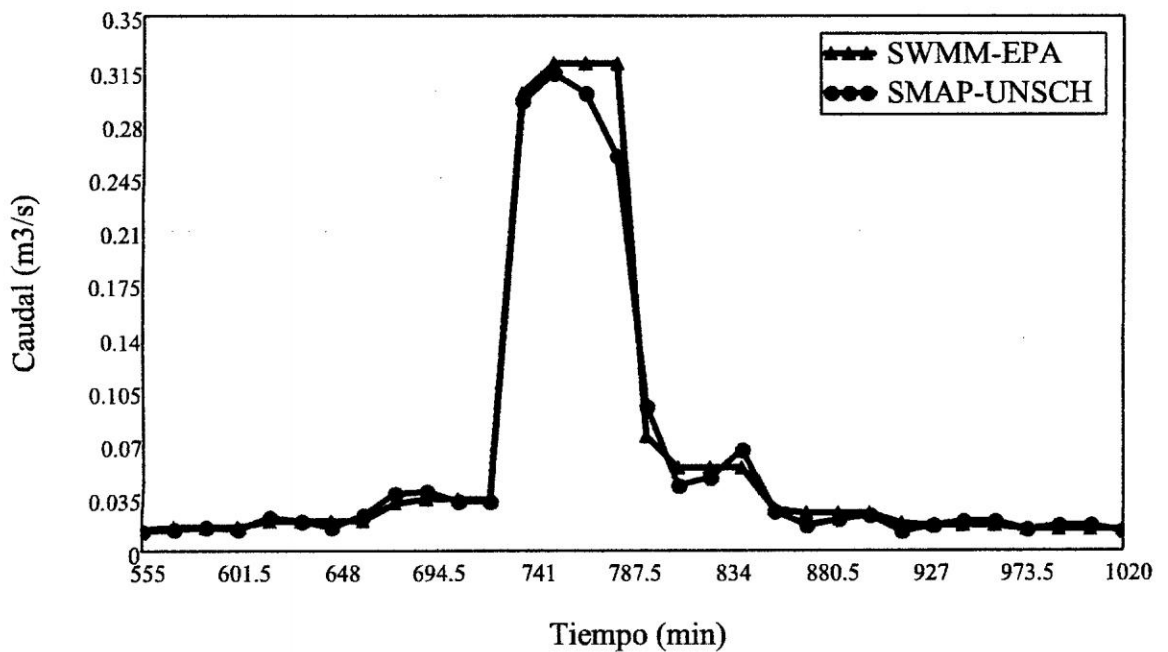


Figura 6.47: Comparación de caudales de salida en el *conducto 5* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

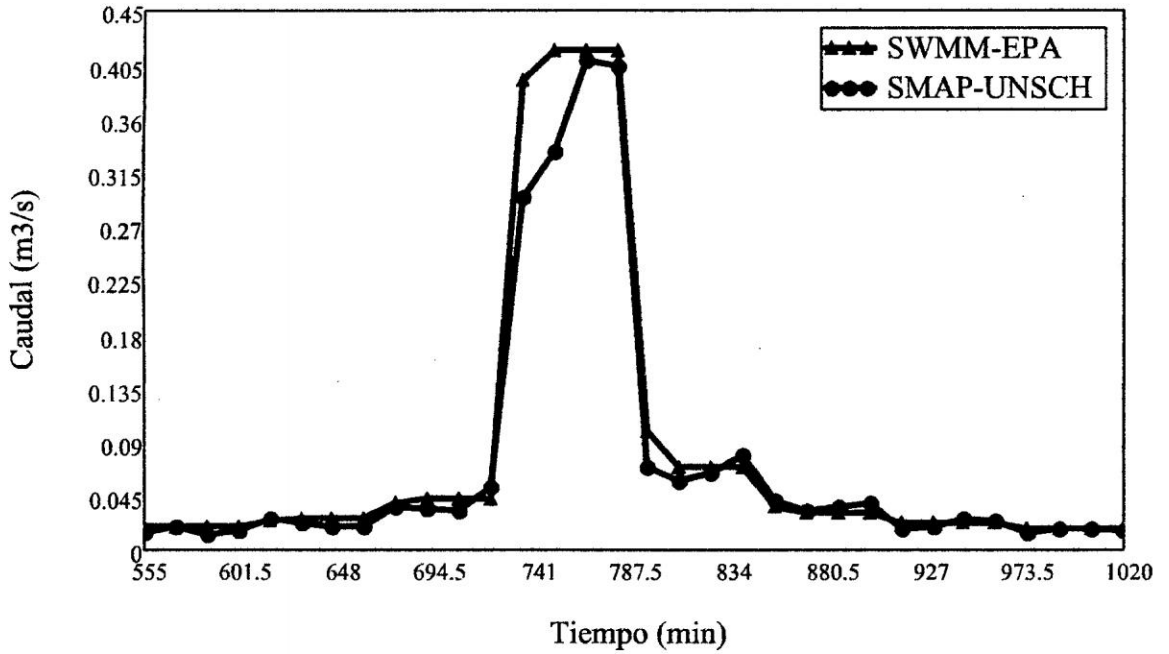


Figura 6.48: Comparación de caudales de salida en el *conducto 6* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

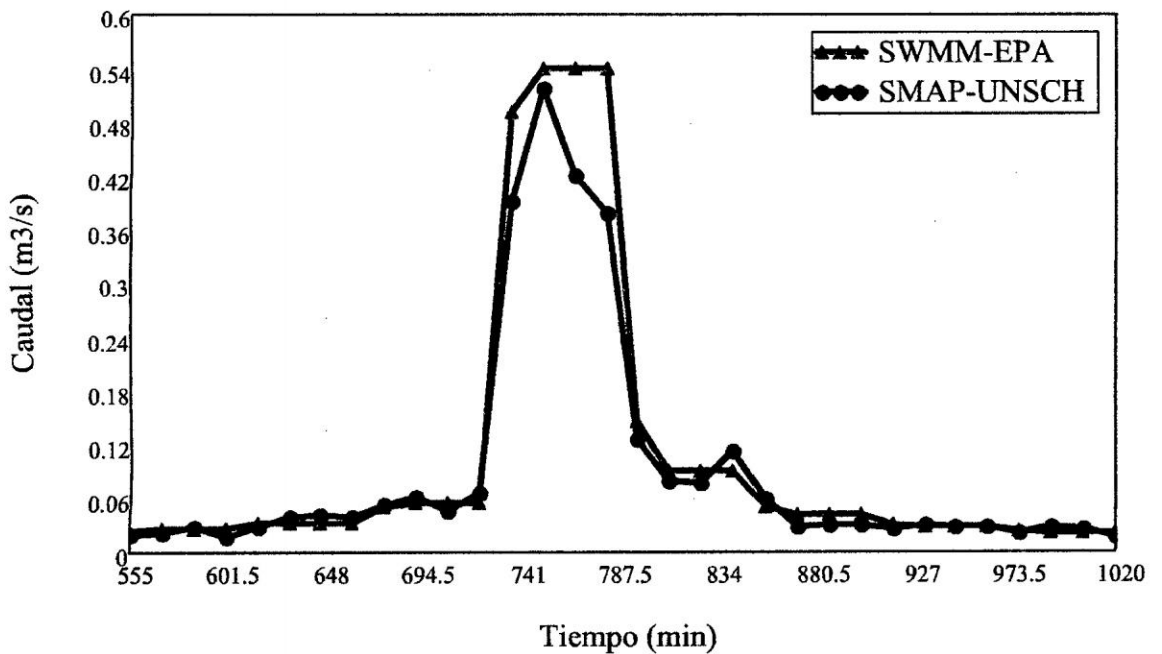


Figura 6.49: Comparación de caudales de salida en el *conducto 7* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

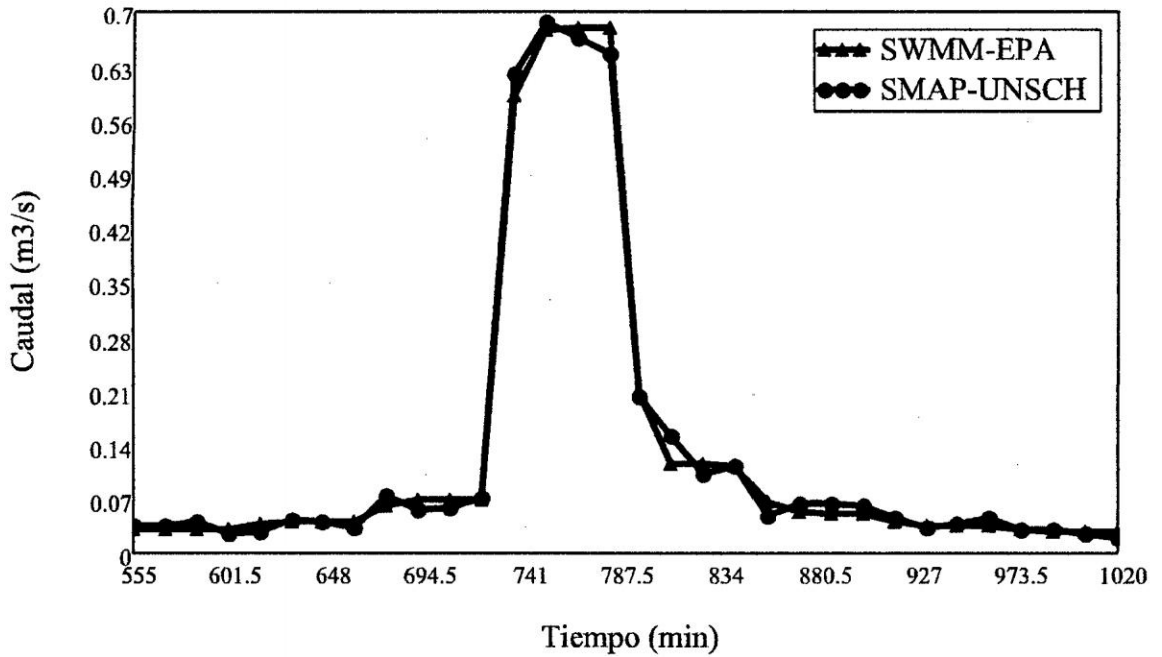


Figura 6.50: Comparación de caudales de salida en el *conducto 8* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

combinación de la *ecuación de momentum* y la *ecuación de continuidad*, mientras el modelo *SMAP V2015* utiliza el *Método de Elementos Finitos* para resolver ambas ecuaciones gobernantes del *flujo no permanente* en redes de drenaje pluvial. Las Figuras 6.43, 6.44, 6.45, 6.46, 6.47, 6.48, 6.49 y 6.50 muestran la variación temporal de los caudales desde el conducto 1 hasta el conducto 8, obtenidos por los modelos *SWMM* y *SMAP*. Como puede observarse en estas Figuras, existe una ligera variación en los resultados, esto es debido a que ambos modelos utilizan diferentes *métodos numéricos* para resolver la ecuación diferencial parcial gobernante del flujo no permanente en sistemas de drenaje pluvial. En el mercado comercial no existe un modelo hidráulico de simulación dinámica de redes de drenaje pluvial mediante el *Método de Elementos Finitos*. Esta tesis es un aporte en la aproximación de un nuevo modelo matemático y computacional para el análisis y simulación numérica de este tipo de problemas.

A continuación presentamos los resultados de la simulación de la variación temporal de

los caudales en todos los conducto. El Cuadro 6.6 muestra los resultados del programa *SWMM v5* y el Cuadro 6.7 visualiza los resultados del programa *SMAP V2015*. Se ha considerado para la comparación la etapa mas critica con el fin de observar mejor la diferencia entre ambos modelos. Sin embargo los resultados completos son desde un $t = 0$ hasta el tiempo total de simulación considerada por el usuario.

Cuadro 6.6: Resultados de caudales en los conductos con el programa *SMAP V2015*:
Fuente: *Elaboración propia*

Tiempo (min)	Q ₁ (L/s)	Q ₂ (L/s)	Q ₃ (L/s)	Q ₄ (L/s)	Q ₅ (L/s)	Q ₆ (L/s)	Q ₇ (L/s)	Q ₈ (L/s)
555	1.49	3.92	4.40	12.40	13.25	15.36	19.96	36.50
570	2.04	4.37	6.13	9.53	13.57	19.69	20.97	34.92
585	2.32	2.88	4.27	12.77	15.68	13.98	28.91	40.14
600	1.64	3.30	4.87	11.59	14.63	15.75	18.16	24.74
615	2.48	3.60	5.99	15.40	22.23	26.21	28.71	28.56
630	3.04	4.75	5.87	16.85	19.90	22.35	39.49	44.84
645	2.72	5.62	10.07	13.48	15.12	19.49	42.88	40.69
660	2.46	5.13	5.79	16.07	23.28	19.23	39.84	34.34
675	3.23	6.93	12.01	19.85	37.76	35.63	52.37	75.46
690	3.11	7.97	12.49	21.06	38.22	34.32	62.75	57.37
705	3.73	7.83	10.94	19.16	32.06	32.33	46.42	59.39
720	3.64	6.46	11.47	18.31	32.74	52.25	66.15	72.98
735	33.10	56.62	85.37	155.13	294.44	293.82	393.20	620.62
750	36.82	70.32	126.69	205.22	313.26	332.96	518.89	687.86
765	43.21	73.70	119.32	197.13	299.55	408.71	421.64	667.49
780	41.90	72.09	111.71	153.55	258.12	403.70	378.39	645.08
795	10.53	19.92	23.95	47.65	94.12	70.27	125.32	204.06

(sigue en la página siguiente)

Cuadro 6.6: Continuación de los resultados de caudales en los conductos con el programa *SMAP V2015*: Fuente: *Elaboración propia*

Tiempo (min)	Q ₁ (L/s)	Q ₂ (L/s)	Q ₃ (L/s)	Q ₄ (L/s)	Q ₅ (L/s)	Q ₆ (L/s)	Q ₇ (L/s)	Q ₈ (L/s)
810	8.52	10.58	17.68	27.86	42.27	58.12	79.36	150.90
825	5.89	13.89	25.12	37.94	47.04	64.95	77.14	102.11
840	6.53	13.03	25.13	42.82	65.22	78.90	113.36	113.05
855	2.88	4.93	9.41	18.01	26.18	41.15	58.83	48.29
870	2.43	3.88	8.94	14.13	17.15	33.90	29.77	63.53
885	3.04	6.26	11.41	17.56	20.48	35.60	31.95	63.34
900	3.90	6.04	11.42	11.92	22.89	39.95	31.88	61.91
915	2.16	4.09	5.20	9.08	13.10	17.87	25.58	46.82
930	2.59	2.99	6.40	14.04	16.59	20.33	31.06	32.94
945	2.88	4.91	5.65	8.58	19.49	27.03	27.86	38.29
960	2.54	3.03	8.51	14.15	19.15	24.35	29.30	47.02
975	2.29	2.78	4.95	7.35	14.30	14.32	22.28	31.39
990	1.73	4.06	5.83	8.83	17.09	18.24	28.78	31.04
1005	1.51	2.34	5.83	6.18	17.36	18.95	26.00	25.16
1020	2.29	3.84	5.56	9.89	12.48	15.94	18.17	20.52

(Fin de la tabla)

Cuadro 6.7: Resultados de caudales en los conductos con el programa *SWMM v5*: Fuente: *Elaboración propia*

Tiempo (min)	Q ₁ (L/s)	Q ₂ (L/s)	Q ₃ (L/s)	Q ₄ (L/s)	Q ₅ (L/s)	Q ₆ (L/s)	Q ₇ (L/s)	Q ₈ (L/s)
555	1.98	3.38	5.79	9.54	14.72	19.20	24.64	30.42

(sigue en la página siguiente)

Cuadro 6.7: Continuación de los resultados de caudales en los conductos con el programa *SWMM v5*: Fuente: *Elaboración propia*

Tiempo (min)	Q ₁ (L/s)	Q ₂ (L/s)	Q ₃ (L/s)	Q ₄ (L/s)	Q ₅ (L/s)	Q ₆ (L/s)	Q ₇ (L/s)	Q ₈ (L/s)
570	2.00	3.47	6.01	9.82	15.08	19.69	25.57	32.04
585	2.00	3.47	6.01	9.82	15.08	19.69	25.58	32.11
600	2.00	3.47	6.01	9.82	15.08	19.69	25.58	32.13
615	2.61	4.44	7.58	12.52	19.33	25.20	32.26	39.67
630	2.64	4.57	7.93	12.96	19.90	25.99	33.75	42.30
645	2.64	4.57	7.93	12.96	19.90	25.99	33.76	42.39
660	2.64	4.58	7.93	12.96	19.90	25.99	33.76	42.40
675	4.25	7.22	12.26	20.26	31.21	40.49	51.34	62.36
690	4.38	7.59	13.15	21.49	32.95	42.90	55.53	69.12
705	4.39	7.60	13.18	21.53	33.05	43.11	55.93	69.87
720	4.39	7.60	13.18	21.54	33.07	43.18	56.06	70.17
735	40.87	69.05	116.94	193.91	300.45	391.76	491.50	591.07
750	42.32	73.25	126.94	207.50	318.68	416.20	540.51	677.83
765	42.32	73.26	126.94	207.50	318.67	416.19	540.57	678.94
780	42.32	73.26	126.94	207.50	318.67	416.19	540.56	679.03
795	8.63	17.32	33.27	50.69	74.70	98.97	145.72	208.22
810	7.10	12.30	21.30	34.82	53.50	70.03	91.22	116.98
825	7.10	12.29	21.29	34.81	53.46	69.84	90.75	114.73
840	7.10	12.29	21.30	34.81	53.46	69.82	90.69	114.19
855	3.43	6.32	11.48	18.19	27.56	36.42	49.86	67.07
870	3.20	5.54	9.61	15.70	24.15	31.68	41.35	52.94
885	3.20	5.54	9.59	15.68	24.09	31.50	40.96	51.92

(sigue en la página siguiente)

Cuadro 6.7: Continuación de los resultados de caudales en los conductos con el programa *SWMM v5*: Fuente: *Elaboración propia*

Tiempo (min)	Q ₁ (L/s)	Q ₂ (L/s)	Q ₃ (L/s)	Q ₄ (L/s)	Q ₅ (L/s)	Q ₆ (L/s)	Q ₇ (L/s)	Q ₈ (L/s)
900	3.20	5.54	9.60	15.68	24.09	31.46	40.87	51.59
915	2.32	4.13	7.32	11.79	17.94	23.51	31.20	40.36
930	2.27	3.93	6.81	11.14	17.10	22.34	29.03	36.60
945	2.27	3.93	6.81	11.14	17.10	22.34	29.02	36.47
960	2.27	3.93	6.81	11.14	17.10	22.34	29.01	36.45
975	1.83	3.23	5.69	9.19	14.02	18.36	24.22	31.08
990	1.80	3.12	5.40	8.83	13.56	17.71	23.02	29.01
1005	1.80	3.12	5.40	8.83	13.56	17.71	23.01	28.92
1020	1.80	3.12	5.40	8.83	13.56	17.71	23.00	28.90

(Fin de la tabla)

Como se puede apreciar en los Cuadros 6.6 y 6.7, los resultados en el tiempo tienen una ligera variación esto debido a que ambos modelos utilizan diferentes formulaciones matemáticas en el abordaje de la solución de las ecuaciones gobernantes del *flujo no permanente* en redes de drenaje pluvial. Obviamente cuando se utiliza dos métodos numéricos distintos en la solución de la ecuación de un problema casi nunca se obtendrá resultados iguales, sin embargo estos deben aproximarse ya que se trata del mismo fenómeno.

6.3.2. Sobre ciudades sostenibles

En los países más avanzados del mundo vienen reconociendo en los últimos años los múltiples beneficios derivados de afrontar la gestión del agua de lluvia desde una perspectiva alternativa a la convencional, tendiendo hacia un desarrollo sostenible y en concordancia

con el medio ambiente. De este modo emergen con fuerza los *Sistemas Urbanos de Drenaje Sostenible* (SUDS), cuyo objetivo es resolver tanto los problemas de cantidad como de calidad de las escorrentías urbanas, minimizando los impactos del desarrollo urbanístico y maximizando la integración paisajística y los valores sociales y ambientales de las actuaciones programadas.



Figura 6.51: Ciudad de Kimbiri

La planeación y la *gestión urbana del agua*, y en el caso específico de los proyectos relacionados con los sistemas de drenaje, debe proyectarse de acuerdo con estándares medioambientales contemporáneos y que vayan en línea con las discusiones globales sobre la sostenibilidad planetaria pues es en las ciudades donde se está librando la batalla por la sobrevivencia futura del ser humano en el planeta que es lo que está en juego.

A partir de los resultados de esta *Tesis* estoy convencido señalar que el adecuado manejo de *aguas pluviales* y los consecuentes flujos hídricos es un factor esencial para hablar

de *ciudades saludables y sostenibles*. Una ciudad desprovista de estas prácticas de manejo en épocas de lluvias intensas tiende a sufrir las consecuencias de estos eventos:

- La inexistencia o un inadecuado sistema de drenaje produce la inundación de las zonas bajas de la ciudad de Kimbiri y los deslizamientos de tierra en elevaciones que han sido despojadas de su vegetación natural con el fin de proporcionar espacio para los asentamientos humanos.
- La edificación de estructuras de concreto trae además una serie de dificultades al propiciar el incremento del volumen de agua lluvia en la ciudad de Kimbiri debido a la impermeabilidad de este material.
- Por ello se vuelve imperativo para las administraciones construir sistemas de alcantarillado de drenaje pluvial que recolecten, conduzcan y que hagan uso eficiente de los flujos de lluvia para, entre otras, impedir la generación y propagación de enfermedades infecciosas.
- Para concluir quiero señalar que los esfuerzos y la voluntad política para mitigar y adaptarse al *cambio climático* son centrales en la discusión global de *sostenibilidad* y lo que haga Kimbiri al respecto es referente importante no solo a nivel regional sino para otras ciudades del Perú. Estas acciones no solo tienen un impacto ambiental positivo sino que su impacto trasciende en aumento de la competitividad de la ciudad, la lucha contra la pobreza, la marginalización, y genera un mejoramiento en la calidad de vida de los Cuzqueños y de los futuros habitantes de la ciudad de Kimbiri.

6.3.3. Sobre el calentamiento global

Los datos científicos más recientes confirman que el clima de la Tierra está cambiando rápidamente. Las temperaturas mundiales aumentaron aproximadamente 1 grado *Fahren-*

heit en el transcurso del último siglo, y es probable que aumenten aún más rápido en las próximas décadas.

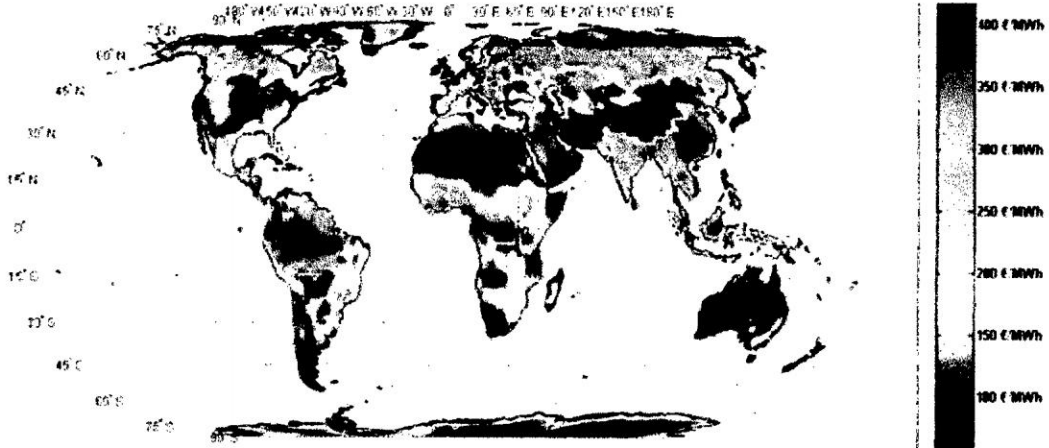


Figura 6.52: Variación de la temperatura a nivel planetaria

Los científicos dicen que la Tierra podría calentarse 7,2 grados Fahrenheit más durante el *Siglo XXI* si no reducimos las emisiones causadas por los combustibles fósiles, como el carbón y el petróleo. Este aumento en la temperatura promedio tendrá efectos trascendentales. Los niveles del mar aumentarán, inundando las áreas costeras al igual que los niveles de los ríos inundando pueblos, predios agrícolas y ciudades completas. Las ondas de calor serán más frecuentes y más intensas. Las sequías y los incendios forestales ocurrirán más a menudo. Los mosquitos portadores de enfermedades expandirán su zona de distribución. Las ciudades de la Selva Peruana, deben elaborar políticas públicas y las acciones necesarias para hacer frente al fenómeno del cambio climático, antes de que sea demasiado tarde. Así mismo contra estructuras de drenaje pluvial adecuados en el caso de la Ciudad de Kimbiri.

- En los últimos años los niveles del río Apurímac y el río Kimbiri están registrando comportamientos anormales, aumentando drásticamente en épocas de lluvias. La vida en la Ciudad de Kimbiri depende del ritmo del ciclo de las vaciantes y crecientes.

- Las temperaturas más cálidas aumentan la energía del sistema climático y a veces producen lluvias más intensas en algunas áreas.
- La precipitación anual nacional ha aumentado entre 5 y 10% desde principios del Siglo XX, principalmente como resultado de fuertes lluvias en algunas áreas
- Olas de calor más frecuentes e intensas podrían dar como resultado más muertes por las altas temperaturas. Esas condiciones también podrían agravar los problemas locales de la calidad del aire, que ya afligen a más de 80 millones de estadounidenses. Se espera que el calentamiento global también aumente el potencial del alcance geográfico y la virulencia de las enfermedades tropicales.
- Como una reflexión de la **Tesis** nos preguntamos por el futuro de la Selva Peruana y en específico de la ciudad de Kimbiri. Existen estudios de alcance nacional que indican que esta región sufrirá mayor impacto por el calentamiento global, y el Perú está sindicado como el tercer país más vulnerable en el mundo por este fenómeno (*Tyndall Centre for Climate Change, RU*).
- Actualmente no se conoce de ningún organismo o institución de la Region Cuzco, Ayacucho o del gobierno central que esté estudiando los impactos que tendrá en nuestra región el fenómeno del calentamiento global. Tal vez exista preocupación por la situación, pero nadie hasta ahora ha dado el primer paso para emprender alguna acción concreta, desde nuestra Selva Peruana.

6.3.4. **Sobre los riesgos geológico-climatológicos**

Los fenómenos de origen *geológico-climáticos* de mayor incidencia en la ciudad de Kimbiri se manifiestan en la sub unidad geomorfológica denominada “*laderas de pendiente pronunciada*” y las riberas del rio Apurímac y el rio Kimbiri circundantes a la misma ciudad e Kimbiri.



Figura 6.53: Desborde del río Kimbiri

- En la zona de aplicación de la tesis y áreas adyacentes, los peligros de origen *geológico-climatológico* son por deslizamientos, erosión y socavamiento, derrumbe transporte de masa de suelos, procesos que se ven favorecidos por la pendiente del terreno, baja o pobre consistencia de los materiales y el agua de lluvia en su acción de erosión, transporte y deposición, que finalmente tienen efecto directo en el sistema de drenaje pluvial.
- Existencia de los ríos Apurímac y Kimbiri, que en su máxima crecida amenazan permanente a las ciudades que se encuentran en sus riberas especialmente a la ciudad de Kimbiri.
- Bajo este contexto se visualiza un escenario donde intervienen peligros o amenazas de origen climático ocasionado principalmente por lluvias intensas que se presentan en los meses de diciembre a marzo, generando saturación de suelos, erosión de suelos en laderas, sedimentación de la parte baja de la ciudad de Kimbiri inundaciones.

6.3.5. Sobre la solución de las ecuaciones de Saint Venant

- Las ecuaciones de *Saint-Venant* en $1D$ son un conjunto de ecuaciones diferenciales, que modelan los cambios de caudal y nivel de un líquido a lo largo del espacio unidimensional y el tiempo en régimen *no permanente* en un canal a superficie libre o abierto.
- Las ecuaciones de *Saint Venant* forman un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, *hiperbólico* y *cuasi-lineal*. El estudio de este tipo de sistemas y sus soluciones, concretando para las ecuaciones de Saint Venant *unidimensionales* con el Método de Elementos Finitos ha sido el objetivo de la presente tesis.
- Las ecuaciones simplificadas de *Saint Venant* unidimensionales, resueltas con el Método de Elementos Finitos, objeto de la present tesis, son suficientes para representar correctamente el movimiento no permanente en lámina libre o en cauces, naturales o artificiales, debido a la marcada *unidimensionalidad* de éstos. Para la modelación hidráulica de sistemas de drenaje se ha verificado que es aplicable el MEF, con un mejor compromiso entre precisión y economía en la zona del dominio del problema.

6.3.6. Sobre el modelo propuesto

El comportamiento hidráulico de redes de alcantarillado operando bajo condiciones de flujo no permanente está descrito por las ecuaciones desarrolladas por *Barré de Saint Venant*. Estas ecuaciones son el resultado de la aplicación de los principios de continuidad y de conservación de momentum lineal sobre un volumen de control definido.

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} - q = 0 \quad (6.3.1)$$

Ecuación de momentum

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (6.3.2)$$

6.3.7. Sobre el caso de estudio

A finales del año 2012 se aprueba el expediente técnico de “*pavimentación de las calles de la ciudad de Kimbiri*”, e independientemente a la misma fecha se convoca para la elaboración a nivel de pre-inversión (*perfil*) del proyecto “*sistema de drenaje pluvial en la ciudad de Kimbiri*”. Desde el punto de vista de planeación, programación y planificación estratégica del proceso de desarrollo de la ciudad de Kimbiri fue un grave *error* elaborar dos proyectos distintos en diferentes tiempos tanto en su formulación como en su ejecución, porque el drenaje, al formar parte de la infraestructura urbana, debería ser planificado en conjunto con los demás sistemas que forman parte de ella (agua, alcantarillado sanitario, electricidad, telefonía, residuos sólidos, plazas, parques y pavimentación de calles), pero principalmente las que corresponden a alcantarillado sanitario y pavimentación de calles. En caso contrario sera un gasto inútil proyectar y construir obras o estructuras que conforman parte de una solución global como en el caso de Kimbiri, en el año 2013 primero pavimentaron las calles, sin tener en consideración la necesidad de construir el sistema de drenaje pluvial, años después una vez materializado el proyecto de drenaje pluvial tuvieron que replantear el proyecto.

Sobre el proyecto a nivel de *preinversión* “*sistema de drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri*” nunca llego a concretarse a nivel de *inversión* (*expediente técnico*), en el tiempo que se estaba ejecutando la pavimentación de las calles de kimbiri, se tuvo que replantear *in situ* el expediente (los ejecutores) la parte del drenaje pluvial. Todo esto conlleva a un mal diseño y por ende el mal funcionamiento de la red de drenaje pluvial.

Según como se ha presentado los resultados en la sección 6.1.1, el modelo basado en el Método de Elementos Finitos presenta una convergencia y similitud favorable en la solución hidrodinámica de redes de drenaje pluvial.

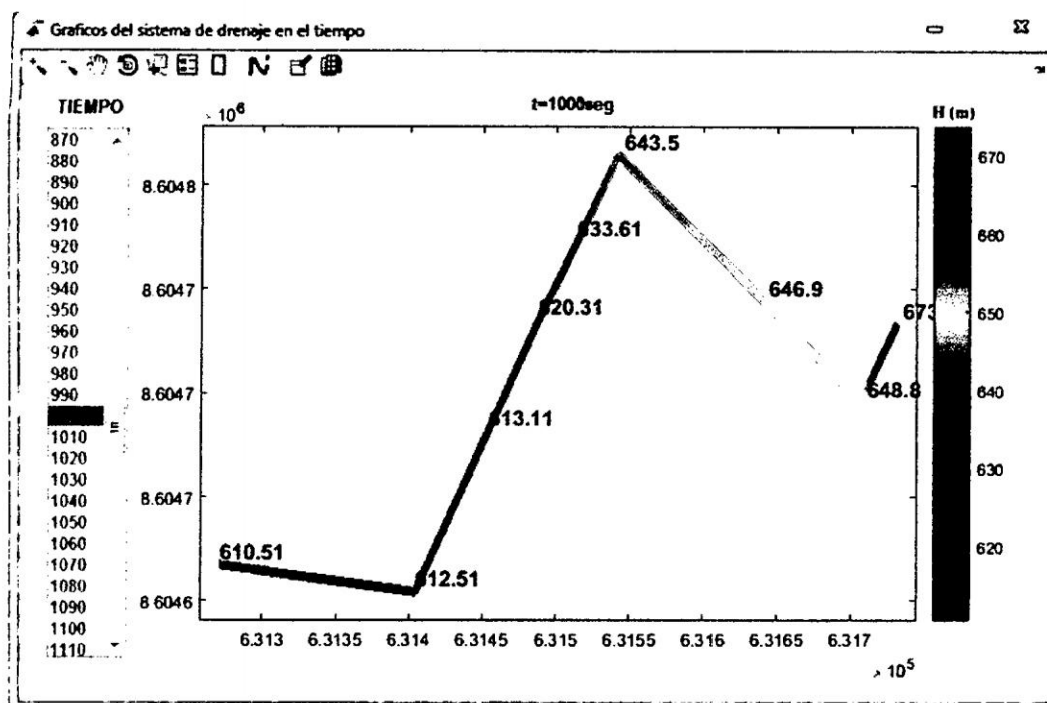


Figura 6.54: Niveles de agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

La aplicación del Método de Elementos Finitos a proyectos de investigación e innovación tecnológica permiten fortalecer el conocimiento en el área de los sistemas de drenaje pluvial. Además de pretender tener un programa más competitivo que los que se encuentran en el mercado actual.

La aplicación del modelo al caso de estudio “Drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri” ha sido resuelto de manera parcial, solamente considerándose 4 calles o Jirones como parte de un proyecto elaborado y ejecutado por la *Municipalidad Distrital de Kimbiri*, Sin embargo el modelo es aplicable y entendible a toda la ciudad de *Kimbiri* así como a otras ciudades donde hay la necesidad de proyectar y construir sistemas de drenaje pluvial.

6.3. Discusión de resultados

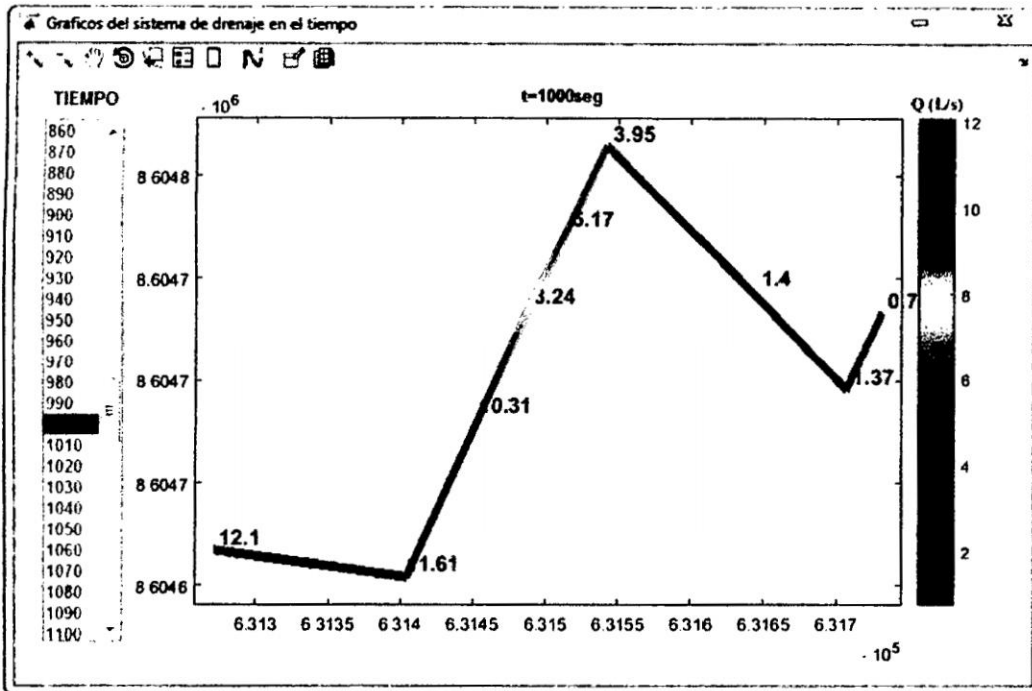


Figura 6.55: Caudales en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

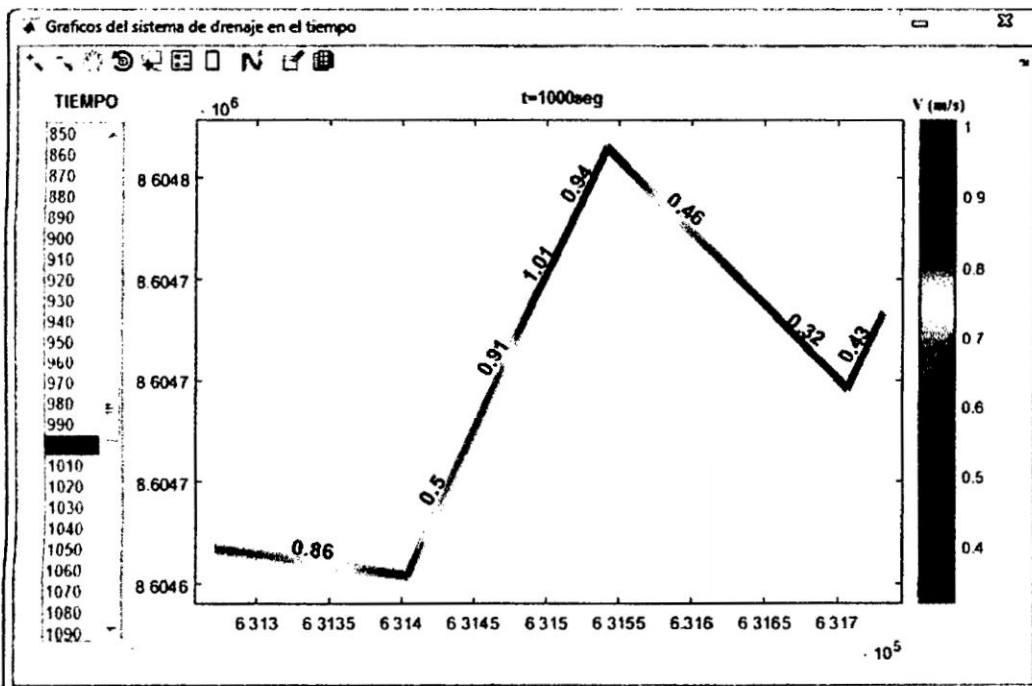


Figura 6.56: Velocidades de flujo en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

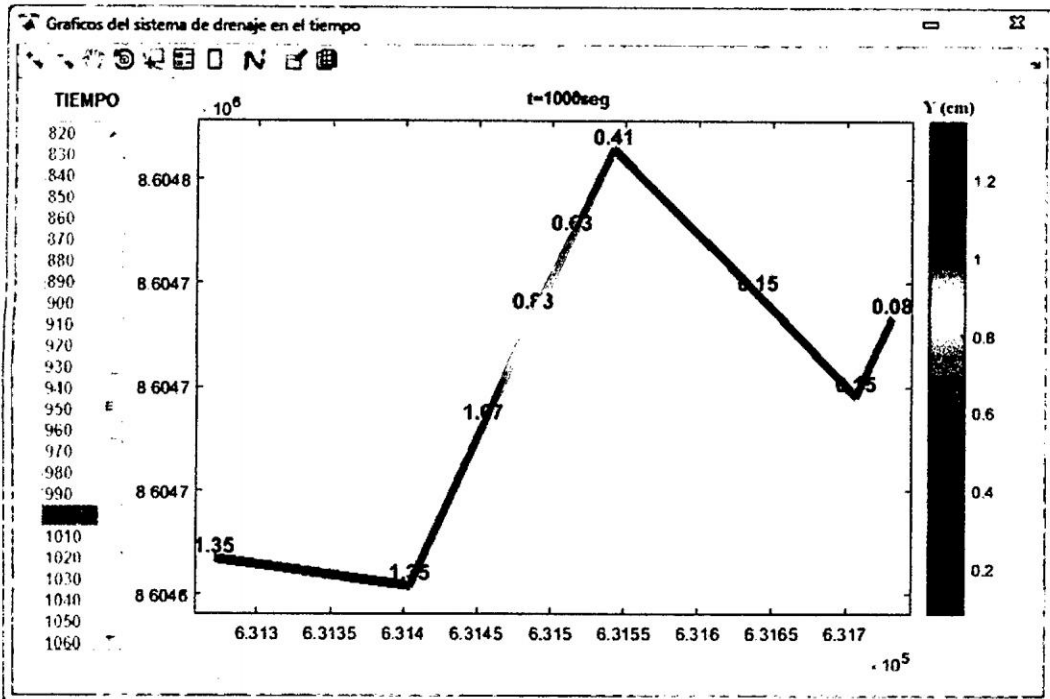


Figura 6.57: Tirantes del agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

El programa *SMAP V2015* puede emplearse para el análisis y simulación numérica de sistemas de drenaje con diferentes topologías y geometrías de sección. Se presenta como una alternativa de solución para este problema frente a los métodos tradicionales de solución de alcantarillado pluvial. El programa *SMAP V2015* constituyen una herramienta de gran utilidad para la toma de decisiones en los proyectos de drenaje urbano; por lo que es una necesidad sumar dichas herramientas a la gestión de manera correcta, es decir conocer las hipótesis en que se basan los métodos de cálculo, las fórmulas que se utilizan, los parámetros que se requieren para los cálculos internos, todo esto para evitar errores de convergencia y asimismo permitir el análisis de los resultados.

Parte V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Conclusiones

7.1.1. De la teoría

1. EL *drenaje pluvial urbano* es de gran importancia para el desarrollo normal de la vida cotidiana de la gente que habita un lugar determinado en una ciudad, y su finalidad es evitar al máximo los daños a personas y propiedades que las lluvias pueden ocasionar. Garantizar el normal desenvolvimiento de la vida diaria.
2. Para la ingeniería y el urbanismo, el drenaje es el sistema de tuberías interconectadas que permite el desalojo de los líquidos pluviales o de otro tipo. Un diseño inapropiado o deficiente podría poner en situación de riesgo a una determinada ciudad.
3. La gestión de aguas lluvias es medir el impacto y gestionar las descargas de aguas lluvias provenientes del desarrollo y de la construcción de terrenos, y verificar que el impacto provocado por el urbanismo cumpla con la normatividad vigente.

4. El diseño de los sistemas de drenaje pluvial debe contemplar la evaluación y documentación del sistema de recolección de aguas lluvias propuesto y permita el desarrollo residencial y comercial, de calles urbanas, de autopistas y edificaciones.
5. Se ha obtenido la *ecuación diferencial parcial* que gobierna el flujo no permanente en redes de drenaje pluvial y es la ecuación de continuidad y momentum como se presenta a continuación.

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial H}{\partial x} + S_f \right) = 0$$

7.1.2. De la metodología

1. El *Método de Elementos Finitos* resulta una formulación más versátil para el entendimiento de la solución de las *ecuaciones diferenciales parciales* tipo *hiperbólicas* o *parabólicas*.
2. El *Método de Elementos Finitos* es una técnica numérica de altísima potencia para la solución de ecuaciones diferenciales. En este caso inicia el estudio con la discretización del dominio (*conductos y pozos de visita*) en elementos finitos lineales de longitud variable, unidos por nodos en sus extremos.
3. El *Método de Elementos Finitos*, puede formularse bajo distintas configuraciones de funciones de interpolación y de forma y es de fácil integración numérica y sistematización de las ecuaciones en forma matricial, manipulable para la solución aproximada de las ecuaciones gobernantes.

7.1.3. Del modelo

1. El resultado final de este proyecto de investigación fue el desarrollo de un esquema numérico de solución de las ecuaciones de *Saint Venant* por el *Método de Elementos Finitos* e implementación del mismo en el programa *SMAP V2015* permitiendo entender de una manera concisa el comportamiento hidráulico de los sistemas de drenaje pluvial.
2. El *Método de Elementos Finitos* ofrece una solución general al problema de *Modelación hidráulica de drenaje pluvial*. Los modelos se construyen con el programa *SMAP V2015* con su respectiva librería de elementos y la solución se logra empleando algoritmos iterativos para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.
3. Al resolver las ecuaciones gobernantes de *continuidad* y *momentum* del flujo no permanente en redes de drenaje pluvial, finalmente se ha obtenido un sistema de ecuaciones algebraicas lineales, ecuación utilizada para la implementación computacional del código *SMAP V2015* y son los siguientes:

$$\frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t[K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t q}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\frac{[C]}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \left(\frac{\beta Q}{A}\right) \frac{[K]\Delta t}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_n \\ Q_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{gA\Delta t[K]}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_n \\ H_{n+1} \end{Bmatrix} + \frac{gS_f A}{2} \begin{Bmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{Bmatrix} = 0$$

4. La utilización de este método de solución implica ciertas ventajas. Entre otras, es fácil imponer las condiciones de borde. Estos aspectos conllevan a que el preproceso

sea más versátil y menos susceptible al error humano.

5. Cuando la formulación por el Método de Elementos Finitos es apropiada y correcta, la obtención de resultados confiables es responsabilidad del ingeniero quién está tratando de resolver el problema, puesto que los resultados dependen directamente de la calidad de datos ingresados y las condiciones de borde impuestos.
6. La implementación computacional *SMAP V2015* se hizo en *MATLAB* que además de ser una herramienta de investigación, nos permite escribir códigos que interpreta en el momento de la ejecución. Aunque desde el punto de vista de una programación optima, los lenguajes interpretados son muy lentos, *MATLAB* nos permite hacer uso de toda la librería matricial implementada lo que permite optimizar los cálculos hasta el punto de competir eficientemente con otros lenguajes compilados.
7. Haciendo la comparación entre los resultados del modelamiento del drenaje pluvial de la ciudad de Kimbiri, desarrollado en el capítulo 5, uno por el programa *SWMM*, y por otro lado el programa *SMAP v2015*, que utiliza la formulación por *Elementos Finitos*, se concluye que las dos metodologías arrojan resultados similares y en consecuencia nuestra formulación es correcta, véase la Figura 7.1 .

7.1.4. De los resultados

1. Los resultados dependen mucho de la definición de las condiciones iniciales y de borde además de los datos de la topografía de la red de drenaje, datos meteorológicos entre otros.
2. La simulación del problema del flujo no permanente en sistemas de drenaje pluvial en la presente tesis se hace con el *Método de Elementos Finitos*, implementado en el programa *SMAP v2015*.

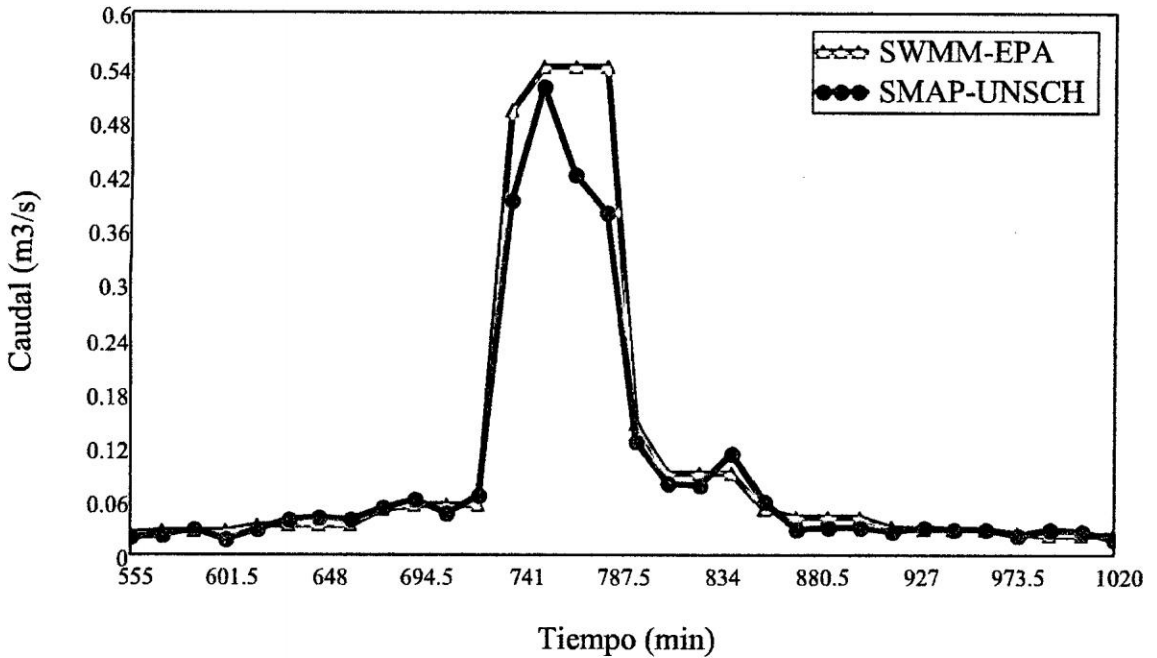
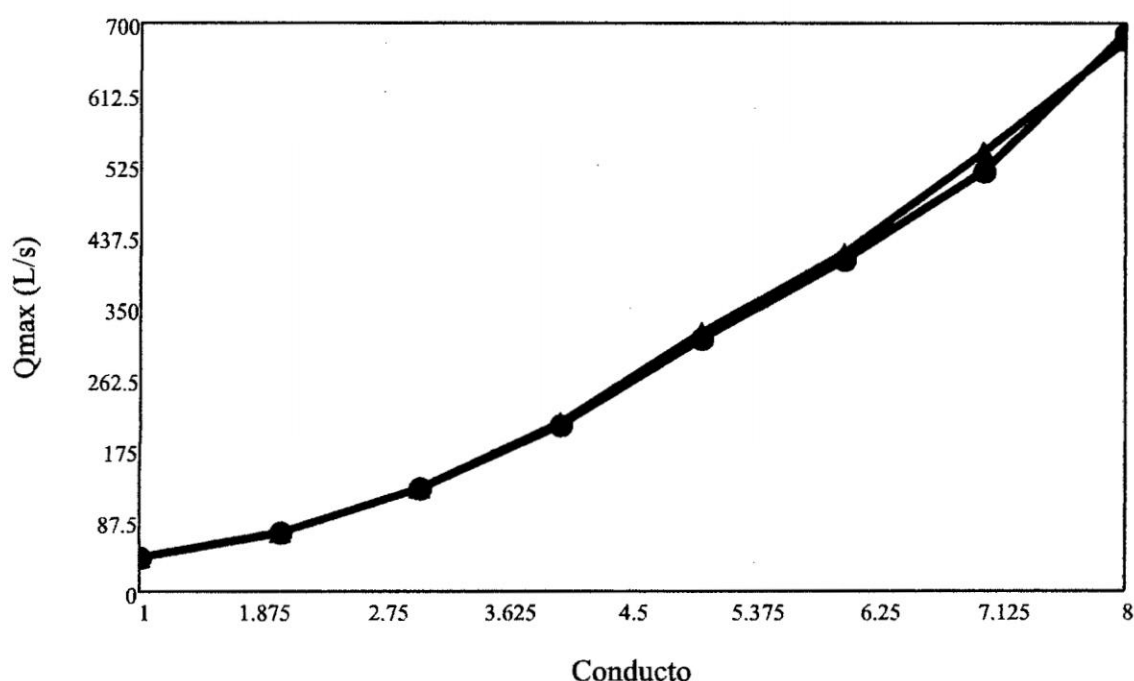


Figura 7.1: Comparación de caudales de salida en el *conducto 7* entre los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

3. En cuanto a la aplicación del modelo propuesto al proyecto “*Instalación del sistema de drenaje pluvial en la ciudad de Kimbiri, distrito de Kimbiri, provincia de la Convención - Cusco*”, los resultados tienen una ligera variación con los resultados obtenidos del software comercial *SWMM*, como se pueden observar en el Cuadro 7.1 y la Figura 7.2, por tanto el modelo es válido para el análisis de redes de drenaje pluvial.
4. La duración del evento de lluvia o tormenta en la ciudad de *Kimbiri* varía ampliamente, oscilando entre unos pocos minutos a varias horas, en consecuencia generan *escorrentía superficial* de magnitud considerable. La evolución temporal de estos caudales en su pico más alto para cada conducto se presenta en el Cuadro.
5. El tirante máximo encontrado en el sistema de drenaje pluvial de la ciudad de *Kimbiri* con el programa *SMAP V2015* es de $y=0.75\text{m}$, mientras con el programa

Cuadro 7.1: Caudales máximos en el sistema de drenaje de Kimbiri. Fuente: *Elaboración propia*

Conducto	Q_{\max} (L/s)	
	SMAP	SWMM
1	43.21	42.32
2	73.70	73.26
3	126.69	126.94
4	205.22	207.50
5	313.26	318.68
6	408.71	416.20
7	518.89	540.57
8	687.86	679.03

Figura 7.2: Caudales pico en todos los conductos de la red de drenaje con los programas *SMAP V215* y *SWMM V5*. Fuente: *Elaboración propia*

SWMM es de $y = 0,67m$. El tirante es un parámetro importante para dimensionar la altura total de los conductos y los buzones.

6. La *velocidad máxima promedio* que se ha calculado con el programa *SMAP V2015* es de $V_{mp} = 2,83m^3/$ y con el programa *SWMM* se ha computado una velocidad

maxima promedio de $V_{mp} = 3,21\text{m}^3/\text{s}$.

7. Los resultados obtenidos con el programa de elementos finitos *SMAP V2015* presentan un buen grado de aproximación respecto de la solución con los métodos tradicionales como el Método de Diferencias Finitas. Esto garantiza la efectividad del modelo utilizado y otorga confiabilidad a los valores encontrados para las variables primarias y secundarias.
8. El análisis realizado con el programa demuestra la gran versatilidad y eficiencia que puede obtenerse en el *preproceso, solución y posproceso* de redes de drenaje pluvial.
9. El programa *SMAP V2015* desarrollado en la presente tesis para la modelación hidráulica de *Drenaje Pluvial* por el Método de Elementos Finitos, considera inicialmente la geometría del drenaje como la malla base con la cual se hace los cálculos respectivos.
10. El programa *SMAP V2015* es un simulador numérico de análisis hidráulico de *desistemas de drenaje pluvial* con entrada simplificada de datos y permite interactuar la visualización de resultados.
11. Finalmente el modelo desarrollado y el código computacional están en condiciones de aplicarse a una amplia gama de problemas de simulación numérica de análisis hidráulico de *Redes de Drenaje Pluvial* como cualquier otro programa comercial en consecuencia se afirma que el modelo es correcto.
12. La validación de los resultados se ha realizado utilizando la *estadística no paramétrica*, en específico la prueba de bondad de χ^2 -Cuadrado, de donde se concluye que los resultados se ajustan a la distribución *Log normal de 3P* con $\alpha = 0,05$ ó 95% de probabilidad, dado que $\chi_c^2 = 6,00 < \chi_t^2 = 9,49$. Por lo tanto el modelo matemático propuesto para la simulación dinámica de redes de drenaje pluvial con el *Método de Elementos Finitos* **ES VÁLIDO**.

7.1.5. De la tesis

1. La presente tesis cumpliendo con los objetivos trazados en su planteamiento, tiene un carácter científico y aplicativo en el campo de la *ingeniería hidráulica*; primero por el modelamiento con el *Método de Elementos Finitos*, segundo por la aplicación a un caso real, en específico al proyecto "*Instalación del sistema de drenaje pluvial en la ciudad de Kimbiri, distrito de Kimbiri, provincia de la Convención - Cusco*".

7.2. Recomendaciones

1. La implementación del modelo computacional en *MATLAB*, permitirán a las demás generaciones de investigadores en el tema, la utilización de una herramienta para la simulación de muchos más casos aplicados a este tema. El modelo computacional es efectivo y amigable con el usuario, posee una interfase gráfica de fácil uso.
2. Antes de cargar un modelo con características complejas es recomendable contar con un modelo conceptual claro de lo que quiere analizarse con fines de diseño o de decisión ingenieril.
3. Se recomienda usar programas orientado a objetos, generando clases abstractas de lo que uno quiere automatizar o controlar con un programa.
4. Para la ciudad de *Kimbiri* se recomienda que se elabore un *Plan Maestro de Drenaje Pluvial*, que desarrolle mecanismos de gestión de las aguas pluviales para reducir las pérdidas económicas, sociales y ambientales de las aguas pluviales urbanas.
5. Con respecto al programa *SMAP v2015*, se recomienda realizar pruebas para diferentes condiciones de flujo que se puedan presentar en redes de drenaje pluvial reales,

para poder determinar errores de ejecución del programa, además de permitir establecer las mejoras que se le pueden realizar al módulo de cálculo del programa.

7.3. Investigaciones futuras

1. Desarrollar un modelo matemático y un aplicativo computacional utilizando como técnica numérica el Método de Elementos Finitos y la inteligencia artificial para la modelación hidráulica de Sistemas de Drenaje Pluvial. Es decir *un modelo acoplado de Análisis Hidrológico e Hidráulico*.

Referencias

- [1] Andres E. Torres Abello. *Apuntes de clase sobre Hidrología Urbana*. Pontifica Universidad Javeriana, Bogota-Colombia 2004.
- [2] Rudy Rolandy Granda Acha. *Análisis numérico de la red de drenaje pluvial de la Urb. Angamos*. Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de Piura, Piura, Agosto del 2013.
- [3] Luis Joyanes Aguilar. *Fundamentos de programación: Algoritmos, Estructuras de datos objetos*. Mc Graw Hill Interamericana S.A, Madrid, 2013.
- [4] A. Osman Akan. *Open Channel Hydraulics*. Elsevier Ltd, Oxford UK, 2006.
- [5] Maximo Villon Bejar. *Hidrología estadística*. Editorial Villón, Enero 2002, Lima-Perú.
- [6] Tirupathi R. Chandrupatla & Ashok D. Belegundu. *Introducción al estudio del Elemento Finito en Ingeniería*. Prentice Hall Hispanoamericana, S.A, segunda edición, 1999.
- [7] Francisco Beltrán. *Teoría General del Método de los Elementos Finitos*. Departamento de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales - ETS Ingenieros Industriales Madrid, 1999.
- [8] J. J. Connor & C. A. Brebbia. *Finite Element Techniques for Fluid Flow*. ©Butterworth & Co (Publishers) Ltd, 1978.

- [9] Steven C. Chapra Raymond P. Canale. *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill México, 1999.
- [10] Vidal Eleuterio Canales Dias. *Análisis y diseño del sistema de drenaje pluvial*. Escuela de Formación Profesional de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Febrero del 2006.
- [11] M. Hanif Chaudhry. *Open - Channel Flow*. Springer Science+Business Media, LLC. New York, USA, 2008.
- [12] Zhangxin Chen. *Finite Element Methods and Their Applications (Scientific Computation)*. Springer, 2005.
- [13] Chow, Vent T., Maidment, D.R., and Mays L. *Hidrología Aplicada*. Mac Graw Hill Interamericana S.A. Santafé de Bogotá, 1994.
- [14] Vent Te Chow. *Hidráulica de canales abiertos*. Mac Graw Hill Interamericana S.A. Colombia, 2000.
- [15] David Butler & John W. Davies. *Urban Drainage*. Spon Press 2 Park Square, Milton Park, Abingdon, Oxon, OX14 4RN, Third Edition 2011.
- [16] Municipalidad Provincial de Huamanga. *Expediente técnico: Implementación del sistema de drenaje pluvial de la ciudad de Ayacucho*. Municipalidad Provincial de Huamanga, Ayacucho-Perú, agosto de 2008.
- [17] Jean Donea and Antonio Huerta. *Finite Element Methods for Flow Problems*. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 0-471-49666-9, copyright ©2003.
- [18] Environmental Protection Agency (EPA). *Manual del usuario: Modelo de gestión de aguas pluviales SWMM 5 vE*. Agencia de Protección del Medio Ambiente y Grupo Multidisciplinario de Modelación de Fluidos GMMF, España, noviembre de 2005.

- [19] James W. Daily & Donald R. F. Harleman. *Dinámica de los fluidos con aplicaciones en la ingeniería*. Trillas Mexico, 1975.
- [20] F. M. Henderson. *Open Channel Flow*. Macmillan Publishing Co., Inc. New York USA, 1966.
- [21] Jaan Kiusalaas. *Numerical Methods in Engineering with Matlab*. Cambridge University Press, 2005.
- [22] Erwin Kreyszig. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons, Inc. USA, 2006.
- [23] Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L. *El Método de los Elementos Finitos Volumen 1: Formulación básica y problemas lineales*. McGraw-Hill, Cuarta Edición, 1994.
- [24] Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L. *El Método de los Elementos Finitos Volumen 2: Mecánica de Sólidos y Fluidos. Dinámica y no Linealidad*. McGraw-Hill, Cuarta Edición, 1994.
- [25] Zienkiewicz O. C. & Taylor R. L. *The Finite Element Method Volume 3: Fluid Dynamics*. Butterworth - Heinemann, Fifth edition., 2000.
- [26] Ben Q. Li. *Computational Fluid and Solid Mechanics: Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. ©Springer-Verlag London Limited, 2006.
- [27] César Pérez López. *Matlab y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería*. Pearson Hall Educación S.A, Madrid, España, 2012.
- [28] Heron Morales Marchena. *Matlab, Métodos numéricos y visualización gráfica*. Editorial Megabyte Perú, 1999.
- [29] Edilberto Misaico Vilchez. *Propuesta de diseño de drenaje pluvial para el centro histórico de la ciudad de Ayacucho*. Escuela de Formación Profesional de Ingeniería

- Civil, Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Junio del 2009.
- [30] Saeed Moaveni. *Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1999.
- [31] P. Novak & A.I.B. Moffat & C. Nalluri. *Estructuras Hidráulicas*. Mc Graw Hill Interamericana S.A, segunda edición, 2001.
- [32] Eugenio Oñate. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics: Volume 1: Basis and Solids (Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences) (v. 1)*. Springer, 2009.
- [33] Jaime L. Bendezú Prado. *Apuntes de Clase de Mecánica de Fluidos I y II*. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Noviembre, 2005.
- [34] Danitza Prado Días. *Simulación dinámica de flujo no permanente en redes de alcantarillado pluvial*. Escuela de Formación Profesional de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería de Minas, Geología y Civil, Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Ayacucho, Noviembre del 2011.
- [35] Cristian Castro Pérez. *Apuntes de Clase de introduccion al Método de Elementos Finitos*. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Julio,2009.
- [36] Cristian Castro Pérez. *Apuntes de Clase Programación Digital*. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Junio,2004.
- [37] Cristian Castro Pérez. *Apuntes de Clase de Métodos Numéricos Aplicados*. Universidad Nacional de San Cristóbal de Huamanga, Junio,2005.
- [38] David G. Rhodes. Gradually varied flow solutions in newton raphson form. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, July/August, 1998.

- [39] M.E. Moreno & J.G. Saldarriaga. *Desarrollo e implementación de esquemas de solución de las ecuaciones de Saint Venant*. Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, Abril, 2005.
- [40] Roberto Hernández Sampieri. *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill Interamericana S.A, México, 2014.
- [41] Roland W. Lewis & Perumal Nithiarasu & Kankanhally N. Seetharamu. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. John Wiley & Sons, Ltd ISBNs: 0-470-84788-3 (HB); 0-470-84789-1 (PB), ©2001.
- [42] K.T. Tang. *Mathematical Methods for Engineers and Scientists*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. USA, 2007.
- [43] Eduardo W. V. Chaves y Roberto Mínguez. *Mecánica computacional en la ingeniería con aplicaciones en MATLAB*. Universidad de Castilla-la Mancha, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Ciudad Real, 2010.

Parte VI

ANEXOS

Apéndice A

Manual del program *SMAP V2015*

El programa *SMAP V2015* que aquí se presenta tiene como objetivo introducir a los profesionales de ingeniería civil y ramas afines en la utilización práctica del *MEF* y *MATLAB* explicando, al mismo tiempo, los detalles de cada una de las etapas del cálculo. Aunque el problema que específicamente resuelve el programa es el análisis de problemas de flujo de fluidos en redes de drenaje pluvial, muchos de los conceptos que aparecen son totalmente generales y extrapolables a la solución de otros problemas por el MEF en diversos campos de la física y la ingeniería.

SMAP V2015 es el resultado de la presente investigación desarrollado en la Universidad Nacional San Cristóbal de Huamanga y esta organizado en tres bloques bien diferenciados de *Preproceso*, *Proceso* y *Postproceso* que engloban las tres etapas básicas del análisis hidráulico de redes de alcantarillas en drenaje pluvial por el MEF. Así, en el bloque de *Preproceso* se definen de forma gráfica y sencilla la geometría de las alcantarillas, se asignan las condiciones de borde y se ingresa todos los datos para el análisis por el MEF. En el bloque de *Proceso* se soluciona el problema de análisis hidráulico, obteniendo los *tirantes* y caudales. Finalmente el bloque de *Postproceso* permite calcular todas las variables secundarias y visualizar gráficamente los resultados más representativos del análisis. La

creación de nuevos problemas es ilimitada, pudiendo incluirse geometrías de alcantarillas de análisis de interés práctico.

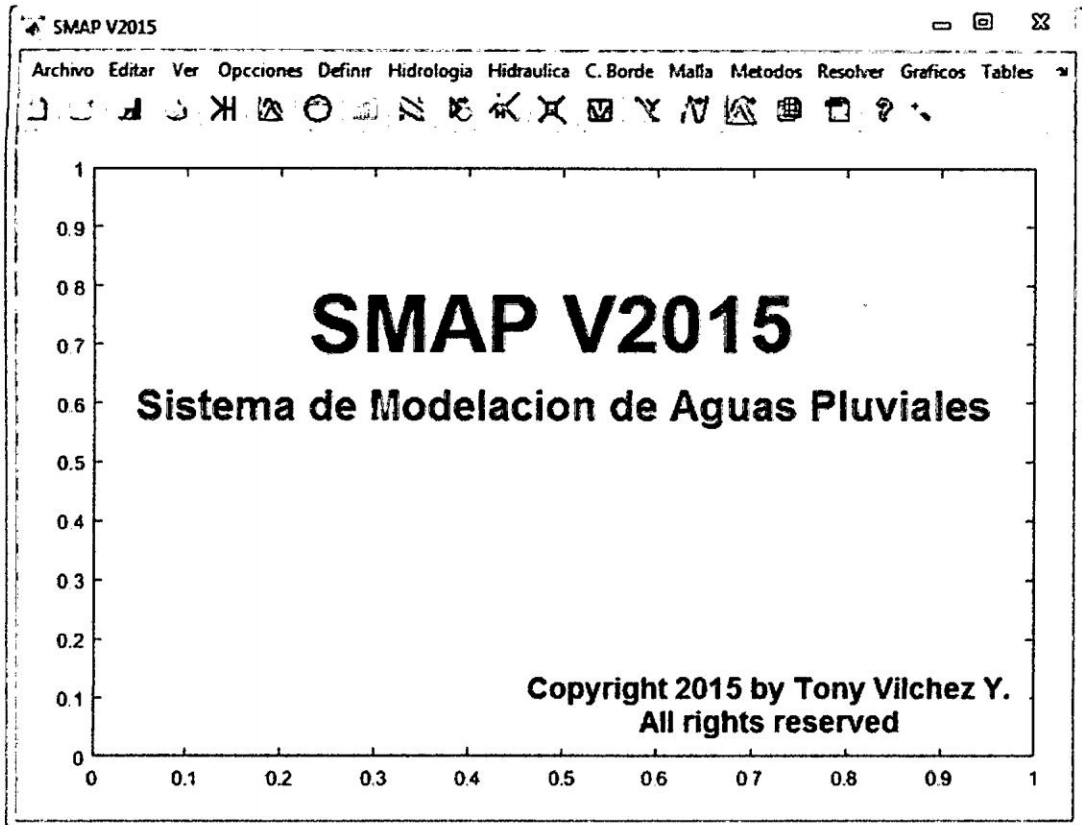


Figura A.1: Ventana principal del programa “SMAP-V2015”. Fuente: *Elaboración propia*

La aplicación “SMAP” cuenta con una interfaz basado en *menús*, *submenús* y *barra de herramientas*, Figura A.2; el usuario dispone desde una única interfaz para: el ingreso de los datos, *Preproceso*, *proceso* y *Postproceso* del *problema de análisis hidráulico de alcantarillas* en general. Espero sinceramente que *SMAP* sea útil tanto para estudiantes que se inician en el estudio de la teoría y aplicaciones del MEF, como para profesionales que aplican cotidianamente el MEF para solución de problemas prácticos.

A.1. Fase Preproceso

Esta etapa de análisis permite introducir los datos que definen la alcantarilla a analizar, es decir, la geometría, las propiedades de los materiales, la generación de la malla y las condiciones de contorno.

A.1.1. Gestión de archivos

Desde el menú archivo, que se encuentra en la esquina superior derecho de la ventana principal, Figura A.2; se accede a los *sub-menús* encargados de gestionar los datos para el análisis y los resultados obtenidos, se dispone de las siguientes opciones:

- Sub Menú **Nuevo**: Crea un entorno vacío para el análisis del fenómeno de infiltración en medio poroso.
- Sub Menú **Abrir**: Carga una base de datos para el análisis de Infiltración en medio Poroso que haya sido guardado previamente.
- Sub Menú **Guardar**: Salva la base de datos en el entorno de trabajo actual, si el entorno de trabajo aún no está asignado pide un nombre para guardar la base de datos y hace de éste el entorno de trabajo actual.
- Sub Menú **Guardar como ...**: Salva el entorno de trabajo actual en una base de datos con un nombre específico y además, hace de éste el entorno de trabajo actual.
- Sub Menú **Cerrar**: Abandona la aplicación.

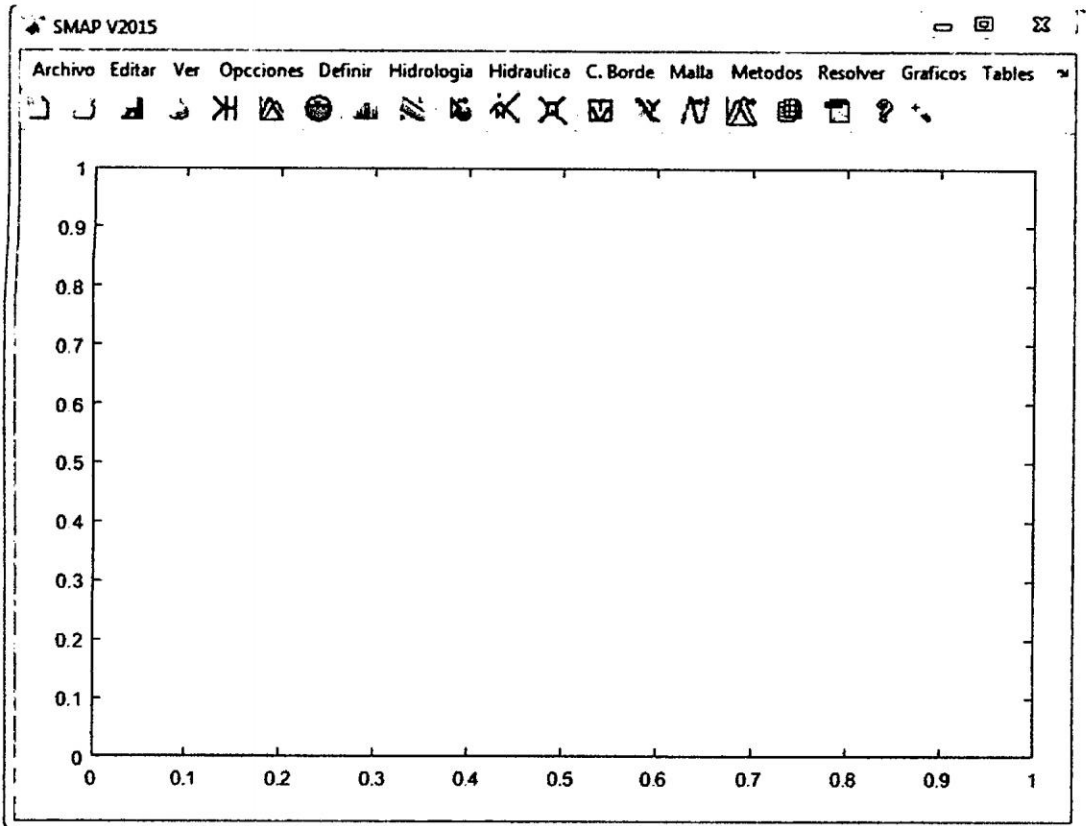


Figura A.2: Menus y Submenus del programa "SMAP-V2015". Fuente: *Elaboración propia*

A.1.2. Definir la geometría de la alcantarilla

Como se mencionó anteriormente el código *SMAP V2015* trabaja de manera automática, considerando la discretización la malla inicial los nodos y elementos de la red de drenaje pluvial, geometría que previamente se ha ingresado, es decir que cada conducto es un elemento y los extremos los pozos de visita o nodos, tratándose de un elemento lineal, la conectividad de las conductos y las coordenadas de los nodos se ordenan convenientemente en el formato establecido y se guardan como base de datos en un block de notas de donde serán importados fácilmente al programa véase las Figuras A.3, A.4, A.5.

Conduit	Ni	Nj	Diameter (m)	nk
1	1	2	48	1
2	2	3	43	1
3	3	4	43	1
4	4	5	43	1
5	5	6	43	1
6	6	7	43	1
7	7	8	48	1
8	8	9	43	1

Figura A.3: Matriz de descripción de la conectividad de los conductos *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

Nodo	X (m)	Y (m)	Z (m)	q (L/s)
1	6.3173e-05	8.6047e+06	673.7000	0
2	6.3171e-05	8.6047e+06	648.5000	0
3	6.3154e-05	8.6047e+06	646.9000	0
4	6.3154e-05	8.6045e+06	643.5000	0
5	6.3151e-05	8.6045e+06	633.6000	0
6	6.3143e-05	8.6047e+06	620.3000	0
7	6.3145e-05	8.6047e+06	613.1000	0
8	6.3142e-05	8.6046e+06	612.5000	0
9	6.3127e-05	8.6046e+06	610.5000	0

Figura A.4: Matriz de descripción de coordenadas de los nodos *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

Nodo	Cota (m)
9	610.5000

Figura A.5: Matriz de descripción de las estructuras de salida *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

También el programa permite escoger el tipo de sección de los diferentes conductos, pudiendo ser del mismo tipo o diferentes en una misma red de drenaje pluvial.

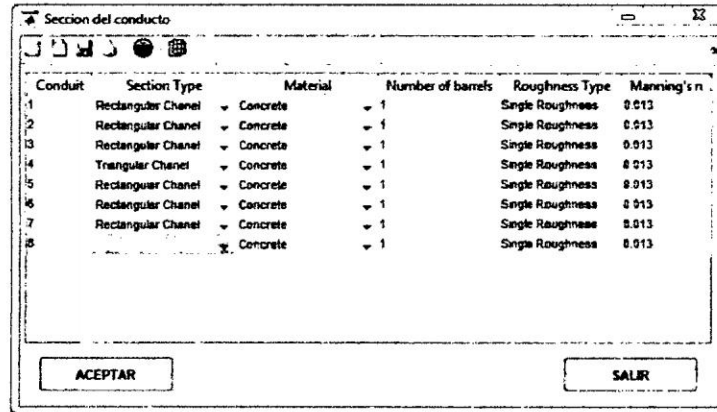


Figura A.6: Tipos de secciones de la red de drenaje pluvial *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

Luego de importar la conectividad, las coordenadas y definir las estructuras de salida se debe visualizar la red de drenaje pluvial, a partir de esto se decide incorporar las condiciones de borde.

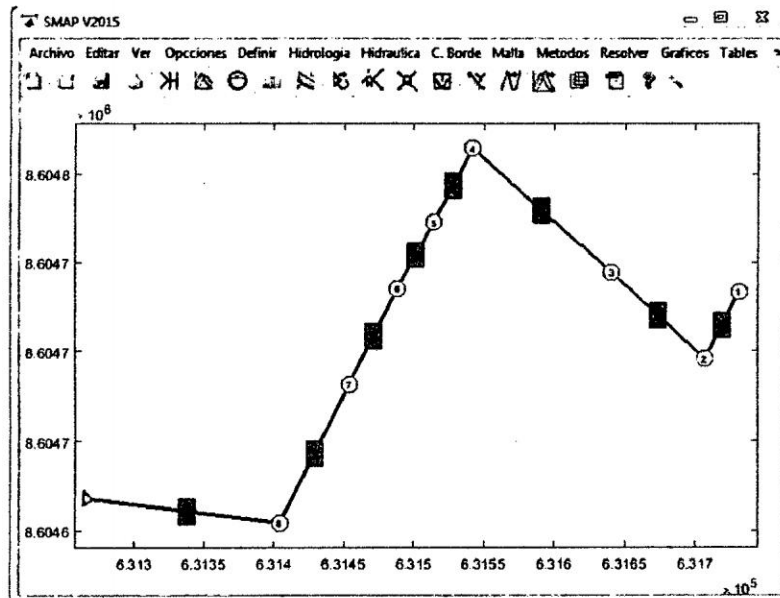


Figura A.7: Vizualizando la red de drenaje pluvial *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

A.1.3. Datos de la Simulación

Aquí se define el Δx , Δt y el tiempo total de simulación como se puede ver en la Figura A.8



Figura A.8: Datos generales de simulación *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

A.1.4. Condiciones de borde

Las condiciones de borde considerando en el programa *SMAP V2015* son hidrogramas y hietogramas aguas arriba. Partiendo desde la condición inicial el programa asigna automáticamente las condiciones de borde en el sistema durante el tiempo de análisis.

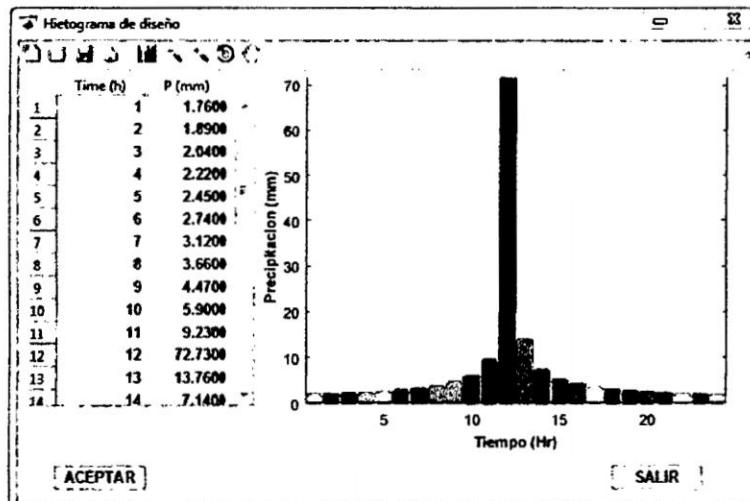


Figura A.9: Hietograma aguas arriba *SMAP V2015*. Fuente: *Elaboración propia*

A.2. Fase solución

Luego de haber definido la topología, geometría y el dominio del sistema de drenaje pluvial y las condiciones de borde, el análisis del flujo no permanente se realiza desde la barra de herramientas *botón ejecutar*, mostrado en la figura ??.

A.2.1. Solución en regimen permanente

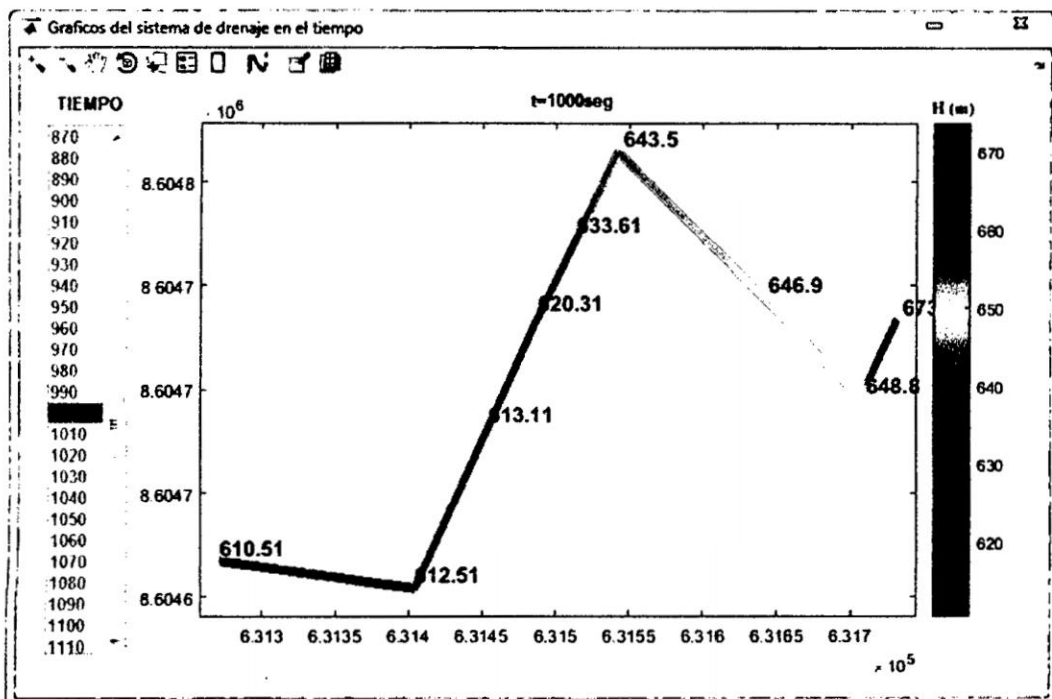


Figura A.10: Niveles de agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

La primera variable directa que se calcula son los *niveles de agua* y los *cuadales*, una vez calculado estos valores se puede calcular todas las variables secundarias como son las *velocidades* y *tirantes*.

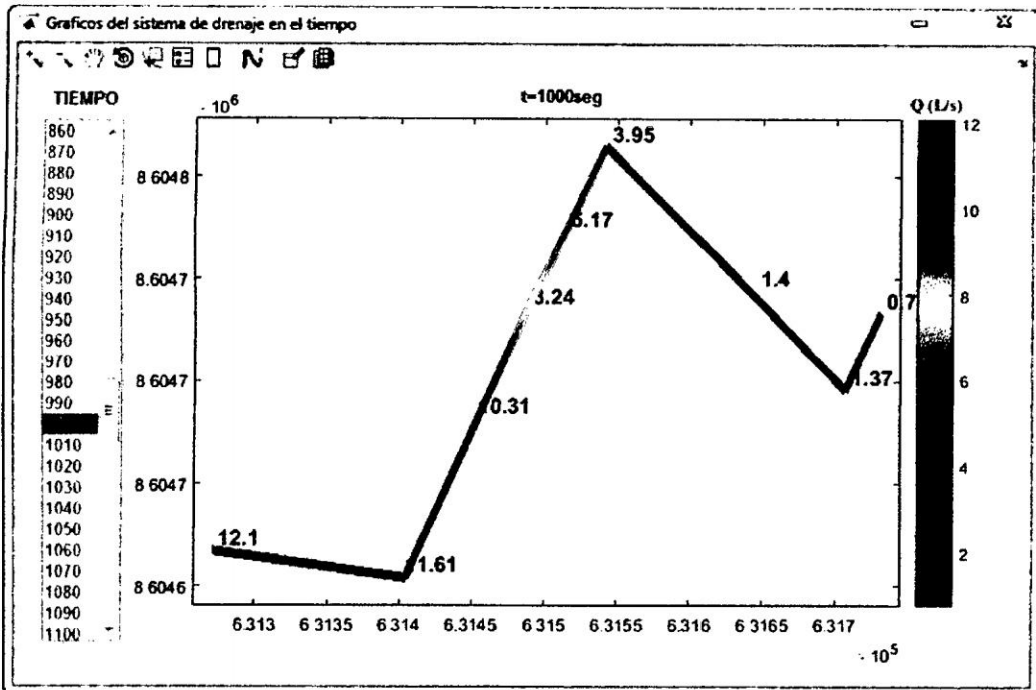


Figura A.11: Caudales en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

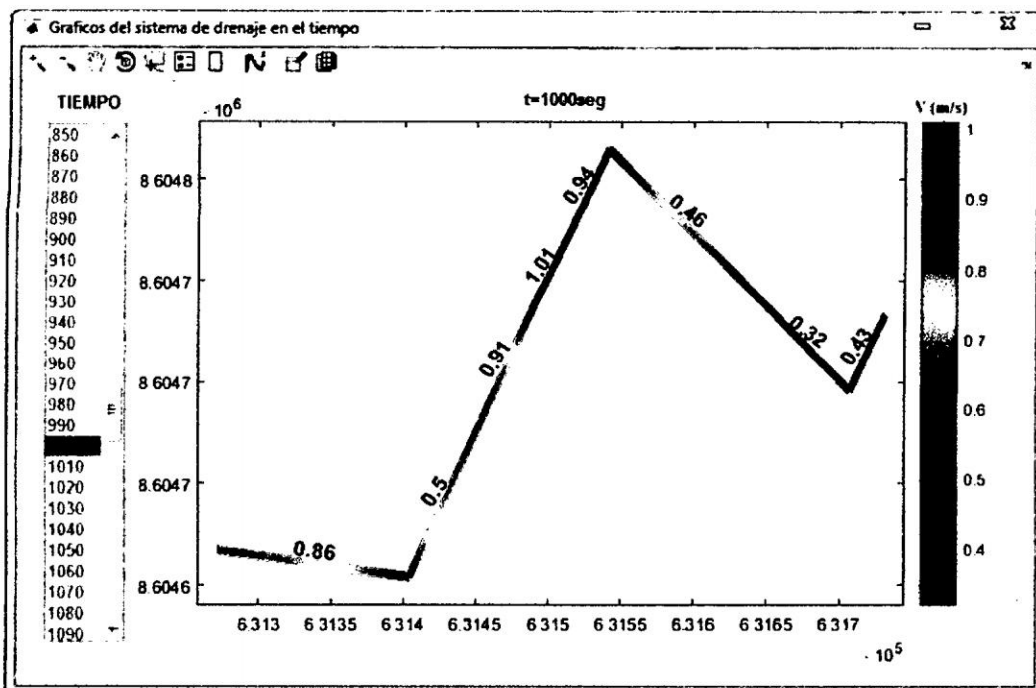


Figura A.12: Velocidades de flujo en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

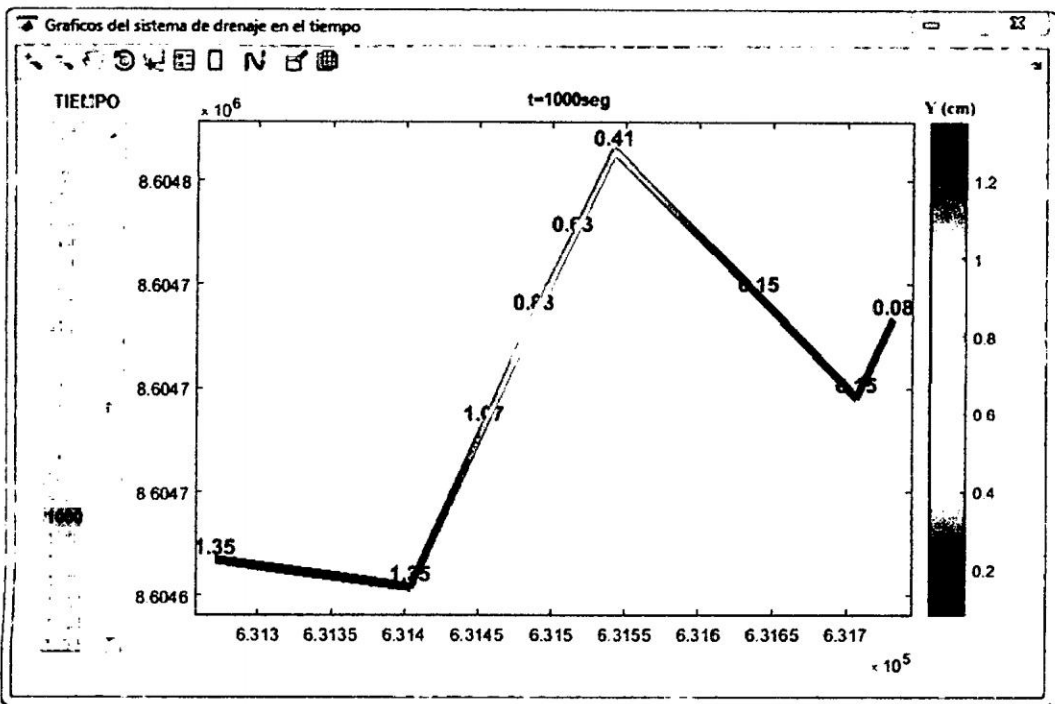


Figura A.13: Tirantes del agua en toda la red de drenaje pluvial para $t=1000\text{seg}$ SMAP V2015. Fuente: *Elaboración propia*

Apéndice B

Ensamblaje del MEF

Considere elementos triangulares lineales bidimensionales que se muestra en la Figura B.1.

Supongamos la siguiente matriz LHS elemental para la variable h

Para el elemento 1,

$$K_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0.1})$$

y para el elemento 2,

$$K_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0.2})$$

Los vectores elementales RHS son los siguientes:

Para el elemento 1,

$$f_1 = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.0.3})$$

y para el elemento 2,

$$f_2 = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.0.4})$$

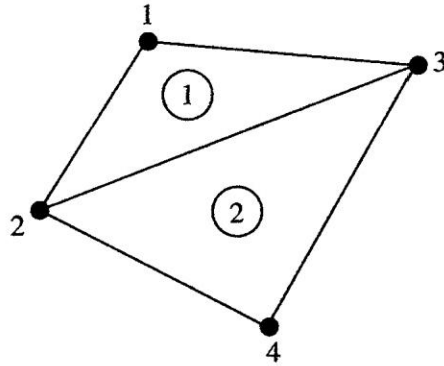


Figura B.1: Un dominio con dos elementos triangulares lineales

Ensamblando las contribuciones elementales anteriores da la siguiente ecuación global

$$[K]\{h\} = \{f\} \quad (\text{B.0.5})$$

donde $[K]$ y $\{f\}$ es la matriz global LHS y el vector RHS respectivamente y $\{h\}$ es el vector desconocido para el sistema que se muestra en la figura B.1 como sigue:

$$\{h\} = \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.0.6})$$

La matriz global LHS está ensamblada como sigue. Las entradas con los mismos subíndices en ecuaciones B.0.1 y B.0.2 se suman para formar una matriz global ensamblada LHS, es

decir,

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{B.0.7})$$

De manera similar, el vector RHS está ensamblada como

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.0.8})$$

El sistema global de ecuaciones se escribe como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & b_{24} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 + d_2 \\ c_3 + d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.0.9})$$

Como se ve, hay cuatro ecuaciones simultáneas, cada una de ellas asociada a un nodo. La primera ecuación es asociada con el nodo 1.

$$a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + a_{13}h_3 = c_1 \quad (\text{B.0.10})$$

En la ecuación anterior, las contribuciones son del nodo 1 y los nodos conectados al nodo 1. Como se ve, el nodo 1 recibe contribuciones de 2 y 3. Asimismo, la segunda ecuación nodal recibe contribuciones de todos los demás nodos, que es obvio desde la ecuación B.0.9.

Apéndice C

Algebra Lineal

En la práctica de la ingeniería y ciencias es frecuente tener la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Estos sistemas aparecen en muy diversos problemas, ya sea como la solución completa de un problema ó al menos como parte de ella. Dada esta necesidad frecuente, se requiere resolverlos en forma eficiente.

Los métodos numéricos que resuelven los sistemas se pueden clasificar en directos e indirectos.

Los *métodos directos* son aquellos que determinan la solución en un número determinado de pasos.

Los *métodos iterativos* son aquellos que obtienen la solución aproximándose a ella en un número finito, pero no definido de pasos.

C.1. Matrices

Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones lineales, realizar un seguimiento de los coeficientes de una aplicación lineal y registrar los datos que dependen de varios parámetros.

Una matriz, es una tabla cuadrada o rectangular de datos (llamados elementos o entradas de la matriz) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz $m \times n$, y a m y n dimensiones de la matriz.

C.1.1. Operaciones básicas y sus propiedades

C.1.1.1. Suma de matrices

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \cdots & b_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{bmatrix}$$

o también

$$[a_{i,j}] + [b_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j}] = [c_{i,j}]$$

Propiedades

Dado las matrices A , B y C de dimensiones $m \times n$, se puede derivar las subsiguientes propiedades heredadas de la suma de los numeros reales.

- **Asociativa**

$$(a_{i,j} + b_{i,j}) + c_{i,j} = a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})$$

o bien

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

- **Conmutativa**

$$A + B = B + A$$

- **Existencia de matriz cero o matriz nula**

$$A + 0 = 0 + A = A$$

- **Existencia de matriz opuesta**

$$A + (-A) = 0$$

C.1.1.2. Diferencia de matrices

Dadas las matrices A y B de m y n , su diferencia $A - B$ es la matriz calculada restando los elementos correspondientes:

$$(A - B)[i, j] = A[i, j] - B[i, j]$$

También cumple las mismas propiedades que en la suma o adición.

C.1.1.3. Multiplicación de matrices

Diagrama esquemático que ilustra el producto de dos matrices A y B dando como resultado la matriz AB .

El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si A es una matriz $m \times n$ y B es una matriz $n \times p$, entonces su producto matricial AB es la matriz $m \times p$ (m filas, p columnas) dada por:

$$(AB)[i, j] = A[i, 1]B[1, j] + A[i, 2]B[2, j] + \cdots + A[i, n]B[n, j]$$

Para cada par i y j .

C.1.1.4. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden n , llamada matriz inversa de A y representada como:

$$A^{-1}$$

tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Donde I_n es la matriz identidad de orden n y el producto utilizado es el producto de matrices usual.

Es decir, la inversión de matrices es el proceso de encontrar la matriz inversa de una matriz dada.

C.1.1.5. Número de Condición de una matriz

El número de condición de una matriz no singular A relativo a la norma:

$$\|\cdot\|$$

es

$$K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Una matriz A es bien condicionada, si $K(A)$ está cerca a 1 y es mal condicionada si $K(A)$ es significativamente mayor que 1. Dentro de este contexto, el término de condición se refiere a la seguridad relativa de que un vector residual pequeño implica una solución aproximada exacta correspondiente.

C.1.1.6. Rango de una matriz

El rango de una matriz es el número de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. Si el rango fila y el columna son iguales, este número es llamado simplemente rango de A . Comúnmente se expresa como $\text{rang}(A)$.

El número de columnas independientes de una matriz m por n de A es igual a la dimensión del espacio columna de A . También la dimensión del espacio fila determina el rango. El rango de A será, por tanto, mayor o igual que uno y menor o igual que el mínimo entre m y n .

C.2. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

El objetivo de este apartado es examinar los aspectos numéricos que se presentan al resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1
 \end{array}$$

Se trata de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, los elementos a_{ij} y b_j son números reales fijados.

El sistema de ecuaciones anterior se puede escribir, empleando una muy útil representación matricial, como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces podemos denotar estas matrices por A , x y b de forma que la ecuación se reduce simplemente a:

$$Ax = b$$

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones se pueden dividir en dos grandes grupos:

- **Los Métodos exactos**, Métodos directos o algoritmos finitos que permiten obtener la solución del sistema de manera directa.
- **Los Métodos aproximados** que utilizan algoritmos iterativos e infinitos y que calculan la solución del sistema por aproximaciones sucesivas.

Al contrario de lo que pueda parecer, en muchas ocasiones los métodos aproximados permiten obtener un grado de exactitud superior al que se puede obtener empleando los denominados métodos exactos, debido fundamentalmente a los errores de truncamiento que se producen en el proceso.

De entre los métodos exactos analizaremos el método de *Gauss* y una modificación de éste denominado método de *Gauss-Jordan*, además de la factorización *Doolittle*, *Crout* y *Choleski*. Entre los métodos aproximados nos centraremos en el estudio de los métodos de *Jacobi*, *Gauss-Seidel*, *Relajación* y *Gradiente Conjugado*.

C.2.1. Métodos Directos

Los métodos directos de resolución de sistemas lineales de ecuaciones son aquellos que permiten obtener la solución después de un número finito de operaciones aritméticas. Este número de operaciones es, obviamente, función del tamaño de la matriz. Si los ordenadores pudieran almacenar y operar con todas las cifras de los números reales, es decir, si emplearan una aritmética exacta, con los métodos directos se obtendría la solución exacta del sistema en un número finito de pasos. Puesto que los ordenadores tienen una precisión finita, los errores de redondeo se propagan y la solución numérica obtenida siempre difiere de la solución exacta. La cota del error, para una matriz y término independiente dados, se asocia por lo general al número de operaciones de cada método. Se pretende, por lo tanto, obtener métodos con el mínimo número de operaciones posible. Otra particularidad de los métodos directos es que siempre conducen, después de ciertas operaciones, a la resolución de uno o varios sistemas con solución inmediata. Es decir, sistemas donde la matriz es diagonal o triangular. Los métodos para sistemas de resolución inmediata son, de hecho, métodos directos. Una clasificación habitual de estos procedimientos de resolución es aquella que considera que los mismos pertenecen a una de las dos categorías siguientes: métodos de eliminación y métodos de descomposición.

En el cuadro siguiente se presenta un esquema con la clasificación de los procedimientos de cálculo más característicos.

- Sistemas con solución inmediata
 - Matriz diagonal, $A = D$
 - Matriz triangular superior, $A = U$
 - Matriz triangular inferior, $A = L$

- Métodos de eliminación
 - Método de Gauss
 - Método de Gauss-Jordan

- Métodos de descomposición
 - Método de Doolittle, $A = LU$
 - Método de Crout, $A = LU$
 - Método de Cholesky, $A = L.L^T$
 - Descomposición generalizada, $A = L.D.L^T$
 - Método de Thomas (A Tridiagonal)

- Métodos de ortogonalización

C.2.2. Métodos Iterativos

Un método indirecto da lugar a una sucesión de vectores que idealmente converge a la solución.

El cálculo se detiene cuando se cuenta con una solución aproximada con cierto grado de precisión especificado de antemano o después de cierto número de iteraciones. Los métodos indirectos son casi siempre iterativos: para obtener la sucesión mencionada se utiliza repetidamente un proceso sencillo.

Alguno de los métodos son:

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel
- Método de Sobrerrelajación (SOR)
- Método de Máxima pendiente

Apéndice D

Ecuaciones Diferenciales Parciales

D.1. Generalidades

Al usar ecuaciones diferenciales ordinarias para resolver problemas aplicados estamos en efecto simplificando altamente (y con frecuencia sobresimplificando seriamente) el modelo matemático de la realidad física que conduce a estos problemas. Esto es porque en las formulaciones matemáticas de tales problemas nos restringimos a una sola variable independiente sobre la cual dependen todas las otras variables pertinentes. Aunque esto con frecuencia es útil, como hemos visto, limita las clases de problemas que podemos investigar, ya que en muchos casos se requieren dos o más variables independientes.

Las formulaciones matemáticas de problemas que involucran dos o más variables independientes conducen a *ecuaciones diferenciales parciales*. Como uno podría esperar, la introducción de más variables independientes hace el tema de ecuaciones diferenciales parciales más complejo que el de ecuaciones diferenciales ordinarias, y así es relativamente poco lo que se conoce con respecto a ellas. Sin embargo, el tema es tan vasto que sólo lo discutiremos brevemente en este trabajo.

D.2. Clasificación de Ecuaciones de Segundo Orden

Una ecuación que involucra derivadas parciales de una función desconocida con dos o más variables independientes, se denomina *ecuación diferencial parcial*, o EDP. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 1 \quad (\text{D.1.1})$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 8u = 5y \quad (\text{D.1.2})$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + 6 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = x \quad (\text{D.1.3})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = x \quad (\text{D.1.4})$$

El *orden* de una EDP es el de la derivada más alta que aparece en la ecuación. Por ejemplo, las ecuaciones (D.1.1) y (D.1.2) son de segundo y tercer orden, respectivamente.

Se dice que una ecuación diferencial parcial es *lineal*, si es lineal en la función desconocida y en todas sus derivadas, con coeficientes que dependen solo de las variables independientes. Por ejemplo, la ecuación (D.1.1) es lineal, mientras que las ecuaciones (D.1.3) y (D.1.4) no lo son.

Debido a su amplia aplicación en ingeniería, nuestro tratamiento de las EDP se concentrará sobre las ecuaciones lineales de segundo orden. Para dos variables independientes.

D.2. Clasificación de Ecuaciones de Segundo Orden

La clasificación se basa en el método de las características (véase *Vichnevetsky, 1981*, o *Lapidus y Pinder 1982*), es útil debido a que cada categoría se relaciona con problemas de ingeniería específicos y distintos que demandan técnicas de solución especiales.

1. Elípticas.

2. Parabólicas.

3. Hiperbólicas.

D.3. Ecuación diferencial parcial lineal

Si u representa la variable dependiente, x e y las variables independientes, la fórmula general de una E. D. en derivadas parciales lineal de segundo orden (EDP) con dos variables independientes x e y , es:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \quad (\text{D.3.1})$$

A, B, C, D, E, F, G son funciones de x e y . Cuando $G(x, y) = 0$, la ecuación se llama *homogénea*; en cualquier otro caso es *no homogénea*.

Una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden con dos variables independientes y con coeficientes constantes puede pertenecer a uno de tres tipos generales. Esta clasificación solo depende de los coeficientes de las derivadas de segundo orden. Naturalmente suponemos que al menos uno de los coeficientes A, B , y C no es cero.

La ecuación en derivadas parciales lineal y de segundo orden:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (\text{D.3.2})$$

A, B, C, D, E y F son constantes reales:

Cuadro D.1: Categorías de las ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden en dos variables

$B^2 - 4AC$	Categoría	Ejemplo	Descripción
< 0	Elíptica	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$	Ecuación de Laplace
$= 0$	Parabólica	$\frac{\partial T}{\partial t} = k' \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	Ecuación de conducción del calor
> 0	Hiperbólica	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$	Ecuación de onda

D.4. Métodos de solución de las EDPs

Antes de la llegada de las computadoras digitales, los ingenieros dependían de soluciones analíticas o exactas de ecuaciones diferenciales parciales. Aparte de los casos más simples, estas soluciones a menudo requerían gran esfuerzo y complicación matemática. Además, muchos sistemas físicos no podían resolverse directamente: tenían que ser simplificados usando linealizaciones, representaciones geométricas simples, y otras idealizaciones. Aunque esas soluciones son elegantes y dan cierto conocimiento, están limitadas con respecto a la fidelidad con que representan sistemas reales (en especial, aquellos que son altamente no lineales y de forma irregular).

Hoy en día los métodos numéricos más utilizados para resolver ecuaciones diferenciales parciales son:

1. Método de Diferencias Finitas (MDF)
2. Método de Elementos Finitos (MEF)
3. Método de Volúmenes Finitos (MVF)

Apéndice E

Código fuente programa SMAP

Listing E.1: Código fuente programa SMAP

```
1 function varargout = RRFEM(varargin)
2 %=====
3 %           SMAP MATLAB code for SMAP_V2015
4 %           MODELACIÓN HIDRODINÁMICA DE SISTEMAS DE DRENAJE PLUVIAL
5 %           CON EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y MATLAB
6 %
7 %           Tesis para optar el título de Ingeniero Civil
8 % AUTOR:
9 %       TONY VÍLCHEZ YARIHUAMÁN
10 %=====
11 gui_Singleton = 1;
12 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
13                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
14                   'gui_OpeningFcn', @RRFEM_OpeningFcn, ...
15                   'gui_OutputFcn',  @RRFEM_OutputFcn, ...
16                   'gui_LayoutFcn',  [], ...
17                   'gui_Callback',   []);
18 if nargin && ischar(varargin{1})
19     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
20 end
21 if nargin
22     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
23 else
24     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
25 end
```

Listing E.2: Código importación de Hietograma SMAP

```

1 function varargout = HIETOGRAMA(varargin)
2 %=====
3 %   Importa Hietogramas de diseño y grafica a la vez SMAP V2015
4 %=====
5 gui_Singleton = 1;
6 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
7                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
8                   'gui_OpeningFcn', @HIETOGRAMA_OpeningFcn, ...
9                   'gui_OutputFcn',  @HIETOGRAMA_OutputFcn, ...
10                  'gui_LayoutFcn',   [], ...
11                  'gui_Callback',    []);
12 if nargin && ischar(varargin{1})
13     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
14 end
15 if nargin
16     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
17 else
18     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
19 end
20 function HIETOGRAMA_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
21 global PE T24 HTIME
22 if ~isempty(PE) & ~isnan(PE)
23     set(handles.uitable1, 'Data', PE)
24     Draw_Hietograma(T24, HTIME);
25 end
26 handles.output = hObject;
27 guidata(hObject, handles);
28 function varargout = HIETOGRAMA_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
29 varargout{1} = handles.output;
30 function pushbutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
31 global PE T24 HTIME
32 PE=get(handles.uitable1, 'Data');
33 if ~isnumeric(PE);
34     PE=str2double(PE);
35 end
36 close(HIETOGRAMA);
37 function pushbutton2_Callback(hObject, eventdata, handles)
38 close(HIETOGRAMA);
39 function uipushtool2_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
40 global PE T24 HTIME
41 [name, address] = uigetfile('*.txt;', 'Hietograma');
42 if name==0
43     return
44 end
45 PE=load(strcat(address, name));
46 set(handles.uitable1, 'Data', PE);
47 T24=PE(:,1);
48 HTIME=PE(:,2);
49 Draw_Hietograma(T24, HTIME);
50 function Draw_Hietograma(T24, HTIME)
51 hold on

```

```

52 for i=1:24
53     x(i,1)=T24(i,1);
54     y(i,1)=HTIME(i,1);
55     c=[rand rand rand];
56     bar(x(i), y(i), 'FaceColor', c, 'EdgeColor', 'b');
57 end
58 xmin=min(x)-1;
59 xmax=max(x)+1;
60 ymin=0;
61 ymax=max(y)+1;
62 xlabel('Time (Years)', 'FontSize',10, 'FontWeight', 'bold');
63 ylabel('Rainfall (mm)', 'FontSize',10, 'FontWeight', 'bold');
64 grid on;
65 box on;
66 xlim([xmin xmax]);
67 axis([xmin xmax ymin ymax]);
68 axis tight;
69 function Draw_Hietograma_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
70 global T24 HTIME
71 Draw_Hietograma(T24, HTIME);

```

Listing E.3: Código fuente ensamblado de matrices SMAP

```

1 function Run_FemArcGIS_ClickedCallback(hObject, eventdata, handles)
2 global RR II NN NE Ni Nj KG1 KG2 FG Stime Nm T24 HTIME
3 KG1=zeros(NN,NN);
4 KG2=zeros(NN,NN);
5 FG=zeros(NN,1);
6 for i=1:NE
7     ni=Ni(i,1);
8     nj=Nj(i,1);
9     l=L(i,1)/6;
10    K1=(1/6)l*[2 1;1 2];
11    K2=0.5*[-1 1;-1 1];
12    F=(1*(R-I)/2)*[1;1];
13    V=[ni;nj];
14    for j=1:2
15        for k=1:2
16            KG1(V(j,1),V(k,1))=KG1(V(j,1),V(k,1))+K1(j,k);
17            KG2(V(j,1),V(k,1))=KG2(V(j,1),V(k,1))+K2(j,k);
18            FG(V(j,1),V(k,1))=FG(V(j,1),V(k,1))+F(j,k);
19        end
20    end
21 end

```

Apéndice F

Laminas y Planos